

熊本県立技術短期大学校

推薦入学(前期)試験問題

数学I(90分)

平成 26 年 9 月 21 日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及びメガネのみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
8. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。
9. 試験開始 30 分を経過しないと退出を認めない。

平成 27 年度 熊本県立技術短期大学校推薦 (前期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

- [1] (1) $2x^2 + y^2 + 3xy + x + 2y - 3$ を因数分解すると, $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $9 - 6\sqrt{2} = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ ($p > q$) をみたす整数は $p = \boxed{\text{ウ}}$, $q = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 連立不等式 $3x + 2 < 2x + 5$, $4x + 3 \geq 2x - 1$ の解は $\boxed{\text{オ}} \leq x < \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) 2 次方程式 $x^2 - 4x - 7 = 0$ の解は, $x = \boxed{\text{キ}} \pm \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\cos \theta = \frac{3}{4}$ のとき, $\sin \theta = \boxed{\text{ケ}}$, $\tan \theta = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) m を 0 でない実数とする。2 つの異なる 2 次方程式 $x^2 - (m+1)x - m^2 = 9$, $x^2 - 2mx - m = 0$ が共通の解を持つとき, 実数 m の値は $\boxed{\text{サ}}$ であり, 共通の解は $\boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 2 次関数 $y = 2x^2 + ax + b$ のグラフを x 軸方向に -1 , y 軸方向に 2 だけ平行移動した関数のグラフが $y = 2x^2 + 6x + 7$ のグラフと一致するならば, $a = \boxed{\text{ス}}$, $b = \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2 次関数 $y = -2x^2 + 4x + k$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値が 4 であるとき, 定数 k の値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。また, このとき最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $x^2 - 4x - 5 < 0 < -2x^2 + 2x + 12$ が成り立つ x の範囲は $\boxed{\text{チ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき $2 \cos \theta + 1 \geq 0$ を満たす θ の範囲は $\boxed{\text{テ}}^\circ \leq \theta \leq \boxed{\text{ト}}^\circ$ である。
- [3] $x+y = a$, $xy = b$ とおく。 x^2+y^2 , x^3+y^3 を a, b を用いて表すと $x^2+y^2 = \boxed{\text{ナ}}$, $x^3+y^3 = \boxed{\text{ニ}}$ である。また, $x^5+y^5 = (x^2+y^2)(x^3+y^3) - \boxed{\text{ヌ}}$ となるので, x^5+y^5 を a, b を用いて表すと $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] $\angle A = 60^\circ$ である三角形 ABC において, $\angle B = \theta$ とし, A より辺 BC に下ろした垂線の足を P とする。 $AB = a$ とおくとき, $AC = \frac{3}{2}a$ であるならば, $BC = \boxed{\text{ノ}}a$ で $\cos \theta = \boxed{\text{ハ}}$ である。これより, BC は BP の $\boxed{\text{ヒ}}$ 倍で, $AP = \boxed{\text{フ}}a$ である。

解答例

[1] (1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 + 3xy + x + 2y - 3 &= 2x^2 + (3y + 1)x + (y - 1)(y + 3) \\ &= \{x + (y - 1)\}\{2x + (y + 3)\} \\ &= (x + y - 1)(2x + y + 3) \end{aligned}$$

(答) ア. イ. $x + y - 1$, $2x + y + 3$

(2) $9 - 6\sqrt{2} = (\sqrt{p} - \sqrt{q})^2$ より $9 - 2\sqrt{18} = p + q - 2\sqrt{pq}$

したがって $p + q = 9$, $pq = 18$

これをみたす整数 $p, q (p > q)$ は $p = 6, q = 3$

(答) ウ. 6 エ. 3

(3) $3x + 2 < 2x + 5$ を解いて $x < 3 \quad \cdots \textcircled{1}$

$4x + 3 \geq 2x - 1$ を解いて $x \geq -2 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $-2 \leq x < 3$

(答) オ. -2 カ. 3

(4) $x^2 - 4x - 7 = 0$ を解いて $x = 2 \pm \sqrt{11}$

(答) キ. 2 ク. 11

(5) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

また $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{7}}{4} \div \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

(答) ケ. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ コ. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

- [2] (1) 異なる 2 つの 2 次方程式 $x^2 - (m+1)x - m^2 = 0$, $x^2 - 2mx - m = 0$ の共通解を α とすると

$$\begin{cases} \alpha^2 - (m+1)\alpha - m^2 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ \alpha^2 - 2m\alpha - m = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

① , ② の辺々を引くと

$$(m-1)\alpha - m^2 + m = 0 \quad \text{すなわち} \quad (m-1)(\alpha - m) = 0$$

$m = 1$ のとき , 2 つの方程式は一致するから $\alpha = m \quad \cdots \textcircled{3}$

これを ① に代入すると

$$m^2 - (m+1)m - m^2 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (m+1)m = 0$$

$m \neq 0$ であるから $m = -1$ また , ③ より $\alpha = -1$

(答) サ. -1 シ. -1

- (2) $y = 2x^2 + 6x + 7$ を x 軸方向に 1 , y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$y + 2 = 2(x-1)^2 + 6(x-1) + 7 \quad \text{すなわち} \quad y = 2x^2 + 2x + 1$$

これが $y = 2x^2 + ax + b$ に一致するから $a = 2, b = 1$

(答) ス. 2 セ. 1

- (3) $y = -2x^2 + 4x + k$ を変形すると $y = -2(x-1)^2 + k + 2$

$$0 \leq x \leq 3 \text{ のとき} \quad k - 6 \leq y \leq k + 2$$

最大値が 4 であるから $k + 2 = 4$ すなわち $k = 2$

このとき , 最小値は $k - 6 = -4$

(答) ソ. 2 タ. -4

- (4) $x^2 - 4x - 5 < 0$ より $(x+1)(x-5) < 0$

$$\text{すなわち} \quad -1 < x < 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$0 < -2x^2 + 2x + 12 \text{ より} \quad (x+2)(x-3) < 0$$

$$\text{すなわち} \quad -2 < x < 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① , ② の共通範囲を求めて $-1 < x < 3$

(答) チ. -1 ツ. 3

- (5) $\cos \theta \geq -\frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) を解いて $0^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$

(答) テ. 0 ト. 120

[3] $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = a^3 - 3ab$$

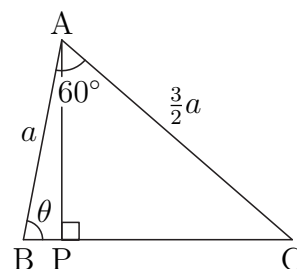
$x^5 + y^5 = (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2y^2(x + y)$ であるから , 上の 2 式から

$$\begin{aligned} x^5 + y^5 &= (a^2 - 2b)(a^3 - 3ab) - ab^2 \\ &= a^5 - 5a^3b + 5ab^2 \end{aligned}$$

(答) ナ. $a^2 - 2b$ 二. $a^3 - 3ab$ 又. ab^2 ネ. $a^5 - 5a^3b + 5ab^2$

[4] 余弦定理により

$$\begin{aligned} BC^2 &= a^2 + \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{3}{2}a \cos 60^\circ \\ &= \frac{7}{4}a^2 \end{aligned}$$



BC > 0 より $BC = \frac{\sqrt{7}}{2}a$

また $\cos \theta = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{a^2 + \frac{7}{4}a^2 - \frac{9}{4}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$

$$BP = a \cos \theta = \frac{a}{2\sqrt{7}} \quad \frac{BC}{BP} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}a}{\frac{a}{2\sqrt{7}}} = 7$$

したがって , BC は BP の 7 倍

さらに $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$

よって $AP = a \sin \theta = \frac{3\sqrt{21}}{14}a$

(答) ノ. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ ハ. $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ ヒ. 7 フ. $\frac{3\sqrt{21}}{4}$