

熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成 29 年 2 月 5 日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。

平成 29 年度 熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

- [1] (1) 整式 $x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ を整式 $x^3 + 3$ で割ると、商は ア、余りは イ である。
- (2) 直線 $2x - y + 3 = 0$ に関して、点 $P(3, 4)$ と対称な点 Q の座標を (a, b) とするとき、 $a =$ ウ、 $b =$ エ である。
- (3) $\sin \frac{14}{3}\pi =$ オ、 $\cos \left(-\frac{5}{3}\pi\right) =$ カ である。
- (4) 連立方程式 $8^x = 4^{y+1}$ 、 $9^{x+2} = 27^y$ を解くと $x =$ キ、 $y =$ ク である。
- (5) 関数 $y = x^3 - 12x$ の $-3 \leq x \leq 1$ における最大値は ケ、最小値は コ である。
- [2] (1) 3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ で表すとき、 $\alpha + \beta + \gamma =$ サ、 $\alpha\beta\gamma =$ シ である。
- (2) 原点 O と点 $A(a, a^2 + 1)$ について、線分 OA を $2:1$ に内分する点 B の座標は ス であり、点 A が放物線 $y = x^2 + 1$ の上を動くとき、点 B の軌跡の方程式は $y =$ セ である。
- (3) 定数 a, b ($a > 0$) に対して $3\sin\theta - 4\cos\theta = a\sin(\theta + b)$ が成り立つとき、 $a =$ ソ、 $\tan b =$ タ である。
- (4) 不等式 $2\log_2(x+1) < \log_2(1-x)$ の解は チ $< x <$ ツ である。
- (5) $\int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 3x - 2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a ($a > 0$) は、 $f(x) =$ テ、 $a =$ ト である。
- [3] 放物線 $y = x^2 + (a-1)x - a$ ($a > 0$) 上の点 $A(1, 0)$ を通り、傾き -1 の直線を ℓ 、傾き 1 の直線を m とする。放物線と直線 ℓ の A 以外の交点を B 、放物線と直線 m の A 以外の交点を C とする。線分 AB, AC の長さを a を用いて表すと $AB =$ ナ、 $AC =$ ニ である。 $BC = 6$ のとき $a =$ ヌ であり、 $\triangle ABC$ の面積は ネ となる。
- [4] 放物線 $y = 1 - x^2$ の上に点 $A(a, 1 - a^2)$ をとる。ただし、 $0 < a < 1$ とする。点 A を通る接線 ℓ の方程式は $y =$ ノ である。 x 軸上に点 $B(a, 0)$ および接線 ℓ と x 軸の交点 C をとり、 $\triangle ABC$ の面積を S_1 とすると、 $S_1 =$ ハ となる。さらに x 軸上に点 $D(-1, 0)$ をとり、直線 AD と放物線 $y = 1 - x^2$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると、 $S_2 =$ ヒ となる。 $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$ のとき、 $a =$ フ である。

解答例

$$\begin{array}{r}
 [1] (1) \quad x^3 \quad + 3 \overline{) \begin{array}{r} x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 5x - 1 \\ x^5 + 3x^2 \\ \hline -3x^4 - 2x^3 + 5x \\ -3x^4 - 9x \\ \hline -2x^3 + 14x - 1 \\ -2x^3 - 6 \\ \hline 14x + 5 \end{array}} \\
 \end{array}$$

よって 商は $x^2 - 3x - 2$, 余りは $14x + 5$

(答) ア. $x^2 - 3x - 2$ イ. $14x + 5$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 2 \text{ 点 } P, Q \text{ の中点 } \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+4}{2} \right) \text{ は直線 } 2x - y + 3 = 0 \text{ 上の点であるから} \\
 & 2 \cdot \frac{a+3}{2} - \frac{b+4}{2} + 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad 2a - b = -8 \quad \cdots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

直線 $2x - y + 3 = 0$ の傾きは 2 , 直線 PQ の傾きは $\frac{b-4}{a-3}$ であるから

$$2 \cdot \frac{b-4}{a-3} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a + 2b = 11 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① , ② を解いて $a = -1, b = 6$

(答) ウ. -1 エ. 6

$$(3) \quad \sin \frac{14}{3}\pi = \sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \left(-\frac{5}{3}\pi \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(答) オ. } \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{カ. } \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad 8^x = 4^{y+1}, \quad 9^{x+2} = 27^y \quad \text{より}$$

$$2^{3x} = 2^{2(y+1)}, \quad 3^{2(x+2)} = 3^{3y}$$

$$\text{したがって} \quad 3x = 2(y+1), \quad 2(x+2) = 3y$$

$$\text{これを解いて} \quad x = \frac{14}{5}, \quad y = \frac{16}{5}$$

$$\text{(答) キ. } \frac{14}{5} \quad \text{ク. } \frac{16}{5}$$

(5) $y = x^3 - 12x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

したがって, $-3 \leq x \leq 1$ における y の増減表は

x	-3	...	-2	...	1
y'		+	0	-	
y	9	↗	16	↘	-11

よって, $x = -2$ のとき, 最大値 16, $x = 1$ のとき, 最小値 -11

(答) ケ. 16 コ. -11

[2] (1) 3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ の解が α, β, γ であるから, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-3}{1} = 3, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{12}{1} = -12$$

(答) サ. 3 シ. -12

(2) 原点 O と点 A($a, a^2 + 1$) を結ぶ線分 OA を 2 : 1 に内分する点 B の座標は

$$\left(\frac{2}{3}a, \frac{2a^2 + 2}{3} \right)$$

$x = \frac{2}{3}a, y = \frac{2a^2 + 2}{3}$ において, a を消去すると

$$3y = 2 \left(\frac{3}{2}x \right)^2 + 2 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}$$

(答) ス. $\left(\frac{2}{3}a, \frac{2a^2 + 2}{3} \right)$ セ. $\frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}$

(3) $\cos b = \frac{3}{5}, \sin b = -\frac{4}{5}$ とおくと

$$\begin{aligned} 3 \sin \theta - 4 \cos \theta &= 5(\sin \theta \cos b + \cos \theta \sin b) \\ &= 5 \sin(\theta + b) \end{aligned}$$

よって $a = 5, \tan b = \frac{\sin b}{\cos b} = -\frac{4}{3}$

(答) ソ. 5 タ. $-\frac{4}{3}$

$$(4) \quad 2\log_2(x+1) < \log_2(1-x) \quad \cdots \textcircled{1}$$

真数は正であるから

$$x+1 > 0, \quad 1-x > 0 \quad \text{すなわち} \quad -1 < x < 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ から } \log_2(x+1)^2 < \log_2(1-x)$$

底 2 は 1 より大きいから

$$(x+1)^2 < 1-x \quad \text{ゆえに} \quad x(x+3) < 0$$

$\textcircled{2}$ に注意して, これを解くと $-1 < x < 0$

(答) チ. -1 ツ. 0

$$(5) \quad \int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 3x - 2 \quad \cdots (*)$$

$(*)$ を x について微分すると $f(x) = 4x - 3$

$(*)$ に $x = a$ を代入すると

$$0 = 2a^2 - 3a - 2 \quad \text{ゆえに} \quad (a-2)(2a+1) = 0$$

$a > 0$ に注意して, これを解くと $a = 2$

(答) テ. $4x - 3$ ト. 2

[3] $y = x^2 + (a - 1)x - a \ (a > 0) \quad \cdots (*)$

直線 ℓ の方程式は

$$y = -1(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

直線 m の方程式は

$$y = 1(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = x - 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

(*) , ① から y を消去すると

$$x^2 + (a - 1)x - a = -x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x - 1)(x + a + 1) = 0$$

したがって , 点 B の x 座標は $-a - 1$

$$a > 0 \text{ より} \quad AB = \sqrt{2}|1 - (-a - 1)| = \sqrt{2}(a + 2)$$

(*) , ② から y を消去すると

$$x^2 + (a - 1)x - a = x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x - 1)(x + a - 1) = 0$$

したがって , 点 C の x 座標は $-a + 1$

$$a > 0 \text{ より} \quad AC = \sqrt{2}|1 - (-a + 1)| = \sqrt{2}a$$

$\angle BAC = 90^\circ$ より , $AB^2 + AC^2 = BC^2$ であるから

$$2(a + 2)^2 + 2a^2 = 36 \quad \text{整理すると} \quad a^2 + 2a - 7 = 0$$

$a > 0$ に注意してこれを解くと $a = 2\sqrt{2} - 1$

このとき $AB = \sqrt{2}(2\sqrt{2} + 1)$, $AC = \sqrt{2}(2\sqrt{2} - 1)$,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}AB \cdot AC = 7$$

(答) ナ. $\sqrt{2}(a + 2)$ 二. $\sqrt{2}a$ 又. $2\sqrt{2} - 1$ ネ. 7

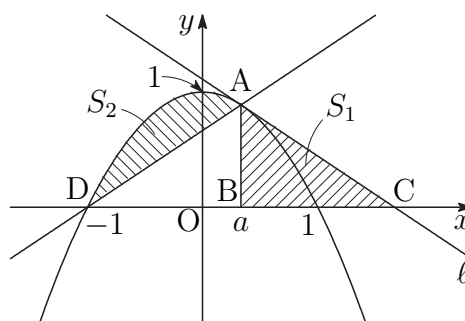
[4] $y = 1 - x^2$ を微分すると

$$y' = -2x$$

接線 ℓ の方程式は

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$$

$$y = -2ax + a^2 + 1$$



点 C の x 座標は , 上式に $y = 0$ を代入すると

$$-2ax + a^2 + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

したがって

$$S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}(1 - a^2) \left(\frac{a^2 + 1}{2a} - a \right) = \frac{(1 - a^2)^2}{4a}$$

2 点 A , D の x 座標に注意して

$$S_2 = \frac{1}{6}\{a - (-1)\}^3 = \frac{(1 + a)^3}{6}$$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$ のとき

$$\frac{(1 - a^2)^2}{4a} \times \frac{6}{(1 + a)^3} = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(1 - a)^2}{a(1 + a)} = 1$$

これを解いて $a = \frac{1}{3}$

(答) ノ. $-2ax + a^2 + 1$ ハ. $\frac{(1 - a^2)^2}{4a}$ ヒ. $\frac{(1 + a)^3}{6}$ フ. $\frac{1}{3}$