

久留米高専編入学試験 (数学問題)

問題 (平成 20 年度)

1 次の各問に答えよ。(30 点)

- (1) 3 つの数 $-1, x, y$ はこの順に等差数列をなし, $y, 6, x$ はこの順に等比数列をなす. この時, x, y を求めよ.
- (2) 不等式 $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) < 3$ を解け.
- (3) 平面上に, 縦に 8 本の平行線が 2cm 間隔で並び, それらに垂直に 5 本の平行線が 3cm の間隔で並んでいる. これらの平行線でできる図形のうち, 正方形は何個あるか.

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して, 次の問に答えよ。(20 点)

- (1) $P^{-1}AP$ を求めよ.
- (2) A^n を求めよ.

3 $x > 0$ の時, 不等式 $x < \sin x + \frac{x^2}{2}$ を証明せよ。(25 点)

4 定積分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi \sin x - ax)^2 dx$$

を最小にする a の値, およびその最小値を求めよ。(25 点)

5 xy 平面上の曲線 $y = e^x$ ($x < 1$) 上の点 $P(t, e^t)$ における接線が x 軸, y 軸と交わる点をそれぞれ A, B とする時, $\triangle OAB$ の面積の最大値を求めよ. ただし, O は xy 平面の原点とする。(25 点)

6 $0 < r < a$ とする. 円 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。(25 点)

正解(平成20年度)

1 次の各問に答えよ。(30点)

- (1) 数列 $-1, x, y$ は等差数列であるから

$$2x = -1 + y \quad \text{ゆえに} \quad y = 2x + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

数列 $y, 6, x$ は等比数列であるから $6^2 = xy \quad \cdots \textcircled{2}$

① を ② に代入すると

$$36 = x(2x + 1) \quad \text{ゆえに} \quad (x - 4)(2x + 9) = 0$$

これを解いて $x = 4, -\frac{9}{2}$

① より $(x, y) = (4, 9), \left(-\frac{9}{2}, -8\right)$

- (2) 真数は正であるから $x + 1 > 0$ かつ $x + 3 > 0$

ゆえに $x > -1 \quad \cdots \textcircled{1}$

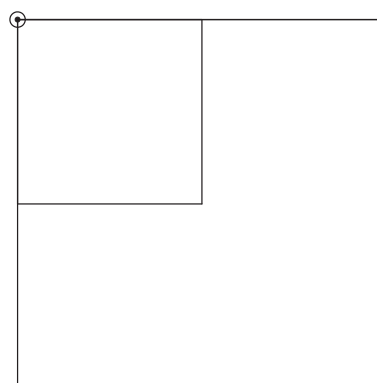
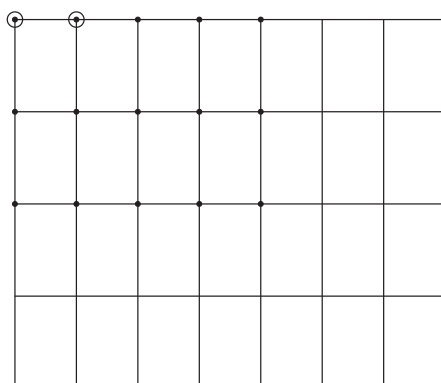
与えられた不等式から $\log_2(x + 1)(x + 3) < \log_2 2^3$

底 2 は 1 より大きいから $(x + 1)(x + 3) < 2^3$

ゆえに $(x - 1)(x + 5) < 0$ これを解いて $x < -5, 1 < x \quad \cdots \textcircled{2}$

①, ② の共通範囲を求めて $1 < x$

- (3) 下の図のように、正方形は $6\text{cm} \times 6\text{cm}$ が 15 個、 $12\text{cm} \times 12\text{cm}$ が 2 個できる。
よって $15 + 2 = 17$ (個)



2 (1) $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ であるから

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) (1) の結果から

$$(P^{-1}AP)^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n \quad \text{ゆえに} \quad P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & -2^{n+1} + 2 \cdot 3^n \\ 2^n - 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 $g(x) = \sin x + \frac{x^2}{2} - x$ とおくと

$$g'(x) = \cos x + x - 1, \quad g''(x) = 1 - \sin x$$

$g''(x) \geq 0$ より, $g'(x)$ は単調増加.

また, $g'(0) = 0$ であるから, $x > 0$ のとき, $g'(x) > 0$

ゆえに, $g(x)$ は単調増加で, $g(0) = 0$ であるから

$x > 0$ のとき $g(x) > 0$, よって, $x > 0$ のとき

$$\sin x + \frac{x^2}{2} - x > 0 \quad \text{すなわち} \quad x < \sin x + \frac{x^2}{2}$$

4

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi \sin x - ax)^2 dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi^2 \sin^2 x - 2\pi ax \sin x + a^2 x^2) dx \\
&= \left[\pi^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right) + 2\pi a(x \cos x - \sin x) + \frac{a^2 x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi^3}{24} a^2 - 2\pi a + \frac{\pi^3}{4} \\
&= \frac{\pi^3}{24} \left(a^2 - \frac{48}{\pi^2} a \right) + \frac{\pi^3}{4} \\
&= \frac{\pi^3}{24} \left\{ \left(a - \frac{24}{\pi^2} \right)^2 - \left(\frac{24}{\pi^2} \right)^2 \right\} + \frac{\pi^3}{4} \\
&= \frac{\pi^3}{24} \left(a - \frac{24}{\pi^2} \right)^2 - \frac{24}{\pi} + \frac{\pi^3}{4}
\end{aligned}$$

よって $a = \frac{24}{\pi^2}$ のとき, 最小値 $\frac{\pi^3}{4} - \frac{24}{\pi}$

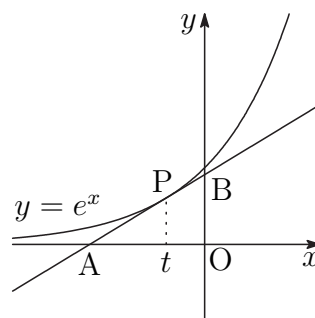
5 $y = e^x$ を微分すると $y' = e^x$

$P(t, e^t)$ における接線の方程式は

$$y - e^t = e^t(x - t) \quad \text{ゆえに} \quad y = e^t(x - t + 1)$$

x 軸, y 軸との交点の座標は, それぞれ

$$A(t - 1, 0), B(0, (1 - t)e^t)$$



$\triangle OAB$ の面積を $S(t)$ とすると, $t < 1$ に注意して

$$S(t) = \frac{1}{2}(1 - t)^2 e^t$$

これを t で微分すると $S'(t) = \frac{1}{2}(t + 1)(t - 1)e^t$

$S(t)$ の増減表は, 次のようになる.

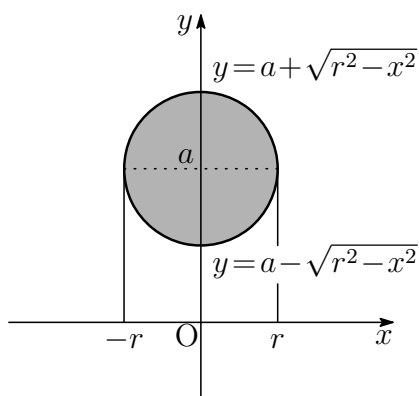
t	$\cdots$	-1	$\cdots$	(1)
$S'(t)$	$+$	0	$-$	
$S(t)$	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	(0)

よって, $t = -1$ のとき最大値 $\frac{2}{e}$

6 $x^2 + (y - a)^2 = r^2$ を y について解くと

$$y = a \pm \sqrt{r^2 - x^2}$$

半円 $y = a + \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および2直線 $x = -r$, $x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V_1 , 半円 $y = a - \sqrt{r^2 - x^2}$ と x 軸および2直線 $x = -r$, $x = r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに1回転してできる回転体の体積を V_2 とすると



$$V_1 = \pi \int_{-r}^r (a + \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx, \quad V_2 = \pi \int_{-r}^r (a - \sqrt{r^2 - x^2})^2 dx$$

よって
$$V = V_1 - V_2 = 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

$$= 4\pi a \times \frac{\pi r^2}{2} = 2\pi^2 r^2 a$$

問題(平成21年度)

1 次の問に答えよ。(30点)

- (1) 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1$ ($n = 1, 2, \dots$) で定めるとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ.
- (2) $\frac{1}{25} \leq x \leq 25$ のとき, 関数 $y = (\log_5 x)^2 - 2 \log_5 x - 4$ の最大値および最小値を求めよ.
- (3) $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ のとき, $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha}$ の値を求めよ.

2 5個の数字0,1,3,5,7から異なる3個の数字を選んで, それらを係数とする x についての2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ をつくるとき, 次の問に答えよ。(20点)

- (1) 2次方程式はいくつできるか.
- (2) 異なる2つの実数解をもつ2次方程式はいくつできるか.

3 次の問に答えよ。(25点)

- (1) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ とするとき, a, b, c の値を求めよ.
- (2) (1) で求めた a, b, c の値が, それぞれ三角形 ABC の辺 BC, CA, AB の長さであるとき, 角 C の大きさを求めよ.

4 次の問に答えよ。(25点)

- (1) 関数 $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ の極値を求めよ.
- (2) 方程式 $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + k = 0$ が, 異なる4つの実数解をもつとき, 定数 k の値の範囲を求めよ.

5 次の問に答えよ。(25 点)

(1) 不定積分 $\int x \cos 2x \, dx$ を求めよ.

(2) $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ のとき, 関数 $f(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^x t \cos 2t \, dt$ の最大値および最小値を求めよ.

6 次の問に答えよ。(25 点)

(1) 曲線 $y = e^x$ 上の点 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{e}\right)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) (1) で求めた接線と曲線 $y = e^x$ および y 軸で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ.

正解(平成21年度)

$$1 \quad (1) \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$c = \frac{1}{3}c + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{とおくと, } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より } a_{n+1} - c = \frac{1}{3}(a_n - c)$$

$$\textcircled{2} \text{ より, } c = \frac{3}{2} \text{ より } a_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \left(a_n - \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{ゆえに } a_n - \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \left(a_1 - \frac{3}{2} \right)$$

$$\text{したがって } a_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3^{n-1}} \quad \text{よって } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3}{2}$$

$$\text{補足 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha \text{ とおくと, } \textcircled{1} \text{ より}$$

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha + 1 \quad \text{これを解いて } \alpha = \frac{3}{2}$$

$$(2) \quad \frac{1}{25} \leq x \leq 25 \text{ より, } t = \log_5 x \text{ とおくと } -2 \leq t \leq 2$$

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 2t - 4 & (-2 \leq t \leq 2) \\ &= (t-1)^2 - 5 \end{aligned}$$

$$t = -2 \quad \text{すなわち } x = -25 \text{ のとき最大値 } 4$$

$$t = 1 \quad \text{すなわち } x = 5 \text{ のとき最小値 } -5$$

$$(3) \quad \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \text{ より } \cos \alpha \leq 0 \text{ であるから}$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \left(-\frac{3}{4} \right)}{1 - \left(-\frac{3}{4} \right)} = \frac{1}{7}$$

2 (1) a の選び方は, 0 を除く 4 通り.

その各々に対して, b, c の選び方は, 残りの 4 個から 3 個選ぶ ${}_4P_3$ 通り.

よって, 求める個数は $4 \times {}_4P_3 = 4 \times 4 \cdot 3 = 48$ (個)

(2) 異なる 2 つの実数解をもつとき, $b^2 - 4ac > 0$ であるから

$c = 0$ のとき, a, b の選び方は ${}_4P_2$ (通り)

$(a, c) = (1, 3), (3, 1)$ のとき $b = 5, 7$ で 2×2 (通り)

$(a, c) = (1, 5), (5, 1)$ のとき $b = 7$ で 2 (通り)

よって, 求める個数は ${}_4P_2 + 2 \times 2 + 2 = 18$ (通り)

3 (1) $a = -1 \times 3 + (-4) \times 5 + 4 \times 7 = 5$

$b = 1 \times 3 + (-3) \times 5 + 4 \times 7 = 16$

$c = 0 \times 3 + (-6) \times 5 + 7 \times 7 = 19$

(2) (1) の結果を余弦定理に適用すると

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 16^2 - 19^2}{2 \cdot 5 \cdot 16} = -\frac{1}{2}$$

よって $C = 120^\circ$

4 (1) $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ を微分すると

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x^2 + x - 2)$$

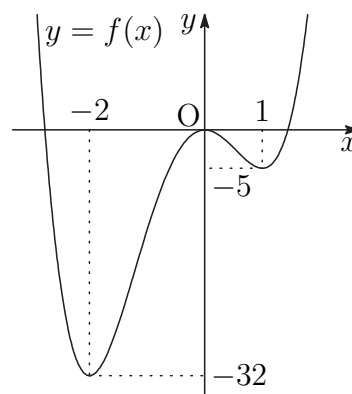
$$= 12x(x+2)(x-1)$$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-32	$\nearrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$

(2) 方程式 $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + k = 0$ の実数解の個数は, 曲線 $y = 3x^3 + 4x^3 - 12x^2$ と直線 $y = -k$ の共有点の個数である. したがって, この方程式が異なる 4 つの実数解をもつとき, (1) の結果から

$$-5 < -k < 0 \quad \text{よって} \quad 0 < k < 5$$



5 (1) (部分積分法を用いる)

$$\begin{aligned}
 \int x \cos 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int x(\sin 2x)' \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^x t \cos 2t \, dt$ を微分すると $f'(x) = x \cos 2x$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}$

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$f(0) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$f(x)$ の増減表は

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\dots$	0	$\dots$	$\frac{\pi}{4}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{4}$

よって, $x = \frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\frac{\pi}{4}$

$x = 0$ のとき最小値 $\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}$

6 (1) $y = e^x$ を微分すると $y' = e^x$

曲線 $y = e^x$ 上の点 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ における接線の方程式は

$$y - \sqrt{e} = \sqrt{e} \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \sqrt{e}x + \frac{1}{2}\sqrt{e}$$

(2) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} \frac{V}{\pi} &= \int_0^{\frac{1}{2}} (e^x)^2 dx - \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \sqrt{e} \left(x + \frac{1}{2}\right) \right\}^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - e \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{1}{2}\right)^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(e - 1) - \frac{7}{24}e \\ &= \frac{5}{24}e - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって
$$V = \frac{\pi(5e - 12)}{24}$$

問題(平成22年度)

1 次の問に答えよ。(30点)

- (1) 6^{100} は何けたの整数か答えよ。ただし, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。
- (2) 方程式 $2^{3x+2} - 41 \times 2^{2x} + 37 \times 2^{x+1} - 16 = 0$ を解け。
- (3) $\vec{a} = (1, 0, 3)$, $\vec{b} = (2, -1, 1)$, $\vec{x} = (1, 2, 3)$ とする。ベクトル $\vec{x} + p\vec{a} + q\vec{b}$ がベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の両方に直交するとき, 定数 p, q の値を求めよ。

2 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ について, 次の問に答えよ。(20点)

- (1) A^2 を求めよ。
- (2) A^{2010} を求めよ。

3 次の問に答えよ。(40点)

- (1) 不定積分 $\int \frac{\log x}{x^2} dx$ を求めよ。
- (2) $1 < x < 2$ のとき, 不等式 $\frac{\log x}{x^2} > \frac{\log x}{4}$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) 2 曲線 $y = \frac{\log x}{x^2}$ と $y = \frac{\log x}{4}$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

4 関数 $f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^x (\sin t - \cos t)^4 dt$ について, 次の問に答えよ。(30点)

- (1) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。
- (2) 極限 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$ を求めよ。

5 2 曲線 $y = x^3$, $y = x^2$ で囲まれる図形について, 次の問に答えよ。(30点)

- (1) この図形を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。
- (2) この図形を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

正解(平成22年度)

1 (1) $\log_{10} 6^{100} = 100(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 100(0.3010 + 0.4771) = 77.81$ より

$$\begin{aligned} 77 &< \log_{10} 6^{100} < 78 \\ \log_{10} 10^{77} &< \log_{10} 6^{100} < \log_{10} 10^{78} \end{aligned}$$

ゆえに $10^{77} < 6^{100} < 10^{78}$ よって 6^{100} は 78 桁の整数

(2) $t = 2^x$ とおくと, 与えられた方程式は

$$\begin{aligned} 4t^3 - 41t^2 + 74t - 16 &= 0 \\ (t-2)(4t^2 - 33t + 8) &= 0 \\ (t-2)(t-8)(4t-1) &= 0 \end{aligned}$$

$t > 0$ に注意して $t = \frac{1}{4}, 2, 8$ よって $x = -2, 1, 3$

(3) $\vec{x} + p\vec{a} + q\vec{b}$ がベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の両方に垂直であるから

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{x} + p\vec{a} + q\vec{b}) &= 0 & \vec{b} \cdot (\vec{x} + p\vec{a} + q\vec{b}) &= 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{x} + p|\vec{a}|^2 + q\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 & \vec{b} \cdot \vec{x} + p\vec{a} \cdot \vec{b} + q|\vec{b}|^2 &= 0 \end{aligned}$$

ここで, $\vec{a} = (1, 0, 3), \vec{b} = (2, -1, 1), \vec{x} = (1, 2, 3)$ より

$$10 + 10p + 5q = 0 \qquad 3 + 5p + 6q = 0$$

これを解いて $p = -\frac{9}{7}, q = \frac{4}{7}$

2 (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(2) (1) の結果から $A^2 = -E$

よって $A^{2010} = (A^2)^{1005} = (-E)^{1005} = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

3 (1) (部分積分法を用いる)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\log x}{x^2} dx &= - \int \left(\frac{1}{x} \right)' \log x dx \\
 &= -\frac{1}{x} \log x + \int \frac{1}{x} (\log x)' dx \\
 &= -\frac{\log x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx \\
 &= -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

(2) $1 < x < 2$ のとき, $\frac{1}{x^2} > \frac{1}{4}$, $\log x > 0$ であるから

$$\frac{\log x}{x^2} > \frac{\log x}{4}$$

(3) 2 曲線 $y = \frac{\log x}{x^2}$ と $y = \frac{\log x}{4}$ の共有点の x 座標は $x = 1, 2$
 求める図形の面積を S とすると, (1) および (2) により

$$\begin{aligned}
 S &= \int_1^2 \left(\frac{\log x}{x^2} - \frac{\log x}{4} \right) dx \\
 &= \left[-\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{4}x(\log x - 1) \right]_1^2 = \frac{3}{4} - \log 2
 \end{aligned}$$

4 (1) $f(x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^x (\sin t - \cos t)^4 dt$ より

$$f'(x) = (\sin x - \cos x)^4$$

(2) (1) の結果および $f(\frac{\pi}{4}) = 0$ より

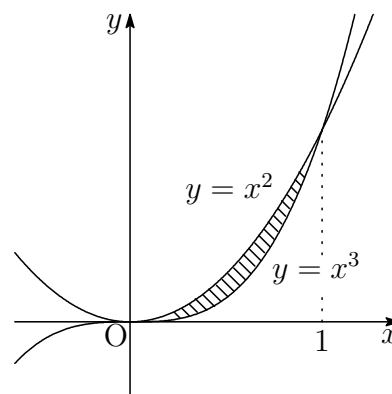
$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}} \\
 &= f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \\
 &= \left(\sin \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{4} \right)^4 = 0
 \end{aligned}$$

5 (1) $y = x^3$ と $y = x^2$ の共有点の x 座標は

$$x^3 = x^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0, 1$$

求める回転体の体積を V_1 とすると

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{\pi} &= \int_0^1 \{(x^2)^2 - (x^3)^2\} dx \\ &= \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{2}{35} \end{aligned}$$



よって $V_1 = \frac{2}{35}\pi$

(2) 求める回転体の体積を V_2 とすると

$$\frac{V_2}{2\pi} = \int_0^1 x(x^2 - x^3) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{20}$$

よって, 求める体積 V_2 は $V_2 = \frac{\pi}{10}$

バウムクーヘン型求積法

$a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x) \geq 0$ のとき, $y = f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

問題(平成23年度)

1 次の問に答えよ。(30点)

- (1) $x^3 - 3x + a = 0$ が異なる3つの実数解をもつような、定数 a の値の範囲を求めよ。
- (2) 不等式 $\sqrt{3} \sin x < \log_9 8 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3$ ($0 \leq x < 2\pi$) を解け。
- (3) $\sin \theta + 2 \cos \theta$ の値が最大となるときの $\sin \theta$ の値を求めよ。

2 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ とするとき、次の問に答えよ。(20点)

- (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ ($0 \leq \theta \leq \pi$) を求めよ。
- (2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の作る平行四辺形の面積を求めよ。

3 $a_5 = \frac{5}{3}$, $a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、次の問に答えよ。(20点)

- (1) a_1 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を求めよ。

4 $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$ は、点 $(1, 0)$ を通る。ただし、 a, b は定数とする。この曲線上の点 $(1, 0)$ における接線を l とするとき、次の問に答えよ。(30点)

- (1) l を a を用いて表せ。
- (2) l が $y = x^3 - x$ に接するときの a の値を求めよ。

5 曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ について、次の問に答えよ。(30点)

- (1) この曲線と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (2) (1) の図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積を求めよ。

6 a を正の定数とするとき、方程式 $e^{x-1} - ax = a$ の実数解の個数を調べよ。(20点)

正解(平成23年度)

1 (1) $x^3 - 3x + a = 0$ より $a = -x^3 + 3x$

$y = -x^3 + 3x$ について

$$\begin{aligned} y' &= -3x^2 + 3 \\ &= -3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

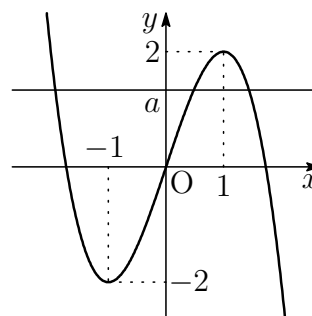
y の増減表は、右のようになる。

よって、 $y = -x^3 + 3x$ のグラフは、

右の図のようになる。

求める a の値の範囲は、このグラフと直線 $y = a$ が異なる3個の共有点をもつ範囲であるから

$$-2 < a < 2$$



$$\begin{aligned} (2) \log_9 8 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3 &= \frac{\log_2 8}{\log_2 9} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 2} \times \frac{\log_2 3}{\log_2 5} \\ &= \frac{3}{2 \log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{1} \times \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

したがって、与えられた不等式は

$$\sqrt{3} \sin x < \frac{3}{2} \quad \text{すなわち} \quad \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ の範囲でこれを解くと $0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} < x < 2\pi$

$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \cdots (*)$$

を満たす α をとると

$$\begin{aligned} \sin \theta + 2 \cos \theta &= \sqrt{5}(\sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha) \\ &= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$

$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ (n は自然数) のとき最大値 $\sqrt{5}$ をとるので、このとき

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2n\pi$$

$$\text{よって} \quad \sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha + 2n\pi \right) = \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

2 (1) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ より, $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 7$ であるから

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7$$

これに, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ を代入すると

$$2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 7 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -3$$

したがって $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-3}{2 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$

$0 \leq \theta \leq \pi$ であるから $\theta = \frac{2}{3}\pi$

(2) 求める平行四辺形の面積は

$$\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 - (-3)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

3 (1) $a_5 = \frac{5}{3}$, $a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) により

$$\begin{array}{lll} a_5 = \frac{4}{4 - a_4} \text{ より} & \frac{5}{3} = \frac{4}{4 - a_4} \text{ を解いて} & a_4 = \frac{8}{5} \\ a_4 = \frac{4}{4 - a_3} \text{ より} & \frac{8}{5} = \frac{4}{4 - a_3} \text{ を解いて} & a_3 = \frac{3}{2} \\ a_3 = \frac{4}{4 - a_2} \text{ より} & \frac{3}{2} = \frac{4}{4 - a_2} \text{ を解いて} & a_2 = \frac{5}{3} \\ a_2 = \frac{4}{4 - a_1} \text{ より} & \frac{5}{3} = \frac{4}{4 - a_1} \text{ を解いて} & a_1 = \frac{8}{5} \end{array}$$

(2) (1) の結果から, $a_4 = a_1$ であるから

$$\begin{aligned} a_1 &= a_4 = a_7 = \dots = \frac{8}{5} \\ a_2 &= a_5 = a_8 = \dots = \frac{5}{3} \\ a_3 &= a_6 = a_9 = \dots = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって, m を自然数とすると, 求める一般項 a_n は

$$\left\{ \begin{array}{ll} n = 3m - 2 \text{ のとき} & a_n = \frac{8}{5} \\ n = 3m - 1 \text{ のとき} & a_n = \frac{5}{3} \\ n = 3m \text{ のとき} & a_n = \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

4 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + ax + b$ を微分すると $y' = -x + a$

$x = 1$ のとき $y' = -1 + a$

l は点 $(1, 0)$ を通り, 傾き $-1 + a$ の直線であるから

$$y - 0 = (-1 + a)(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = (a - 1)x - a + 1$$

(2) $y = x^3 - x$ を微分すると $y' = 3x^2 - 1$

l と $y = x^3 - x$ の接点の x 座標を p とすると

$$(a - 1)(p - 1) = p^3 - p \cdots \textcircled{1}, \quad 3p^2 - 1 = a \cdots \textcircled{2}$$

② を ① に代入すると

$$(3p^2 - 2)(p - 1) = p^3 - p \quad \text{整理すると} \quad (p - 1)(2p^2 - p - 2) = 0$$

これを解くと $p = 1, \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$

② により $p = 1$ のとき $a = 2$

$$p = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \text{ のとき } a = \frac{19 \pm 3\sqrt{17}}{8} \quad (\text{複号同順})$$

よって $a = 2, \frac{19 \pm 3\sqrt{17}}{8}$

5 (1) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \cdots \textcircled{1}$ と x 軸および y 軸との交点は $(0, 4), (4, 0)$

① を y について解くと

$$y = (2 - \sqrt{x})^2 = x - 4\sqrt{x} + 4$$

よって, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 (x - 4\sqrt{x} + 4) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + 4x \right]_0^4 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

別解 1 $t = \sqrt{x}$ とおくと, $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$

求める面積を S とすると

x	$0 \longrightarrow 4$
t	$0 \longrightarrow 2$

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2 dx \\
 &= \int_0^2 (2 - t)^2 \cdot 2t dt = \int_0^2 2(t - 2)^2 \{(t - 2) + 2\} dt \\
 &= \int_0^2 \{2(t - 2)^3 + 4(t - 2)^2\} dt \\
 &= \left[\frac{1}{2}(t - 2)^4 + \frac{4}{3}(t - 2)^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

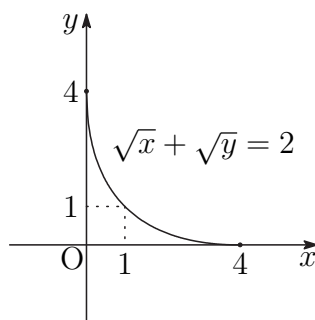
別解 2 $u = 2 - \sqrt{x}$ とおくと,

$$x = (u - 2)^2, \quad \frac{dx}{du} = 2(u - 2)$$

x	$0 \longrightarrow 4$
u	$2 \longrightarrow 0$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^2 dx \\
 &= \int_2^0 u^2 \cdot 2(u - 2) du = \int_2^0 (2u^3 - 4u^2) du \\
 &= \left[\frac{1}{2}u^4 - \frac{4}{3}u^3 \right]_2^0 = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$



(2) $t = \sqrt{x}$ とおくと, $x = t^2$, $\frac{dx}{dt} = 2t$

求める体積を V とすると

x	$0 \longrightarrow 4$
t	$0 \longrightarrow 2$

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^4 dx \\
 &= \int_0^2 (2 - t)^4 \cdot 2t dt = \int_0^2 2(t - 2)^4 \{(t - 2) + 2\} dt \\
 &= \int_0^2 \{2(t - 2)^5 + 4(t - 2)^4\} dt \\
 &= \left[\frac{1}{3}(t - 2)^6 + \frac{4}{5}(t - 2)^5 \right]_0^2 = \frac{64}{15}
 \end{aligned}$$

よって, 求める体積 V は $V = \frac{64}{15}\pi$

別解 $u = 2 - \sqrt{x}$ とおくと

$$x = (u - 2)^2, \quad \frac{dx}{du} = 2(u - 2)$$

x	$0 \longrightarrow 4$
u	$2 \longrightarrow 0$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
 \frac{V}{\pi} &= \int_0^4 (2 - \sqrt{x})^4 dx \\
 &= \int_2^0 u^4 \cdot 2(u - 2) du = \int_2^0 (2u^5 - 4u^4) du \\
 &= \left[\frac{1}{3}u^6 - \frac{4}{5}u^5 \right]_2^0 = \frac{64}{15}
 \end{aligned}$$

よって, 求める体積 V は $V = \frac{64}{15}\pi$

6 $e^{x-1} - ax = a$ を a について解くと $a = \frac{e^{x-1}}{x+1}$

$$f(x) = \frac{e^{x-1}}{x+1} \text{ とおくと } f'(x) = \frac{xe^{x-1}}{(x+1)^2}$$

$f(x)$ の増減は次のようになる .

x	$\cdots$	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	$\frac{1}{e}$	$\nearrow$

$$\text{また } \lim_{x \rightarrow -1-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

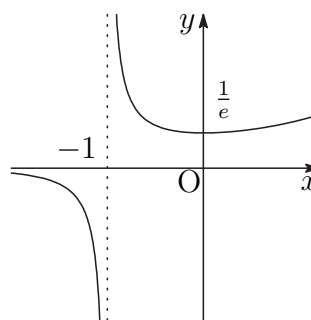
ゆえに, $y = f(x)$ のグラフは, 右の図のようになる .

このグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数は, 求める実数解の個数と一致する . したがって

$$0 < a < \frac{1}{e} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$a = \frac{1}{e} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$a > \frac{1}{e} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$



別解 $e^{x-1} = a(x+1)$ より, $y = e^{x-1} \cdots \textcircled{1}$, $y = a(x+1) \cdots \textcircled{2}$ とおく .

① を微分すると $y' = e^{x-1}$

① と ② が $x = p$ で接するとき

$$e^{p-1} = a(p+1), \quad e^{p-1} = a \quad \text{ゆえに} \quad ap = 0$$

$$a > 0 \text{ であるから } p = 0, \quad a = \frac{1}{e}$$

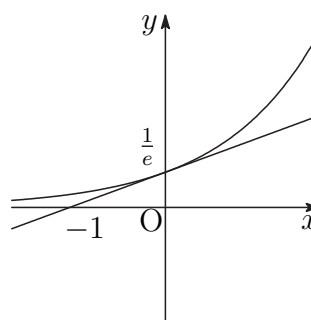
このとき, ① と ② は右の図のように接する .

② は点 $(-1, 0)$ を通り, 傾き a の直線である .

① と ② の共有点の個数は, 求める実数解の個数と一致する .

したがって

$$0 < a < \frac{1}{e} \text{ のとき } 0 \text{ 個}, \quad a = \frac{1}{e} \text{ のとき } 1 \text{ 個}, \quad a > \frac{1}{e} \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$



問題(平成24年度)

1 次の問いに答えよ。(20点)

- (1) 整式 $(x+1)^5$ を整式 $(x-1)^2$ で割った余りを求めよ。
- (2) 不等式 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^3 + 2 < 0$ を解け。

2 放物線 $y = x^2 + 2x \sin \theta + \cos^2 \theta$ (θ : 定数) について, 次の問いに答えよ。(30点)

- (1) 頂点の座標を求めよ。
- (2) 頂点と原点との距離を $\cos 2\theta$ を用いて表せ。
- (3) θ の値が $0 \leq \theta < \pi$ の範囲で変化するとき, 頂点と原点との距離の最小値を求めよ。

3 空間内の次のような3つのベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を考える。ベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ の成分表示は, $\vec{a} = (1, 1, 0), \vec{b} = (1, 0, 1)$ であり, $\vec{c}$ の大きさは1で, $\vec{a}$ と $\vec{c}$ のなす角および $\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角はともに 60° である。このとき, 次の問いに答えよ。(20点)

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{c}$ の値を求めよ。
- (2) ベクトル $\vec{c}$ の成分表示をかけ。

4 次の問いに答えよ。(30点)

- (1) 関数 $f(x) = 6e^x + x^2 - x^3 + 2x - 6$ の第2次導関数 $f''(x)$ を求めよ。
- (2) 不等式 $6e^x + x^2 > x^3 - 2x + 6$ ($x > 0$) を証明せよ。

5 曲線 $y = \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) を考える。このとき, 次の問いに答えよ。(30点)

- (1) 曲線 C と x 軸および直線 $x = \frac{\pi}{4}$ とで囲まれた部分の面積を求めよ。
- (2) 曲線 C と x 軸および直線 $x = \frac{\pi}{4}$ とで囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。

6 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ b & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ とする。任意のベクトル $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に対して, 内積に関する等式 $\vec{Ax} \cdot \vec{Ax} = \vec{x} \cdot \vec{x}$ が成り立つとき, a, b の値を求めよ。(20点)

正解(平成24年度)

1 (1) $P(x) = (x+1)^5$ とおくと, $P'(x) = 5(x+1)^4$ より

$$P(1) = 32, P'(1) = 80$$

$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りを $ax+b$ とおくと

$$P(1) = a+b, \quad P'(1) = a \quad \text{ゆえに} \quad a = 80, \quad b = -48$$

よって, 求める余りは $80x - 48$

(2) 与えられた不等式から

$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 2) < 0$$

したがって $1 < \log_3 x < 2$ よって $3 < x < 9$

2 (1) 放物線の方程式から $y = (x + \sin \theta)^2 + \cos 2\theta$

よって, 頂点の座標は $(-\sin \theta, \cos 2\theta)$

(2) 頂点と原点との距離を d とすると, (1) の結果から

$$d^2 = (-\sin \theta)^2 + \cos^2 2\theta = \cos^2 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}$$

よって, 求める距離は $\sqrt{\cos^2 2\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2}}$

(3) $t = \cos 2\theta$ とおくと, $0 \leq \theta < \pi$ より $-1 \leq t \leq 1$

このとき, (2) の結果から

$$d^2 = t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} = \left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}$$

よって, 求める最小値は $\frac{\sqrt{7}}{4}$

3 (1) $\vec{a} = (1, 1, 0)$ より $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{c}| = 1$ であるから

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{c}| \cos 60^\circ = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) (1) と同様にして $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

このとき , $\vec{c} = (x, y, z)$ とおくと

$$x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x + z = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad y = z = \frac{\sqrt{2}}{2} - x \quad \dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{c}|^2 = 1 \text{ であるから } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

① を ② に代入すると

$$x^2 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x \right)^2 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x \left(x - \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = 0$$

$$\text{これを解いて } x = 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって } \vec{c} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad \text{または} \quad \vec{c} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

4 (1) $f(x) = 6e^x + x^2 - x^3 + 2x - 6$ より , $f'(x) = 6e^x + 2x - 3x^2 + 2$ であるから

$$f''(x) = 6e^x + 2 - 6x$$

(2) (1) の結果から $f'''(x) = 6e^x - 6$

したがって

$$x > 0 \text{ のとき , } f'''(x) > 0, f''(0) = 8 \text{ であるから } f''(x) > 0$$

$$x > 0 \text{ のとき , } f''(x) > 0, f'(0) = 8 \text{ であるから } f'(x) > 0$$

$$x > 0 \text{ のとき , } f'(x) > 0, f(0) = 0 \text{ であるから } f(x) > 0$$

よって , $x > 0$ のとき

$$6e^x + x^2 - x^3 + 2x - 6 > 0 \quad \text{よって} \quad 6e^x + x^2 > x^3 - 2x + 6$$

5 (1) 求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \, dx = \left[-\log \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \log 2$$

(2) 求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx \\ &= \pi \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

6 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ b & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} A\vec{x} \cdot A\vec{x} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ a & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ b & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + b^2 & \frac{a+b}{\sqrt{2}} \\ \frac{a+b}{\sqrt{2}} & a^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2} + b^2 \right) x^2 + \sqrt{2}(a+b)xy + \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) y^2 \end{aligned}$$

したがって

$$A\vec{x} \cdot A\vec{x} - \vec{x} \cdot \vec{x} = \left(b^2 - \frac{1}{2} \right) x^2 + \sqrt{2}(a+b)xy + \left(a^2 - \frac{1}{2} \right) y^2$$

条件から

$$a^2 - \frac{1}{2} = 0, \quad a + b = 0, \quad b^2 - \frac{1}{2} = 0$$

よって $(a, b) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ (複号同順)

問題(平成 25 年度)

1 次の問いに答えよ。(40 点)

- (1) 等式 $3x + 2y = 33$ をみたす 1 以上の整数の組 (x, y) をすべて求めよ.
- (2) $(x + y + z)^7$ の展開式における xy^3z^3 の係数を答えよ.
- (3) 空間内の 3 点 $A(3, 2, 1)$, $B(0, 0, -1)$, $C(1, 0, 3)$ に対し, $\triangle ABC$ の面積を求めよ.
- (4) 点 A の座標を $\left(3, \frac{9}{4}\right)$ とする. 点 $P(x, y)$ が, $OP : AP = 2 : 1$ をみたしながら動くとき, 点 P の軌跡を求めよ. ただし, O は原点とする.

2 $x > 0$ のとき, $\log(1 + x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$ が成り立つことを証明せよ。(20 点)

3 関数 $y = 2\cos^2 x + 3\cos x \sin x - \sin^2 x$ の最大値および最小値を求めよ. また, それらを与える x の値を求めよ. ただし, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とする.

4 不定積分 $\int \sqrt{1 + x^2} dx$ を, $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ において置換積分することにより求めよ. (20 点)

5 楕円 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ について, 次の問いに答えよ。(30 点)

- (1) 楕円上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式を求めよ.
- (2) 楕円と (1) で求めた接線と x 軸および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

6 p, q を定数とする. 第 n 項が, n が偶数のとき p , n が奇数のとき q で与えられる数列を考える. $P = p + q$, $Q = p - q$ とおくとき, この数列の一般項を P, Q で表せ。(20 点)

正解(平成 25 年度)

1 (1) $3x + 2y = 33$ より $y = \frac{3}{2}(11 - x)$

x, y は 1 以上の整数であるから, $x = 2k - 1$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5$) とおくと

$$y = \frac{3}{2}\{11 - (2k - 1)\} = 3(6 - k)$$

よって $(x, y) = (1, 15), (3, 12), (5, 9), (7, 6), (9, 3)$

(2) $(x + y + z)^7$ の展開式における xy^3z^3 の係数は

$$\frac{7!}{1!3!3!} = 140$$

(3) $A(3, 2, 1), B(0, 0, -1), C(1, 0, 3)$ より

$$\overrightarrow{AB} = (-3, -2, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, -2, 2)$$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ のなす角を θ とすると

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{6}{\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{17}}$$

$$\text{したがって} \quad \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{\frac{14}{17}}$$

$$\text{よって} \quad \triangle ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{17}} = \sqrt{42}$$

(4) P の座標を (x, y) とすると

$$OP^2 = x^2 + y^2, \quad AP^2 = (x - 3)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2$$

$OP : AP = 2 : 1$ より, $4AP^2 = PO^2$ であるから

$$4 \left\{ (x - 3)^2 + \left(y - \frac{9}{4}\right)^2 \right\} = x^2 + y^2$$

$$\text{整理すると} \quad (x - 4)^2 + (y - 3)^2 = \frac{25}{4}$$

よって, 中心 $(4, 3)$, 半径 $\frac{5}{2}$ の円.

補足 線分 OA を $2 : 1$ に内分および外分する点は, それぞれ

$$\left(2, \frac{3}{2}\right), \left(6, \frac{9}{2}\right)$$

求める円はこれらを直径の両端とする円である.

2 $0 < t < x$ とする .

$$1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t} = \frac{(1+t)(1-t+t^2) - 1}{1+t} = \frac{t^3}{1+t} > 0$$

したがって
$$\int_0^x \left(1 - t + t^2 - \frac{1}{1+t}\right) dt > 0$$

よって
$$\log(1+x) < x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

3 $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

しがつて . 与えられた関数は

$$y = \frac{3}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ であるから , $\frac{\pi}{4} \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi$ より

$$x = \frac{\pi}{8} \text{ のとき最大値 } \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最小値 } -1$$

4 $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ より , $\sqrt{1+x^2} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ であるから

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt \\ &= \int \left(\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{4} + \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{8} + \frac{1}{2}t + C \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{1}{2}t + C \end{aligned}$$

ここで , $x + \sqrt{1+x^2} = e^t$ より , $t = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ であるから

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

5 (1) 楕円 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式は

$$\frac{2x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$$

(2) 求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{4} \cdot \pi \sqrt{8} \sqrt{2} = 4 - \pi$$

6 数列の第 n 項を a_n とすると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1 + (-1)^n}{2} p + \frac{1 - (-1)^n}{2} q \\ &= \frac{p + q}{2} + (-1)^n \cdot \frac{p - q}{2} \\ &= \frac{P + (-1)^n Q}{2} \end{aligned}$$