

平成 2 9 年度 大分工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 次の式の分母を有理化せよ .

$$\frac{4}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

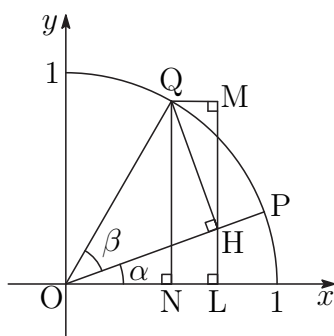
2. 次の式を因数分解せよ .

$$x^3 + 3x^2 - 4x - 12$$

3. $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき , 次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ .

$$\sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

4. 次の図の線分 OL および線分 NL の長さを求めよ .



5. 第 7 項が 162 , 公比が 3 の等比数列がある . 次の問いに答えよ .

- (1) 初項を求めよ .
- (2) 第 3 項から第 10 項までの和を求めよ .

6. 中心が直線 $y = \frac{1}{2}x$ 上にあり , 点 (6, 2) を通る円が x 軸に接している . この円の中心の x 座標が 5 より大きいとき , 円の半径を求めよ .

7. 2 つのベクトル $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$ について次の各問いに答えよ .

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ .
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ .

8. 関数 $y = 3 \sin x + 4 \cos x$ の最大値を求めよ．また，そのときの $\sin x$ の値を求めよ．
9. 直線 $y = 3x + k$ が曲線 $y = x^2 - x$ に接するように定数 k の値を定めよ．また，接点の座標を求めよ．
10. 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3$ の増減表をかけ．また，極大値・極小値を求めよ．
11. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ．

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 - 2x + 1$$

12. 2つの放物線 $y = x^2 - 2x + 2$, $y = -x^2 + 4x - 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答

$$\begin{aligned}
 1. \quad \frac{4}{1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{4(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})} \\
 &= \frac{4(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})}{-2\sqrt{2}} \\
 &= -\sqrt{2}(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) = -\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= x^2(x + 3) - 4(x + 3) \\
 &= (x + 3)(x^2 - 4) \\
 &= (x + 3)(x + 2)(x - 2)
 \end{aligned}$$

$$3. \quad 30^\circ \leq \theta \leq 150^\circ$$

$$4. \quad OH = \cos \beta, \quad QH = \sin \beta, \quad \angle QHM = \alpha \text{ であるから}$$

$$OL = OH \cos \alpha = \cos \beta \cos \alpha$$

$$NL = QM = QH \sin \alpha = \sin \beta \sin \alpha$$

$$5. \quad (1) \text{ 初項を } a \text{ とすると, 第 } 7 \text{ 項が } 162 \text{ であるから}$$

$$a \cdot 3^6 = 162 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{2}{9}$$

$$(2) \quad (1) \text{ の結果から, 第 } 3 \text{ 項 } a_3 \text{ および第 } 10 \text{ 項 } a_{10} \text{ は}$$

$$a_3 = \frac{2}{9} \cdot 3^2 = 2, \quad a_{10} = \frac{2}{9} \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^7$$

よって, 求める数列の和は

$$\frac{r \cdot a_{10} - a_3}{r - 1} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3^7 - 2}{3 - 1} = 3^8 - 1$$

$$6. \quad \text{中心が直線 } y = \frac{1}{2} \text{ 上にある円が } x \text{ 軸に接し, 点 } (6, 2) \text{ を通るから, 中心は } x \text{ 軸の上側にある. この円の半径を } r \text{ とすると, 中心は } (2r, r) \text{ であるから}$$

$$(x - 2r)^2 + (y - r)^2 = r^2 \quad \text{ただし} \quad 2r > 5$$

この円が点 $(6, 2)$ を通るから

$$(6 - 2r)^2 + (2 - r)^2 = r^2 \quad \text{整理すると} \quad r^2 - 7r + 10 = 0$$

$$r > \frac{5}{2} \text{ に注意して, これを解くと } r = 5$$

7. (1) $\vec{a} = (2, 1, 3)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 3 \cdot 1 = 7$$

$$(2) |\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14} , |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

これと (1) の結果から , $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって} \quad \theta = \frac{\pi}{3}$$

8. $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\sin \theta = \frac{4}{5}$ とおくと

$$\begin{aligned} y &= 3 \sin x + 4 \cos x = 5(\sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta) \\ &= 5 \sin(x + \theta) \end{aligned}$$

よって , y の最大値は 5

このとき , $x + \theta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は整数) であるから

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta + 2n\pi \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \cos \theta = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

9. $y = 3x + k$ と $y = x^2 - x$ から y を消去すると

$$3x + k = x^2 - x \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 4x - k = 0 \quad \cdots (*)$$

この方程式は重解をもつから

$$D/4 = (-2)^2 - 1 \cdot (-k) = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = -4$$

(*) から , 接点の x 座標は $x = 2$

これを $y = x^2 - x$ に代入すると $y = 2$

よって , 求める接点の座標は (2, 2)

10. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

したがって，増減表は次のようになる．

x	...	0	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

よって， $x = 0$ で極大値 **3**， $x = 2$ で極小値 **-1** をとる．

11. $\int_a^x f(t) dt = x^2 - 2x + 1 \quad \cdots (*)$

(*) の両辺を x で微分すると $f(x) = 2x - 2$

(*) に $x = a$ を代入すると

$$0 = a^2 - 2a + 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

12. $-x^2 + 4x - 2 - (x^2 - 2x + 2) = -2x^2 + 6x - 4 = -2(x - 1)(x - 2)$

よって，求める図形の面積を S とすると

$$S = -2 \int_1^2 (x - 1)(x - 2) dx = -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) (2 - 1)^3 = \frac{1}{3}$$