平成２８年度　北九州工業高等専門学校 (編入学試験)
数　　学 (60 分)

1. 次の計算をせよ.

(1) $\dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}+\dfrac{5x-10}{x^2-4}$

(2) $\dfrac{x^4-16}{x^2+2x+4}\times\dfrac{x^3-8}{x^2+4}\div(x^2-4x+4)\times\dfrac{1}{x+2}$

2. 次の値を求めよ.

(1) $\log_2 27\times\log_3 0.5\times\log_4 8$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{7}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx$

(4) 2 ベクトル $\vec{u}=(2,\ 4)$, $\vec{v}=(-6,-2)$ のなす角

(5) i を虚数単位 ($i^2=-1$) とするとき, $(\cos 13^\circ+i\sin 13^\circ)(\cos 17^\circ+i\sin 17^\circ)$

3. 次の式や命題を証明せよ.

(1) $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}=ab(a+b)^{-1}$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)(1-\cos x)=\sin x\tan x$

(3) $\dfrac{1}{\log_{ab} c}=\dfrac{1}{\log_a c}+\dfrac{1}{\log_b c}$

(4) 実数 a に対して x の 2 次方程式 $x^2+ax-a-2=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ.

(5) 実数 a, b に対して a^2+2b+1 と b^2+2a+1 のうちのどちらかは必ず 0 以上である.

4. 関数 $y=x^3-x$ についてこの関数と x 軸との交点のうち x 座標が負のものを点 A とする. 次の問いに答えよ.

(1) 増減, 極値, 凹凸, 変曲点を調べグラフの概形を描け.

(2) 点 A を接点とするこのグラフの接線を求めよ.

(3) この関数のグラフと上で求めた接線とで囲まれた部分の面積を求めよ.

解答

1. (1) $\dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}+\dfrac{5x-10}{x^2-4}=\dfrac{3x-1}{(x+2)(3x-1)}+\dfrac{5(x-2)}{(x+2)(x-2)}$
$=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{5}{x+2}=\boldsymbol{\dfrac{6}{x+2}}$

(2) $\dfrac{x^4-16}{x^2+2x+4}\times\dfrac{x^3-8}{x^2+4}\div(x^2-4x+4)\times\dfrac{1}{x+2}$
$=\dfrac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x^2+2x+4}\times\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+4}\times\dfrac{1}{(x-2)^2}\times\dfrac{1}{x+2}$
$=\mathbf{1}$

2. (1) $\log_2 27\times\log_3 0.5\times\log_4 8=3\log_2 3\times\dfrac{-1}{\log_2 3}\times\dfrac{3}{2}=-\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{7}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx$
$\displaystyle=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=2\left[\frac{1}{25}x^5+\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{293}{225}}$

(4) $\vec{u}=2\vec{a},\ \vec{v}=2\vec{b}$ とおくと　$\vec{a}=(1,\ 2),\ \vec{b}=(-3,-1)$
$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，求める角は　135°

(5) $(\cos 13^\circ+i\sin 13^\circ)(\cos 17^\circ+i\sin 17^\circ)=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}$

3. (1) $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-1}=\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}=ab(a+b)^{-1}$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)(1-\cos x)=\dfrac{1}{\cos x}(1+\cos x)(1-\cos x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}=\sin x\tan x$

(3) $\dfrac{1}{\log_a c}+\dfrac{1}{\log_b c}=\log_c a+\log_c b=\log_c ab=\dfrac{1}{\log_{ab} c}$

(4) x の 2 次方程式 $x^2+ax-a-2=0$ の判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot1\cdot(-a-2)=a^2+4a+8=(a+2)^2+4>0$$

よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ.

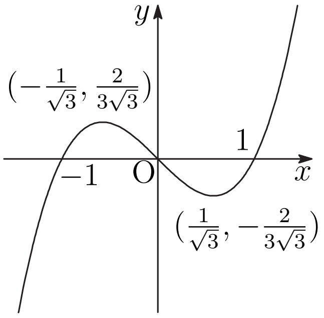
(5) $$(a^2+2b+1)+(b^2+2b+1)=(a+1)^2+(b+1)^2 \geqq 0$$

よって，a^2+2b+1 と b^2+2b+1 のうちのどちらかは必ず 0 以上である．

4. (1) $y=x^3-x$ より，$y'=3x^2-1$，$y''=6x$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	変曲点 0	↘	極小 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗



(2) $x=-1$ のとき，$y'=2$ である．求める接線は，点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y-0=2(x+1) \quad よって \quad \boldsymbol{y=2x+2}$$

(3) (2) で求めた接線と $y=x^3-x$ の共有点の x 座標は

$$x^3-x=2x+2 \quad 整理すると \quad (x+1)^2(x-2)=0 \quad ゆえに \quad x=-1,2$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2}\{(2x+2)-(x^3-x)\}dx \\ &= \int_{-1}^{2}(x+1)^2(2-x)\,dx = \frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4 = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

解説 $$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$