

平成 29 年度 鹿児島工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ .

(1) 方程式 $x(9x - 16) = 2(4 - 5x)$ を解け .

(2) 方程式 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ を解け .

(3) 連立方程式 $\begin{cases} 2x > 3 - x \\ 3x - 7 < x + 1 \end{cases}$ を解け .

(4) $\log_{10} 7 + \log_{10} \frac{5}{14} - 2 \log_{10} 5$ を簡単にせよ .

(5) 3 直線 $2x + y = 5$, $4x + 3y = 3$, $ax + 2y + 3a = 5$ が 1 点で交わるように定数 a の値を定めよ .

2. 2 点 $(-1, 4)$, $(2, 7)$ を通り , $x = 1$ を軸とする放物線の方程式を求めよ .

3. 2 次方程式 $2x^2 - 4ax + 3a - 1 = 0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ .

4. 2 点 $(1, 5)$, $(8, -2)$ を通り , y 軸に接する円の方程式を求めよ .

5. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ のとき , 次の値を求めよ .

(1) $\sin 2\alpha$

(2) $\tan \frac{\alpha}{2}$

6. $\triangle ABC$ において , $A = 45^\circ$, $BC = 2\sqrt{3}$, $CA = 3\sqrt{2}$ のとき , B , C , AB を求めよ . ただし , B は鈍角とする .

7. $y = x^3 - 3x^2 + 8$ の極値を求め , そのグラフをかけ .

8. 放物線 $y = 4 - x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ .

解答

1. (1) $x(9x - 16) = 2(4 - 5x)$ を整理すると $9x^2 - 6x - 8 = 0$

ゆえに $(3x + 2)(3x - 4) = 0$ よって $x = -\frac{2}{3}, \frac{4}{3}$

(2) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ とおくと, $P(-1) = 0$ であるから, $P(x)$ は $x + 1$ を因数にもつので

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + x - 6) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)$$

よって, 方程式 $P(x) = 0$ の解は $x = -1, 2, -3$

(3) $2x > 3 - x$ を解いて $x > 1$

$3x - 7 < x + 1$ を解いて $x < 4$

これらを同時に満たす範囲を求めて $1 < x < 4$

(4) $\log_{10} 7 + \log_{10} \frac{5}{14} - 2 \log_{10} 5 = \log_{10} \left(7 \times \frac{5}{14} \div 5^2 \right)$
 $= \log_{10} \frac{1}{10} = -1$

(5) 2 直線 $2x + y = 5$, $4x + 3y = 3$ の交点は $(x, y) = (6, -7)$

この点が直線 $ax + 2y + 3a = 5$ 上にあるから

$$a \cdot 6 + 2 \cdot (-7) + 3a = 5 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{19}{9}$$

2. $x = 1$ を軸とするから, 放物線の方程式を $y = a(x - 1)^2 + q$ とおく.

2 点 $(-1, 4)$, $(2, 7)$ がこの放物線上にあるから

$$4a + q = 4, \quad a + q = 7$$

これを解いて $a = -1$, $q = 8$ よって $y = -(x - 1)^2 + 8$

3. $2x^2 - 4ax + 3a - 1 = 0$ が実数解をもつとき

$$D/4 = (-2a)^2 - 2 \cdot (3a - 1) \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 1)(2a - 1) \geq 0$$

これを解いて $a \leq \frac{1}{2}, 1 \leq a$

4. 2点 $(1, 5)$, $(8, -2)$ を通り, y 軸に接する円の中心は, y 軸の右側にある. 円の半径を r とすると, 円の方程式は

$$(x - r)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

とおける. これが2点 $(1, 5)$, $(8, -2)$ を通るから

$$(1 - r)^2 + (5 - b)^2 = r^2, \quad (8 - r)^2 + (-2 - b)^2 = r^2$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} b^2 - 10b - 2r + 26 = 0 & \cdots \textcircled{1} \\ b^2 + 4b - 16r + 68 = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ② から, r を消去して整理すると

$$b^2 - 12b + 20 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad b = 2, 10$$

① より, $b = 2$ のとき $r = 5$, $b = 10$ のとき $r = 13$

よって, 求める円の方程式は

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25 \quad \text{または} \quad (x - 13)^2 + (y - 10)^2 = 169$$

5. (1) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ より, $\sin \alpha > 0$ であるから

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{9}\sqrt{2}$$

$$(2) \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)} = 2$$

$$45^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ \text{ より, } \tan \frac{\alpha}{2} > 0 \text{ であるから}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$$

6. 正弦定理により $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

したがって $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin B}$ ゆえに $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$

B は鈍角であるから $B = 120^\circ$

また $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (45^\circ + 120^\circ) = 15^\circ$

第1余弦定理により

$$\begin{aligned} c &= a \cos B + b \cos A \\ &= 2\sqrt{3} \cos 120^\circ + 3\sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= 2\sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 3\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって $AB = 3 - \sqrt{3}$

7. $y = x^3 - 3x^2 + 8$ を微分すると

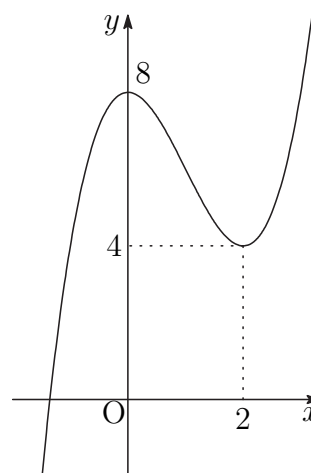
$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

したがって、増減表は

x	...	0	...	2	...
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	極大 8	$\searrow$	極小 4	$\nearrow$

よって $x = 0$ で極大値 8

$x = 2$ で極小値 4



8. $4 - x^2 - (x + 2) = -x^2 - x + 2 = -(x + 2)(x - 1)$ より

$$S = - \int_{-2}^1 (x + 2)(x - 1) dx = \frac{1}{6} \{1 - (-2)\}^3 = \frac{9}{2}$$