

平成 28 年度 八代工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 関数 $y = x^2 - 3x + a \cdots \textcircled{1}$ の最小値を b とする. ただし, a は定数である. 次の問いに答えよ.
 - (1) $b = \frac{5}{4}$ のとき a の値を求めよ.
 - (2) $b > 0$ となる a の値の範囲を求めよ.
 - (3) $\textcircled{1}$ のグラフを原点に関して対称移動してできる関数の最大値が $-\frac{1}{4}$ となった. a の値を求めよ.
 - (4) $\textcircled{1}$ のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ平行移動したら, x 軸との共有点が $(-1, 0), (6, 0)$ となる. a の値を求めよ.
2. $\triangle ABC$ において, $b = 1, C = 60^\circ$ のとき, 次の問いに答えよ. ただし, 3 辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする.
 - (1) c^2 を a を用いて表せ.
 - (2) 角 A が鈍角となる a の値の範囲を求めよ.
 - (3) 角 $A = 75^\circ$ のとき c の値を求めよ.
 - (4) $\triangle ABC$ の面積が 1 のとき a の値を求めよ.
3. 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 1 \cdots \textcircled{1}$ と, $\textcircled{1}$ に垂直で点 $A(6, 3)$ を通る直線との交点を B とする. 次の問いに答えよ.
 - (1) 点 B の座標を求めよ.
 - (2) 2 点 A, B との点 $C(0, 1)$ を通る円の方程式を求めよ.
4. 次の方程式を解け.
 - (1) $8^{x+1} = 32$
 - (2) $\log_2(x - 4) + \log_2 x - 6 = 3$
 - (3) $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$
5. 関数 $f(x) = x(x^2 - 3)$ について, 次の問いに答えよ.
 - (1) $f(x)$ の極値を求めよ.
 - (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

解答

$$1. (1) y = x^2 - 3x + a = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + a - \frac{9}{4} \quad \cdots (*)$$

$$\text{最小値が } \frac{5}{4} \text{ であるから } a - \frac{9}{4} = \frac{5}{4} \quad \text{よって } a = \frac{7}{2}$$

$$(2) (*) \text{ より, } b > 0 \text{ となるのは } a - \frac{9}{4} > 0 \quad \text{よって } a > \frac{9}{4}$$

$$(3) (*) \text{ の最小値が } \frac{1}{4} \text{ であるから } a - \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \quad \text{よって } a = \frac{5}{2}$$

(4) ① を x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

$$y - 2 = (x - 1)^2 - 3(x - 1) + a \quad \text{すなわち } y = x^2 - 5x + a + 6$$

これが $y = (x + 1)(x - 6)$ に一致するから, 定数項を比較して $a = -12$

$$2. (1) \text{ 余弦定理により } c^2 = a^2 + 1^2 - 2a \cdot 1 \cos 60^\circ = a^2 - a + 1$$

$$(2) \text{ 角 } A \text{ が鈍角となるとき } a^2 > b^2 + c^2$$

$b = 1$ および (1) の結果を代入すると

$$a^2 > 1^2 + a^2 - a + 1 \quad \text{これを解いて } a > 2$$

(3) $A = 75^\circ$, $C = 60^\circ$ より, $B = 45^\circ$ であるから, 正弦定理により

$$\frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ} \quad \text{よって } c = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$(4) \frac{1}{2}ab \sin C = 1 \text{ であるから } \frac{1}{2}a \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \quad \text{よって } a = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

3. (1) ① に垂直で点 A(6, 3) を通る直線の方程式は

$$y - 3 = 2(x - 6) \quad \text{すなわち } y = 2x - 9$$

これと ① を連立して解くと B(4, -1)

(2) A(6, 3), B(4, -1), C(0, 1) を通る円の方程式を

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

とおくと

$$6a + 3b + c = -45, \quad 4a - b + c = -17, \quad b + c = -1$$

これを解いて $a = -6$, $b = -4$, $c = 3$

よって, 求める円の方程式は $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0$

4. (1) $8^x = 32$ より $2^{3x} = 2^5$

したがって $3x = 5$ よって $x = \frac{5}{3}$

(2) $\log_2(x-4) + \log_2(x-6) = 3$

真数は正であるから

$$x-4 > 0 \quad \text{かつ} \quad x-6 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 6 \quad \cdots \textcircled{1}$$

方程式から $\log_2(x-4)(x-6) = \log_2 8$

ゆえに $(x-4)(x-6) = 8$ ゆえに $(x-2)(x-8) = 0$

① に注意してこれを解くと $x = 8$

(3) 与えられた方程式から $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ より $\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$ であるから

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi, 2\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{よって} \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{11}{6}\pi$$

5. (1) $f(x) = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = -1, 1$

したがって, $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって, $x = -1$ で極大値 2 , $x = 1$ で極小値 -2 をとる.

(2) $y = f(x)$ は原点に関して対称であるから, 求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x) dx = \left[\frac{x^4}{3} - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}$$

よって, 求める面積は $S = 9$