

平成 2 7 年度 北九州工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (60 分)

1. 次の問いに答えよ .

(1) $x^2 - 6y^2 + xy + 3x + 9y$ を因数分解せよ .

(2) 次の式を計算せよ .

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

(3) 方程式 $5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 10 = 0$ を解け .

2. $\triangle ABC$ において , 線分 AB の中点を D , 線分 BC を $3 : 1$ に外分する点を E とする . D と E を結んだ線分 DE と線分 AC の交点を F とする . 次の問いに答えよ .

(1) $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BC}$ とするとき , a と b の値を求めよ .

(2) $\triangle ADF$ と $\triangle CEF$ の面積の比を求めよ . ただし , 最も簡単な整数の比で表せ .

3. 放物線 $y = x^2 - 2(m - 1)x - m - 1$ について次の問いに答えよ . ただし m は定数とする .

(1) 放物線と x 軸との共有点の個数は , m の値によらず一定であることを示せ .

(2) 放物線と x 軸との共有点のうち , 1 つの共有点の x 座標が $x = 1$ であるとき , 他の共有点の座標を求めよ .

(3) 放物線と x 軸で囲まれた図形の面積が最小になるときの , m の値を求めよ .

4. 3 次関数 $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + k$ について次の問いに答えよ . ただし , k は定数とする .

(1) 関数 $f(x)$ が極大値 20 をとるとき , 定数 k の値を求めよ .

(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフ上の $x = 2$ に対応する点における接線が原点を通るとき , 定数 k の値を求めよ .

解答

$$\begin{aligned}
 1. (1) \quad & x^2 - 6y^2 + xy + 3x + 9y \\
 &= x^2 + (y+3)x - 3y(2y-3) \\
 &= (x+3y)\{x-(2y-3)\} \\
 &= (x+3y)(x-2y+3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \\
 &= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}) - (\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})} \\
 &= \frac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - 5} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}
 \end{aligned}$$

$$(3) \text{ 与えられた方程式から } (5^x - 5)(5^x - 2) = 0$$

$$\text{したがって } 5^x = 5, 2 \quad \text{よって } x = 1, \log_5 2$$

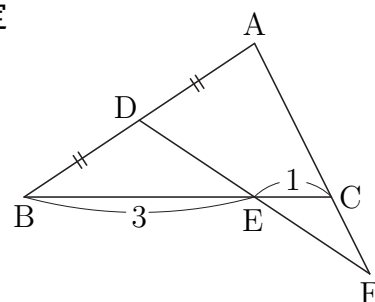
2. (1) $\triangle ABC$ と直線 BF について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

すなわち $CF : FA = 1 : 3$

F は AC を 3 : 1 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{BF} = \frac{-\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BC}}{3 - 1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$$



- (2) $\triangle ADF$ と直線 BC について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{AB}{BD} \cdot \frac{DE}{EF} \cdot \frac{FC}{CA} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1} \cdot \frac{DE}{EF} \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{すなわち} \quad DE = EF$$

したがって $DF = 2EF$, $AF = 3CF$ よって $\triangle ADF : \triangle CEF = 6 : 1$

3. (1) 放物線 $y = x^2 - 2(m-1)x - m - 1 \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = (m-1)^2 - 1 \cdot (-m-1) = m^2 - m + 2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0$$

よって、 m の値によらず、放物線と x 軸との共有点の個数は、2 個。

- (2) 放物線 $(*)$ は点 $(1, 0)$ を通るから

$$0 = 1^2 - 2(m-1) \cdot 1 - m - 1 \quad \text{これを解いて} \quad m = \frac{2}{3}$$

$$\text{このとき, } (*) \text{ は } y = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(x-1)(3x+5)$$

よって、求める他の共有点の座標は $\left(-\frac{5}{3}, 0\right)$

- (3) 放物線と x 軸の共有点の x 座標を α, β とすると ($\alpha < \beta$),
これらは、2 次方程式 $x^2 - 2(m-1)x - m - 1$ の解であるから

$$\alpha + \beta = 2(m-1), \quad \alpha\beta = -m-1$$

したがって $(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$$= 4(m-1)^2 - 4(-m-1) = 4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + 3$$

図形の面積を S とすると、 $S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ であるから

S を最小にする m の値は $m = \frac{1}{2}$

4. (1) $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + k$ を微分すると

$$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ は $x = 1$ で極大となるから , $f(1) = 20$ より

$$4 - 24 + 36 + k = 20 \quad \text{これを解いて} \quad k = 4$$

(2) $f(2) = 32 - 96 + 72 + k = 8 + k$, $f'(2) = 12(2-1)(2-3) = -12$

$y = f(x)$ のグラフ上の $x = 2$ に対応する点における接線の方程式は

$$y - (8 + k) = -12(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = -12x + 32 + k$$

これが原点を通るから

$$32 + k = 0 \quad \text{すなわち} \quad k = -32$$