

平成 27 年度 大分工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 次の各問いに答えよ .

- (1) 2 次方程式 $x^2 + 2x + 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき, $\alpha^4 + \beta^4$ の値を求めよ .
- (2) $0 \leq x \leq \pi$ のとき, $\sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x$ の最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ .
- (3) $a > 0$ のとき, $a + \frac{4}{a}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ .
- (4) 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $3x + 4y + 5 = 0$ との交点を A, B とするとき, 線分 AB の長さを求めよ .

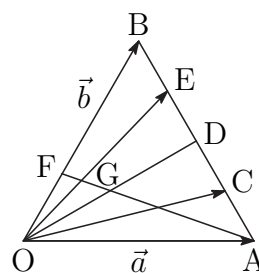
2. 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2n + 4$$

を満たしている . 次の各問いに答えよ .

- (1) $\frac{1}{a_n} = b_n$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ .
- (2) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ .

3. 1 辺の長さが 4 の正三角形 OAB において, 辺 AB を 4 等分する点を A に近い方から C, D, E とする . また, 辺 OB を 3 等分する点で, O に近い方を F とする . $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とするとき, 次の各問いに答えよ .



- (1) $\overrightarrow{OC}$ と $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表し, その内積 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE}$ を求めよ .
 - (2) OD と AF との交点を G とするとき, $\overrightarrow{OG}$ を $\vec{a}, \vec{b}$ で表せ .
 - (3) $\triangle OAG$ の面積を求めよ .
4. 関数 $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$ に対し, $g(x) = \int_1^x f(t) dt$ とおくとき, 次の各問いに答えよ .
- (1) $g(1), g(3)$ の値を求めよ .
 - (2) 関数 $g(x)$ の極値を求めよ .

5. 曲線 $y = x^2$ を C , 曲線 $y = ax$ を l とする . ただし , $0 < a < 2$ とする . このとき , 次の各問いに答えよ .
- (1) C と l で囲まれた図形の面積を S_1 , C と l および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする . $S_1 + S_2 = S$ とするとき , S を a の式で表せ .
- (2) S の最小値とそのときの a の値を求めよ .

解答

1. (1) 解と係数の関係により $\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$

$$\text{ゆえに } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$\text{よって } \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (-2)^2 - 2 \cdot 3^2 = -14$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x &= \sqrt{2}(\sqrt{3} \sin x - \cos x) \\ &= 2\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より } -\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{よって } x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \text{ すなわち } x = 0 \text{ のとき } \text{最小値 } -\sqrt{2}$$

$$x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ すなわち } x = \frac{2}{3}\pi \text{ のとき } \text{最小値 } 2\sqrt{2}$$

- (3) $a > 0, \frac{4}{a} > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係により

$$a + \frac{4}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{4}{a}} = 4$$

上式で等号が成立するのは

$$a = \frac{4}{a} \text{ すなわち } a = 2$$

よって, $a = 2$ のとき, 最小値 4

- (4) 円の中心 $(0, 0)$ から直線 $3x + 4y + 5 = 0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1$$

$$\text{ゆえに } \frac{AB}{2} = \sqrt{2^2 - 1^2} \text{ よって } AB = 2\sqrt{3}$$

2. (1) $b_1 = 6$, $b_{n+1} - b_n = 2n + 4$ であるから , $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} (2k + 4) \\ b_n - b_1 &= 2 \cdot \frac{1}{2} n(n-1) + 4(n-1) \\ b_n &= n(n-1) + 4(n-1) + 6 \\ &= n^2 + 3n + 2\end{aligned}$$

上式は , $n = 1$ のときも成立するから , 求める数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$$

- (2) (1) の結果より , $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)}\end{aligned}$$

3. (1) $\overrightarrow{OC} = \frac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}$, $\overrightarrow{OE} = \frac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}$

ここで $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{16} (3|\vec{a}|^2 + 10\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{16} (3 \cdot 4^2 + 10 \cdot 8 + 3 \cdot 4^2) = 11\end{aligned}$$

- (2) $\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OF}}{2} = 2 \times \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OF}}{4}$

よって $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OF}}{4} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{4} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{4}$

- (3) (2) の結果から $\overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OG}$

ゆえに $\triangle OAG = \frac{1}{2} \triangle OAD$, $\triangle OAD = \frac{1}{2} \triangle OAB$

よって $\triangle OAG = \frac{1}{4} \triangle OAB = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$

4. (1) $g(1) = \int_1^1 f(t) dt = 0$

$$\begin{aligned} g(3) &= \int_1^3 (3x^2 - 12x + 9) dx \\ &= 3 \int_1^3 (x-1)(x-3) dx = 3 \left(-\frac{1}{6} \right) (3-1)^3 = -4 \end{aligned}$$

(2) $g'(x) = f(x) = 3(x-1)(x-3)$ であるから, (1) の結果より

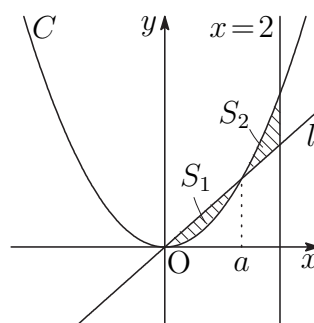
極大値 $f(1) = 0$, 極小値 $f(3) = -4$

5. (1) $x^2 - ax$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2$$

とおくと, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= - \left[F(x) \right]_0^a + \left[F(x) \right]_a^2 \\ &= F(0) + F(2) - 2F(a) \\ &= 0 + \left(\frac{8}{3} - 2a \right) - 2 \left(-\frac{1}{6}a^3 \right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - 2a + \frac{8}{3} \end{aligned}$$



(2) (1) の結果から $S' = a^2 - 2$

$0 < a < 2$ における S の増減表は, 次のようになる.

x	(0)	...	$\sqrt{2}$	...	(2)
S'		-	0	+	
S		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, $a = \sqrt{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{8 - 4\sqrt{2}}{3}$ をとる.