

平成 3 0 年度 鹿児島工業高等専門学校 (編入学試験)  
数 学 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ .

(1) 方程式  $3x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2} = 0$  を解け .

(2) 方程式  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$  を解け .

(3) 連立不等式  $\begin{cases} 4x + 3 > 2x - 7 \\ 3x + 2 > 6x - 4 \end{cases}$  を解け .

(4)  $\log_5 \sqrt{45} + \log_5 \frac{5}{3}$  を簡単にせよ .

(5) 3 直線  $2x + 3y - 8 = 0$  ,  $x - 2y + 3 = 0$  ,  $ax + y + 1 = 0$  が 1 点で交わるように定数  $a$  の値を定めよ .

2.  $x$  軸と 2 点  $(-3, 0)$  ,  $(2, 0)$  で交わり , 点  $(1, -16)$  を通る放物線の方程式を求めよ .

3. 2 次方程式  $x^2 - 6x + k = 0$  は異なる 2 つの正の解をもち , 1 つの解が他の解の 2 乗であるという . このとき , 定数  $k$  の値と 2 つの解を求めよ .

4. 中心が直線  $y = -x$  上にあり , 2 点  $(5, 2)$  ,  $(-2, 3)$  を通る円の方程式を求めよ .

5.  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  ,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  のとき , 次の値を求めよ .

(1)  $\sin 2\alpha$

(2)  $\sin \frac{\alpha}{2}$

6. 四角形 ABCD において ,  $AB = 8$  ,  $BC = 5$  ,  $CD = DA = 3$  ,  $\angle A = 60^\circ$  のとき , 次のものを求めよ .

(1) 対角線 BD の長さ

(2)  $\triangle ABD$  の外接円の半径  $R$

(3) 角 C の大きさ

7.  $y = x^3 - x^2 - x + 1$  の極値を求め , そのグラフをかけ ,  $x$  軸 ,  $y$  軸との共有点も記入せよ .

8. 2 つの放物線  $y = x^2 - 3x$  と  $y = -x^2 + 2$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ .

## 解答

1. (1)  $6x^2 + 7x - 3 = 0$  より  $(2x + 3)(3x - 1) = 0$  よって  $x = -\frac{3}{2}, \frac{1}{3}$

(2)  $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$  より

$$x^2(x - 3) - 4(x - 3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x - 3)(x^2 - 4) = 0$$

したがって  $(x - 3)(x + 2)(x - 2) = 0$  よって  $x = 3, -2, 2$

(3) 第1式から  $2x > -10$  ゆえに  $x > -5$  … ①

第2式から  $-3x > -6$  ゆえに  $x < 2$  … ②

①, ②の共通範囲を求めて  $-5 < x < 2$

(4)  $\log_5 \sqrt{45} + \log_5 \frac{5}{3} = \log_5 3\sqrt{5} + \log_5 \frac{5}{3} = \log_5 5\sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$

(5) 2直線  $2x + 3y - 8 = 0$ ,  $x - 2y + 3 = 0$  の交点は  $(1, 2)$

点  $(1, 2)$  は直線  $ax + y + 1 = 0$  上の点であるから

$$a \cdot 1 + 2 + 1 = 0 \quad \text{よって} \quad a = -3$$

2. 放物線が  $x$  軸と  $(-3, 0)$ ,  $(2, 0)$  で交わるから

$$y = a(x + 3)(x - 2)$$

とおける ( $a$  は定数). これが点  $(1, -16)$  を通るから

$$-16 = a(1 + 3)(1 - 2) \quad \text{ゆえに} \quad a = 4$$

よって, 求める放物線の方程式は

$$y = 4(x + 3)(x - 2)$$

3. 2次方程式  $x^2 - 6x + k = 0$  の2つの正の解を  $\alpha, \alpha^2$  とおくと, 解と係数の関係により

$$\alpha + \alpha^2 = 6 \quad \alpha \cdot \alpha^2 = k \quad \dots (*)$$

上の第1式から  $(\alpha - 2)(\alpha + 3) = 0$  ゆえに  $\alpha = 2, \alpha^2 = 4$

$\alpha = 2$  を  $(*)$  に代入して  $k = 8$

4. 中心を  $(a, -a)$  , 半径を  $r$  とおくと , 円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y + a)^2 = r^2$$

2 点  $(5, 2)$  ,  $(-2, 3)$  がこの円周上にあるから

$$(5 - a)^2 + (2 + a)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$(-2 - a)^2 + (3 + a)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{2}$$

① , ② から

$$(5 - a)^2 + (2 + a)^2 = (-2 - a)^2 + (3 + a)^2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

$a = 1$  を ① に代入して  $r^2 = 25$  よって  $r = 5$

よって  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$

5. (1)  $90^\circ < \alpha < 180^\circ$  ,  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  より ,  $\cos \alpha < 0$  であるから

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\text{したがって} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

(2)  $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$  であるから , ① より

$$-\frac{4}{5} = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{9}{10}$$

$45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$  であるから ,  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$  より

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

6. (1)  $\triangle ABD$  に余弦定理を適用すると

$$BD^2 = DA^2 + AB^2 - 2DA \cdot AB \cos A = 3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 49$$

よって  $BD = 7$

(2)  $\triangle ABD$  に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{BD}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad R = \frac{BD}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

(3)  $\triangle BCD$  に余弦定理を適用すると

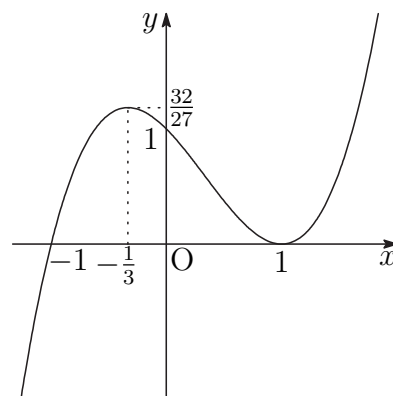
$$\cos C = \frac{BC^2 + CD^2 - BD^2}{2BC \cdot CD} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{1}{2}$$

よって  $\angle C = 120^\circ$

7.  $y = x^3 - x^2 - x + 1$  より

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$$

|      |            |                 |            |   |            |
|------|------------|-----------------|------------|---|------------|
| $x$  | $\cdots$   | $-\frac{1}{3}$  | $\cdots$   | 1 | $\cdots$   |
| $y'$ | +          | 0               | -          | 0 | +          |
| $y$  | $\nearrow$ | $\frac{32}{27}$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |



よって  $x = -\frac{1}{3}$  のとき極大値  $\frac{32}{27}$   
 $x = 1$  のとき極小値 0

8.  $y = x^2 - 3x$  と  $y = -x^2 + 2$  から  $y$  を消去すると

$$x^2 - 3x = -x^2 + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(2x+1) = 0$$

これを解いて  $x = -\frac{1}{2}, 2$

よって, 求める面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^2 \{-x^2 + 2 - (x^2 - 3x)\} dx \\ &= -2 \int_{-\frac{1}{2}}^2 \left(x + \frac{1}{2}\right) (x-2) dx = -\frac{2}{6} \left(2 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{125}{24} \end{aligned}$$