

受験番号	
------	--

平成26年度
大分工業高等専門学校編入学試験問題

数 学
(各学科共通)

平成25年8月2日(金)
14:05~15:05

【注意事項】

1. 指示があるまで問題用紙は開いてはいけません。
2. この問題のページ数は表紙のほかに3ページあります。
3. 全てのページの受験番号欄に受験番号を記入しなさい。
4. 各解答はその問題の同じ用紙内に記入しなさい。

1. 次の各問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $x^2 + 4x - (2k+1)(2k-3) = 0$

の解がともに 5 より小さくなるように、定数 k の値の範囲を求めよ。

$x^2 + 4x - (2k+1)(2k-3) = 0$ の判別式を D とおくと

$\frac{D}{4} = 4 + (2k+1)(2k-3)$

$= 4k^2 - 4k + 1$

$= (2k-1)^2 \geq 0$

よってこの 2 次方程式は実数解をもつ。解を α, β とおくと

解と係数の関係より

$\alpha + \beta = -4 \dots \textcircled{1} \quad \alpha\beta = -(2k+1)(2k-3) \dots \textcircled{2}$

条件を満たすためには $\alpha < 5$ かつ $\beta < 5$ なので

$\begin{cases} (\alpha-5) + (\beta-5) < 0 \dots \textcircled{3} \\ (\alpha-5)(\beta-5) > 0 \dots \textcircled{4} \end{cases}$ が成り立ちはしない。

③は①より成り立っている。

$(\alpha-5)(\beta-5) = \alpha\beta - 5(\alpha+\beta) + 25$
 $= -(2k+1)(2k-3) + 20 + 25$
 $= -4k^2 + 4k + 48$
 $= -4(k+3)(k-4)$

④より $-3 < k < 4$

(2) 次の対数不等式を解け。

$\log_5(5-2x) < 2 - \log_5(x+5)$

真数条件より

$5-2x > 0$ かつ $x+5 > 0$

よって $-5 < x < \frac{5}{2} \dots \textcircled{1}$

$\log_5(5-2x) < 2 - \log_5(x+5)$

$\log_5(5-2x) + \log_5(x+5) < 2$

$\log_5(5-2x)(x+5) < \log_5 5^2$

底 $5 > 1$ より

$(5-2x)(x+5) < 25$

$-2x^2 - 5x < 0$

$2x^2 + 5x > 0$

$x(2x+5) > 0$

$x < -\frac{5}{2}, 0 < x \dots \textcircled{2}$

①, ②より

$-5 < x < -\frac{5}{2}, 0 < x < \frac{5}{2}$

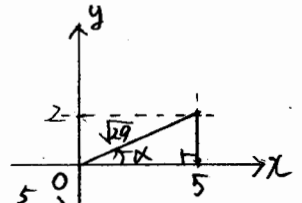
(3) 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

$y = 5 \sin x + 2 \cos x$

変形して

$y = \sqrt{29} \sin(x+\alpha)$

$(\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{29}}, \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}})$



$-1 \leq \sin(x+\alpha) \leq 1$ より

$-\sqrt{29} \leq \sqrt{29} \sin(x+\alpha) \leq \sqrt{29}$

$-\sqrt{29} \leq y \leq \sqrt{29}$

よって 最大値 $\sqrt{29}$, 最小値 $-\sqrt{29}$

(4) 点 (x, y) が曲線 $x^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき、

$2x + y$ の最大値と最小値を求めよ。

$2x + y = k \dots \textcircled{1}$ とおくと

$y = -2x + k$

これは傾き -2 , y 切片 k の直線である。

グラフより、直線①が

円 $x^2 + y^2 = 4$ と接するとき、

k は最大値 及び 最小値をとる。

円と直線が接するとき、

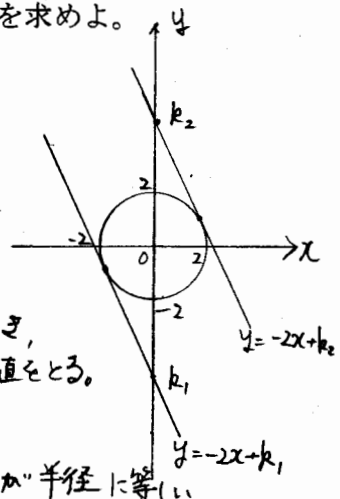
円の中心と直線の距離が半径に等しい。

$\frac{|2 \cdot 0 + 0 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 2$

$\frac{|k|}{\sqrt{5}} = 2$

$|k| = 2\sqrt{5} \quad k = \pm 2\sqrt{5}$

よって 最大値 $2\sqrt{5}$, 最小値 $-2\sqrt{5}$



2. 自然数の列を次のように群に分ける。ただし、第 n 群には $2n$ 個の自然数が入るものとする。

$$1, 2 \mid 3, 4, 5, 6 \mid 7, 8, 9, 10, 11, 12 \mid 13, \dots$$

このとき、次の各問いに答えよ。

- (1) 第 n 群の初項を求めよ。

第1群から第 $n-1$ 群までの項数の和は

$$\begin{aligned} & 2 + 4 + 6 + \dots + 2(n-1) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2k \\ &= n(n-1) \end{aligned}$$

よって第 n 群の初項は

$n(n-1) + 1$ 番目の数
自然数の列なので

第 n 群の初項は

$$n(n-1) + 1 = \underline{n^2 - n + 1} //$$

- (2) 231 は第何群の何番目かを求めよ。

(1)より第 n 群の初項は

$$\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$$

231 が第 n 群の項であるとすると

$$n(n-1) < 231 \leq n(n+1) \dots ①$$

$$14 \times 15 = 210, 15 \times 16 = 240 \text{ より}$$

①を満たす自然数 n は $n=15$

よって 231 は 第15群の項、

第14群の和項は $14 \times 15 = 210$ なので

$$231 - 210 = 21$$

231 は 第15群の 21 番目 //

3. $\triangle OAB$ の辺 OA を $2:1$ に内分する点を L 、
辺 OB を $3:1$ に内分する点を M とする。
また、線分 AM と線分 BL の交点を P とする。

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくと、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を
用いて表せ。

$$AP:PM = s:(1-s)$$

$$BP:PL = t:(1-t) \text{ とおく}$$

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\vec{a} + \frac{s}{4}\vec{b} \dots ①$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b} \dots ②$$

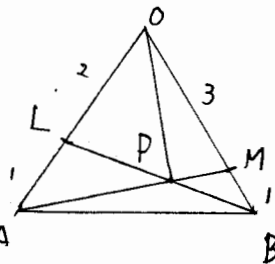
$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \neq \vec{b}$ なので

①, ②より

$$\begin{cases} 1-s = \frac{2}{3}t \\ \frac{s}{4} = 1-t \end{cases}$$

$$\therefore \text{これを解いて } s = \frac{2}{3}, t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} = \underline{\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}} //$$



4. 関数 $y = 2x^3 - 3(2a+1)x^2 + 6(a^2+a)x$ について、次の各問いに答えよ。ただし、 a は実数とする。(1) y の極大値を a を用いて表せ。

$$\begin{aligned}
 y &= 2x^3 - 3(2a+1)x^2 + 6(a^2+a)x \\
 y' &= 6x^2 - 6(2a+1)x + 6(a^2+a) \\
 &= 6\{x^2 - (2a+1)x + a(a+1)\} \\
 &= 6\{x - (a+1)\}(x - a)
 \end{aligned}$$

$$y' = 0 \text{ のとき } x = a+1, a$$

x	...	a	...	$a+1$	...
y'	+	0	-	0	+
y	↗	極大	↘	極小	↗

 $x = a$ のとき 極大値をとる。

$$\begin{aligned}
 &2a^3 - 3(2a+1)a^2 + 6(a^2+a)a \\
 &= 2a^3 - 6a^3 - 3a^2 + 6a^3 + 6a^2 \\
 &= 2a^3 + 3a^2
 \end{aligned}$$

$$\underline{\text{極大値 } 2a^3 + 3a^2 \text{ (} x=a \text{ のとき)}}$$

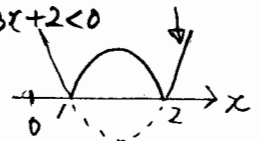
5. 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$x \leq 1, 2 \leq x \text{ のとき } x^2 - 3x + 2 \geq 0 \quad y = |x^2 - 3x + 2|$$

$$1 < x < 2 \text{ のとき } x^2 - 3x + 2 < 0$$



よ、

$$\int_0^2 |x^2 - 3x + 2| dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 3x + 2) dx + \int_1^2 -(x^2 - 3x + 2) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 + \left\{ \left(-\frac{8}{3} + 6 - 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 \right) \right\}$$

$$= 1$$

(2) y の極大値が 1 のとき、 a の値を

求めよ。

(1) よ、

$$2a^3 + 3a^2 = 1$$

$$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0$$

$$P(a) = 2a^3 + 3a^2 - 1 \text{ とおく。}$$

$$P(-1) = 0 \text{ より } P(a) \text{ は } a+1 \text{ を因数に持つ}$$

$$P(a) = (a+1)(2a^2 + a - 1)$$

$$= (a+1)(a+1)(2a-1)$$

$$= (a+1)^2(2a-1)$$

$$P(a) = 0 \text{ より}$$

$$\underline{a = -1, \frac{1}{2}}$$