

平成26年度編入学生選抜学力検査問題

受験番号

数学

[1] $3x^2 - 2y^2 + 5xy - 4x + 13y - 15$ を因数分解せよ。(6点)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= 3x^2 + (5y-4)x - (2y^2-13y+15) \\ &= 3x^2 + (5y-4)x - (2y-3)(y-5) \\ &= \{3x - (y-5)\} \{x + (2y-3)\} \\ &= (3x - y + 5)(x + 2y - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 3 \times - (y-5) \rightarrow -y+5 \\ 1 \times (2y-3) \rightarrow 2y-3 \\ \hline 5y-4 \end{array}$$

[2] $\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化して、簡単にせよ。(6点)

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= \frac{1}{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})(1-\sqrt{3}-\sqrt{2})} + \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{3}-\sqrt{2})(1-\sqrt{3}+\sqrt{2})} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(1-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} + \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2-2\sqrt{3}} + \frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2-2\sqrt{3}} \\ &= \frac{2-2\sqrt{3}}{2-2\sqrt{3}} = 1 \end{aligned}$$

[3] x についての2次方程式 $2x^2 - 5x + 7 = 0$ の2つの解を α, β とするとき、 $\alpha^2 + \beta^2$ の値を求めよ。(8点)

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}, \quad \alpha\beta = \frac{7}{2}$$

よて

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{7}{2} \\ &= \frac{25}{4} - 7 \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

[4] 中心の座標が $(0, 1)$ 、半径が $\sqrt{5}$ の円と直線 $y = 2x + k$ が共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。(8点)

$$\text{円: } x^2 + (y-1)^2 = 5 \quad \text{①}$$

$$\text{直線: } y = 2x + k \quad \text{②}$$

②を①に代入すると

$$x^2 + (2x+k-1)^2 = 5$$

$$5x^2 + 4(k-1)x + k^2 - 2k - 4 = 0$$

$$\frac{D}{4} \geq 0 \text{ となればよいので}$$

$$\frac{D}{4} = \{2(k-1)\}^2 - 5(k^2 - 2k - 4) \geq 0$$

$$k^2 - 2k - 24 \leq 0$$

$$(k-6)(k+4) \leq 0$$

よて

$$-4 \leq k \leq 6$$

(別解)

$$\text{直線 } y = 2x + k$$

$$2x - y + k = 0$$

直線と円(0,1)との

距離を d とすると

$$d = \frac{|-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$$

$$= \frac{|-1+k|}{\sqrt{5}}$$

$d \leq \sqrt{5}$ となればよいので

$$\frac{|-1+k|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$$

$$|-1+k| \leq 5$$

$$-5 \leq -1+k \leq 5$$

よて

$$-4 \leq k \leq 6$$

[5] $x+y+z=0$ のとき、 $x^2 - xy + xz = 2y^2 + 2yz$ が成り立つことを証明せよ。(8点)

$$x^2 - xy + xz - 2y^2 - 2yz = 0 \quad \text{①と示す。}$$

$$(\text{左辺}) = z(x-2y) + x^2 - xy - 2y^2$$

$$= z(x-2y) + (x-2y)(x+y)$$

$$= (x-2y)(x+y+z)$$

ここで、 $x+y+z=0$ なので、

$$(\text{左辺}) = (x-2y) \times 0$$

$$= 0$$

よて ① が成り立つので、

$$x^2 - xy + xz = 2y^2 + 2yz \text{ も成立。}$$

小計

総得点

平成 26 年度編入学生選抜学力検査問題

受験番号

数学

[6] 次の方程式, 不等式を解け。

(32 点)

(1) $9(2x-3)^2 = 25x^2$

(別解)

$$\{3(2x-3)\}^2 - (5x)^2 = 0$$

$$9(4x^2 - 12x + 9) - 25x^2 = 0$$

$$\{3(2x-3)+5x\}\{3(2x-3)-5x\}=0$$

$$11x^2 - 108x + 81 = 0$$

$$(11x-9)(x-9)=0$$

$$(11x-9)(x-9)=0$$

$$\therefore x = \frac{9}{11}, 9$$

$$\therefore x = \frac{9}{11}, 9$$

(2) $\sin 2\theta - \sin \theta + 2\sqrt{2}\cos \theta = \sqrt{2} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$

$$2\sin \theta \cos \theta - \sin \theta + 2\sqrt{2}\cos \theta - \sqrt{2} = 0$$

$$\sin \theta (2\cos \theta - 1) + \sqrt{2}(2\cos \theta - 1) = 0$$

$$(2\cos \theta - 1)(\sin \theta + \sqrt{2}) = 0$$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \text{ より}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{ より}$$

$$\theta = \frac{1}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

(3) $3^{2x+1} + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$

$$3 \cdot (3^x)^2 + 8 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$3^x = t \text{ とおくと } (t > 0)$$

$$3t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$(3t-1)(t+3) = 0$$

$$t = \frac{1}{3}, -3$$

 $t > 0$ より

$$t = \frac{1}{3}$$

$$3^x = \frac{1}{3}$$

$$3^x = 3^{-1}$$

よって

$$x = -1$$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

真数条件より

$$\begin{cases} 2x-1 > 0 \\ x+1 > 0 \end{cases} \text{ なのて}$$

$$x > \frac{1}{2} \dots \textcircled{1}$$

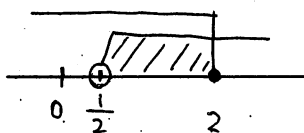
対数の底について

$$\frac{1}{2} < 1 \text{ なのて,}$$

$$2x-1 \leq x+1$$

$$x \leq 2 \dots \textcircled{2}$$

①, ②より



$$\therefore \frac{1}{2} < x \leq 2$$

平成 26 年度編入学生選抜学力検査問題

受験番号

数学

- 7 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ に点 $A(1, -1)$ から引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ。(16 点)

$$y' = 3x^2 - 6x + 2 \quad \text{①}$$

曲線上の点 $(t, t^3 - 3t^2 + 2t - 3)$ における接線の方程式を求めよ。

① に $x = t$ も代入して

$$y' = 3t^2 - 6t + 2$$

よって接線の方程式は

$$y - (t^3 - 3t^2 + 2t - 3) = (3t^2 - 6t + 2)(x - t)$$

$x = 1, y = -1$ を代入すると

$$-1 - (t^3 - 3t^2 + 2t - 3) = (3t^2 - 6t + 2)(1 - t)$$

$$2t^3 - 6t^2 + 6t = 0$$

$$t^3 - 3t^2 + 3t = 0$$

$$t(t^2 - 3t + 3) = 0$$

$$t^2 - 3t + 3 \neq 0 \text{ なので, } t = 0$$

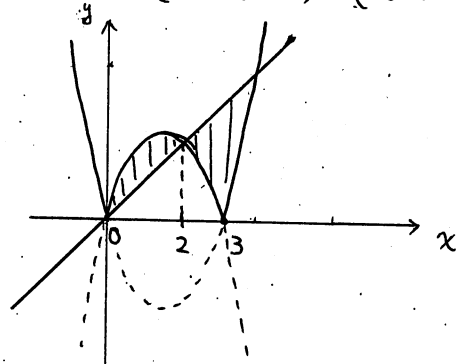
よって

$$\text{接線の方程式: } y = 2x - 3$$

$$\text{接点の座標: } (0, -3)$$

- 8 曲線 $y = |x(x-3)|$ と直線 $y = x$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ。(16 点)

$$y = |x(x-3)| = \begin{cases} x(x-3) & (x \leq 0, 3 \leq x) \\ -x(x-3) & (0 < x < 3) \end{cases}$$



$y = |x(x-3)|$ と $y = x$ との交点の座標を求めよ

(i) $x \leq 0, 3 \leq x$ のとき

$$\begin{cases} y = x(x-3) \\ y = x \end{cases} \quad \text{より}$$

$$x^2 - 3x = x$$

$$x(x-4) = 0$$

$$x = 0, 4$$

(ii) $0 < x < 3$ のとき

$$\begin{cases} y = -x(x-3) \\ y = x \end{cases} \quad \text{より}$$

$$-x^2 + 3x = x$$

$$-x(x-2) = 0$$

$$x = 2$$

よって

$$S = \int_0^2 \{x(x-3) - x\} dx + \int_2^3 \{x + x(x-3)\} dx + \int_3^4 \{x - x(x+3)\} dx$$

$$= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx + \int_3^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_3^4$$

$$= -\frac{1}{3}(8-0) + (4-0) + \frac{1}{3}(27-8) - (9-4) - \frac{1}{3}((4-27) - 2(16-9))$$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{19}{3} - 5 - \frac{37}{3} + 14$$

$$= 13 - \frac{26}{3}$$

$$= \frac{13}{3}$$