

平成 3 1 年度 八代工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (40 分)

1. 次の計算をせよ.

- (1) $\frac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$
- (2) $\frac{2}{1+i} + 3 + 2i$
- (3) $2^6 \times 3^4 \div 6^5$
- (4) $\log_2 3 \times \log_3 7 \div \log_8 7$

2. 次の方程式・不等式を解け.

- (1) $x^2 + 2x - 5 = 0$
- (2) $9^x = 3^{x-6}$
- (3) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) = -2$
- (4) $2x^2 + 5x - 3 < 0$
- (5) $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}$ (ただし, $0 \leq x < 2\pi$ とする.)

3. 次の問いに答えよ.

- (1) 2 次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ の値を求めよ.
- (2) $\triangle ABC$ において, $a = 2, b = 3, C = 60^\circ$ のとき, c の値を求めよ.
- (3) 2 点 $A(0, 2), B(4, 0)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ.
- (4) 点 $(-1, 3)$ を中心とし, 点 $(2, 5)$ を通る円の方程式を求めよ.

4. 次の問いに答えよ.

- (1) 2 次関数 $y = x^2 + 2ax + 3a$ の最小値が 2 であるとき, 定数 a の値を定めよ.
- (2) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax - 1$ が接するように, 定数 a の値を定めよ.
- (3) 等式 $\frac{x+3}{(x+1)(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように, 定数 a, b の値を定めよ.

5. 次の問いに答えよ.

- (1) $0 \leq x \leq 1$ のとき, 関数 $y = x(x-1)^2$ の最大値を求めよ.
- (2) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}
 1. \quad (1) \quad & \frac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \mathbf{7+4\sqrt{2}} \\
 (2) \quad & \frac{2}{1+i} + 3 + 2i = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} + 3 + 2i = (1-i) + 3 + 2i = \mathbf{4+i} \\
 (3) \quad & 2^6 \times 3^4 \div 6^5 = 2^6 \times 3^4 \div (2^5 \cdot 3^5) = 2^{6-5} \cdot 3^{4-5} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} \\
 (4) \quad & \log_2 3 \times \log_3 7 \div \log_8 7 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 7}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 8 = \mathbf{3}
 \end{aligned}$$

$$2. \quad (1) \quad x^2 + 2x - 5 = 0 \text{ を解の公式に適用すると}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \mathbf{-1 \pm \sqrt{6}}$$

$$(2) \quad 9^x = 3^{x-6} \text{ より, } 3^{2x} = 3^{x-6} \text{ であるから}$$

$$2x = x - 6 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{x = -6}$$

$$(3) \quad \log_{\frac{1}{2}}(x+2) = -2 \text{ より}$$

$$x+2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \quad \text{よって} \quad \mathbf{x = 2}$$

$$(4) \quad 2x^2 + 5x - 3 < 0 \text{ より, } (x+3)(2x-1) < 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{-3 < x < \frac{1}{2}}$$

$$(5) \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) < \frac{1}{2}, \quad \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < 2\pi + \frac{\pi}{6} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5}{3}\pi \quad \text{よって} \quad \mathbf{\frac{\pi}{6} < x < \frac{3}{2}\pi}$$

3. (1) 2次方程式 $x^2 - 3x + 5 = 0$ の2つの解 α, β と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 5 \quad \text{よって} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{3}{5}$$

- (2) 余弦定理により

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 60^\circ = 7$$

$$c > 0 \text{ であるから} \quad \mathbf{c = \sqrt{7}}$$

- (3) 2点 A(0, 2), B(4, 0) の中点を M とすると M(2, 1)

$$\text{直線 AB の傾きは} \quad \frac{0 - 2}{4 - 0} = -\frac{1}{2}$$

求める直線は、点 M(2, 1) を通り、傾き 2 の直線であるから

$$y - 1 = 2(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{y = 2x - 3}$$

- (4) 2点 (-1, 3), (2, 5) 間の距離を r とすると

$$r^2 = (2 + 1)^2 + (5 - 3)^2 = 13$$

$$\text{よって、求める円の方程式は} \quad \mathbf{(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 13}$$

4. (1) 条件から、方程式 $x^2 + 2ax + 3a = 2$, すなわち、 $x^2 + 2ax + 3a - 2 = 0$ が重解をもつから

$$(2a)^2 - 4 \cdot (3a - 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 1)(a - 2) = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{a = 1, 2}$$

- (2) $y = x^2$ と $y = ax - 1$ から y を消去すると

$$x^2 = ax - 1 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - ax + 1 = 0$$

この方程式が重解をもつから、係数について

$$(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 \quad \text{よって} \quad \mathbf{a = \pm 2}$$

- (3) $\frac{x + 3}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$ より

$$x + 3 = a(x + 1) + b(x - 1)$$

上式にそれぞれ、 $x = 1, -1$ を代入すると

$$4 = 2a, \quad 2 = -2b \quad \text{よって} \quad \mathbf{a = 2, b = -1}$$

5. (1) $y = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$ より $y' = 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
y'		+	0	-	
y	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

よって, $x = \frac{1}{3}$ のとき, 最大値 $\frac{4}{27}$

(2) $y = x^2$ と $y = x + 2$ から y を消去すると

$$x^2 = x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = -1, 2$$

よって, 求める面積 S は, x^2 の係数に注意して

$$S = \frac{1}{6} \{2 - (-1)\}^3 = \frac{9}{2}$$