

熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成 28 年 1 月 31 日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及びメガネのみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。

平成 28 年度 熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $\frac{2-i}{2+i} + \frac{3+i}{3-i} = a + bi$ を満たす実数 a, b は, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。ただし, i は虚数単位を表す。

(2) ある直線 ℓ に関して, 点 $(-1, 1)$ と対称な点が $(1, 0)$ であるとき, 直線 ℓ の y 切片は $\boxed{\text{ウ}}$, 傾きは $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。 $\cos \theta = \frac{2}{3}$ のとき, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \boxed{\text{オ}}$,
 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 方程式 $3^x + 3^{3-x} = 12$ の解は $x = \boxed{\text{キ}}$ と $x = \boxed{\text{ク}}$ である。

(5) 関数 $F(x)$ が, $F'(x) = 3x^2 - 8x + a$, $F(1) = F(2) = 0$ を満たすとき, 実数 a の値は $a = \boxed{\text{ケ}}$ であり, $F(x) = \boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $(x-1)^5$ を $x(x-1)$ で割ったときの余りを $ax + b$ とすると, $a = \boxed{\text{サ}}$,
 $b = \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) 点 $(2, 1)$ から円 $x^2 + y^2 = 1$ に引いた接線と円と接点の x 座標は $x = \boxed{\text{ス}}$
と $x = \boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ のとき, 関数 $y = -2 \cos \theta + \cos 2\theta$ の最小値は $\boxed{\text{ソ}}$ である。また, そのときの θ の値は $\theta = \boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 不等式 $\log_5(x-3) + \log_5(x+1) < 1$ を解くと, $\boxed{\text{チ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 3 次方程式 $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要十分条件は $\boxed{\text{テ}} < a < \boxed{\text{ト}}$ である。

[3] 正の実数 a に対して, x 軸上に点 $A(a, 0)$, y 軸上に点 $B\left(0, \frac{1}{a}\right)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点を P とすると, P の座標は $\boxed{\text{ナ}}$ である。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 点 P の軌跡 C を表す方程式は $y = \boxed{\text{ニ}}$ (ただし $x > 0$) となる。線分 AB と軌跡 C は 2 点で交わるが, その交点のうち P でない方の点 Q の座標は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。 a が $a > 0$ の範囲を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値は $\boxed{\text{ネ}}$ となる。

[4] 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 上の 2 点 $(0, 1)$, $(2, 3)$ における放物線の接線をそれぞれ ℓ, m とする。 ℓ と m の交点の y 座標が 0 である。このとき, $a = \boxed{\text{ノ}}$, $b = \boxed{\text{ハ}}$, $c = \boxed{\text{ヒ}}$ である。放物線と 2 つの接線 ℓ, m で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) 左辺を変形すると

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)} + \frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)} \\
 &= \frac{3-4i}{5} + \frac{8+6i}{10} = \frac{7-i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a = \frac{7}{5}, b = -\frac{1}{5}$$

$$(\text{答}) \text{ ア. } \frac{7}{5} \quad \text{イ. } -\frac{1}{5}$$

(2) ℓ は 2 点 $(-1, 1)$, $(1, 0)$ の垂直二等分線であるから,

$$2 \text{ 点の midpoint は } \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad 2 \text{ 点を通る直線の傾きは } \frac{0-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\ell \text{ の傾きを } m \text{ とすると } -\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{すなわち } m = 2$$

$$\ell \text{ は点 } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ を通るから, } \ell \text{ の } y \text{ 切片は } \frac{1}{2}$$

$$(\text{答}) \text{ ウ. } \frac{1}{2} \quad \text{エ. } 2$$

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ より, $\sin \theta \geq 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

したがって

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(\text{答}) \text{ オ. } \frac{\sqrt{5}}{3} \quad \text{カ. } \frac{2}{\sqrt{5}}$$

(4) $t = 3^x$ とおくと ($t > 0$) , $3^{3-x} = \frac{27}{t}$ であるから

$$t + \frac{t}{27} = 12 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 12t + 27 = 0$$

$t > 0$ に注意してこれを解くと $t = 3, 9$ よって $x = 1, 2$

(答) キ. ク. 1, 2

(5) $F'(x) = 3x^2 - 8x + a$ より

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + ax + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

$$F(1) = F(2) = 0 \text{ より}$$

$$a + C - 3 = 0, \quad 2a + C - 8 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad a = 5, C = -2 \quad \text{よって} \quad F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$\text{(答) ケ. 5} \quad \text{コ. } x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

[2] (1) $(x-1)^5$ を $x(x-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$(x-1)^5 = x(x-1)Q(x) + ax + b$$

上式に $x = 0, x = 1$ をそれぞれ代入すると

$$-1 = b, \quad 0 = a + b \quad \text{これを解いて} \quad a = 1, b = -1$$

(答) サ. 1 シ. -1

(2) 接点の座標を (a, b) とすると, 接点は円周上の点であるから

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

点 (a, b) における円の接線の方程式は $ax + by = 1$

これが点 $(2, 1)$ を通るから

$$2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } (a, b) = (0, 1), \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$$

よって, 求める接点の x 座標は $x = 0, \frac{4}{5}$

(答) ス. セ. $0, \frac{4}{5}$

(3) $0 \leq \theta \leq \pi$ より, $t = \cos \theta$ とおくと $(-1 \leq t \leq 1)$

$$\begin{aligned} y &= -2 \cos \theta + \cos 2\theta = -2 \cos \theta + (2 \cos^2 \theta - 1) \\ &= 2t^2 - 2t - 1 = 2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

よって $t = \frac{1}{2}$ すなわち $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最小値 $-\frac{3}{2}$

(答) ソ. $-\frac{3}{2}$ タ. $\frac{\pi}{3}$

(4) $\log_5(x-3) + \log_5(x+1) < 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

真数は正であるから

$$x-3 > 0, \quad x+1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

① から $\log_5(x-3)(x+1) < \log_5 5$

底 5 は 1 より大きいから

$$(x-3)(x+1) < 5 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-4) < 0$$

② に注意して, これを解くと $3 < x < 4$

(答) チ. 3 ツ. 4

(5) $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0 \cdots \textcircled{1}$ より $a = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ とおくと, 方程式 ① が, 異なる 3 つの実数解をもつのは, 直線 $y = a$ と曲線 $y = f(x)$ が 3 点を共有するときである.

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$f(x)$ の増減表は, 次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-7	$\nearrow$	20	$\searrow$

よって, 求める a の値の範囲は $-7 < a < 20$

(答) テ. -7 ト. 20

[3] P は $A(a, 0)$, $B\left(0, \frac{1}{a}\right)$ を $1:2$ に内分する点であるから

$$\left(\frac{2a+1\cdot 0}{1+2}, \frac{2\cdot 0+1\cdot \frac{1}{a}}{1+2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{2a}{3}, \frac{1}{3a}\right)$$

$$x = \frac{2a}{3}, y = \frac{1}{3a} \text{ において, } a \text{ を消去すると } C: xy = \frac{2}{9} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{直線 AB の方程式は } \frac{x}{a} + ay = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解くと } (x, y) = \left(\frac{2a}{3}, \frac{1}{3a}\right), \left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3a}\right) \quad \text{よって } Q\left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3a}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned} PQ^2 &= \left(\frac{a}{3} - \frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3} - \frac{a}{3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{9} \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = \frac{1}{9} \left\{ \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2 \right\} \geq \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\text{よって, PQ の最小値は } \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{(答) ナ. } \left(\frac{2a}{3}, \frac{1}{3a}\right) \quad \text{ニ. } \frac{2}{9x} \quad \text{ヌ. } \left(\frac{a}{3}, \frac{2}{3a}\right) \quad \text{ネ. } \frac{\sqrt{2}}{3}$$

[4] ℓ と m の交点の x 座標は $\frac{0+2}{2} = 1$

ゆえに ℓ と m の交点の座標は $(1, 0)$

ℓ は , 2 点 $(0, 1)$, $(1, 0)$ を通る直線であるから

$$y - 1 = \frac{0 - 1}{1 - 0}(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 1$$

m は , 2 点 $(1, 0)$, $(2, 3)$ を通る直線であるから

$$y - 0 = \frac{3 - 0}{2 - 1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = 3x - 3$$

$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると $y' = 2ax + b$

接線の傾きにより $x = 0$ のとき $y' = -1$, $x = 2$ のとき $y' = 3$

したがって $b = -1$, $4a + b = 3$ ゆえに $a = 1$

この放物線は点 $(0, 1)$ を通ることから $c = 1$

よって , 求める面積は a の値と接点の x 座標に注意して

$$\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot (2 - 0)^3 = \frac{2}{3}$$

(答) ノ. 1 ハ. -1 ヒ. 1 フ. $\frac{2}{3}$