

平成 2 8 年度 佐世保工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい.

- (1) $(x^2 - 2x + 3)^2$ を展開しなさい.
- (2) $a^2x - bc^2 + a^2b - c^3$ を因数分解しなさい.
- (3) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{10}}{\sqrt{10} - 2\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい.
- (4) 繁分数式 $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$ を簡単にしなさい.
- (5) 2 次関数 $y = -x^2 + ax - 9$ が x 軸と接するように a の値を定めなさい.
- (6) 等式 $\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$ が x についての恒等式となるように, 定数 a, b, c の値を定めなさい.
- (7) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ のとき, $\cos^3 x - \sin^3 x$ の値を求めなさい.
- (8) $\triangle ABC$ について $AB = \sqrt{2}$, $BC = 2$, $CA = 1 + \sqrt{3}$ のとき, $\angle C$ の大きさを求めなさい.
- (9) (8) において $\triangle ABC$ の面積 S を求めなさい.
- (10) 不等式 $|2x + 1| > 7$ を解きなさい.

2. 次の各問いに答えなさい.

- (1) $\sin(90^\circ - x) - \sin(180^\circ + x) + \cos(90^\circ + x) + \cos(180^\circ - x)$ を簡単にしなさい.
- (2) $0^\circ < x < 180^\circ$ で $\tan x = 2$ のとき, $\frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x}$ の値を求めなさい.

3. 2 直線 $2x - y + 3 = 0$, $x + y = 0$ の交点を通り, 直線 $x - y + 3 = 0$ に垂直な直線の方程式を求めなさい.

4. 次の各小問に答えなさい.

- (1) $\frac{5-3i}{3+2i} + \frac{5+3i}{3-2i}$ を簡単にしなさい. ただし, i は虚数単位とする.
- (2) 整式 $P(x)$ を $x^2 + x - 2$ で割ったときの余りが $3x - 2$ であるとき $P(x)$ を $x - 1$ で割ったときの余りを求めなさい.
- (3) 平面上に 3 点 $A(1, 3)$, $B(-2, -2)$, $C(3, 0)$ がある. 四角形 $ABCD$ が平行四辺形となり, 線分 AC がこの平行四辺形の対角線となる位置に点 D があるとき, 点 D の座標を求めなさい.
- (4) 円 $x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 2 + 2a^2 = 0$ が y 軸に接するとき, a の値を求めなさい.
- (5) α が第 2 象限の角で $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ のとき, $\tan \frac{\alpha}{2}$ の値を求めなさい.
- (6) $0 \leq x < 2\pi$ のとき, 方程式 $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$ を解きなさい.
- (7) $a > 0$ とする. $\sqrt{1 + \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2}$ を簡単にしなさい.
- (8) 不等式 $4^x - 2^{x+1} - 8 > 0$ を解きなさい.
- (9) 方程式 $\log_3 x = \log_9(x+6)$ を解きなさい.
- (10) a, b, c を定数とする. このとき, 関数 $f(x) = a(c^2x^2 + b^2cx) - bc^3$ の導関数を求めなさい.

5. 関数 $f(x) = x^3 - 4x + 1$ について, 次の問いに答えなさい.

- (1) この関数の x が -1 から 2 まで変化するときの平均変化率を求めなさい.
- (2) この関数の $x = c$ ($-1 < c < 2$) における微分係数が (1) で求めた平均変化率に等しいとき, c の値を求めなさい.
- (3) (2) で求めた c に対して, 点 $C(c, f(c))$ における関数 $y = f(x)$ のグラフの接線 l を求めなさい.
- (4) (3) で求めた点 C における接線 l と関数 $y = f(x)$ のグラフとの点 C 以外の交点を求めなさい.

解答

1. (1) $(x^2 - 2x + 3)^2 = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 9$

(2) (最低次数の文字 b に着目する)

$$\begin{aligned} a^2c - bc^2 + a^2b - c^3 &= b(a^2 - c^2) + c(a^2 - c^2) \\ &= (a^2 - c^2)(b + c) \\ &= (a + c)(a - c)(b + c) \end{aligned}$$

(3) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{10}}{\sqrt{10} - 2\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{10} - \sqrt{3})(2\sqrt{3} + \sqrt{10})}{(2\sqrt{3} - \sqrt{10})(2\sqrt{3} + \sqrt{10})} = \frac{4 + \sqrt{30}}{2}$

(4) $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{y^2 - x^2}{xy(x + y)} = \frac{(y + x)(y - x)}{xy(x + y)} = \frac{y - x}{xy}$

別解 $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy}$

(5) 係数について

$$a^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 36 \quad \text{よって} \quad a = \pm 6$$

(6) 与えられた等式から

$$\frac{1}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{a}{x + 1} + \frac{bx + c}{x^2 - x + 1}$$

上式の両辺に $(x + 1)(x^2 - x + 1)$ に掛けると

$$1 = a(x^2 - x + 1) + (x + 1)(bx + c)$$

右辺を x について整理すると

$$1 = (a + b)x^2 + (-a + b + c)x + (a + c)$$

同じ次数の項の係数は等しいから

$$a + b = 0, \quad -a + b + c = 0, \quad a + c = 1$$

これを解いて $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = \frac{2}{3}$

(7) $\cos x - \sin x = \frac{1}{2}$ の両辺を平方すると $(\cos x - \sin x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

ゆえに $1 - 2 \cos x \sin x = \frac{1}{4}$ したがって $\cos x \sin x = \frac{3}{8}$
よって

$$\begin{aligned}\cos^3 x - \sin^3 x &= (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) \\ &= (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{8}\right) = \frac{11}{16}\end{aligned}$$

(8) $a = 2$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$ であるから , 余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2^2 + (1 + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (1 + \sqrt{3})} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $C = 30^\circ$

(9) (8) の結果から

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 2(1 + \sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

(10) $|2x + 1| > 7$ より

$$2x + 1 < -7 \quad \text{または} \quad 7 < 2x + 1 \quad \text{よって} \quad x < -4, \quad 3 < x$$

2. (1) $\sin(90^\circ - x) - \sin(180^\circ + x) + \cos(90^\circ + x) + \cos(180^\circ - x)$
 $= \cos x + \sin x - \sin x - \cos x = 0$

(2) $\frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$
 $= \frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{2}{\cos x}$
 $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 2^2 = 5 \quad 0^\circ < x < 90^\circ \text{ より} \quad \frac{1}{\cos x} = \sqrt{5}$
よって $\frac{1 - \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2\sqrt{5}$

3. 2 直線 $2x - y + 3 = 0$, $x + y = 0$ の交点は $(-1, 1)$

直線 $x - y + 3 = 0$ ($y = x + 3$) に垂直な直線の傾きは -1

よって , 求める直線は

$$y - 1 = -1(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -x$$

$$4. (1) \frac{5-3i}{3+2i} + \frac{5+3i}{3-2i} = \frac{(5-3i)(3-2i) + (5+3i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{18}{13}$$

(2) $P(x)$ を $x^2 + x - 2$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x^2 + x - 2)Q(x) + 3x - 2$$

よって, $P(x)$ を $x - 1$ で割った余りは $P(1) = 1$

(3) $D(x, y)$ とする. 四角形 ABCD が平行四辺形であるとき, 線分 AC, BC の中点は一致するから

$$\frac{1+3}{2} = \frac{-2+x}{2}, \quad \frac{3+0}{2} = \frac{-2+y}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = 6, y = 5$$

よって, 点 D の座標は (6, 5)

(4) 円 $x^2 - 2ax + y^2 + 4y + 2 + 2a^2 = 0$ を変形すると

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 = 2 - a^2$$

この円は中心 $(a, -2)$, 半径 $\sqrt{2-a^2}$. これが y 軸に接するから

$$|a| = \sqrt{2-a^2} \quad \text{よって} \quad a = \pm 1$$

$$(5) \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - (-\frac{2}{3})}{1 + (-\frac{2}{3})} = 5$$

α は第 2 象限の角より, $\tan \frac{\alpha}{2} > 0$ であるから $\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{5}$

(6) $2\cos^2 x - 3\sin x = 0$ より

$$2(1 - \sin^2 x) - 3\sin x = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ に注意して} \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$$

$$(7) \quad \sqrt{1 + \left(\frac{a^x - a^{-x}}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a^x + a^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2}$$

(8) $t = 2^x$ とおくと, $t > 0$. 与えられた不等式は

$$t^2 - 2t - 8 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)(t-4) > 0$$

したがって $t > 4$ よって, $2^x > 4$ を解くと $x > 2$

$$(9) \quad \log_3 x = \log_9(x+6)$$

真数は正であるから $x > 0$ かつ $x+6 > 0$ すなわち $x > 0 \quad \dots \textcircled{1}$

方程式から, $\log_9 x^2 = \log_9(x+6)$ となるから

$$x^2 = x + 6 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-3) = 0$$

$\textcircled{1}$ に注意して, これを解くと $x = 3$

$$(10) \quad f'(x) = ac(2cx + b^2)$$

5. (1) 求める平均変化率は

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - 4}{3} = -1$$

(2) $f'(x) = 3x^2 - 4$. このとき , $f'(c) = -1$ であるから

$$3c^2 - 4 = -1 \quad \text{このとき } c \text{ の値の範囲に注意して } c = 1$$

(3) $f(1) = -2$. l の方程式は , 点 $(1, -2)$ を通り , 傾き -1 の直線であるから

$$y - (-2) = -1(x - 1) \quad \text{すなわち } y = -x - 1$$

(4) (3) の結果から $x^3 - 4x + 1 = -x - 1$ ゆえに $(x - 1)^2(x + 2) = 0$
C 以外の交点の x 座標は -2 よって , (3) の結果から $(-2, 1)$