

平成27年度 熊本電波工業高等専門学校(編入学試験)
数 学(80分)

1. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ を因数分解せよ.
2. $-\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81}$ を計算せよ.
3. x についての二次方程式 $2x^2 - x + 5 = 0$ の2つの解を α, β とする. このとき α^2, β^2 を2つの解とする, 整数係数の二次方程式を作れ.
4. k は定数とする. 放物線 $y = -9x^2$ と直線 $y = kx + 1$ の共有点が1個であるとき, k の値と共有点の個数を求めよ.
5. a, b は正の数とする. 次の不等式を証明せよ. また, 等号が成立するための条件を求めよ.

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$$

6. 次の方程式, 不等式を解け.
 - (1) $|x-4| - 2|x-3| \leq -5$
 - (2) $x^3 - x + 6 = 0$
 - (3) $\log_3(2x+3) + 2\log_{\frac{1}{3}} x = 0$
 - (4) $\cos 2\theta + \sin \theta \leq 0 \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$
7. 関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ と, $a < b$ を満たす定数 a, b, c について, 次の各問に答えよ.
 - (1) x が, a から b まで変化するとき, $f(x)$ の平均変化率を求めよ.
 - (2) $x = c$ での微分係数 $f'(c)$ が, (1) の平均変化率に等しい場合, a, b, c が満たす関係式を求めよ.
 - (3) $a < c < b$ であることを示せ.
8. 放物線 $y = x^2$ 上の点 $(-1, 1), (2, 4)$ でそれぞれ接線を引く. この2つの接線と放物線で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答

$$\begin{aligned}
 1. \quad x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\
 &= (x^3 + 1)(x^2 + x + 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad -\sqrt[3]{24} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{81} &= -\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{3} \\
 &= -2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} + 3\sqrt[3]{3} = 0
 \end{aligned}$$

$$3. \text{ 解と係数の関係により } \alpha + \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{5}{2}$$

$$\text{ゆえに } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} = -\frac{19}{4}$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

よって、 α^2, β^2 を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - \left(-\frac{19}{4}\right)x + \frac{25}{4} = 0 \quad \text{すなわち} \quad 4x^2 + 19x + 25 = 0$$

$$4. \quad y = -9x^2 \text{ と } y = kx + 1 \text{ から } y \text{ を消去すると } 9x^2 + kx + 1 = 0 \quad \cdots (*)$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = k^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1 = (k + 6)(k - 6)$$

このとき、 $D = 0$ であるから $k = \pm 6$

$$(*) \text{ から, 放物線と直線の接点の } x \text{ 座標は } x = \frac{k}{18}$$

$$\text{よって } k = \pm 6 \quad \text{接点の座標は } \left(\pm \frac{1}{3}, -1\right) \quad (\text{複号同順})$$

$$5. \quad (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\frac{a}{b} > 0, \frac{b}{a} > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の関係により

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ から } (a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

上式において、等号が成立するのは

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a} \quad \text{すなわち} \quad a = b$$

のときである.

6. (1) $|x-4| - 2|x-3| \leq -5 \quad \cdots (*)$

(i) $x < 3$ のとき, $(*)$ は

$$-(x-4) + 2(x-3) \leq -5 \quad \text{すなわち} \quad x \leq -3$$

(ii) $3 \leq x < 4$ のとき, $(*)$ は

$$-(x-4) - 2(x-3) \leq -5 \quad \text{すなわち} \quad x \geq 5$$

これは, $3 \leq x < 4$ に反するので, 不適.

(iii) $x \geq 4$ のとき, $(*)$ は

$$(x-4) - 2(x-3) \leq -5 \quad \text{すなわち} \quad x \geq 7$$

(i)~(iii) より $\mathbf{x \leq -3, 7 \leq x}$

(2) $P(x) = x^3 - x + 6$ とおくと $P(-2) = 0$

$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつから

$$P(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 3)$$

よって, $P(x) = 0$ の解は $\mathbf{x = -2, 1 \pm \sqrt{2}i}$

(3) $\log_3(2x+3) + 2\log_{\frac{1}{3}} x = 0$

真数は正であるから

$$2x+3 > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

与えられた方程式から

$$\log_3(2x+3) - 2\log_3 x = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \log_3(2x+3) = \log_3 x^2$$

$$\text{したがって} \quad 2x+3 = x^2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-3) = 0$$

① に注意して, これを解くと $\mathbf{x = 3}$

(4) $\cos 2\theta + \sin \theta \leq 0$ より $1 - 2\sin^2 \theta + \sin \theta \leq 0$

$$\text{ゆえに} \quad (\sin \theta - 1)(2\sin \theta + 1) \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad \sin \theta \leq -\frac{1}{2}, \quad 1 \leq \sin \theta$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ に注意してこれを解くと} \quad \mathbf{\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi \leq \theta \leq \frac{11}{6}\pi}$$

7. (1) x が a から b まで変化するとき、関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ の平均変化率は

$$\begin{aligned}\frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= \frac{(b^2 - 2b + 3) - (a^2 - 2a + 3)}{b - a} \\ &= \frac{(b - a)(b + a - 2)}{b - a} = \mathbf{a + b - 2}\end{aligned}$$

(2) $f'(x) = 2x - 2$ であるから、 $f'(c)$ が (1) で求めた平均変化率に等しいとき

$$2c - 2 = a + b - 2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{2c = a + b}$$

(3) (2) の結果から $c = \frac{a + b}{2}$

$$a < b \text{ であるから } a < \frac{a + b}{2} < b \quad \text{よって} \quad a < c < b$$

8. 求める面積を S とすると、 $y = x^2$ の x^2 の係数に注意して

$$S = \frac{1}{12} \{2 - (-1)\}^3 = \frac{\mathbf{9}}{4}$$