

平成 29 年度 都城工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 次の式を展開せよ .

$$(a + 2b - c)(a - 2b + c)$$

2. 次の各式を簡単にせよ .

$$(1) \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6} - 2}$$

$$(2) \frac{2x^2 + x}{x^2 - 4} \div \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \times \frac{x^2 + 2x}{2x^2 + 3x + 1}$$

3. 整式 $P(x)$ を $x - 3$ で割ると余りが 5 , $x + 2$ で割ると余りが -5 であるとき , 次の各問いに答えよ .

(1) $P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの余りを求めよ .

(2) $P(x)$ が 2 次式で $P(0) = 5$ であるとき $P(x)$ を求めよ .

4. 次の連立方程式 , 連立不等式を解け .

$$(1) \begin{cases} x^2 + 4xy + 2y^2 = 12 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$$

5. 2 次方程式 $x^2 + px + p - 1 = 0$ の解を α, β とおくとき , 以下の問いに答えよ .
ただし , p は実数とする .

(1) $\alpha^2 + \beta^2$ を p を用いて表せ .

(2) $\alpha^2 + \beta^2$ の最小値とそのときの p の値を求めよ .

6. 2 次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ は異なる 2 つの解を持ち , それらの解は 4 次方程式

$$x^4 + (a + 1)x^3 + (a + 1)x^2 + ax + a^2 + 2a - 3 = 0$$

の解でもある . このとき , 定数 a の値と , この 4 次方程式の解をすべて求めよ .

7. $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ のとき , $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ とする . このとき , 次の値を求めよ .

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\sin \theta - \cos \theta$

8. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{81}\right)^x$ を解け .
9. 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x+2) = -1$ を解け .
10. 6^{20} は何桁の整数か答えよ . ただし , $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4471$ とする .
11. 関数 $f(x) = x^3 - x$ について , 以下の問いに答えよ . ただし , a は定数とする .
- (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ .
 - (2) 曲線 $y = x^3 - x$ の $x = t$ における接線 ℓ の方程式を求めよ .
 - (3) (2) で求めた接線 ℓ が点 $A(1, a)$ を通るとき , t と a の満たす関係式を求めよ .
 - (4) 点 $A(1, a)$ から曲線 $y = x^3 - x$ に対して相異なる 2 本の接線を引くことができるとき , a の値を求めよ .
12. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ .

$$\int_{-2}^x f(t) dt = x^3 - 5x^2 + 3ax + 2a$$

解答

$$1. \quad (a+2b-c)(a-2b+c) = \{a+(2b-c)\}\{a-(2b-c)\} \\ = a^2 - (2b-c)^2 = \mathbf{a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2}$$

$$2. \quad (1) \quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2} = \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)} \\ = \frac{4\sqrt{3}-4}{4} - \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} = \mathbf{-1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}}$$

$$(2) \quad \frac{2x^2+x}{x^2-4} \div \frac{x^2}{x^2-x-2} \times \frac{x^2+2x}{2x^2+3x+1} \\ = \frac{x(2x+1)}{(x+2)(x-2)} \times \frac{(x+1)(x-2)}{x^2} \times \frac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)} = \mathbf{1}$$

$$3. \quad (1) \quad \text{剰余の定理により} \quad P(3) = 5, P(-2) = -5 \quad \cdots (*)$$

$P(x)$ を $x^2 - x - 6$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ とおくと

$$P(x) = (x^2 - x - 6)Q(x) + ax + b \\ = (x-3)(x+2)Q(x) + ax + b$$

これに $x = 3, -2$ をそれぞれ代入すると

$$3a + b = 5, \quad -2a + b = -5$$

これを解いて $a = 2, b = -1$ よって, 求める余りは $\mathbf{2x - 1}$

$$(2) \quad 2 \text{ 次式 } P(x) \text{ を } P(0) = 5 \text{ に注意し, } P(x) = px^2 + qx + 5 \text{ とおくと, } (*) \text{ より}$$

$$9p + 3q + 5 = 5, \quad 4p - 2q + 5 = -5$$

$$\text{これを解いて} \quad \mathbf{P(x) = -x^2 + 3x + 5}$$

$$4. \quad (1) \quad \text{第 1 式から} \quad -x^2 + 2(x+y)^2 = 12$$

$$\text{これに } x+y=2 \text{ を代入して整理すると} \quad x^2 = -4$$

$$\text{したがって} \quad x = \pm 2i \quad \text{よって} \quad (x, y) = (\pm 2i, 2 \mp 2i) \quad (\text{複号同順})$$

$$(2) \quad \text{第 1 式から} \quad (x+1)(x-2) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x < -1, 2 < x$$

$$\text{第 2 式から} \quad (x+3)(x-4) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad -3 < x < 4$$

$$\text{上の 2 式の共通範囲を求めて} \quad \mathbf{-3 < x < -1, 2 < x < 4}$$

5. (1) 2 次方程式 $x^2 + px + p - 1 = 0$ の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = p - 1$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-p)^2 - 2(p - 1) = p^2 - 2p + 2 \end{aligned}$$

- (2) (1) の結果から $p^2 - 2p + 2 = (p - 1)^2 + 1$

よって, $p = 1$ のとき最小値 1 をとる.

6. $x^4 + (a + 1)x^3 + (a + 1)x^2 + ax + a^2 + 2a - 3$ を $x^2 + ax + 1$ で割った商は $x^2 + x$, 余りは $(a - 1)x - (a - 1)(a + 3)$

2 次方程式 $x^2 + ax + 1 = 0$ の異なる 2 つの解は, 4 次方程式

$$x^4 + (a + 1)x^3 + (a + 1)x^2 + ax + a^2 + 2a - 3 = 0$$

の解であるから

$$a - 1 = 0, \quad -(a - 1)(a + 3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 1$$

このとき, 4 次方程式は $(x^2 + x + 1)(x^2 + x) = 0$

これを解いて $x = 0, -1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

7. (1) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ の両辺を平方すると

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9} \quad \text{よって} \quad \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

- (2) (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{5}{18}\right) = \frac{14}{9} \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ より, $\sin \theta - \cos \theta < 0$ であるから

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{14}}{3}$$

8. 与えられた不等式から $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{4x}$

底 $\frac{1}{3}$ は, 1 より小さいから

$$2x + 1 > 4x \quad \text{これを解いて} \quad x < \frac{1}{2}$$

9. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x+2) = -1$ から

$$(x+1)(x+2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 3x = 0$$

これを解いて $x = 0, -3$

10. $\log_{10} 6^{20} = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 15.562$ であるから

$$15 < \log_{10} 6^{20} < 16 \quad \text{ゆえに} \quad 10^{15} < 6^{20} < 10^{16}$$

よって, 6^{20} は 16 桁の整数.

11. (1) $f(x) = x^3 - x$ より $f'(x) = 3x^2 - 1$

(2) $f'(t) = 3t^2 - 1$ であるから, 求める接線 ℓ の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (3t^2 - 1)x - 2t^3$$

(3) ℓ は点 A(1, a) を通るから

$$a = (3t^2 - 1)1 - 2t^3 = -2t^3 + 3t^2 - 1$$

(4) $g(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$ とおくと, $y = g(t)$ と $y = a$ の共有点が 2 個となる a の値を求めればよい.

$$g'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t - 1)$$

t	...	0	...	1	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$

よって, 求める a の値は $a = -1, 0$

$$12. \int_{-2}^x f(t) dt = x^3 - 5x^2 + 3ax + 2a \quad \cdots (*)$$

(*) に $x = -2$ を代入すると

$$0 = (-2)^3 - 5(-2)^2 + 3a(-2) + 2a \quad \text{これを解いて} \quad a = -7$$

$$\int_{-2}^x f(t) dt = x^3 - 5x^2 + 3ax + 2a \quad \text{を微分すると}$$

$$f(x) = 3x^2 - 10x + 3a = \mathbf{3x^2 - 10x - 21}$$