

平成 3 0 年度 八代工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (40 分)

1. 次の計算をせよ .

$$(1) \frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 1}$$

$$(2) \frac{2 - i}{1 + i} + \frac{1 - 2i}{1 - i}$$

$$(3) \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{16}$$

$$(4) 2 \log_2 3 + \log_2 4 - 2 \log_2 18$$

2. 次の方程式・不等式を解け .

$$(1) 3x^2 + 2x + 4 = 0$$

$$(2) \left(\frac{1}{8}\right)^x = 2\sqrt{2}$$

$$(3) \log_2(2x - 1) = -3$$

$$(4) x^2 - 5x - 6 \geq 0$$

$$(5) \begin{cases} 3x - 5 < x + 7 \\ x + 2 > 3 - 2x \end{cases}$$

$$(6) \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{ただし, } 0 \leq x < 2\pi \text{ とする.})$$

3. 次の問いに答えよ .

(1) 2 つの数 $1 + \sqrt{3}$ と $1 - \sqrt{3}$ を解とする 2 次方程式を作れ .

(2) 2 次関数 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の最小値を求めよ . また , そのときの x の値を求めよ .

(3) 2 次関数 $y = kx^2 + x - 3$ のグラフが x 軸と接するときの定数 k の値を求めよ .

(4) 2 次関数 $f(x) = 4x^2 - 3x$ の $x = -2$ から $x = 4$ までの平均変化率を求めよ .

(5) 2 点 $(0, 2)$, $(-4, 6)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ .

(6) $\triangle ABC$ について , $a = 5$, $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$ のとき , 辺 b の値を求めよ .

4. 次の問いに答えよ .

- (1) 曲線 $y = 2x^2 - x + 3$ 上の点 $(2, 9)$ における接線の方程式を求めよ .
- (2) 関数 $y = -2x^3 + 6x^2 - 6$ の極小値を求めよ . また , そのときの x の値を求めよ .
- (3) 不定方程式 $\int (4x - 3)^2 dx$ を求めよ .
- (4) 放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ .

解答

$$1. (1) \frac{x^2 - 4}{x + 1} \div \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 1} = \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 1} \times \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x - 2)(x - 3)} \\ = \frac{(x + 2)(x^2 - x + 1)}{x - 3}$$

$$(2) \frac{2 - i}{1 + i} + \frac{1 - 2i}{1 - i} = \frac{(2 - i)(1 - i) + (1 - 2i)(1 + i)}{(1 + i)(1 - i)} \\ = \frac{3 - 4i - i^2}{1 - i^2} = \frac{4 - 4i}{2} = 2 - 2i$$

$$(3) \sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{10 \times 25 \div 16} = \sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{5}{2}$$

$$(4) 2 \log_2 3 + \log_2 4 - 2 \log_2 18 = 2(\log_2 3 + \log_2 2 - \log_2 18) \\ = 2 \log_2 \frac{2 \cdot 3}{18} = -2 \log_2 3$$

2. (1) $3x^2 + 2x + 4 = 0$ を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{44}i}{6} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{3}$$

$$(2) \left(\frac{1}{8}\right)^x = 2\sqrt{2} \text{ より } (2^{-3})^x = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \quad \text{すなわち} \quad 2^{-3x} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{したがって } -3x = \frac{3}{2} \quad \text{よって} \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$(3) \log_2(2x - 1) = -3 \text{ より}$$

$$2x - 1 = 2^{-3} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{9}{16}$$

$$(4) x^2 - 5x - 6 \geq 0 \text{ より } (x + 1)(x - 6) \geq 0$$

$$\text{よって } x \leq -1, 6 \leq x$$

$$(5) 3x - 5 < x + 7 \text{ より } x < 6 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + 2 > 3 - 2x \text{ より } x > \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } \frac{1}{3} < x < 6$$

$$(6) \cos x < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (0 \leq x < 2\pi) \quad \text{これを解いて} \quad \frac{\pi}{6} < x < \frac{11}{6}\pi$$

3. (1) $\alpha = 1 + \sqrt{3}$, $\beta = 1 - \sqrt{3}$ とおくと $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = -2$

よって $x^2 - 2x - 2 = 0$

(2) $y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x - 1)^2 + 3$

よって $x = 1$ のとき, 最小値 3 をとる.

- (3) $y = kx^2 + x - 3$ が x 軸に接するから, 係数について

$$1^2 - 4 \cdot k \cdot (-3) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = -\frac{1}{12}$$

(4) $f(x) = 4x^2 - 3x$ より, $f(-2) = 22$, $f(4) = 52$

よって $\frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{52 - 22}{6} = 5$

- (5) A(0, 2), B(-4, 6) とし, 線分 AB の中点 C の座標は

$$\left(\frac{0 - 4}{2}, \frac{2 + 6}{2} \right) \quad \text{すなわち} \quad (-2, 4)$$

ゆえに $AC = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$

よって, 求める円の方程式は $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 8$

- (6) $\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 5\sqrt{2}$$

4. (1) $y = 2x^2 - x + 3$ より, $y' = 4x - 1$ であるから, $x = 2$ のとき $y' = 7$

求める接線は, 点 (2, 9) を通り, 傾き 7 の直線であるから

$$y - 9 = 7(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = 7x - 5$$

- (2) $y = -2x^3 + 6x^2 - 6$ より, $y' = -6x^2 + 12x = -6x(x - 2)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\searrow$

よって, $x = 0$ のとき, 極小値 -6

- (3) $(4x - 2)^2 = 16x^2 - 16x + 4$ より

$$\int (4x - 2)^2 dx = \frac{16}{3}x^3 - 8x^2 + 4x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

- (4) $x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$ より, x 軸との共有点の x 座標は $x = -3, 1$

求める面積を S とすると, x^2 の係数に注意して $S = \frac{1}{6}\{1 - (-3)\}^3 = \frac{32}{3}$