

平成 27 年度 八代工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 頂点が $(1, -3)$ で、点 $(-1, 5)$ を通る放物線を、直線 $x = 2$ に関して対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。
2. a を定数とするとき、放物線 $y = 3x^2 + 2x - 1$ と直線 $y = ax - 4$ との共有点の個数を求めよ。
3. 四角形 ABCD において、 $\angle A = 120^\circ$ 、 $AB = 5$ 、 $BC = 6$ 、 $CD = 7$ 、 $DA = 3$ とする。次の問いに答えよ。
 - (1) 対角線 BD の長さを求めよ。
 - (2) 四角形 ABCD の面積を求めよ。
4. 点 $A(1, 5)$ と放物線 $y = x^2$ 上を動く点 Q とを結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を表す方程式を求めよ。
5. 2 直線 $x - 2y + 1 = 0$ 、 $3x + y - 5 = 0$ の交点と点 $A(1, 3)$ を通る直線の方程式を求めよ。
6. $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{10^5}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし、 $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。
7. $1 \leq x \leq 8$ のとき、 $y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4$ の最小値とそのときの x の値を求めよ。
8. 関数 $f(x) = ax^3 + 3ax^2 + b$ の $-1 \leq x \leq 1$ における最大値が 8、最小値が 4 であるとき、定数 a 、 b の値を求めよ。ただし、 $a < 0$ とする。
9. 放物線 $y = (x - 1)(x - 3)$ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ。

解答

1. 頂点が
- $(1, -3)$
- の放物線の方程式を

$$y = a(x - 1)^2 - 3$$

とおくと、これが点 $(-1, 5)$ を通るから

$$5 = a(-1 - 1)^2 - 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

したがって、 $y = 2(x - 1)^2 - 3$ を、直線 $x = 2$ に関して対称移動して得られる放物線の方程式は

$$y = 2\{(2 - x) - 1\}^2 - 3 \quad \text{すなわち} \quad y = 2(x - 3)^2 - 3$$

- 2.
- $y = 3x^2 + 2x - 1$
- と
- $y = ax - 4$
- から
- y
- を消去すると

$$3x^2 + 2x - 1 = ax - 4 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + (2 - a)x + 3 = 0$$

上の第2式の判別式を D とすると

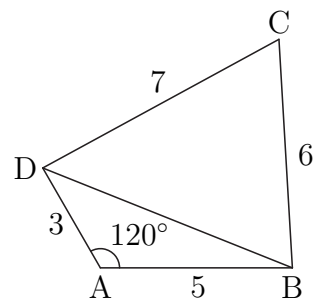
$$\begin{aligned} D &= (2 - a)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= a^2 - 4a - 32 \\ &= (a + 4)(a - 8) \end{aligned}$$

$$\text{上式から} \quad \begin{cases} a < -4, 8 < a \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = -4, 8 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -4 < a < 8 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \end{cases}$$

3. (1)
- $\triangle ABD$
- に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 + 15 = 49 \end{aligned}$$

$BD > 0$ であるから $BD = 7$



- (2) (1) の結果から、 $\triangle BCD$ は、 $BD = CD$ の二等辺三角形であるから、辺 BC の中点を M とすると

$$DM = \sqrt{CD^2 - MD^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot AD \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

よって、求める面積は $\frac{15\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{10}$

4. $P(x, y)$, $Q(t, t^2)$ とおくと, P は線分 AQ の中点であるから

$$x = \frac{1+t}{2}, \quad y = \frac{5+t^2}{2}$$

第1式から $t = 2x - 1$ これを第2式に代入すると

$$y = \frac{5 + (2x - 1)^2}{2} \quad \text{よって} \quad y = 2x^2 - 2x + 3$$

5. 2直線 $x - 2y + 1 = 0$, $3x + y - 5 = 0$ の交点は $\left(\frac{9}{7}, \frac{8}{7}\right)$

この交点と点 $A(1, 3)$ を通る直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{\frac{8}{7} - 3}{\frac{9}{7} - 1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{13}{2}x + \frac{19}{2}$$

別解 2直線 $x - 2y + 1 = 0$, $3x + y - 5 = 0$ の交点を通る直線は, 定数 k を用いて

$$x - 2y + 1 + k(3x + y - 5) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおける. これが, 点 $A(1, 3)$ を通るから

$$1 - 2 \cdot 3 + 1 + k(3 \cdot 1 + 3 - 5) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = 4$$

$k = 4$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$x - 2y + 1 + 4(3x + y - 5) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 13x + 2y - 19 = 0$$

6. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{10^5}$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^n < \log_{10} \frac{1}{10^5} \quad \text{ゆえに} \quad -n \log_{10} 3 < -5$$

$$\text{したがって} \quad n > \frac{5}{\log_{10} 3} = \frac{5}{0.4771} = 10.4 \cdots$$

よって, 上式を満たす最小の自然数 n は 11

7. $t = \log_2 x$ とおくと, $1 \leq x \leq 8$ より

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 4t & (0 \leq t \leq 3) \\ &= (t - 2)^2 - 4 \end{aligned}$$

よって $t = 0$ すなわち $x = 1$ のとき 最大値 0

$t = 2$ すなわち $x = 4$ のとき 最大値 -4

8. $f(x) = ax^3 + 3ax^2 + b$ を微分すると

$$f'(x) = 3ax^2 + 6ax = 3ax(x + 2)$$

$a < 0$ より, $-1 \leq x \leq 1$ における $f(x)$ の増減表は

x	-1	$\dots$	0	$\dots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2a + b$	$\nearrow$	b	$\searrow$	$4a + b$

最大値が 8 , 最小値が 4 であるから

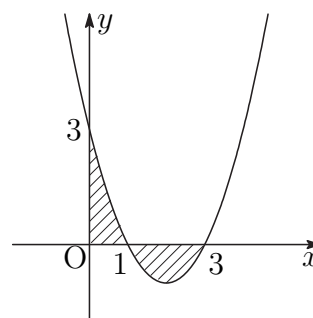
$$b = 8, \quad 4a + b = 4 \quad \text{よって} \quad a = -1, \quad b = 8$$

9. $(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

とする. 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x - 1)(x - 3) dx \\ &\quad - \int_1^3 (x - 1)(x - 3) dx \\ &= \left[F(x) \right]_0^1 - \left[F(x) \right]_1^3 \\ &= 2F(1) - F(0) - F(4) \end{aligned}$$



$$\text{ここで} \quad F(1) = \frac{4}{3}, \quad F(0) = 0, \quad F(4) = \frac{4}{3}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{4}{3}$$