

令和2年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
理系(理, 薬, 工, 医保健(放射線, 検査)) 令和2年2月25日

1 以下の問いに答えよ。

- (1) x が自然数のとき, x^2 を5で割った余りは0, 1, 4のいずれかであることを示せ。
- (2) 自然数 x, y, z が $x^2 + 5y = 2z^2$ を満たすとき, x, y, z はすべて5の倍数であることを示せ。
- (3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z の組は存在しないことを示せ。

2 α, β を複素数とし, 複素数平面上の点 $O(0), A(\alpha), B(\beta), C(|\alpha|^2), D(\bar{\alpha}\beta)$ を考える. 3点 O, A, B は三角形をなすとする. また, 複素数 z に対し, $\text{Im}(z)$ によって z の虚部を表すことにする. 以下の問いに答えよ。

- (1) $\triangle OAB$ の面積を S_1 , $\triangle OCD$ の面積を S_2 とするとき, $\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。
- (2) $\triangle OAB$ の面積 S_1 は $\frac{1}{2}|\text{Im}(\bar{\alpha}\beta)|$ で与えられることを示せ。
- (3) 実数 a, b に対し, 複素数 z を $z = a + bi$ で定める. $1 \leq a \leq 2, 1 \leq b \leq 3$ のとき, 3点 $O(0), P(z), Q\left(\frac{1}{z}\right)$ を頂点とする $\triangle OPQ$ の面積の最大値と最小値を求めよ。

3 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき, 曲線 $y = \frac{1}{\cos^2 x} \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$, x 軸, y 軸および直線 $x = t$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を $V(t)$ とする. 以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

を示せ。

- (2) (1) の不等式を用いて, $\frac{d}{dt}V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$ を示せ。

- (3) $V\left(\frac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。

4 正の実数 t に対し、座標平面上の 2 点 $F(t, 0)$, $F'(3t, 0)$ からの距離の和が $2\sqrt{2}t$ であるような点 P の軌跡を C とする。直線 $y = x - 1$ を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつような t の範囲を求めよ。
- (2) t が (1) で求めた範囲を動くとき、 C と ℓ の 2 つの共有点および原点 O を頂点とする三角形の面積の最大値を求めよ。

解答例

1 (1) 法 5 について

$$\begin{array}{lll}
x \equiv 0 \text{ のとき} & x^2 \equiv 0 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 1 \text{ のとき} & x^2 \equiv 1 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 2 \text{ のとき} & x^2 \equiv 4 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 3 \text{ のとき} & x^2 \equiv 9 \equiv 4 & (\text{mod } 5) \\
x \equiv 4 \text{ のとき} & x^2 \equiv 16 \equiv 1 & (\text{mod } 5)
\end{array}$$

よって、題意は成立する.

(2) $x^2 + 5y = 2z^2$ より, 法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1) の結果から, $(*)$ の左辺は法 5 について, 0, 1, 4 のいずれかに等しい. 一方, 右辺は 0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい.

したがって, $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$, すなわち, $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$
 $x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数) を $x^2 + 5y = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから, x, y, z はすべて 5 の倍数である.

(3) $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ を満たす自然数 x, y, z が存在し, これら 3 数の最大公約数が 1 であるものを仮定する.

$x^2 + 5y^2 = 2z^2$ より, 法 5 について

$$(*) \quad x^2 \equiv 2z^2 \pmod{5}$$

(1) の結果から, $(*)$ の左辺は法 5 について, 0, 1, 4 のいずれかに等しい. 一方, 右辺は 0, 2, $8 \equiv 3 \pmod{5}$ のいずれかに等しい.

したがって, $x^2 \equiv 0, 2z^2 \equiv 0 \pmod{5}$, すなわち, $x \equiv z \equiv 0 \pmod{5}$
 $x = 5x', z = 5z'$ (x', z' は整数) を $x^2 + 5y^2 = 2z^2$ に代入すると

$$(5x')^2 + 5y^2 = 2(5z')^2 \quad \text{ゆえに} \quad y^2 = 5(2z'^2 - x'^2)$$

$y^2 \equiv 0 \pmod{5}$ より, $y \equiv 0 \pmod{5}$ であるから, x, y, z が 5 を共通因数にもつことになり, 仮定に反する. よって, 題意は証明された.

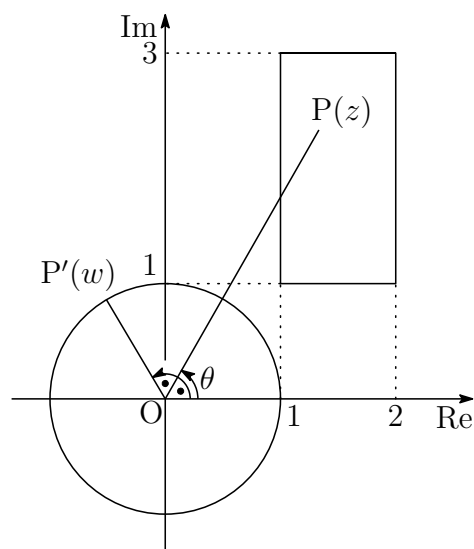
別解 $\operatorname{Im}\left(\frac{\bar{z}}{z}\right) = -\operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)$ であるから

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \left| \operatorname{Im}\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \right|$$

$\theta = \arg(z)$, $w = \frac{z}{\bar{z}}$ とすると

$$w = \left| \frac{z}{\bar{z}} \right| = \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1,$$

$$\begin{aligned} \arg(w) &= \arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) \\ &= \arg(z) - \arg(\bar{z}) \\ &= \theta - (-\theta) = 2\theta \end{aligned}$$



点 $P'(w)$ は、点 $P(z)$ から単位円周上の点 P' への写像で、その偏角について

$$\arg(w) = 2 \arg(z)$$

が成立する． $z = a + bi$ ($1 \leq a \leq 2$, $1 \leq b \leq 3$) より、 $\theta = \arg(z)$ のとり得る値の範囲を $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ とすると、上の図から

$$\tan \theta_1 = \frac{1}{2}, \quad \tan \theta_2 = 3 \quad \left(0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4} < \theta_2 < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{したがって} \quad \triangle OPQ = \frac{1}{2} \sin 2\theta \quad \cdots (*)$$

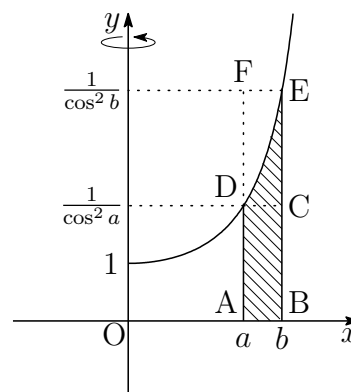
$$\text{このとき} \quad \sin 2\theta_1 = \frac{2 \tan \theta_1}{1 + \tan^2 \theta_1} = \frac{4}{5}, \quad \sin 2\theta_2 = \frac{2 \tan \theta_2}{1 + \tan^2 \theta_2} = \frac{3}{5}$$

(*) より、 $\triangle OPQ$ は、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき、最大値 $\frac{1}{2}$ 、 $\theta = \theta_2$ のとき、最小値 $\frac{3}{10}$

- 3 (1) 曲線 $y = \frac{1}{\cos^2 x}$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) が x 軸と区間 $a \leq x \leq b$ において囲まれた斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は

$$\int_0^b \frac{dx}{\cos^2 x} - \int_0^a \frac{dx}{\cos^2 x} = V(b) - V(a)$$

右の図の長方形 ABCD, 長方形 ABEF を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1, V_2 とすると



$$V_1 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} = \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a}$$

$$V_2 = \pi b^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} - \pi a^2 \cdot \frac{1}{\cos^2 b} = \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

$V_1 \leq V(b) - V(a) \leq V_2$ であるから

$$\pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 a} \leq V(b) - V(a) \leq \pi(b^2 - a^2) \frac{1}{\cos^2 b}$$

- (2) (1) の結果から, $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\pi(b+a) \frac{1}{\cos^2 a} \leq \frac{V(b) - V(a)}{b-a} \leq \pi(b+a) \frac{1}{\cos^2 b} \quad \cdots (*)$$

$0 < t < \frac{\pi}{2}$, $0 < u < \frac{\pi}{2}$ に対して, (*) より

$0 < t < u < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 t} \leq \frac{V(u) - V(t)}{u-t} \leq \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 u} \quad \cdots ①$$

$0 < u < t < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 u} \leq \frac{V(u) - V(t)}{u-t} \leq \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots ②$$

$$\lim_{u \rightarrow t} \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 u} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots ③, \quad \lim_{u \rightarrow t} \pi(u+t) \frac{1}{\cos^2 t} = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t} \quad \cdots ④$$

①~④ から, $\frac{d}{dt} V(t) = \lim_{u \rightarrow t} \frac{f(u) - f(t)}{u-t}$ は, はさみうちの原理により

$$\frac{d}{dt} V(t) = 2\pi t \frac{1}{\cos^2 t}$$

(3) (2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x} dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} x(\tan x)' dx \\ &= 2\pi \left[x \tan x + \log \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 2\pi \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \log 2 \right) \end{aligned}$$

—— バウムクーヘン型求積法 ——

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

補足 バウムクーヘン型求積法は, 教科書では扱っていないが, 問題集・参考書では重要公式として扱われている. 熊大ではバウムクーヘン型求積法を用いる出題が目立ち, 近年だけでも 2014 年 (理系), 2016 年 (理系・医医) で出題されている. 2016 年では理系・医医の共通問題として出題され, 理系の 5 割, 医医の 7 割の受験生がバウムクーヘン型求積法を用いて解答したそうである (熊大入試連絡会). 本題 (3) は多くの受験生が, (1), (2) の出来と関係なく独立して解答できたものと予想される. 勿論, 教科書にない公式 (バウムクーヘン型求積法) であるからということで減点されることはなかったそうである. 熊大は発展的な解法に対しても寛大である. 2018 年の空間のベクトルで四面体の体積をベクトル積 (外積) を用いた解答についても間違っていなかったため, 正解として減点されることはなかったそうである (熊大入試連絡会). 2020 年文系でも外積を用いることができる問題が出題された. 2020 年文系 4 番の解答にベクトル積 (外積) に関する解説を行っている.

- 4 (1) 2点 $F(t, 0)$, $F'(3t, 0)$ からの距離の和が一定である点 P の描く軌跡 C は楕円で, その中心は $(2t, 0)$ である. 楕円 C の直軸の長さを $2a$, 短軸の長さを $2b$ とすると ($a > b > 0$)

$$2a = 2\sqrt{2}t, \quad \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{1}{2}FF' = t$$

$$\text{これを解いて } a = 2\sqrt{t}, \quad b = t$$

$$\text{したがって, 楕円 } C \text{ の方程式は } \frac{(x-2t)^2}{2t^2} + \frac{y^2}{t^2} = 1$$

これと直線 $\ell: y = x - 1$ の方程式から y を消去すると

$$\frac{(x-2t)^2}{2t^2} + \frac{(x-1)^2}{t^2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3x^2 - 4(t+1)x + 2(t^2+1) = 0 \quad \cdots (*)$$

C と ℓ が相異なる 2 つの共有点をもつとき, $(*)$ の係数について

$$D/4 = \{-2(t+1)\}^2 - 3 \cdot 2(t^2+1) = -2(t^2 - 4t + 1) > 0$$

$$\text{これを解いて } 2 - \sqrt{3} < t < 2 + \sqrt{3}$$

- (2) 2 次方程式 $(*)$ の解を α, β とすると ($\alpha < \beta$)

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= \frac{2(t+1) + \sqrt{D/4}}{3} - \frac{2(t+1) - \sqrt{D/4}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{D/4}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} \end{aligned}$$

C と ℓ の 2 つの交点 $A(\alpha, \alpha - 1)$, $B(\beta, \beta - 1)$ を結ぶ線分の長さは

$$AB = \sqrt{2}(\beta - \alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)}$$

原点 O から直線 $\ell: x - y - 1 = 0$ に垂線 OH を引くと

$$OH = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\triangle OAB$ の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}AB \cdot OH = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{-2(t^2 - 4t + 1)} = \frac{1}{3} \sqrt{-2(t-2)^2 + 6} \end{aligned}$$

(1) の結果に注意して, $t = 2$ のとき, 最大値 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ をとる.

