

熊本県立技術短期大学校

推薦入学(前期)試験問題

数学I(90分)

平成 29 年 9 月 24 日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及びメガネのみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
8. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。
9. 試験開始 30 分を経過しないと退出を認めない。

平成 30 年度 熊本県立技術短期大学校推薦 (前期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

- [1] (1) $4x^3 + ax^2 + 2x - 3$ を因数分解すると $(4x^2 + x + 3)(x + b)$ となった。このとき、定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 次の命題の真偽を述べよ。ただし、 x, y は実数とする。
- (i) 命題「 $x^2 = x$ ならば、 $x = 1$ である。」は $\boxed{\text{ウ}}$ である。
- (ii) 命題「 $x + y = 2$ かつ $xy = 1$ ならば、 $x = y = 1$ である。」は $\boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 放物線 $y = x^2 + ax + 1$ の頂点が直線 $y = x + 1$ 上にあるとき、定数 a の値は $\boxed{\text{オ}}$ または $\boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形とする。 $\sin A = \frac{1}{3}$ のとき、 $\sin B = \boxed{\text{キ}}$, $\tan B = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) データ 4, 1, 2, 1, -2, 0 の平均値は $\boxed{\text{ケ}}$, 分散は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $|x - 1| + |x - 2| = x$ を満たす x の値は $x = \boxed{\text{サ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $x = 1$ が 2 次方程式 $x^2 + ax + 3 = 0$ の解であるとき、 $a = \boxed{\text{ス}}$ であり、もう 1 つの解は $x = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\triangle ABC$ において、 $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 45^\circ$, $AB = \sqrt{2}$ のとき、 $AC = \boxed{\text{ソ}}$ である。頂点 A から辺 BC へ下ろした垂線を AD とするとき、 $\triangle ADC$ の面積は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 2 次関数 $f(x) = 2x^2 - ax + 2$, $g(x) = x^2 + ax + 1$ において、 $f(x) > g(x)$ が全ての実数 x で成り立つとき、定数 a の範囲は $\boxed{\text{チ}} < a < \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 10 個のデータ $a, a, a, a, a, b, b, 7, 8, 10$ の平均値は 5 , 中央値は 4 である。ただし、 $a < b < 7$ とする。このとき、 $a = \boxed{\text{テ}}$, $b = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] ある商品は 1 個の価格が 100 円するとき 1 日に 600 個売れ、価格を 1 円あげるとに 1 日に売れる個数が 4 個ずつ減る。この商品 1 個の価格を x 円 ($x \geq 100$) に設定したときの 1 日の売上個数を y 個とする。 y を x の式で表すと、 $y = \boxed{\text{ナ}}$ である。1 日の売上総額 z 円を x の式で表すと、 $z = \boxed{\text{ニ}}$ である。1 日の売上総額を最大にするには、1 個の価格を $x = \boxed{\text{ヌ}}$ とすればよい。このときの 1 日の売上個数は、 $y = \boxed{\text{ネ}}$ である。

- [4] 四角形 ABCD において、 $\angle B = 120^\circ$ 、 $AB = 1$ 、 $BC = 2$ 、 $AD = CD$ である。
このとき、 $\triangle ABC$ の面積は であり、 $AC =$ である。また、 $\triangle ABC$
の外接円の半径は である。点 D が $\triangle ABC$ の外接円の円周上にあるとき、
四角形 ABCD の面積は である。

解答例

$$[1] (1) 4x^3 + ax^2 + 2x - 3 = (4x^2 + x + 3)(x + b) \quad \cdots (*)$$

(*) の定数項を比較すると $-3 = 3b$ ゆえに $b = -1$

これを (*) に代入して右辺を展開すると

$$(4x^2 + x + 3)(x - 1) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = -3$$

(答) ア. -3 イ. -1

(2) (i) $x^2 = x$ を解くと $x = 0, 1$ $x^2 = x \not\Rightarrow x = 1$ よって 偽
($x = 0$ が反例である)

(ii) $x + y = 2, xy = 1$ を解くと $x = y = 1$ よって 真

(答) ウ. 偽 エ. 真

$$(3) y = x^2 + ax + 1 = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + 1$$

放物線の頂点 $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4} + 1\right)$ が直線 $y = x + 1$ 上にあるから

$$-\frac{a^2}{4} + 1 = -\frac{a}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a(a - 2) = 0$$

これを解いて $a = 0, 2$

(答) オ. カ. $0, 2$

(4) $\angle C = 90^\circ$ であるから, $\angle A$ は鋭角であるから

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{また} \quad \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{1}{3} \div \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$\angle C = 90^\circ$ より, $A + B = 90^\circ$ であるから

$$\sin B = \cos A = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \tan B = \frac{1}{\tan A} = 2\sqrt{2}$$

(答) キ. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ク. $2\sqrt{2}$

(5) 平均は $\frac{4 + 1 + 2 + 1 + (-2) + 0}{6} = 1$

$$\text{したがって, 分散は} \quad \frac{1}{6}\{4^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2\} - 1^2 = \frac{10}{3}$$

(答) ケ. 1 コ. $\frac{10}{3}$

[2] (1) $|x - 1| + |x - 2| = x$

(i) $x < 1$ のとき

$$(-x + 1) + (-x + 2) = x \quad \text{これを解いて} \quad x = 1 \text{ (不適)}$$

(ii) $1 \leq x < 2$ のとき

$$(x - 1) + (-x + 2) = x \quad \text{これを解いて} \quad x = 1$$

(iii) $2 \leq x$ のとき

$$(x - 1) + (x - 2) = x \quad \text{これを解いて} \quad x = 2$$

(答) サ. シ. 1, 2

(2) $x = 1$ が 2 次方程式 $x^2 + ax + 3 = 0$ の解であるから

$$1 + a + 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = -4$$

したがって, 2 次方程式 $x^2 - 4x + 3 = 0$ の解は $x = 1, 3$

よって, 求める他の解は $x = 3$

(答) ス. -4 セ. 3

(3) $\triangle ABC$ に正弦定理を適用すると

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \quad \text{これを解いて} \quad AC = \sqrt{3}$$

$\triangle ACD$ は直角二等辺三角形で

$$AD = CD = \sqrt{3} \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって, } \triangle ADC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{3}{4}$$

(答) ソ. $\sqrt{3}$ タ. $\frac{3}{4}$

(4) $f(x) = 2x^2 - ax + 2$, $g(x) = x^2 + ax + 1$ より

$$f(x) - g(x) = x^2 - 2ax + 1$$

すべての x について, $f(x) - g(x) > 0$ であるから, 係数について

$$(-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)(a-1) < 0$$

これを解いて $-1 < a < 1$

(答) チ. -1 ツ. 1

(5) 平均値が 5 であるから

$$\frac{5a + 2b + 7 + 8 + 10}{10} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad 5a + 2b = 25 \quad \dots \textcircled{1}$$

$a < b < 7$ で, 中央値が 4 であるから

$$\frac{a+b}{2} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a+b = 8 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = 3, b = 5$ (答) テ. 3 ト. 5

[3] (x, y) を座標平面上の直線上の点である .

その直線は, 点 $(100, 600)$ を通り, 傾き -4 であるから

$$y - 600 = -4(x - 100) \quad \text{ゆえに} \quad y = -4x + 1000$$

1 日の売上総額 z は

$$z = xy = x(-4x + 1000) = -4x^2 + 1000x$$

上式を変形すると $z = -4(x - 125)^2 + 62500$

売上総額を最大にする x は $x = 125$ このとき売上個数は

$$y = -4 \cdot 125 + 1000 = 500$$

(答) ナ. $-4x + 1000$ ニ. $-4x^2 + 1000x$ 又. 125 ネ. 500

[4] $\triangle ABC$ の面積は

$$\frac{1}{2}AB \cdot BC \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos 120^\circ = 7 \quad \text{ゆえに} \quad AC = \sqrt{7}$$

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると, 正弦定理により

$$R = \frac{AC}{2 \sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$\triangle ABC$ の外心から AC に下ろした垂線の長さを h とすると

$$h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{3} - \frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{7}{12}} = \frac{\sqrt{21}}{6}$$

$\triangle ACD$ の面積は

$$\triangle ACD = \frac{1}{2}AC(R + h) = \frac{1}{2}\sqrt{7} \left(\frac{\sqrt{21}}{3} + \frac{\sqrt{21}}{6} \right) = \frac{7}{4}\sqrt{3}$$

よって, 四角形 $ABCD$ の面積は

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4}\sqrt{3} = \frac{9}{4}\sqrt{3}$$

(答) ノ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ハ. $\sqrt{7}$ ヒ. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ フ. $\frac{9}{4}\sqrt{3}$