

熊本県立技術短期大学校

推薦入学(後期)試験問題

数学I(90分)

平成 29 年 11 月 19 日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及びメガネのみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
8. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。
9. 試験開始 30 分を経過しないと退出を認めない。

平成 30 年度 熊本県立技術短期大学校推薦 (後期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

- [1] (1) 定数 a, b に対して $x^3 + ax^2 + bx + 4 = (x^2 - 3x + 2)(x + 2)$ が成り立つとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $n < 2\sqrt{10} < n+1$ をみたす自然数 n は $n = \boxed{\text{ウ}}$ である。また, $\sqrt{k} - \sqrt{10} > 1$ をみたす最小の自然数 k は $k = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 点 $(1, -2)$ を通る放物線 $y = -x^2 + ax + b$ を x 軸方向に -3 , y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線は, 点 $(-1, -2)$ を通る. このとき, 定数 a, b の値は $a = \boxed{\text{オ}}$, $b = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta = \boxed{\text{キ}}$, $\sin \theta = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 10 個のデータ $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ が, $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 55$, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 385$ を満たすとき, データの平均値は $\boxed{\text{ケ}}$, 分散は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) 関数 $f(x) = |2x - 1| + |3 - x|$ は, $x = \boxed{\text{サ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。
- (2) 関数 $y = x^2 - 4x + 3$ ($0 \leq x \leq 3$) の最大値は $\boxed{\text{ス}}$, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\triangle ABC$ において $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = a$ (> 0) とする。 $a \cos B = 3 \cos A$ が成り立つとき, $a = \boxed{\text{ソ}}$, $\cos C = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $2 - 2x \leq x^2 - x \leq 2$ の解は $\boxed{\text{チ}} \leq x \leq \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 2 つの変数 x, y の値の組が $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ であるとき, x と y の分散は共に $\boxed{\text{テ}}$ であり, 相関係数は $\boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] p を定数とする。2 次関数 $y = x^2 - 2(p - 1)x + 2p + 3$ のグラフの頂点の y 座標は $\boxed{\text{ナ}}$ である。頂点の x 座標と y 座標がともに 0 以上であるとき, p の値の範囲は $\boxed{\text{ニ}} \leq p \leq \boxed{\text{ヌ}}$ であり, 頂点の y 座標の最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] 四角形 ABCD において, $AB = 5$, $BC = 12$, $CD = 6$, $\angle B = \angle C = 60^\circ$ である。このとき, $BD = \boxed{\text{ノ}}$, $\angle BDC = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ である。したがって, $AD = \boxed{\text{ヒ}}$ であり, 四角形 ABCD の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $x^3 + ax^2 + bx + 4 = (x^2 - 3x + 2)(x + 2)$ の右辺を展開すると

$$x^3 + ax^2 + bx + 4 = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

同じ次数の項の係数を比較して $a = -1, b = -4$

(答) ア. -1 イ. -4

(2) $n < 2\sqrt{10} < n + 1, 2\sqrt{10} = \sqrt{40}, 6 < \sqrt{40} < 7$ ゆえに $n = 6$

$\sqrt{k} - \sqrt{10} > 1$ より, $\sqrt{k} > \sqrt{10} + 1$ の両辺を平方して

$$k > 11 + 2\sqrt{10}$$

$17 < 11 + 2\sqrt{10} < 18$ であるから, 求める最小の自然数 k は 18

(答) ウ. 6 エ. 18

(3) 放物線 $y = -x^2 + ax + b \cdots (*)$ は点 $(1, -2)$ を通るから

$$-2 = -1 + a + b \quad \text{ゆえに} \quad a + b = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 $(-1, -2)$ を x 軸方向に 3, y 軸方向に -1 だけ平行移動した点 $(2, -3)$ が放物線 $(*)$ 上にあるから

$$-3 = -4 + 2a + b \quad \text{ゆえに} \quad 2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = 2, b = -3$

(答) オ. 2 カ. -3

(4) $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2} \cdots \textcircled{1}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ であるから $\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8} \cdots \textcircled{2}$

① より, $\cos \theta = \sin \theta - \frac{1}{2}$ これを ② に代入すると

$$\sin \theta \left(\sin \theta - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{8} \quad \text{ゆえに} \quad 8 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 3 = 0$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\sin \theta > 0$ に注意してこれを解くと

$$\sin \theta = \frac{2 + \sqrt{7}}{4}$$

(答) キ. $\frac{3}{8}$ ク. $\frac{2 + \sqrt{7}}{4}$

(5) 平均値は $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10} = \frac{55}{10} = \frac{11}{2}$

分散は

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{10}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2) - \bar{x}^2 \\ &= \frac{385}{10} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{77}{2} - \frac{121}{4} = \frac{33}{4}\end{aligned}$$

(答) ケ. 3 コ. 0

[2] (1) $f(x) = |2x - 1| + |3 - x|$ より

(i) $x \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$f(x) = (1 - 2x) + (3 - x) = -3x + 4$$

この区間での最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

(ii) $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ のとき

$$f(x) = (2x - 1) + (3 - x) = x + 2$$

この区間での最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

(iii) $3 \leq x$ のとき

$$f(x) = (2x - 1) + (x - 3) = 3x - 4$$

この区間での最小値は $f(3) = 5$

(i) ~ (iii) より, $x = \frac{1}{2}$ のとき最小値 $\frac{5}{2}$ をとる.

(答) サ. $\frac{1}{2}$ シ. $\frac{5}{2}$

(2) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ ($0 \leq x \leq 3$)

ゆえに, 最大値 $f(0) = 3$, 最小値 $f(2) = -1$

(答) ス. 3 セ. -1

(3) $b = 3, c = 2$ であるから, 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{3^2 + 2^2 - a^2}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{13 - a^2}{12}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + a^2 - 3^2}{2 \cdot 2 \cdot a} = \frac{a^2 - 5}{4a}$$

これらを $a \cos B = 3 \cos A$ に代入すると

$$a \cdot \frac{a^2 - 5}{4a} = 3 \cdot \frac{13 - a^2}{12} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - 5 = 13 - a^2$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと $a = 3$

$$\text{よって} \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 3^2 - 2^2}{2 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{7}{9}$$

(答) ソ. 3 タ. $\frac{7}{9}$

(4) $2 - 2x \leq x^2 - x \leq 2$ より

$$(*) \begin{cases} 2 - 2x \leq x^2 - x \\ x^2 - x \leq 2 \end{cases}$$

(*) の第 1 式から $x^2 + x - 2 \geq 0$

ゆえに $(x + 2)(x - 1) \geq 0$ すなわち $x \leq -2, 1 \leq x \quad \cdots \textcircled{1}$

(*) の第 2 式から $x^2 - x - 2 \leq 0$

ゆえに $(x + 1)(x - 2) \leq 0$ すなわち $-1 \leq x \leq 2 \quad \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通範囲を求めて $1 \leq x \leq 2$

(答) チ. 1 ツ. 2

(5) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{4}\{1 + 1 + (-1) + (-1)\} = 0$

x と y の分散は, とともに

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \frac{1}{4}\{1^2 + 1^2 + (-1)^2 + (-1)^2\} - 0^2 = 1$$

共分散は

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{4}\{(1-0)(1-0) + (1-0)(-1-0) + (-1-0)(1-0) + (-1-0)(-1-0)\} = 0$$

よって, 相関係数は $\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0$

(答) テ. 1 ト. 0

$$\begin{aligned}
 [3] \quad y &= x^2 - 2(p-1)x + 2p + 3 \\
 &= (x - p + 1)^2 - p^2 + 4p + 2
 \end{aligned}$$

したがって、このグラフの頂点の y 座標は $-p^2 + 4p + 2$

頂点 $(p-1, -p^2 + 4p + 2)$ の x 座標と y 座標がともに 0 以上であるとき

$$(*) \begin{cases} p-1 \geq 0 \\ -p^2 + 4p + 2 \geq 0 \end{cases}$$

(*) の第 1 式を解いて $p \geq 1 \quad \dots \textcircled{1}$

(*) の第 2 式から

$$p^2 - 4p - 2 \leq 0 \quad \text{これを解いて} \quad 2 - \sqrt{6} \leq p \leq 2 + \sqrt{6} \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② の共通範囲を求めて $1 \leq p \leq 2 + \sqrt{6}$

放物線の頂点の y 座標を q とすると

$$\begin{aligned}
 q &= -p^2 + 4p + 2 \\
 &= -(p-2)^2 + 6
 \end{aligned}$$

よって、頂点の y 座標の最大値は 6

(答) ナ. $-p^2 + 4p + 2$ 二. 1 又. $2 + \sqrt{6}$ ネ. 6

[4] $\triangle BCD$ に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = 12^2 + 6^2 - 2 \cdot 12 \cdot 6 \cos 60^\circ = 108$$

$BD > 0$ であるから $BD = 6\sqrt{3}$

このとき, $BC^2 = BD^2 + CD^2$ であるから

$$\angle BDC = 90^\circ \quad \text{また} \quad \angle DBC = 30^\circ$$

$$\angle ABD = \angle ABC - \angle DBC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$\triangle ABD$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} AD^2 &= 5^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6\sqrt{3} \cos 30^\circ \\ &= 25 + 108 - 90 = 43 \end{aligned}$$

$AD > 0$ であるから $AD = \sqrt{43}$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} CD \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

$$\triangle ABD = \frac{1}{2} AB \cdot BD \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2} \sqrt{3}$$

よって, 四角形 ABCD の面積は

$$\triangle BCD + \triangle ABD = 18\sqrt{3} + \frac{15}{2} \sqrt{3} = \frac{51}{2} \sqrt{3}$$

(答) ノ. $6\sqrt{3}$ ハ. 90 ヒ. $\sqrt{43}$ フ. $\frac{51}{2} \sqrt{3}$

