

平成 29 年度 佐世保工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい.

- (1) $(4x^2 - 3xy + 2y^2)(2x - 3y)$ を展開しなさい.
- (2) $x^4 - 6x^2 - 7$ を因数分解しなさい.
- (3) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい.
- (4) 2 次方程式 $3x^2 + 4ax + 2a = 0$ (a は定数) が 2 つの異なる実数解を持ち, その 2 つの解の符号が異なるとき, a の値の範囲を求めなさい.
- (5) グラフが 3 点 $(-1, 4)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ を通る 2 次関数を求めなさい.
- (6) 等式 $7x^3 + x + 2 = 7(x - 1)^3 + a(x - 1)^2 + b(x - 1) + 10$ が x についての恒等式となるように, 定数 a, b の値を定めなさい.
- (7) 鈍角 θ に対して $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ のとき, $\tan \theta$ の値を求めなさい.
- (8) $\triangle ABC$ について $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 5$ のとき, この三角形の外接円の半径 R を求めなさい.
- (9) (8) において $\triangle ABC$ の面積 S を求めなさい.
- (10) 不等式 $3x + 5 > 5|x - 1|$ を解きなさい.

2. x の関数 $y = \sin^2 x - \cos x + 1$ ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) がある.

- (1) $\cos x = t$ とおいて, y を t の関数で表せ. また t の値の範囲を求めなさい.
- (2) y の最小値を求めなさい. またそのときの x の値を求めなさい.

3. 点 $P(1, 5)$ を直線 $\ell: y = x + 1$ に関して対称点 Q に移動させる. さらに点 Q を y 軸に関して対称点 R に移動させる. 点 R の座標を求めなさい.

4. 次の各小問に答えなさい.

- (1) 整式 $P(x) = x^3 - 2ax + 3$ を $x + 2$ で割った余りが -1 であるように a の値を求めなさい.
- (2) $2x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$ の解を求めなさい.
- (3) $x - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ を計算して簡単にしなさい.
- (4) $(\sqrt{-6} - \sqrt{-24}) \times \sqrt{-9}$ を計算して簡単にしなさい.
- (5) 点 $(-1, 3)$ を通り, 2 点 $(1, 1)$, $(3, 0)$ を結ぶ線分に垂直な直線の方程式を求めなさい.
- (6) 2 点 $(4, -2)$, $(-6, 2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい.
- (7) $2^x - 24 \cdot 2^{-x} = 5$ の解を求めなさい.
- (8) $2 \log_3 x - \log_3(x + 2) = 0$ の解を求めなさい.
- (9) $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin(2x)$ の値を求めなさい.
- (10) 極限值 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ を求めなさい.

5. 次の各設問に答えなさい.

- (1) 関数 $f(x) = x^2 + x$ の導関数を定義に従って求めなさい.
- (2) 曲線 $y = x^2 - 2x$ 上の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求めなさい.

6. 次の各設問に答えなさい.

- (1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ の増減表を書いて, 極値を求めなさい.
- (2) (1) の増減表を用いて, $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ のグラフを書きなさい.

解答

1. (1) $(4x^2 - 3xy + 2y^2)(2x - 3y) = 8x^3 - 18x^2y + 13xy^2 - 6y^3$
 (2) $x^4 - 6x^2 - 7 = (x^2 + 1)(x^2 - 7)$
 (3) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{6} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{6} - 1)}{(\sqrt{6} + 1)(\sqrt{6} - 1)} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{6} - \sqrt{2} + 1}{5}$
 (4) 2 次方程式 $3x^2 + 4ax + 2a = 0 \cdots (*)$ は異なる 2 つの実数解をもつから

$$D/4 = (2a)^2 - 3 \cdot 2a = 2a(2a - 3) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a < 0, \quad \frac{3}{2} < a \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) の 2 解を α, β とすると, この 2 解の符号が異なるから, 解と係数の関係により

$$\alpha\beta = \frac{2a}{3} < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a < 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② の共通範囲を求めて $a < 0$

- (5) 求める 2 次関数は点 $(0, 1)$ を通るから

$$y = ax^2 + bx + 1$$

とおく. これが 2 点 $(-1, 4), (1, 0)$ を通るから

$$4 = a - b + 1, \quad 0 = a + b + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a - b = 3, \quad a + b = -1$$

これを解いて $a = 1, b = -2$ よって $y = x^2 - 2x + 1$

- (6) $7x^3 + x + 2 = 7(x - 1)^3 + a(x - 1)^2 + b(x - 1) + 10$ の右辺を整理すると

$$7x^3 + x + 2 = 7x^3 + (-21 + a)x^2 + (21 - 2a + b)x + a - b + 3$$

同じ次数の項の係数は等しいので

$$0 = -21 + a, \quad 1 = 21 - 2a + b, \quad 2 = a - b + 3$$

これを解いて $a = 21, b = 22$

- (7) $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ を $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ に代入すると

$$1 + \tan^2 \theta = 9 \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 \theta = 8$$

θ が鈍角であるから, $\tan \theta < 0$ より $\tan \theta = -2\sqrt{2}$

(8) 正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = 2R$ よって $R = \frac{5}{2 \sin 60^\circ} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

(9) 正弦定理により $\frac{b}{\sin B} = 2R$

ゆえに $b = 2R \sin B = 2 \times \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$

このとき，加法定理により

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{25(\sqrt{3} + 1)}{4\sqrt{3}} = \frac{25(3 + \sqrt{3})}{12} \end{aligned}$$

(10) 与えられた不等式から

$$-(3x + 5) < 5(x - 1) < 3x + 5$$

ゆえに $\begin{cases} -(3x + 5) < 5(x - 1) \\ 5(x - 1) < 3x + 5 \end{cases}$ これを解いて $0 < x < 5$

2. (1) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$ より ($0^\circ \leq x < 360^\circ$)

$$y = -t^2 - t + 2 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

(2) (1) の結果から

$$y = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

よって $t = 1$ すなわち $x = 0^\circ$ のとき，最小値 0

3. 点 P(1, 5) を通り $\ell: y = x + 1$ に垂直な直線は

$$y - 5 = -(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 6$$

この直線と ℓ の交点の座標は $\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right)$

この点は 2 点 P, Q の中点であるから, 点 Q の座標を (a, b) とすると,

$$\frac{a+1}{2} = \frac{5}{2}, \quad \frac{b+5}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{ゆえに} \quad Q(4, 2)$$

y 軸に関して Q と対称な点 R の座標は $(-4, 2)$

4. (1) $P(x) = x^3 - 2ax + 3$ を $x + 2$ で割った余りが -1 であるから, $P(-2) = -1$ より

$$-8 + 4a + 3 = -1 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

(2) $2x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$ より $(x + 1)(2x^2 - 3x - 1) = 0$

$$\text{これを解いて} \quad x = -1, \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$(3) \quad \frac{x - \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{x - \frac{x}{x+1}}{1 - \frac{1}{x+1}} = \frac{x(x+1) - x}{(x+1) - 1} = \frac{x^2}{x} = x$$

$$(4) \quad (\sqrt{-6} - \sqrt{-24}) \times \sqrt{-9} = (\sqrt{6}i - 2\sqrt{6}i) \times 3i = -\sqrt{6}i \times 3i = 3\sqrt{6}$$

$$(5) \quad 2 \text{ 点 } (1, 1), (3, 0) \text{ を通る直線の傾きは } \frac{0-1}{3-1} = -\frac{1}{2}$$

点 $(-1, 3)$ を通り, これに垂直な直線の方程式は

$$y - 3 = 2(x + 1) \quad \text{よって} \quad y = 2x + 5$$

(6) 2 点 $(4, -2), (-6, 2)$ の中点は $(-1, 0)$

$$\text{したがって, 円の半径は } \sqrt{(4+1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

$$\text{よって, 求める円の方程式は } (x+1)^2 + y^2 = 29$$

(7) $2^x - 24 \cdot 2^{-x} = 5$ について, $t = 2^x$ とおくと ($t > 0$)

$$t - \frac{24}{t} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad (t+3)(t-8) = 0$$

$$t > 0 \text{ より } t = 8 \quad \text{ゆえに} \quad 2^x = 8 \quad \text{よって} \quad x = 3$$

$$(8) 2\log_3 x - \log_3(x+2) = 0$$

真数は正であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad x+2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{方程式を変形すると} \quad \log_3 x^2 = \log_3(x+2)$$

$$\text{ゆえに} \quad x^2 = x+2 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)(x+1) = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ に注意して} \quad x = 2$$

$$(9) \sin x + \cos x = \frac{1}{3} \text{ の両辺を平方すると}$$

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9} \quad \text{ゆえに} \quad 2\sin x \cos x = -\frac{8}{9}$$

$$\text{よって} \quad \sin(2x) = 2\sin x \cos x = -\frac{8}{9}$$

$$(10) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 1) = 3$$

5. (1) 導関数の定義により

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + (x+h) - (x^2 + x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 1) = 2x + 1 \end{aligned}$$

(2) (1) の結果から

$$f'(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

求める接線は、点 $(1, -1)$ を通り、傾き 3 の直線であるから

$$y - (-1) = 3(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 4$$

6. (1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$y' = 0$ とすると $x = 1, 3$

したがって，増減表は次のようになる．

x	...	1	...	3	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

よって， $x = 1$ で極大値 3， $x = 3$ で極小値 -1

(2) (1) の結果から，次のようになる．

