

平成13年度 一橋大学 2次試験前期日程(数学問題)120分
 商・経済・法・社会学部 数I・II・A・B 平成13年2月25日

- 1 a, b を整数とする. 3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ は3実数解 α, β, γ を持ち, $0 < \alpha < \beta < \gamma < 3$ で, α, β, γ のうちどれかは整数である. a, b を求めよ.
- 2 放物線 $y = x^2$ 上に, 直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる2点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ.
- 3 四面体 $OAPQ$ において, $|\vec{OA}| = 1$, $\vec{OA} \perp \vec{OP}$, $\vec{OP} \perp \vec{OQ}$, $\vec{OA} \perp \vec{OQ}$ で, $\angle PAQ = 30^\circ$ である.
- (1) $\triangle APQ$ の面積 S を求めよ.
- (2) $|\vec{OP}|$ のとりうる範囲を求めよ.
- (3) 四面体 $OAPQ$ の体積 V の最大値を求めよ.
- 4 複素数 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ は, 条件

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

をみたす.

- (1) $f(z) = |z + z^2|$ の最大値と最小値, およびそれらを与える複素数 z を求めよ.
- (2) $g(z) = |2z + z^3|$ の最大値と最小値, およびそれらを与える複素数 z を求めよ.
- 5 1 から n までの数字を1つずつ書いた n 枚のカードがある. ただし, $n \geq 2$ とする.
- (1) この n 枚のカードから一度に2枚選び, 大きい方の数字を X とする. X の期待値 E_1 を求めよ.
- (2) この n 枚のカードから1枚選び, その数字を X_1 とする. そのカードをもとに戻し, 改めて1枚選び, その数字を X_2 とする. X_1 と X_2 の小さい方の数字を Y とする. Y の期待値 E_2 を求めよ.

解答例

1 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx - 1 = 0$ の整数解を n とすると ($0 < n < 3$)

$$n^3 + an^2 + bn - 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad n(n^2 + an + b) = 1$$

上の第 2 式から, $n = 1$. これを上式に代入して

$$1 + a + b = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = -a$$

したがって, 3 次方程式 $x^3 + ax^2 - ax - 1 = 0$ は

$$(x - 1)\{x^2 + (a + 1)x + 1\} = 0$$

$f(x) = x^2 + (a + 1)x + 1$ とおくと, $y = f(x)$ のグラフの軸の方程式は

$$x = -\frac{a + 1}{2}$$

$y = f(x)$ のグラフは, x 軸と $0 < x < 3$ ($x \neq 1$) の区間において異なる 2 点で交わるから, $f(0) = 1 > 0$ に注意して, 次を満たせばよい.

$$0 < -\frac{a + 1}{2} < 3, \quad D = (a + 1)^2 - 4 > 0, \quad f(1) \neq 0, \quad f(3) > 0$$

したがって, 第 1 式から $-7 < a < -1$

第 2 式から $(a + 3)(a - 1) > 0$ ゆえに $a < -3, 1 < a$

第 3 式から $a + 3 \neq 0$ ゆえに $a \neq -3$

第 4 式から $3a + 13 > 0$ ゆえに $a > -\frac{13}{3}$

これらを同時に満たす整数 a は $a = -4$ また $b = -a = 4$

- 2** P, Q は放物線 $y = x^2$ 上の点であるから, $P(p, p^2)$, $Q(q, q^2)$ とおくと, 2 点 P, Q の中点 $\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)$ は, 直線 $y = ax + 1$ にあり, 直線 PQ はこの直線と垂直であるから

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{a(\alpha + \beta)}{2} + 1, \quad \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\beta - \alpha}a = -1$$

上の第 2 式から $(\alpha + \beta)a = -1 \quad \dots \textcircled{1}$ これを第 1 式に代入すると

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{-1}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

① から $\alpha + \beta = -\frac{1}{a}$ これと ② から

$$2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - (\alpha^2 + \beta^2) = \left(-\frac{1}{a}\right)^2 - 1 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1\right)$$

したがって, α と β を解とする 2 次方程式は

$$(*) \quad x^2 + \frac{1}{a}x + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) = 0$$

求める条件は, 2 次方程式 (*) が異なる 2 つの実数解をもつことであるから

$$D = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} - 1\right) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2a^2 - 1 > 0$$

これを解いて $a < -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} < a$

- 3** (1) $p > 0, q > 0$ とし, $A(0, 0, 1), P(p, 0, 0), Q(0, 0, q)$ とおくと

$$\overrightarrow{AP} = (p, 0, -1), \quad \overrightarrow{AQ} = (0, q, -1)$$

$\angle PAQ = 30^\circ$ であるから

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cos 30^\circ$$

$$1 = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{したがって } |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{よって } S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$(2) \textcircled{1} \text{ より } (p^2 + 1)(q^2 + 1) = \frac{4}{3}$$

$$\text{ゆえに } q^2 = \frac{4}{3(p^2 + 1)} - 1 = \frac{1 - 3p^2}{3(p^2 + 1)} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\text{したがって } 1 - 3p^2 > 0 \quad p > 0 \text{ に注意して解くと } 0 < p < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{よって } 0 < |\overrightarrow{OP}| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(3) \textcircled{2} \text{ より } p^2 q^2 = \frac{4p^2}{3(p^2 + 1)} - p^2 = \frac{7}{3} - \left\{ p^2 + 1 + \frac{4}{3(p^2 + 1)} \right\} \quad \dots (*)$$

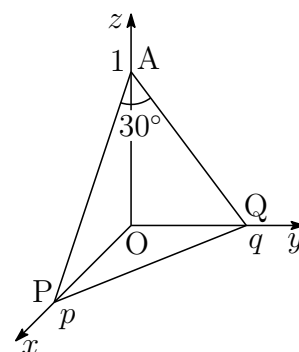
$$p^2 + 1 = \frac{4}{3(p^2 + 1)} \quad \text{すなわち } p^2 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}(2 - \sqrt{3}) < \frac{1}{3}$$

この p の値は, (2) の結果を満たすから, (*) より

$$p^2 q^2 \leq \frac{7}{3} - 2\sqrt{(p^2 + 1) \cdot \frac{4}{3(p^2 + 1)}} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{したがって } pq \leq \frac{\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$$

$$\text{体積 } V \text{ は } V = \frac{1}{6} pq \leq \frac{2\sqrt{3} - 3}{18} \quad \text{よって } V \text{ の最大値は } \frac{2\sqrt{3} - 3}{18}$$



4 (1) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より

$$\begin{aligned} f(z) &= |z + z^2| = |z||1 + z| = r|(1 + r \cos \theta) + ir \sin \theta| \\ &= r\sqrt{(1 + r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= r\sqrt{1 + 2r \cos \theta + r^2} \end{aligned}$$

したがって, r を固定すると, $f(z)$ は,

$$\begin{aligned} \theta = 0^\circ \text{ のとき} & \quad \text{最大値 } r(1 + r) \\ \theta = 90^\circ \text{ のとき} & \quad \text{最小値 } r\sqrt{1 + r^2} \end{aligned}$$

$\frac{\sqrt{2}}{4} \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} z = \frac{\sqrt{5}}{2}(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ) &= \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ のとき} & \quad \text{最大値 } \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{4} \\ z = \frac{\sqrt{2}}{4}(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{4}i \text{ のとき} & \quad \text{最小値 } \frac{3}{8} \end{aligned}$$

(2) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq r \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$, $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ より

$$\begin{aligned} g(z) &= |2z + z^3| = |z||2 + z^2| = r|(2 + r^2 \cos 2\theta) + ir^2 \sin 2\theta| \\ &= r\sqrt{(2 + r^2 \cos 2\theta)^2 + r^4 \sin^2 2\theta} \\ &= r\sqrt{4 + 4r^2 \cos 2\theta + r^4} \end{aligned}$$

したがって, r を固定すると, $g(z)$ は,

$$\begin{aligned} \theta = 0^\circ \text{ のとき} & \quad \text{最大値 } r(2 + r^2) \\ \theta = 90^\circ \text{ のとき} & \quad \text{最小値 } r(2 - r^2) \end{aligned}$$

$r(2 + r^2)$ は, 単調増加関数であるから

$r = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\theta = 0^\circ$ すなわち $z = \frac{\sqrt{5}}{2}$ のとき, 最大値 $\frac{13\sqrt{5}}{8}$

$h(r) = r(2 - r^2)$ とおくと $h'(r) = 2 - 3r^2$

r	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\dots$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\dots$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
$h'(r)$		$+$	0	$-$	
$h(r)$	$\frac{15\sqrt{2}}{32}$	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{5}}{8}$

$r = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\theta = 90^\circ$ すなわち $z = \frac{\sqrt{2}}{4}i$ のとき, 最小値 $\frac{15\sqrt{2}}{32}$

- 5 (1) n 枚のカードから一度に 2 枚取り出す場合の数は ${}_nC_2$ 通り.
 $X = k$ ($k = 2, 3, \dots, n$) となるのは, 1 枚が k で, 他の 1 枚が $k - 1$ 以下となる確率

$$P(X = k) = \frac{1 \cdot (k - 1)}{{}_nC_2} = \frac{2(k - 1)}{n(n - 1)} \quad (k = 2, 3, \dots, n)$$

したがって, 求める期待値 E_1 は

$$\begin{aligned} E_1 &= \sum_{k=2}^n kP(X = k) = \frac{2}{n(n - 1)} \sum_{k=2}^n k(k - 1) \\ &= \frac{2}{3n(n - 1)} \sum_{k=2}^n k(k - 1)\{(k + 1) - (k - 2)\} \\ &= \frac{2}{3n(n - 1)} \sum_{k=2}^n \{(k - 1)k(k + 1) - (k - 2)(k - 1)k\} \\ &= \frac{2(n - 1)n(n + 1)}{3n(n - 1)} = \frac{2(n + 1)}{3} \end{aligned}$$

- (2) $Y = k$ ($k = 2, 3, \dots, n$) となるのは, 次の [1] ~ [3] の場合である.

$$\begin{aligned} [1] \quad X_1 = k, X_2 \leq k - 1 \text{ となる確率} & \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{k - 1}{n} = \frac{k - 1}{n^2} \\ [2] \quad X_1 \leq k - 1, X_2 = k \text{ となる確率} & \quad \frac{k - 1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{k - 1}{n^2} \\ [3] \quad X_1 = X_2 = k \text{ となる確率} & \quad \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

[1] ~ [3] より

$$P(Y = k) = \frac{k - 1}{n^2} + \frac{k - 1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}$$

上式は, $k = 1$ のときも成立するから, 求める期待値 E_2 は

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_{k=1}^n kP(Y = k) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ 2 \cdot \frac{1}{6} n(n + 1)(2n + 1) - \frac{1}{2} n(n + 1) \right\} \\ &= \frac{1}{6n} (n + 1)(4n - 1) \end{aligned}$$

補足 2 枚とも k 以下, $k - 1$ 以下であるのは, それぞれ k^2 通り, $(k - 1)^2$ 通りであるから ($k = 2, 3, \dots, n$)

$$P(Y = k) = \frac{k^2}{n^2} - \frac{(k - 1)^2}{n^2} = \frac{2k - 1}{n^2}$$

上式は, $k = 1$ のときも成立する.