

平成 29 年度 熊本電波工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (80 分)

1. 次の式を簡単にせよ.

(1) $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{7} + 2}$

(2) $\sqrt{1 + \pi - 2\sqrt{\pi}}$

(3) $\frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 3x + 2} \div \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x - 6} \times \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 2x - 15}$

2. 次の方程式, 不等式を解け.

(1) $\sin x + \cos x = 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

(2) $100^x - 12 \cdot 10^x + 20 = 0$

(3) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 3 \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \geq 2$

3. 2 次方程式 $2x^2 + 3x - 3 = 0$ の 2 つの解を α, β とするとき, 次の値を求めよ.

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$$

4. 2 つの三角関数の積を和に直す公式

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

が成り立つことを加法定理を用いて証明せよ.

5. 関数 $f(x) = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 5$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $x^2 + 2x = t$ と置くと, t のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) $y = f(x)$ のグラフは, x 軸と交点をもたないことを示せ.

(3) $f(x)$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ.

6. $x^2 + y^2 = 4$ であるとき, 関数 $z = y^2 + 4x^2 - x^3$ について, 次の問いに答えよ.

(1) z を x の式で表し, x で微分せよ.

(2) z の最大値および最小値と, そのときの x, y の値をそれぞれ求めよ.

7. k は定数とする. 曲線 $y = x^3 - x^2 + kx - k + 2$ と, 曲線上の点 A(1, 2) について, 次の問いに答えよ.

(1) 点 A での接線が原点を通るとき, k の値を求めよ.

(2) (1) で得られた k の場合, 曲線と接線で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}
1. (1) \quad \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{7}+2} &= \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+2-\sqrt{7})(\sqrt{3}+2+\sqrt{7})} \\
&= \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{7}}{4\sqrt{3}} = \frac{3+2\sqrt{3}+\sqrt{21}}{12} \\
(2) \quad \sqrt{1+\pi-2\sqrt{\pi}} &= \sqrt{(\sqrt{\pi}-1)^2} = |\sqrt{\pi}-1| = \sqrt{\pi}-1 \\
(3) \quad \frac{x^2-10x+25}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \times \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-15} \\
&= \frac{(x-5)^2}{(x-1)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)} \times \frac{(x-1)^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{x-5}{x+2}
\end{aligned}$$

2. (1) 与えられた方程式から

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3}{4}\pi\right)$$

$$\text{ゆえに } x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi \quad \text{すなわち } x = 0, \frac{\pi}{2}$$

(2) 与えられた方程式から

$$(10^x)^2 - 12 \cdot 10^x + 20 = 0 \quad \text{ゆえに } (10^x - 2)(10^x - 10) = 0$$

$$\text{したがって } 10^x = 2, 10 \quad \text{よって } x = \log_{10} 2, 1$$

(3) 与えられた方程式から $(\log_{\frac{1}{3}} x - 1)(\log_{\frac{1}{3}} x - 2) = 0$

$$\text{したがって } \log_{\frac{1}{3}} x = 1, 2 \quad \text{よって } x = \frac{1}{3}, \frac{1}{9}$$

3. $2x^2 + 3x - 3 = 0$ の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって } \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} \\
&= \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

4. 加法定理により

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

上の2式の辺々を加えると

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \cos \beta$$

よって
$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \{ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) \}$$

5. (1) $t = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$ より $t \geq -1$

(2) $x^2 + 2x = t$ より $f(x) = t^2 - 4t + 5 = (t - 2)^2 + 1$

$f(x) \geq 1$ であるから, $y = f(x)$ は, x 軸と交点をもたない.

(3) $y = (t - 2)^2 + 1$ ($t \geq -1$) より,

$t = 2$ ゆえに $x^2 + 2x = 2$ すなわち $x = -1 \pm \sqrt{3}$ のとき 最小値 1

6. (1) $x^2 + y^2 = 4$ より, $y^2 = 4 - x^2$ ($-2 \leq x \leq 2$) であるから

$$\begin{aligned} z &= y^2 + 4x^2 - x^3 = (4 - x^2) + 4x^2 - x^3 \\ &= -x^3 + 3x^2 + 4 \end{aligned}$$

よって
$$\frac{dz}{dx} = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2)$$

(2) (1) の結果から z の増減表は

x	-2	...	0	...	2
$\frac{dz}{dx}$		-	0	+	
z	24	$\searrow$	4	$\nearrow$	8

よって $x = -2$ すなわち $(x, y) = (-2, 0)$ のとき 最大値 24

$x = 0$ すなわち $(x, y) = (0, \pm 2)$ のとき 最小値 4

7. (1) $y = x^3 - x^2 + kx - k + 2$ を微分すると $y' = 3x^2 - 2x + k$

$x = 1$ のとき $y' = k + 1$

したがって、曲線上の点 $A(1, 2)$ における接線の方程式は

$$y - 2 = (k + 1)(x - 1) \quad \text{ゆえに} \quad y = (k + 1)x + 1 - k$$

この接線が原点を通るから

$$1 - k = 0 \quad \text{よって} \quad k = 1$$

(2) (1) の結果から、曲線および接線は

$$y = x^3 - x^2 + x + 1, \quad y = 2x$$

$$\text{ゆえに} \quad (x^3 - x^2 + x + 1) - 2x = (x + 1)(x - 1)^2$$

よって、求める面積を S とすると

$$\int_{-1}^1 (x + 1)(x - 1)^2 dx = \frac{1}{12} \{1 - (-1)\}^4 = \frac{4}{3}$$

補足 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)^m (\beta - x)^n dx = \frac{m!n!}{(m + n + 1)!} (\beta - \alpha)^{m+n+1}$ より

$$S = \int_{-1}^1 (x + 1)(1 - x)^2 dx = \frac{1!2!}{4!} \{1 - (-1)\}^4$$