

平成 2 8 年度 都城工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 次の各式を簡単にせよ .

$$(1) \frac{(-2x^2y^3)^3}{(3x^2y^4)^2}$$

$$(2) |3 - 2\sqrt{2}| + |4 - 3\sqrt{2}|$$

$$(3) \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{5} - 3}$$

2. $a^2 - 4b^2 - 2bc + ac$ を因数分解せよ .

3. 次の分数式を簡単にせよ .

$$\frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{2x + 1}{x^2 + x - 6}$$

4. 整式 $x^3 - x^2 + 5x - 4$ を x についての整式 B で割ると , 商が $x - 1$, 余りが $3x - 2$ であるという . このとき整式 B を求めよ .

5. 次の連立不等式を解け .

$$\begin{cases} |2x - 3| < 5 \\ x^2 + x - 6 \geq 0 \end{cases}$$

6. 2 次方程式 $x^2 - 2px + p - 1 = 0 \cdots (*)$ に関して以下の問いに答えよ .

(1) $(*)$ の 2 つの解を α, β とおくとき , $\alpha^2 + \beta^2$ が最小となるように実数 p を定めよ .

(2) $(*)$ が正の解と負の解をもつように , 定数 p の値の範囲を求めよ .

7. 4 次方程式 $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ (a, b, c, d は実数) の解のうち 2 つが i と $1 + 2i$ であるという . このとき , 定数 a, b, c, d を求めよ . ただし , i は虚数単位とする .

8. 次の式を簡単にせよ .

$$(1) \sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{2}{3}\pi \right) + \cos \left(\theta + \frac{7}{6}\pi \right)$$

$$(2) (\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 4)$$

9. $0 \leq \theta < 2\pi$ のとき , 不等式 $\sin 2\theta > \sqrt{3} \sin \theta$ を解け .

10. 方程式 $9^{x+1} + 3^{x+1} - 2 = 0$ を解け .

11. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}} x \leq -1$ を解け .
12. 関数 $f(x) = 2x^2$ について , 以下の問いに答えよ .
- (1) x が 1 から $1+h$ まで変化するとき $f(x)$ の平均変化率を求めよ .
 - (2) $x = 1$ における微分係数を求めよ .
13. 定積分 $\int_0^3 |x(x-2)| dx$ の値を求めよ .
14. 関数 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ について , 以下の問いに答えよ .
- (1) $y = f(x)$ の x, y', y の増減表をかけ .
 - (2) $y = f(x)$ の極値を求めよ .
 - (3) $y = f(x)$ のグラフの概形を描け .

解答

$$1. (1) \frac{(-2x^2y^3)^3}{(3x^2y^4)^2} = \frac{-8x^6y^9}{9x^4y^8} = -\frac{8x^2y}{9}$$

$$(2) 3 - 2\sqrt{2} = \sqrt{9} - \sqrt{8} > 0, 4 - 3\sqrt{2} = \sqrt{16} - \sqrt{18} < 0 \text{ より}$$

$$|3 - 2\sqrt{2}| + |4 - 3\sqrt{2}| = 3 - 2\sqrt{2} - (4 - 3\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

$$(3) \frac{6}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{5} - 3} = \frac{6(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{5 - 2} + \frac{8(\sqrt{5} + 3)}{5 - 9}$$

$$= 2(\sqrt{5} + \sqrt{2}) - 2(\sqrt{5} + 3) = 2\sqrt{2} - 6$$

2. 最も次数の低い文字 c に着目する .

$$a^2 - 4b^2 - 2bc + ac = (a + 2b)(a - 2b) + c(a - 2b)$$

$$= (a - 2b)\{(a + 2b) + c\}$$

$$= (a - 2b)(a + 2b + c)$$

$$3. \frac{2x}{x^2 - 4} - \frac{2x + 1}{x^2 + x - 6} = \frac{2x}{(x + 2)(x - 2)} - \frac{2x + 1}{(x + 3)(x - 2)}$$

$$= \frac{2x(x + 3) - (2x + 1)(x + 2)}{(x + 2)(x + 3)(x - 2)}$$

$$= \frac{x - 2}{(x + 2)(x + 3)(x - 2)} = \frac{1}{(x + 2)(x + 3)}$$

4. $x^3 - x^2 + 5x - 4 = B(x - 1) + 3x - 2$ であるから

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 = B(x - 1) \text{ よって } B = x^2 + 2$$

5. $|2x - 3| < 5$ より

$$-5 < 2x - 3 < 5 \text{ ゆえに } -1 < x < 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x^2 + x - 6 \geq 0$ より

$$(x + 3)(x - 2) \geq 0 \text{ ゆえに } x < -3, 2 < x \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $2 < x < 4$

6. (1) 2 次方程式 $x^2 - 2px + p - 1 = 0$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2p, \quad \alpha\beta = p - 1$$

したがって

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (2p)^2 - 2(p - 1) \\ &= 4p^2 - 2p + 2 = 4\left(p - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \text{ が最小となる実数 } p \text{ の値は } p = \frac{1}{4}$$

- (2) $\alpha\beta < 0$ であるから

$$p - 1 < 0 \quad \text{よって} \quad p < 1$$

7. 実係数の 4 次方程式が i と $1 + 2i$ をもつとき, $-i$ と $1 - 2i$ もこの方程式の解であるから, 最高次の係数に注意して

$$\begin{aligned} x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d &= (x^2 + 1)\{(x - 1)^2 + 4\} \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 5) \\ &= x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \end{aligned}$$

$$\text{よって} \quad a = -2, b = 6, c = -2, d = 5$$

8. (1) $\cos\left(\theta + \frac{7}{6}\pi\right) = \cos\left\{\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{\pi}{2}\right\} = -\sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right)$ であるから

$$\sin\theta \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) + \cos\left(\theta + \frac{7}{6}\pi\right) = \sin\theta$$

$$\begin{aligned} (2) (\log_2 9 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_9 4) &= \left(2\log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 3\right)\left(\frac{1}{\log_2 3} + \frac{1}{\log_2 3}\right) \\ &= \frac{5}{2}\log_2 3 \times \frac{2}{\log_2 3} = 5 \end{aligned}$$

9. $\sin 2\theta > \sqrt{3} \sin \theta$ より $\sin \theta(2 \cos \theta - \sqrt{3}) > 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから

$$(*) \begin{cases} \sin \theta > 0 \\ 2 \cos \theta - \sqrt{3} > 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad (**) \begin{cases} \sin \theta < 0 \\ 2 \cos \theta - \sqrt{3} < 0 \end{cases}$$

$$(*) \text{ を解いて } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad (**) \text{ を解いて } \frac{11}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$$

$$\text{よって} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad \frac{11}{6}\pi \leq \theta < 2\pi$$

10. $t = 3^{x+1}$ とおくと ($t > 0$) , $9^{x+1} = t^2$ であるから , 方程式は

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)(t-1) = 0$$

$t > 0$ に注意して $t = 1$ ゆえに $3^{x+1} = 3^0$ よって $x = -1$

11. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}} x \leq -1$

真数は正であるから

$$x-1 > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

方程式から

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)x \leq \log_{\frac{1}{2}} 2$$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$$(x-1)x \geq 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2) \geq 0$$

① に注意して , これを解くと $x \geq 2$

12. (1) $f(x) = 2x^2$ について , $x = 1$ から $x = 1+h$ まで平均変化率は

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{2(1+h)^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = 4 + 2h$$

(2) (1) の結果から

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4 + 2h) = 4$$

13. $0 \leq x \leq 2$ のとき $x(x-2) \leq 0$, $2 \leq x \leq 3$ のとき $x(x-2) \geq 0$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x(x-2)| dx &= - \int_0^2 x(x-2) dx + \int_2^3 x(x-2) dx \\ &= - \left(-\frac{1}{6} \right) (2-0)^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

14. (1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ を微分すると $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

したがって, $y = f(x)$ の増減表は

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2) (1) の結果から極大値 $f(-1) = 4$, 極小値 $f(1) = 0$

(3) (1), (2) の結果からグラフの概形は次のようになる.

