

熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I(90分)

平成 27 年 2 月 1 日

【受験上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確認すること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及びメガネのみとする。
7. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。

平成 27 年度 熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

- [1] (1) 整式 $f(x)$ を $x - 1$ で割ると余りは 3, $x - 2$ で割ると余りは 4 となる。このとき, $f(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割った余りを $ax + b$ とおくと, $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。
- (2) 2 直線 $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ の交点と点 $(-3, 5)$ を通る直線の方程式は $y = \boxed{\text{ウ}}x + \boxed{\text{エ}}$ である。
- (3) $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ に対して, $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$ が成り立つならば, $\sin \theta - \cos \theta = \boxed{\text{オ}}$, $\sin \theta = \boxed{\text{カ}}$ である。
- (4) $a, b > 0$ が $ab = \frac{1}{4}$, $\log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b = -2$ をみたすなら, $a = \boxed{\text{キ}}$, $b = \boxed{\text{ク}}$ である。
- (5) 直線 $y = x$ と放物線 $y = -x(x - 2)$ の交点の x 座標は 0 と $\boxed{\text{ケ}}$ である。したがって, 直線と放物線で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である。
- [2] (1) a, b を実数とすると, 方程式 $x^3 - ax^2 - x - b = 0$ が $x = -1 + 2i$ を 1 つの解としてもつなら, $a = \boxed{\text{サ}}$, $b = \boxed{\text{シ}}$ である。
- (2) 3 点 $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$ を通る円の中心は $\boxed{\text{ス}}$ で半径は $\boxed{\text{セ}}$ である。
- (3) $\tan x = 2$ のとき, $\cos^2 x = \boxed{\text{ソ}}$, $\sin 2x = \boxed{\text{タ}}$ である。
- (4) 関数 $y = 4^{x+1} - 2^{x+3} + 7$ は, $x = \boxed{\text{チ}}$ で最小値 $\boxed{\text{ツ}}$ をとる。
- (5) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ の $0 \leq x \leq 3$ における最小値は $\boxed{\text{テ}}$ で最大値は $\boxed{\text{ト}}$ である。
- [3] 2 点 $A(1, 1)$, $B(2, 3)$ 間の距離は $\boxed{\text{ナ}}$ である。放物線 $y = x^2 + 4x + 1$ 上の点 P の x 座標を a とするとき, $\triangle PAB$ の面積 S は $S = \boxed{\text{ニ}}$ である。点 P が放物線上を動くとき, $P = \boxed{\text{ヌ}}$ のとき S は最小値 $\boxed{\text{ネ}}$ をとる。
- [4] 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ ($a > 0$) における C の接線は $\ell_1: y = \boxed{\text{ノ}}$ である。放物線 C , 接線 ℓ_1 および y 軸で囲まれる部分の面積 S_1 は $\boxed{\text{ハ}}$ である。また, 点 P を通り ℓ_1 と垂直な直線を ℓ_2 とするとき, 放物線 C , 直線 ℓ_2 および y 軸で囲まれる部分の面積 S_2 は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。特に, S_2 が S_1 の 5 倍となるのは $a = \boxed{\text{フ}}$ のときである。

解答例

[1] (1) 剰余の定理により $f(1) = 3$, $f(2) = 4$

$f(x)$ を $x^2 - 3x + 2$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 3x + 2)Q(x) + ax + b \\ &= (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

上式に , それぞれ $x = 1, 2$ を代入すると $a + b = 3$, $2a + b = 4$

これを解いて $a = 1$, $b = 2$

(答) ア. 1 イ. 2

(2) 2直線 $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ の交点を通る直線は , 定数 k を用いて

$$2x - y + 1 + k(x + y - 4) = 0$$

これが , 点 $(-3, 5)$ を通るから

$$-10 + k(-2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k = -5$$

したがって $2x - y + 1 - 5(x + y - 4) = 0$ すなわち $y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

(答) ウ. $-\frac{1}{2}$ エ. $\frac{7}{2}$

(3) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2$ であるから

これに $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \cdots \text{①}$ を代入すると

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \frac{1}{5}$$

$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ において $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$ であるから

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \cdots \text{②}$$

① , ② から $\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(答) オ. $\frac{1}{\sqrt{5}}$ カ. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$(4) \quad ab = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 a + \frac{1}{2} \log_2 b = -2 \text{ より}$$

$$\log_2 ab^{\frac{1}{2}} = -2 \quad \text{ゆえに} \quad ab^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ で辺々を割ると } b^{\frac{1}{2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = 1$$

$$\text{これを } \textcircled{1} \text{ に代入して } a = \frac{1}{4}$$

$$(\text{答}) \text{ キ. } \frac{1}{4} \quad \text{ク. } 1$$

$$(5) \quad y = x \text{ と } y = -x(x-2) \text{ から } y \text{ を消去すると}$$

$$x = -x(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad x(x-1) = 0$$

よって、交点の x 座標は 0 と 1 である。

したがって、求める面積は、 x^2 の係数に注意して

$$\frac{1}{6} \cdot 1(1-0)^3 = \frac{1}{6}$$

$$(\text{答}) \text{ ケ. } 1 \quad \text{コ. } \frac{1}{6}$$

[2] (1) a, b は実数であるから、方程式の解を

$$-1 + 2i, \quad -1 - 2i, \quad \gamma$$

とおくと、解と係数の関係により

$$a = -2 + \gamma, \quad -1 = 5 - 2\gamma, \quad b = 5\gamma$$

$$\text{これを解いて} \quad \gamma = 3, \quad a = 1, \quad b = 15$$

$$(\text{答}) \text{ サ. } 1 \quad \text{シ. } 15$$

- (2) 求める円の方程式を $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ とおくと, この円が 3 点 $(1, 1)$, $(2, 3)$, $(-1, 0)$ を通るから

$$a + b + c = -2, \quad 2a + 3b + c = -13, \quad -a + c = -1$$

これを解いて $a = 3, b = -7, c = 2$

したがって $x^2 + y^2 + 3x - 7y + 2 = 0$

すなわち $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{25}{2}$

よって, 中心 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$, 半径 $\frac{5}{\sqrt{2}}$

(答) ス. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$ ゼ. $\frac{5}{\sqrt{2}}$

- (3) $\tan x = 2$ を $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ に代入すると

$$1 + 2^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{よって} \quad \cos^2 x = \frac{1}{5}$$

また $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \tan x \cos^2 x = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

(答) ソ. $\frac{1}{5}$ タ. $\frac{4}{5}$

- (4) $t = 2^x$ とおくと $y = 4t^2 - 8t + 7 = 4(t - 1)^2 + 3$
 $t = 1$ すなわち $x = 0$ のとき, 最小値 3

(答) チ. 0 ツ. 3

- (5) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ を微分すると

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x + 1)(x - 2)$$

$0 \leq x \leq 3$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	6	$\searrow$	-14	$\nearrow$	-3

$0 \leq x \leq 3$ における最小値は -14, 最大値は 6

(答) テ. $\sqrt{3}$ ト. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

[3] A(1, 1) , B(2, 3) 間の距離は $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5}$

直線 AB の方程式は

$$y - 1 = \frac{3-1}{2-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad 2x - y - 1 = 0$$

P(a , $a^2 + 4a + 1$) から直線 AB までの距離を d とすると

$$d = \frac{|2a - (a^2 + 4a + 1) - 1|}{2^2 + (-1)^2} = \frac{|a^2 + 2a + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{(a+1)^2 + 1}{\sqrt{5}}$$

したがって

$$S = \frac{1}{2}AB \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{5} \cdot \frac{(a+1)^2 + 1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2}(a+1)^2 + \frac{1}{2}$$

よって , $a = -1$ すなわち P($-1, -2$) のとき , S の最小値 $\frac{1}{2}$

(答) ナ. $\sqrt{5}$ ニ. $\frac{1}{2}(a+1)^2 + \frac{1}{2}$ ヌ. $(-1, -2)$ ネ. $\frac{1}{2}$

[4] $y = x^2$ より $y' = 2x$

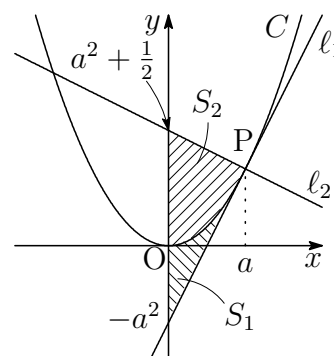
ℓ_1 の方程式は $y - a^2 = 2a(x - a)$

すなわち $y = 2ax - a^2$

ℓ_2 の方程式は $y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)$

すなわち $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$

右の図から



$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a \left\{ \left(a^2 + \frac{1}{2} \right) - (-a^2) \right\} = a^3 + \frac{1}{4}a$$

また

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^a \{x^2 - (2ax - a^2)\} dx \\ &= \int_0^a (x - a)^2 dx = \left[\frac{1}{3}(x - a)^3 \right]_0^a = \frac{1}{3}a^3 \\ S_2 &= (S_1 + S_2) - S_1 = a^3 + \frac{1}{4}a - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a \end{aligned}$$

S_2 が S_1 の 5 倍であるとき

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a = 5 \times \frac{1}{3}a^3 \quad \text{整理すると} \quad a(2a + 1)(2a - 1) = 0$$

$a > 0$ であるから $a = \frac{1}{2}$

(答) ノ. $2ax - a^2$ ハ. $\frac{1}{3}a^3$ ヒ. $\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a$ フ. $\frac{1}{2}$