

平成 29 年度 北九州工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 次の問いに答えよ .

(1) 次の分数式を計算し , 簡単な形に直せ .

$$\frac{x+1}{x^2+x-6} - \frac{x+2}{x^2+2x-3}$$

(2) 不等式 $2|x-1| + |x-3| \leq 9$ を解け .

(3) 初項 -3 , 公比 -2 の等比数列の初項から第 10 項までの和を求めよ .

(4) 2 次方程式 $3x^2 + 5x - 1 = 0$ の 2 つの解を α, β とする .

このとき $\frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\beta-2}$ の値を求めよ .

2. 次の問いに答えよ .

(1) $y = 2 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{-x}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ .

(2) $\sin 15^\circ$ の値を求めよ .

(3) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ の値を求めよ .

3. 2 つの曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = x^2 - 8x + 8$ について , 次の問いに答えよ .

(1) C_1 上の点 (p, p^2) における C_1 の接線の方程式を求めよ .

(2) C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ .

(3) C_1, C_2, l で囲まれた部分の面積を求めよ .

4. $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |3\vec{a} + \vec{b}| = 3$ となるベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ について , 次の問いに答えよ .

(1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ .

(2) 2 つのベクトル $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ が直交するように実数 t の値を定めよ .

(3) ベクトル $\vec{a} + t\vec{b}$ の大きさが最小となるように実数 t の値を求め , そのときの最小値を求めよ .

解答

$$\begin{aligned}
 1. (1) \quad \frac{x+1}{x^2+x-6} - \frac{x+2}{x^2+2x-3} &= \frac{x+1}{(x-2)(x+3)} - \frac{x+2}{(x-1)(x+3)} \\
 &= \frac{(x+1)(x-1) - (x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)} \\
 &= \frac{\mathbf{3}}{(x-1)(x-2)(x+3)}
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 2|x-1| + |x-3| \leq 9$$

(i) $x < 1$ のとき

$$2(-x+1) + (-x+3) \leq 9 \quad \text{これを解いて} \quad x \geq -\frac{4}{3}$$

$$\text{したがって} \quad -\frac{4}{3} \leq x < 1$$

(ii) $1 \leq x < 3$ のとき

$$2(x-1) + (-x+1) \leq 9 \quad \text{これを解いて} \quad x \leq 10$$

$$\text{したがって} \quad 1 \leq x < 3$$

(iii) $x \geq 3$ のとき

$$2(x-1) + (x-3) \leq 9 \quad \text{これを解いて} \quad x \leq \frac{14}{3}$$

$$\text{したがって} \quad 3 \leq x \leq \frac{14}{3}$$

$$(i) \sim (iii) \text{ より} \quad -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{14}{3}$$

(3) 初項 -3 , 公比 -2 の等比数列の初項から第 10 項までの和は

$$\frac{-3\{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = \mathbf{1023}$$

(4) 2 次方程式 $3x^2 + 5x - 1 = 0$ の 2 つの解が α , β であるから , 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{5}{3}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{3}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\beta-2} &= \frac{(\beta-2) + (\alpha-2)}{(\alpha-2)(\beta-2)} = \frac{\alpha + \beta - 4}{\alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4} \\
 &= \frac{-\frac{5}{3} - 4}{-\frac{1}{3} - 2 \times \left(-\frac{5}{3}\right) + 4} = -\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{21}}
 \end{aligned}$$

2. (1) $2 \cdot 3^x > 0$, $4 \cdot 3^{-x} > 0$ であるから , 相加・相乗平均の大小関係により

$$y = 2 \cdot 3^x + 4 \cdot 3^{-x} \geq 2\sqrt{2 \cdot 3^x \times 4 \cdot 3^{-x}} = 4\sqrt{2} \text{ (最小値)}$$

等号が成立するのは

$$2 \cdot 3^x = 4 \cdot 3^{-x} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{1}{2} \log_3 2$$

(2) 加法定理により

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(3) 底の変換公式により

$$\begin{aligned} &(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) \\ &= \left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4} \right) \left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9} \right) \\ &= \left(\log_2 3 + \frac{2 \log_2 3}{2} \right) \left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2 \log_2 3} \right) \\ &= 2 \log_2 3 \times \frac{5}{2 \log_2 3} = 5 \end{aligned}$$

3. (1) $y = x^2$ を微分すると $y' = 2x$

$C_1 : y = x^2$ の点 (p, p^2) における C_1 の接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{ゆえに} \quad y = 2px - p^2$$

(2) (1) で求めた接線と C_2 から y を消去すると

$$x^2 - 8x + 8 = 2px - p^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2(p+4)x + p^2 + 8 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(1) で求めた接線と C_2 が接するから

$$(p+4)^2 - (p^2 + 8) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad p = -1$$

これを (1) の結果に代入して $y = -2x - 1$

(3) $p = -1$ より, C_1 と l の接点の x 座標は

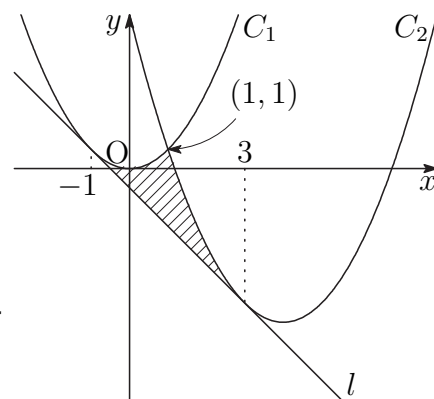
$$x = -1$$

① より, C_2 と l の接点の x 座標は

$$x = 3$$

C_1 と C_2 の交点の x 座標は, C_1, C_2 を解いて

$$x = 1$$



上の図から, 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{x^2 - (-2x - 1)\} dx + \int_1^3 \{(x^2 - 8x + 8) - (-2x - 1)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x+1)^2 dx + \int_1^3 (x-3)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^1 + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_1^3 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

4. (1) $|\vec{3a} + \vec{b}| = 3$ より $9|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9$

これに $|\vec{a}| = 1, \vec{b} = 2$ を代入すると

$$9 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 = 9 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{2}{3}$$

(2) $|\vec{a}| = 1, \vec{b} = 2$ および (1) の結果により

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) &= |\vec{a}|^2 + (t+1)\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{b}|^2 \\ &= 1 - \frac{2}{3}(t+1) + 4t = \frac{10t+1}{3} \end{aligned}$$

$\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ が直交するとき

$$\frac{10t+1}{3} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -\frac{1}{10}$$

(3) $|\vec{a}| = 1, \vec{b} = 2$ および (1) の結果により

$$\begin{aligned} |\vec{a} + t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 + 2t\vec{a} \cdot \vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 1 - \frac{4}{3}t + 4t^2 \\ &= 4\left(t - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{8}{9} \end{aligned}$$

よって, $t = \frac{1}{6}$ のとき, 最小値 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$