

平成28年度 熊本電波工業高等専門学校(編入学試験)
数 学(80分)

1. 次の問いに答えよ.

(1) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{x+5}{x-\frac{15}{x+2}} - \frac{\frac{x}{x-2} - \frac{2}{x^2-3x+2}}{1-\frac{2}{x-1}}$$

(2) 次の式を簡単にせよ.

$$\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

(3) 次の等式を証明せよ.

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$$

2. 次の方程式, 不等式を解け.

(1) $\cos 2x = \cos x \quad (-\pi < x \leq \pi)$

(2) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 < 0$

(3) $(\log_2(1-x))^2 = \log_2(1-x)^2 + 3$

3. 3次方程式 $x^3 + (2a+1)x^2 + 3(2a-1)x + 4a - 3 = 0$ (a は定数) について, 次の各問いに答えよ.

(1) 与えられた方程式は $x = -1$ を解にもつことを確かめよ.

(2) 与えられた方程式の異なる実数解が2つであるとき, 定数 a の値を求めよ.
また, そのときの解を求めよ.

4. 関数 $y = -(25^x + 25^{-x}) + 6(5^x + 5^{-x}) - 6$ について, 次の各問いに答えよ.

(1) $5^x + 5^{-x} = t$ とおくとき, t のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) y を t の式で表せ.

(3) y の最大値を求めよ.

5. 関数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + (6-a)x - 2$ (a は定数) について、次の各問いに答えよ.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ が $x = 1$ で極値をもつとき、定数 a の値を求め、 $f(x)$ の極小値とそのときの x の値を求めよ.

6. 次の等式を満たす $f(x)$ を求めよ.

$$f(x) = 3x^2 + \int_{-2}^0 xf(t) dt$$

解答

1. (1)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{(x+5)(x+2)}{x(x+2)-15} - \frac{x(x-1)-2}{(x-1)(x-2)-2(x-2)} \\ &= \frac{(x+5)(x+1)}{(x+5)(x-3)} - \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+1}{x-3} = 0 \end{aligned}$$

$$(2) \sqrt{4-\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{6}}{2}$$

$$(3) (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \sin 2\theta$$

2. (1) 与えられた方程式から

$$2 \cos^2 x - 1 = \cos x \quad \text{すなわち} \quad (\cos x - 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$-\pi < x \leq \pi$ より

$$\cos x = 1 \text{ のとき } x = 0, \quad \cos x = -\frac{1}{2} \text{ のとき } x = -\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi$$

$$\text{よって } x = -\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{2}{3}\pi$$

(2) $t = 2^x$ とおくと ($t > 0$), 与えられた不等式から

$$2t^2 - 9t + 4 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-4)(2t-1) < 0$$

$$\text{したがって} \quad \frac{1}{2} < t < 4 \quad \text{よって} \quad -1 < x < 2$$

(3) $t = \log_2(1-x)$ とおくと、与えられた方程式は $t^2 = 2t + 3$

ゆえに $(t+1)(t-3) = 0$ これを解くと $t = -1, 3$

$t = -1$ のとき $\log_2(1-x) = -1$ すなわち $x = \frac{1}{2}$

$t = 3$ のとき $\log_2(1-x) = 3$ すなわち $x = -7$

よって $x = \frac{1}{2}, -7$

3. (1) $f(x) = x^3 + (2a+1)x^2 + 3(2a-1)x + 4a-3$ とおくと

$$f(-1) = -1 + (2a+1) - 3(2a-1) + 4a-3 = 0$$

よって、与えられた方程式は $x = -1$ を解にもつ.

(2) (1) の結果から、 $f(x)$ が $x+1$ を因数にもつことに注意して

$$f(x) = (x+1)(x^2 + 2ax + 4a - 3)$$

i) 方程式 $f(x) = 0$ が -1 を 2 重解にもつとき、方程式 $x^2 + 2ax + 4a - 3 = 0$ は -1 を解にもつから

$$(-1)^2 + 2a \cdot (-1) + 4a - 3 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

このとき、 $f(x) = (x+1)^3$ となり、不適.

ii) 方程式 $f(x) = 0$ が -1 以外を 2 重解にもつとき、方程式 $x^2 + 2ax + 4a - 3 = 0$ 重解をもつから

$$D/4 = a^2 - 1 \cdot (4a - 3) = (a-1)(a-3) = 0$$

$a \neq 1$ であるから、 $a = 3$. このとき

$$f(x) = (x+1)(x+3)^2$$

よって、 $a = 3$, 解は $x = -1, -3$ (2 重解)

4. (1) $t = 5^x + 5^{-x} = (5^{\frac{x}{2}} - 5^{-\frac{x}{2}})^2 + 2$ よって $t \geq 2$

(2) $25^x + 25^{-x} = (5^x + 5^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ であるから

$$y = -(t^2 - 2) + 6t - 6 = -t^2 + 6t - 4$$

(3) (2) の結果から

$$y = -(t - 3)^2 + 5$$

上式および (1) の結果から, $t = 3$ のとき, y の最大値は 5

5. (1) $f(x) = -x^3 + ax^2 + (6 - a)x - 2$ より

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + 6 - a$$

(2) $f'(1) = 0$ であるから, (1) の結果より

$$-3 + 2a + 6 - a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = -3$$

ゆえに $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$,

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x + 3)(x - 1)$$

よって, $x = -3$ で極小値 -29 をとる.

6. 与えられた等式から $f(x) = 3x^3 + x \int_{-2}^0 f(t) dt$

$k = \int_{-2}^0 f(t) dt$ とおくと, $f(x) = 3x^3 + kx$ であるから

$$\begin{aligned} k &= \int_{-2}^0 (3x^3 + kx) dx = \left[\frac{3}{4}x^4 + \frac{k}{2}x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= -12 - 2k \end{aligned}$$

これから $k = -4$ よって $f(x) = 3x^3 - 4x$