

平成31年度 鹿児島工業高等専門学校(編入学試験)
数 学(80分)

1. 次の各問いに答えよ.

(1) 方程式 $3x(x+3) = 10(x+1)$ を解け.

(2) 方程式 $x^3 - 7x - 6 = 0$ を解け.

(3) 連立不等式 $\begin{cases} 5x - 3 < 5 + 3x \\ 4x - 9 < 7x \end{cases}$ を解け.

(4) $\log_2 \sqrt{10} - \log_2 \frac{\sqrt{5}}{4}$ を簡単にせよ.

(5) 3直線 $3x - 2y = 7$, $x - 4y = 9$, $ax + 2y = 1$ が1点で交わるように定数 a の値を求めよ.

2. 2点 $(0, 1)$, $(-3, -5)$ を通り, $x = -1$ を軸とする放物線の方程式を求めよ.

3. 2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の2つの解を α , β とするとき, 2次方程式 $x^2 + qx + p = 0$ の2つの解は $\alpha - 1$, $\beta - 1$ であるという. 定数 p , q の値を求めよ.

4. 中心が直線 $y = 5$ 上にあり, 2点 $(1, 1)$, $(8, 8)$ を通る円の方程式を求めよ.

5. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ のとき, 次の値を求めよ.

(1) $\cos 2\alpha$

(2) $\tan \frac{\alpha}{2}$

6. $\triangle ABC$ において BC の中点を M とし, $AB = 8$, $AC = 6$, $\angle A = 60^\circ$ とするとき, 次の値を求めよ.

(1) BC の長さ

(2) $\cos B$

(3) AB の長さ

7. 関数 $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ の極値を求め, グラフをかけ.

8. 放物線 $y = 3 - 3x^2$ と直線 $y = -x - 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

解答

1. (1) 与えられた方程式から

$$3x^2 - x - 10 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(3x+5) = 0 \quad \text{よって} \quad x = 2, -\frac{5}{3}$$

- (2)
- $x^3 - 7x - 6 = 0$
- は,
- $x = -1$
- を解にもつことに注意すると

$$x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6) = (x+1)(x+2)(x-3)$$

$$\text{よって} \quad x = -1, -2, 3$$

- (3) 第1式から
- $2x < 8$
- ゆえに
- $x < 4$

$$\text{第2式から} \quad -3x < 9 \quad \text{ゆえに} \quad x > -3$$

$$\text{よって} \quad -3 < x < 4$$

$$(4) \log_2 \sqrt{10} - \log_2 \frac{\sqrt{5}}{2} = \log_2 4\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$$

- (5) 2直線
- $3x - 2y = 7$
- ,
- $x - 4y = 9$
- の交点は
- $(1, -2)$

直線 $ax + 2y = 1$ が点 $(1, -2)$ を通るから

$$a - 4 = 1 \quad \text{よって} \quad a = 5$$

2. 軸の方程式が
- $x = -1$
- であるから, 放物線の方程式を
- $y = a(x+1)^2 + q$
- とおく.

これが2点 $(0, 1)$, $(-3, -5)$ を通るから

$$1 = a + q, \quad -5 = 4a + q \quad \text{これを解いて} \quad a = -2, \quad q = 3$$

$$\text{よって, 求める放物線の方程式は} \quad y = -2(x+1)^2 + 3$$

3. 2次方程式
- $x^2 + px + q = 0$
- の解が
- α, β
- より

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q \quad \cdots (*)$$

2次方程式 $x^2 + qx + p = 0$ の解が $\alpha - 1, \beta - 1$ より

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = -q, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) = p$$

$$\text{ゆえに} \quad \alpha + \beta = -q + 2, \quad \alpha\beta - (\alpha + \beta) = p - 1$$

上の2式に $(*)$ を代入すると

$$-p = -q + 2, \quad q + p = p - 1 \quad \text{よって} \quad p = -3, \quad q = -1$$

4. 中心を $(a, 5)$, 半径を r とおくと, 円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - 5)^2 = r^2$$

2 点 $(1, 1)$, $(8, 8)$ がこの円周上にあるから

$$(1 - a)^2 + (1 - 5)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(8 - a)^2 + (8 - 5)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② から

$$(1 - a)^2 + 16 = (8 - a)^2 + 9 \quad \text{これを解いて} \quad a = 4$$

$a = 4$ を ① に代入して $r^2 = 25$ よって $r = 5$

よって $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 25$

$$5. (1) \cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \text{ より } \cos 2\alpha = \frac{1 - \left(-\frac{4}{3}\right)^2}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{7}{25}$$

$$(2) \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ より, } x = \tan \frac{\alpha}{2} \text{ とおくと, } 90^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ より } x > 0$$

$$-\frac{4}{3} = \frac{2x}{1 - x^2} \quad \text{整理すると} \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\text{したがって } (x - 2)(2x + 1) = 0 \quad \text{よって } x = \tan \frac{\alpha}{2} = 2$$

6. (1) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 8^2 + 6^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 52$$

$$\text{よって} \quad BC = 2\sqrt{13}$$

(2) $\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると

$$\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{64 + 52 - 36}{2 \cdot 8 \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{5}{2\sqrt{13}}$$

(3) $\triangle ABM$ に余弦定理を適用すると, $BM = \sqrt{13}$

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cos B = 64 + 13 - 2 \cdot 8 \cdot \sqrt{13} \cdot \frac{5}{2\sqrt{13}} = 37$$

$$\text{よって} \quad AM = \sqrt{37}$$

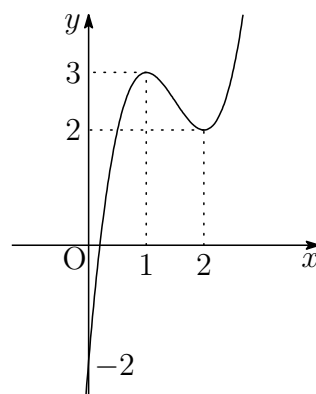
7. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ より

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$

よって $x = 1$ のとき極大値 **3**

$x = 2$ のとき極小値 **2**



8. $y = 3 - 3x^2$ と $y = -x - 1$ から y を消去すると

$$3 - 3x^2 = -x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(3x-4) = 0$$

これを解いて $x = -1, \frac{4}{3}$

よって、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{4}{3}} \{(3 - 3x^2) - (-x - 1)\} dx \\ &= -3 \int_{-1}^{\frac{4}{3}} (x+1) \left(x - \frac{4}{3}\right) dx \\ &= \frac{3}{6} \left(\frac{4}{3} - (-1)\right)^3 = \frac{\mathbf{343}}{\mathbf{54}} \end{aligned}$$