

平成 28 年度 大分工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. (1) 2 次方程式 $x^2 - 3x + 4 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき $\frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1}$ の値を求めよ .
- (2) 3 次方程式 $x^3 - ax^2 - 9x - 2 = 0$ の 1 つの解が -2 であるという . このとき , a の値を求めよ . また , 他の 2 つの解も求めよ .
- (3) $2x - y = 5$ ($1 \leq y \leq 3$) のとき , $x^2 + y$ の最大値と最小値を求めよ . また , そのときの x の値も求めよ .
- (4) 円 $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ と直線 $y = kx + 2$ が異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めよ .
2. $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について , 次の問いに答えよ .
 - (1) $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ とおくと , 数列 $\{b_n\}$ は等比数列になることを示せ . また , 数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 と項比 r を求めよ .
 - (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ .
3. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について , $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2, |\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$ とする . 次の問いに答えよ .
 - (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき , $\cos \theta$ の値を求めよ .
 - (2) $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ が垂直になるように実数 t の値を定めよ .
4. (1) 関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ が $x = -1$ で極大値 17 , $x = 2$ で極小値 -10 をとるとき , a, b, c, d の値を求めよ .
- (2) 曲線 $y = x^3 + 3x^2$ の接線の中で , 傾きが最小になるものの方程式を求めよ .
5. a, b を正の定数とする . 直線 $y = 2ax$ と放物線 $y = x(x - b)$ とで囲まれた図形が , x 軸によって面積の等しい 2 つの部分に分けられるとする . このとき , 次の問いに答えよ .
 - (1) 直線 $y = 2ax$ と放物線 $y = x(x - b)$ の交点の x 座標を a, b を用いて表せ .
 - (2) 直線 $y = 2ax$ と放物線 $y = x(x - b)$ で囲まれる図形の面積を a, b を用いて表せ .
 - (3) $a : b$ を求めよ .

解答

1. (1) 2 次方程式 $x^2 - 3x + 4 = 0$ の 2 つの解 α, β の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 4$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha - 1} + \frac{\alpha}{\beta - 1} &= \frac{\beta(\beta - 1) + \alpha(\alpha - 1)}{(\alpha - 1)(\beta - 1)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta - (\alpha + \beta)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} = \frac{3^2 - 2 \cdot 4 - 3}{4 - 3 + 1} = -1 \end{aligned}$$

- (2) $x^3 - ax^2 - 9x - 2 = 0$ の解が -2 であるから

$$-8 - 4a + 18 - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

$$x^3 - 2x^2 - 9x - 2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (x + 2)(x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$\text{他の解は, } x^2 - 4x - 1 = 0 \text{ を解いて } x = 2 \pm \sqrt{5}$$

- (3) $2x - y = 5$ ($1 \leq y \leq 3$) より $3 \leq x \leq 4$

$$y = 2x - 5 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned} x^2 + y &= x^2 + 2x - 5 \\ &= (x + 1)^2 - 6 \end{aligned}$$

よって, $x = 4$ のとき最大値 19, $x = 3$ のとき最小値 10

- (4) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ に $y = kx + 2$ を代入して, 整理すると

$$(1 + k^2)x^2 - 6x + 5 = 0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4 = (-3)^2 - (1 + k^2) \cdot 5 = 4 - 5k^2$$

このとき, $D > 0$ であるから

$$4 - 5k^2 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad -\frac{2}{\sqrt{5}} < k < \frac{2}{\sqrt{5}}$$

2. (1) $a_{n+1} = \frac{3a_n + 2}{a_n + 2}$ より

$$a_{n+1} + 1 = \frac{4(a_n + 1)}{a_n + 2}, \quad a_{n+1} - 2 = \frac{a_n - 2}{a_n + 2}$$

ゆえに $\frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a_n - 2}{a_n + 1}$ すなわち $b_{n+1} = \frac{1}{4}b_n$

よって $r = \frac{1}{4}$, $b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 + 1} = \frac{1 - 2}{1 + 1} = -\frac{1}{2}$

(2) (1) の結果から $b_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = -\frac{1}{2^{2n-1}}$

したがって $\frac{a_n - 2}{a_n + 1} = -\frac{1}{2^{2n-1}}$ よって $a_n = \frac{2^{2n} - 1}{2^{2n-1} + 1}$

3. (1) $|\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$ より $|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 16$

これに $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ を代入すると

$$9 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 16 = 16 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9}{4} \quad \cdots \textcircled{1}$$

よって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{3}{8}$

(2) $\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{a} - \vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a} + t\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$|\vec{a}|^2 + (t - 1)\vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{b}|^2 = 0$$

これに $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\textcircled{1}$ を代入すると

$$9 + (t - 1) \cdot \frac{9}{4} - t \cdot 4 = 0 \quad \text{よって} \quad t = \frac{27}{7}$$

4. (1) $f'(x) = 0$ の解は, $x = -1, 2$ であるから, $f'(x)$ の 2 次の係数に注意して

$$f'(x) = 3a(x+1)(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}ax^2 - 6ax + d$$

$f(-1) = 17, f(2) = -10$ であるから

$$\frac{7}{2}a + d = 17, \quad -10a + d = -10$$

これを解いて $a = 2, d = 10$

ゆえに $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$

よって $a = 2, b = -3, c = -12, d = 10$

- (2) $y = x^3 + 3x^2$ を微分すると $y' = 3x^2 + 6x = 3(x+1)^2 - 3$

ゆえに, 傾きが最小になるのは, $x = -1$ のときである.

求める接線は, 点 $(-1, 2)$ を通り, 傾き -3 の直線であるから

$$y - 2 = -3(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -3x - 1$$

5. (1) $y = 2ax, y = x(x - b)$ から y を消去すると

$$2ax = x(x - b) \quad \text{ゆえに} \quad x(x - 2a - b) = 0$$

よって $x = 0, 2a + b$

- (2) (1) の結果から, 求める面積は $\frac{1}{6}(2a + b)^3$

- (3) 放物線 $y = x(x - b)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は $\frac{1}{6}b^3$

条件より, これと (2) の結果から

$$\frac{1}{6}(2a + b)^3 = 2 \times \frac{1}{6}b^3 \quad \text{ゆえに} \quad 2a + b = \sqrt[3]{2}b$$

したがって $a = \frac{\sqrt[3]{2} - 1}{2}b$ よって $a : b = \sqrt[3]{2} - 1 : 2$