

平成 28 年度 鹿児島工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ .

- (1) 方程式 $x^2 - 13x + 22 = 0$ を解け .
- (2) 方程式 $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ を解け .
- (3) $3\log_3 15 - \log_3 135$ を簡単にせよ .
- (4) 関数 $f(x) = 2^x + 8 \cdot 2^{-x}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ .
- (5) 実数 a に対して a を越えない最大の整数を $[a]$ で表す . $[x^2 - 4x] = 0$ を満たす実数 x を求めよ .

2. 2 次関数 $y = 3x^2 - 6x + 7 \cdots \textcircled{1}$ のグラフは 2 次関数 $y = 3x^2 \cdots \textcircled{2}$ のグラフをどのように平行移動したものか .

3. $AB = 7$, $BC = 8$, $CA = 9$ である $\triangle ABC$ について , 次の問いに答えよ .

- (1) $\angle A = \theta$ とおく . $\cos \theta$ の値を求めよ .
- (2) $\triangle ABC$ の外接円の半径を求めよ .
- (3) $\triangle ABC$ の面積を求めよ .

4. α, β をそれぞれ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ かつ $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$ かつ $\sin \beta = \frac{3}{5}$ を満たす角とする . このとき , $\sin(\alpha + \beta)$ の値を求めよ .

5. x 軸にも y 軸にも接して点 $(4, 2)$ を通る円の方程式をすべて求めよ .

6. 3 次関数 $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ の極大値と極小値 , およびそのときの x の値を求めよ .

7. 方程式 $2x^2 - 2x + 5 = 0$ の解を α, β とする . このとき , 次の値を求めよ .

- (1) $\alpha^2 + \beta^2$
- (2) $\alpha^3 + \beta^3$

8. a は $0 < a < 2$ を満たす実数とする . 2 つの直線 $x = a$, $x = a + 2$, 曲線 $C : y = |x^2 - 4|$ および x 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ .

解答

1. (1) 方程式から $(x-2)(x-11)=0$ よって $x=2, 11$
 (2) $P(x)=x^3-4x^2-7x+10$ とおくと, $P(1)=0$ より, $P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ. $P(x)$ を $x-1$ で割った商が $x^2-3x-10$ であるから

$$P(x)=(x-1)(x^2-3x-10)=(x-1)(x+2)(x-5)$$

よって, 求める方程式 $P(x)=0$ の解は $x=1, -2, 5$

- (3) $3\log_3 15 - \log_3 135 = \log_3 \frac{15^3}{135} = \log_3 \frac{3^3 \cdot 5^3}{3^3 \cdot 5} = \log_3 5^2 = 2\log_3 5$
 (4) $2^x > 0$ であるから, 相加平均・相乗平均の関係により

$$f(x) = 2^x + \frac{8}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{8}{2^x}} = 4\sqrt{2}$$

等号が成立するとき

$$2^x = \frac{8}{2^x} \quad \text{すなわち} \quad x = \frac{3}{2}$$

よって, $x = \frac{3}{2}$ のとき, 最小値 $4\sqrt{2}$

- (5) $0 \leq x^2 - 4x < 1$ であるから
 $0 \leq x^2 - 4x$ を解いて $x \leq 0, 4 \leq x \quad \dots \textcircled{1}$
 $x^2 - 4x < 1$ を解いて $2 - \sqrt{5} < x < 2 + \sqrt{5} \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通範囲を求めて

$$2 - \sqrt{5} < x \leq 0, 4 \leq x < 2 + \sqrt{5}$$

2. $\textcircled{1}$ を変形すると $y = 3(x-1)^2 + 4$
 よって, $\textcircled{1}$ は $\textcircled{2}$ を x 軸方向に 1, y 軸方向に 4 だけ平行移動したものである.
 3. (1) $a=8, b=9, c=7$ とすると, 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{9^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 9 \cdot 7} = \frac{11}{21} \quad \text{よって} \quad \cos \theta = \frac{11}{21}$$

- (2) (1) の結果から $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{8\sqrt{5}}{21}$
 正弦定理により, 外接円の半径を R とすると

$$2R = \frac{a}{\sin A} \quad \text{ゆえに} \quad R = \frac{1}{2} \times 8 \times \frac{21}{8\sqrt{5}} = \frac{21}{2\sqrt{5}} = \frac{21\sqrt{5}}{10}$$

- (3) $\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7 \cdot \frac{8\sqrt{5}}{21} = 12\sqrt{5}$$

4. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $\sin \alpha > 0$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$ より $\cos \beta < 0$ であるから

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

したがって $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$= \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{33}{65}$$

5. 円の半径を r とすると , 点 $(4, 2)$ を通るから円の方程式を

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

とおける . このとき

$$(4 - r)^2 + (2 - r)^2 = r^2 \quad \text{これを解いて} \quad r = 2, 10$$

よって , 求める円の方程式は

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \text{または} \quad (x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$$

6. $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ より

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$$

$$y' = 0 \text{ とすると } x = \frac{1}{3}, 1$$

したがって , 増減表は

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	$\frac{31}{27}$	$\searrow$	1	$\nearrow$

よって , $x = \frac{1}{3}$ で極大値 $\frac{31}{27}$, $x = 1$ で極小値 1 をとる .

7. (1) 解と係数の関係により $\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = \frac{5}{2}$

$$\text{したがって } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot \frac{5}{2} = -4$$

$$(2) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1 = -\frac{13}{2}$$

8. $f(x) = x^2 - 4$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ とおくと

$$\begin{aligned} S(a) &= - \int_a^2 (x^2 - 4x) dx + \int_2^{a+2} (x^2 - 4x) dx \\ &= - \left[F(x) \right]_a^2 + \left[F(x) \right]_2^{a+2} \\ &= F(a+2) + F(a) - 2F(2) \\ &= \frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - 4a + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

これを微分すると $S'(a) = 2a^2 + 4a - 4$

$S'(a) = 0$ とすると $(0 < a < 2)$ $a = \sqrt{3} - 1$

したがって, $S(a)$ の増減表は

a	0	...	$\sqrt{3} - 1$	...	2
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって, 求める最小値は $S(\sqrt{3} - 1) = \frac{32}{3} - 4\sqrt{3}$