

熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成30年2月4日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
8. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 30 年度 熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

- [1] (1) $\frac{ax}{(x+1)^2} + \frac{b}{1-2x} = \frac{5x+2}{(x+1)^2(1-2x)}$ が成り立つとき, 定数 a, b の値はそれぞれ $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 2 点 $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$ を $1:2$ に内分する点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である。この点を通り線分 AB と直交する直線の方程式は $y = \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos \theta = \boxed{\text{オ}}$, $\sin 2\theta = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $\log_{16} \sqrt{4}$ の値は $\boxed{\text{キ}}$ である。 $\log_a 3 = \frac{1}{4}$ を満たす a は, $a = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 実数 a に対して, $f(a) = \int_0^1 (x+a)^2 dx$ とする。このとき, $f(a)$ は $a = \boxed{\text{ケ}}$ で最小値 $\boxed{\text{コ}}$ をとる。
- [2] (1) 2 次方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の 2 つの解を α, β とする。2 数 α^2, β^2 を解とする 2 次方程式を $x^2 + ax + b = 0$ と表すと, 実数 a, b の値は $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 半径 r の円 $x^2 + y^2 = r^2$ と直線 $y = \sqrt{3}x - 4$ が接するとき, $r = \boxed{\text{ス}}$ であり, 接点の x 座標は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して, $\cos \theta = \frac{3}{2} \tan \theta$ を満たす θ は $\theta = \boxed{\text{ソ}}$ と $\theta = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) $2^x + \frac{1}{2^x} \leq \frac{5}{2}$ を満たす実数 x のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{チ}} \leq x \leq \boxed{\text{ツ}}$ である。
- (5) 放物線 $y = x^2 + 2x + 3$ 上の点 $(0, 3)$ における接線の方程式は $y = \boxed{\text{テ}}$ であり, この接線が放物線 $y = x^2 + a$ と接するとき, $a = \boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] k は正の定数で, 円 $x^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ の交点の 1 つは x 座標が -1 である。このとき, $k = \boxed{\text{ナ}}$ であり, 円と直線のもう一方の交点の x 座標は $\boxed{\text{ニ}}$ である。さらに, 連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ の表す領域を点 (x, y) が動くとき, $x + y$ の最大値は $\boxed{\text{ヌ}}$, 最小値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

- [4] 放物線 $y = x^2 - x + 1$ に点 $(1, 0)$ から引いた 2 本の接線の方程式は $y = \boxed{\text{ノ}}$ と $y = \boxed{\text{ハ}}$ である。それぞれの接線と放物線の接点を A , B とするとき , A , B を通る直線は $y = \boxed{\text{ヒ}}$ であり , この直線と放物線で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) 与えられた等式の両辺に $(x+1)^2(1-2x)$ を掛けると

$$ax(1-2x) + b(x+1)^2 = 5x + 2$$

左辺を整理すると

$$(-2a+b)x^2 + (a+2b)x + b = 5x + 2$$

同じ次数の項の係数は等しいから

$$-2a+b=0, \quad a+2b=5, \quad b=2$$

これを解いて $a=1, b=2$

(答) ア. 1 イ. 2

(2) 2点 A(2, 1), B(-1, 3) を 1:2 に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)}{1+2}, \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 3}{1+2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \left(1, \frac{5}{3} \right)$$

直線 AB の傾きは $\frac{3-1}{-1-2} = -\frac{2}{3}$

点 $\left(1, \frac{5}{3} \right)$ を通り, 直線 AB に垂直な直線は

$$y - \frac{5}{3} = \frac{3}{2}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$$

(答) ウ. $\left(1, \frac{5}{3} \right)$ エ. $\frac{3}{2}x + \frac{1}{6}$

(3) $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より, $\cos \theta < 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3} \right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3} \right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

(答) オ. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ カ. $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$$(4) \log_{16} \sqrt{4} = \log_{16} 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 16} = \frac{1}{4}$$

$$\log_a 3 = \frac{1}{4} \text{ より } a^{\frac{1}{4}} = 3 \text{ よって } a = 3^4 = 81$$

$$(\text{答}) \text{ キ. } \frac{1}{4} \quad \text{ク. } 81$$

$$(5) f(a) = \int_0^1 (x+a)^2 dx = \frac{1}{3} \left[(x+a)^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \{ (1+a)^3 - a^3 \} = a^2 + a + \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに } f(a) = \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \text{ よって } a = -\frac{1}{2} \text{ のとき最小値 } \frac{1}{12}$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } -\frac{1}{2} \quad \text{コ. } \frac{1}{12}$$

[2] (1) 2 次方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の解が α, β であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2, \quad \alpha\beta = -2$$

$$\text{ゆえに } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 2^2 - 2 \cdot (-2) = 8$$

$$\alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (-2)^2 = 4$$

α^2, β^2 を解とする 2 次方程式は

$$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0 \quad \text{ゆえに } x^2 - 8x + 4 = 0$$

これと $x^2 + ax + b = 0$ の同じ次数の項の係数を比較して $a = -8, b = 4$

$$(\text{答}) \text{ サ. } -8 \quad \text{シ. } 4$$

(2) 円の中心 $(0, 0)$ から直線 $y = \sqrt{3}x - 4$ ($\sqrt{3}x - y - 4 = 0$) までの距離が円の半径 r であるから

$$r = \frac{|-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 2$$

$x^2 + y^2 = 4$ と $y = \sqrt{3}x - 4$ から y を消去すると

$$x^2 + (\sqrt{3}x - 4)^2 = 4 \quad \text{整理すると } x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 0$$

これを解いて $x = \sqrt{3}$

$$(\text{答}) \text{ ス. } 2 \quad \text{セ. } \sqrt{3}$$

(3) $\cos \theta = \frac{3}{2} \tan \theta$ より $2 \cos^2 \theta = 3 \sin \theta$

したがって $2(1 - \sin^2 \theta) = 3 \sin \theta$ ゆえに $(\sin \theta + 2)(2 \sin \theta - 1) = 0$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから $\sin \theta = \frac{1}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

(答) ソ. タ. $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

(4) $2^x + \frac{1}{2^x} \leq \frac{5}{2}$ について, $t = 2^x$ とおくと ($t > 0$)

$t + \frac{1}{t} \leq \frac{5}{2}$ ゆえに $2t^2 - 5t + 2 \leq 0$ これを解いて $\frac{1}{2} \leq t \leq 2$

したがって $\frac{1}{2} \leq 2^x \leq 2$ すなわち $-1 \leq x \leq 1$

(答) チ. -1 ツ. 1

(5) $y = x^2 + 2x + 3$ を微分すると $y' = 2x + 2$ ゆえに $x = 0$ のとき, $y' = 2$

したがって, 放物線 $y = x^2 + 2x + 3$ 上の点 $(0, 3)$ における接線の方程式は

$$y = 2x + 3$$

これと $y = x^2 + a$ から y を消去すると

$$x^2 + a = 2x + 3 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2x + a - 3 = 0$$

上の2次方程式は重解をもつから, 係数について

$$(-2)^2 - 4 \cdot 1(a - 3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = 4$$

(答) テ. $4x - 3$ ト. 2

[3] 直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ の x 軸との交点の x 座標 k が正である .

また円と直線の交点の x 座標が -1 であるから , その交点は第 2 象限あり

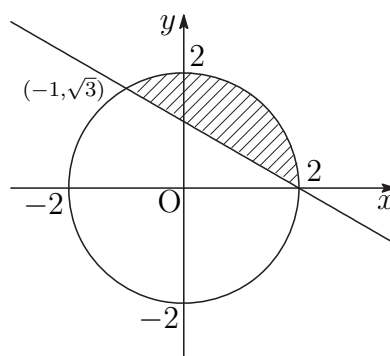
$$(-1)^2 + y^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad y = \sqrt{3}$$

交点 $(-1, \sqrt{3})$ は直線 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - k)$ 上の点であるから

$$\sqrt{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}(-1 - k) \quad \text{これを解いて} \quad k = 2$$

もう一方の交点は $(2, 0)$ であるから , もう一方の交点の x 座標は 2

連立不等式 $x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2)$ の表す領域は , 下の図の斜線部分で , 境界線を含む .



よって $x + y$ は $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で最大値 $2\sqrt{2}$,

$(x, y) = (-1, \sqrt{3})$ で最小値 $-1 + \sqrt{3}$ をとる .

(答) ナ. 2 ニ. 2 ハ. $2\sqrt{2}$ ネ. $-1 + \sqrt{3}$

[4] $y = x^2 - x + 1$ を微分すると $y' = 2x - 1$

放物線 $y = x^2 - x + 1$ 上の点 $(t, t^2 - t + 1)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - t + 1) = (2t - 1)(x - t)$$

すなわち $y = (2t - 1)x - t^2 + 1 \quad \cdots (*)$

これが点 $(1, 0)$ を通るから

$$0 = (2t - 1) \cdot 1 - t^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2t = 0$$

これを解いて $t = 0, 2$

(*) より, 2 本の接線は $y = -x + 1, y = 3x - 3$

したがって, 2 点 A, B の座標は $(0, 1), (2, 3)$

この 2 点を通る直線の方程式は

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{2 - 0}(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = x + 1$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{x + 1 - (x^2 - x + 1)\} dx \\ &= - \int_0^2 x(x - 2) dx = \frac{1}{6}(2 - 0)^3 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

(答) ノ. 八. $-x + 1, 3x - 3$ ヒ. $x + 1$ フ. $\frac{4}{3}$