

熊本県立技術短期大学校

推薦入学(後期)試験問題

数学I(90分)

平成 26 年 11 月 23 日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及びメガネのみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
8. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。
9. 試験開始 30 分を経過しないと退出を認めない。

平成 27 年度 熊本県立技術短期大学校推薦 (後期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

- [1] (1) $2x^2 - 2y^2 + 3xy - 5x + 5y - 3 = (x + ay + b)(2x + cy + 1)$ ならば $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) $\sqrt{50} - \sqrt{8} + 3\sqrt{18} = a\sqrt{b}$ とおく。ただし, a, b は整数とする。このとき, $a = \boxed{\text{ウ}}$, $b = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) 1 冊 200 円のノート A と 1 冊 130 円のノート B を合計 13 冊購入する。2000 円を支払ったとき, A は最大 $\boxed{\text{オ}}$ 冊購入でき, そのときのおつりは $\boxed{\text{カ}}$ 円である。
- (4) 放物線 $y = 2x^2 - 3x + 2$ を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動させると, 2 点 $(1, 6)$, $(3, 0)$ を通る。このとき, $p = \boxed{\text{キ}}$, $q = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) $\tan \alpha = 3$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ならば, $\sin \alpha = \boxed{\text{ケ}}$, $\cos \alpha = \boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) $a = \frac{1}{\sqrt{6} - 2}$, $b = \frac{1}{\sqrt{6} + 2}$ のとき, $a^2 + b^2 = \boxed{\text{サ}}$, $a^2 - b^2 = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) $-\frac{1}{2}x + |x - 2| < 3$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{ス}} < x < \boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) 2 次不等式 $x^2 + (k + 3)x - k > 0$ の解が, すべての実数となるととき, 定数 k の範囲は $\boxed{\text{ソ}} < k < \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $a > 0$ のとき, $y = -x^2 + 2ax + b$ の $\frac{a}{2} \leq x \leq 2a$ における最大値が 5 で最小値が 1 ならば, $a = \boxed{\text{チ}}$, $b = \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において, 辺 BC の中点を M とすると, $DM = \boxed{\text{テ}}$ である。これより, $\cos \angle ADM = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 定数 $a > 0$ に対して, 2 次関数 $y = -ax^2 + 2x + 1$ のグラフ C の x 軸との 2 交点間の距離を d_1 とすると, $d_1 = \boxed{\text{ナ}}$ である。また, C の頂点 P と x 軸との距離を d_2 とすると, $d_2 = \boxed{\text{ニ}}$ である。したがって, $d_1 = d_2$ となるのは $a = \boxed{\text{ヌ}}$ のときで, そのとき, $d_1 = d_2 = \boxed{\text{ネ}}$ である。
- [4] $\triangle ABC$ において, $AC = 2$, $BC = 1$, $AB = c$, その外接円の半径を R とする。 $\cos A \sin B$, $\sin A \cos B$ を c, R を用いて表すと, $\cos A \sin B = \boxed{\text{ノ}}$, $\sin A \cos B = \boxed{\text{ハ}}$ である。 $\cos A \sin B = 4 \sin A \cos B$ が成り立つとき, $c = \boxed{\text{ヒ}}$, $R = \boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 2y^2 + 3xy - 5x + 5y - 3 &= 2x^2 + (3y - 5)x - (y - 1)(2y - 3) \\
 &= \{x + (2y - 3)\}\{2x - (y - 1)\} \\
 &= (x + 2y - 3)(2x - y + 1)
 \end{aligned}$$

(答) ア. 2 イ. -3

$$(2) \sqrt{50} - \sqrt{8} + 3\sqrt{18} = 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

(答) ウ. 9 エ. 2

(3) ノート A を x 冊, ノート B を $13 - x$ 冊購入すると

$$200x + 130(13 - x) \leq 2000 \quad \text{ゆえに} \quad x \leq \frac{31}{7}$$

上式をみたす最大の整数 x は 4

このとき, 支払う代金は

$$200 \times 4 + 130 \times 9 = 1970 \quad (\text{円})$$

よって, おつりは $2000 - 1970 = 30$ (円)

(答) オ. 4 カ. 30

(4) $y = 2x^2 + bx + c$ が 2 点 $(1, 6)$, $(3, 0)$ を通るとき

$$b + c = 4, \quad 3b + c = -18 \quad \text{これを解いて} \quad b = -11, \quad c = 15$$

$$y = 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} \quad \text{頂点} \left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right)$$

$$y = 2x^2 - 11x + 15 = 2\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} \quad \text{頂点} \left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

$$\text{よって} \quad p = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = 2, \quad q = -\frac{1}{8} - \frac{7}{8} = -1$$

(答) キ. 2 ク. -1

(5) $\tan \alpha = 3$ を $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ に代入すると

$$1 + 3^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ より } \cos \alpha > 0 \text{ であるから } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\text{また} \quad \sin \alpha = \cos \alpha \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}} \times 3 = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(答) ケ. $\frac{3}{\sqrt{10}}$ コ. $\frac{1}{\sqrt{10}}$

$$[2] (1) a = \frac{1}{\sqrt{6}-2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2}, b = \frac{1}{\sqrt{6}+2} = \frac{\sqrt{6}-2}{2}$$

$$\text{ゆえに } a+b = \sqrt{6}, a-b = 2, ab = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) = 2\sqrt{6}$$

(答) サ. 5 シ. $2\sqrt{6}$

$$(2) -\frac{1}{2}x + |x-2| < 3$$

i) $x < 2$ のとき

$$-\frac{1}{2}x - (x-2) < 3 \quad \text{これを解いて } x > -\frac{2}{3}$$

$$\text{条件に注意して } -\frac{2}{3} < x < 2$$

ii) $x \geq 2$ のとき

$$-\frac{1}{2}x + (x-2) < 3 \quad \text{これを解いて } x < 10$$

$$\text{条件に注意して } 2 \leq x < 10$$

$$\text{よって, i), ii) の結果から } -\frac{2}{3} < x < 10$$

(答) ス. $-\frac{2}{3}$ セ. 10

(3) 2次不等式 $x^2 + (k+3)x - k > 0$ の解が, すべての実数となるのは, 2次関数 $y = x^2 + (k+3)x - k$ のグラフが x 軸と共有点をもたないときであるから

$$(k+3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k) < 0 \quad \text{すなわち } (k+9)(k+1) < 0$$

$$\text{これを解いて } -9 < k < -1$$

(答) ソ. -9 タ. -1

$$(4) y = -x^2 + 2ax + b = -(x-a)^2 + a^2 + b \quad \left(\frac{a}{2} \leq a \leq 2a\right)$$

$$x = a \text{ のとき最大値 } a^2 + b, x = 2a \text{ のとき最小値 } b$$

$$\text{したがって } a^2 + b = 5, b = 1$$

$$a > 0 \text{ に注意して, 第2式を第1式に代入すると } a = 2$$

(答) チ. 2 ツ. 1

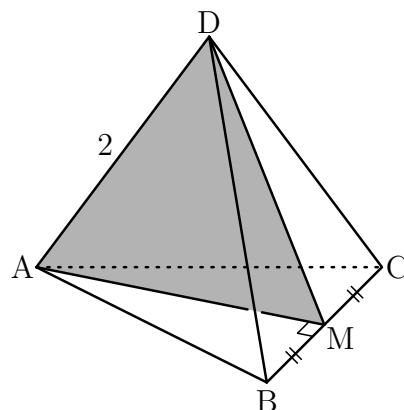
(5) 右の図から

$$DM = AM = \sqrt{3}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos \angle ADM &= \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(答) テ. $\sqrt{3}$ ト. $\frac{1}{\sqrt{3}}$



[3] $C : y = -ax^2 + 2x + 1 = -a \left(x - \frac{1}{a} \right)^2 + \frac{1+a}{a}$

C と x 軸との共有点の x 座標は , $-ax^2 + 2x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+a}}{a}$$

したがって $d_1 = \frac{1 + \sqrt{1+a}}{a} - \frac{1 - \sqrt{1+a}}{a} = \frac{2\sqrt{1+a}}{a}$

C の頂点の y 座標から $d_2 = \frac{1+a}{a}$

$d_1 = d_2$ のとき $\frac{2\sqrt{1+a}}{a} = \frac{1+a}{a}$ ゆえに $\sqrt{1+a} = 2$ よって $a = 3$

このとき $d_1 = d_2 = \frac{4}{3}$

(答) ナ. $\frac{2\sqrt{1+a}}{a}$ ニ. $\frac{1+a}{a}$ 又. 3 ネ. $\frac{4}{3}$

[4] $a = 1, b = 2$ を正弦定理に適用すると $\frac{1}{\sin A} = \frac{2}{\sin B} = 2R$

ゆえに $\sin A = \frac{1}{2R}, \sin B = \frac{1}{R}$

$a = 1, b = 2$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2^2 + c^2 - 1^2}{2 \cdot 2 \cdot c} = \frac{c^2 + 3}{4c}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c^2 + 1^2 - 2^2}{2 \cdot c \cdot 1} = \frac{c^2 - 3}{2c}$$

したがって

$$\cos A \sin B = \frac{c^2 + 3}{4c} \times \frac{1}{R} = \frac{c^2 + 3}{4cR}$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2R} \times \frac{c^2 - 3}{2c} = \frac{c^2 - 3}{4cR}$$

$\cos A \sin B = 4 \sin A \cos B$ が成り立つとき, 上式から

$$c^2 + 3 = 4(c^2 - 3) \quad \text{これを解いて} \quad c = \sqrt{5}$$

このとき $\cos A = \frac{(\sqrt{5})^2 + 3}{4\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin A = \frac{1}{2R} \quad \text{より} \quad R = \frac{1}{2 \sin A} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

(答) ノ. $\frac{c^2 + 3}{4cR}$ ハ. $\frac{c^2 - 3}{4cR}$ ヒ. $\sqrt{5}$ フ. $\frac{\sqrt{5}}{2}$