(問1)

(1) $(2a+b+c)(2a-b+c)$

$= (2a+c+b)(2a+c-b)$

$= (2a+c)^2 - b^2$

$= 4a^2 + 4ac + c^2 - b^2$ 〃

(2) $12x^2y - 24xy + 9y$

$= 3y(4x^2 - 8x + 3)$

$= 3y(2x-1)(2x-3)$ 〃

(問2)

(1) $\sqrt{27} + \dfrac{6}{\sqrt{3}} - \sqrt{48}$

$= 3\sqrt{3} + \dfrac{6\sqrt{3}}{3} - 4\sqrt{3}$

$= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$

$= \sqrt{3}$ 〃

(2) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - \dfrac{1(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$= \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-1} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}$

$= 2 - \sqrt{2} - (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$= 2 - \sqrt{3}$ 〃

(問3)

$a = 2 + \sqrt{5}$

$a - 2 = \sqrt{5}$

$(a-2)^2 = \sqrt{5}^2$

$a^2 - 4a + 4 = 5$

$a^2 - 4a = 1$ なので

$a^2 - 4a + 1$

$= 1 + 1 = 2$ 〃

(問4)

$x^2 - 2x - 15 < 0$

$(x+3)(x-5) < 0$

$-3 < x < 5$ …①

$x^2 - 3x - 4 \geqq 0$

$(x+1)(x-4) \geqq 0$

$x \leqq -1,\ 4 \leqq x$ …②

$7(x-2) - 6(x-2) < 0$

$x - 2 < 0$

$x < 2$ …③

①,②,③ より

$-3 < x \leqq -1$ 〃

問5

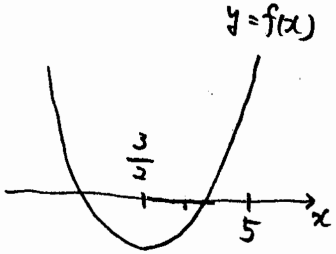
$f(x) = x^2 - 3x - (k+1)(k-2)$ とすると

$f(x) = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} - (k+1)(k-2)$

より頂点の座標は

$\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4} - (k+1)(k-2)\right)$

条件より $y = f(x)$ のグラフは右のようになるので



頂点のy座標について

$-\frac{9}{4} - (k+1)(k-2) < 0$

$-9 - 4(k+1)(k-2) < 0$

$-4k^2 + 4k - 1 < 0$

$4k^2 - 4k + 1 > 0$

$(2k-1)^2 > 0$

$k < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < k$ …①

また

$f(5) = 5^2 - 3 \times 5 - (k+1)(k-2) > 0$

$-k^2 + k + 12 > 0$

$k^2 - k - 12 < 0$

$(k+3)(k-4) < 0$

$-3 < k < 4$ …②

①,②より

$-3 < k < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < k < 4$ //

問6

1つの解が $1-i$ より $1+i$ も解 …①

また方程式に $x = 1-i$ を代入

$(1-i)^3 + p(1-i)^2 + q(1-i) + 6 = 0$

$(4+q) + (-2-2p+q)i = 0$

p, q は実数なので

$\begin{cases} 4+q = 0 \\ -2-2p+q = 0 \end{cases}$

これを解いて

$p = 1, q = -4$

方程式は

$x^3 + x^2 - 4x + 6 = 0$ となり

$(x+3)(x^2-2x+2) = 0$

よって $x = -3$ も解 …②

①,②より

$x = 1+i, -3$ //

問7

(1) $a^2+1-(a-a^2)$

$= 2a^2-a+1$

$= 2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8} > 0$ （aが実数より）

よって

$a^2+1 > a-a^2$

(2) $x^2+ax+x-a^4-a^2+a^3+a<0$

$x^2+(a+1)x-a^2(a^2+1)+a(a^2+1)<0$

$x^2+(a+1)x+(a^2+1)(a-a^2)<0$

$\{x+(a^2+1)\}\{x+(a-a^2)\}<0$

$a^2+1 > a-a^2$ より

$-(a^2+1) < -(a-a^2)$

よって

$-(a^2+1) < x < -(a-a^2)$

$-a^2-1 < x < -a+a^2$ //

問8

$\sin 105^\circ = \sin(60^\circ+45^\circ)$

$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ //

問9

$(\sin\theta-\cos\theta)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

$1-2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$-2\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{4}$

$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$

$\sin^3\theta - \cos^3\theta = (\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$= \frac{1}{2} \times \left(1+\frac{3}{8}\right)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{11}{8}$

$= \frac{11}{16}$ //

問10

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x + \frac{1}{3^x} - 12 = 0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^x - 12 = 0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right\}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x + 4\right\} = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3, -4$$

ここで $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$ より $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 3$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$x = -1 〃$$

問11

$$\log_{10} 40 = \frac{\log_2 40}{\log_2 10}$$

$$= \frac{\log_2 (5 \times 8)}{\log_2 (5 \times 2)}$$

$$= \frac{\log_2 5 + \log_2 8}{\log_2 5 + \log_2 2}$$

$$= \frac{a+3}{a+1} 〃$$

問12

(1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$

(2)

$f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 3 = -6$

$y - 0 = -6(x-1)$

$y = -6x - 6$ 〃

(3) 接点を $P(a, a^3 - 3a^2 - 3a + 5)$ とする

接線の傾きは $f'(a) = 3a^2 - 6a - 3$

接線の方程式は

$y - (a^3 - 3a^2 - 3a + 5) = (3a^2 - 6a - 3)(x - a)$

点 $(1, 2)$ を通るので

$$2 - a^3 + 3a^2 + 3a - 5 = (3a^2 - 6a - 3)(1 - a)$$

$$-a^3 + 3a^2 + 3a - 3 = -3a^3 + 6a^2 + 3a + 3a^2 - 6a - 3$$

$$2a^3 - 6a^2 + 6a = 0$$

$$a^3 - 3a^2 + 3a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 3) = 0$$

$$a = 0$$

よって

$y - 5 = -3(x - 0)$

$y = -3x + 5$ 〃

問13

$2x^2-2=6$

$2x^2=8$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$-2 \leqq x \leqq 2$ で $6 > 2x^2-2$ より

$S=\int_{-2}^{2}\{6-(2x^2-2)\}\,dx$

$=\frac{|2|}{6}\{2-(-2)\}^3$

$=\frac{2}{6}\times 4^3$

$=\frac{64}{3}$ //