

平成 27 年度 鹿児島工業高等専門学校 (編入学試験)
数 学 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ .

(1) 方程式 $(x - 1)(3x + 1) = 7$ を解け .

(2) 方程式 $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$ を解け .

(3) 連立方程式 $\begin{cases} x^2 + 7x - 18 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases}$ を解け .

(4) $2 \log_2 12 - \frac{1}{4} \log_2 \frac{8}{9} - 5 \log_2 \sqrt{3}$

(5) 2 点 $A(1, 6)$, $B(3, 1)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ .

2. $x = 3$ のとき最大値 2 をとり , $x = -3$ のとき $y = -34$ をとる 2 次関数を求めよ .

3. 2 次方程式 $x^2 - 2x + k = 0$ は異なる 2 つの実数解をもち , 1 つの解が他の解の平方であるという . 定数 k の値と方程式の解を求めよ .

4. x 軸 , y 軸の両方に接し , 点 $(2, 4)$ を通る円の方程式を求めよ .

5. $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\tan \alpha = -\sqrt{2}$ のとき , $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ の値を求めよ .

6. $\triangle ABC$ において , 外接円の半径が 1 であり , $BC = (1 + \sqrt{3})k$, $CA = 2k$ (k は正の実数) , $C = 60^\circ$ であるという . 次の各問いに答えよ .

(1) AB の長さを求めよ .

(2) k の値および BC , CA の長さを求めよ .

(3) 角 B の大きさを求めよ .

解答

1. (1) $(x-1)(3x+1)=7$ から $3x^2-2x-8=0$

したがって $(x-2)(3x+4)=0$ よって $x=2, -\frac{4}{3}$

(2) $P(x)=x^3+2x^2-9x-18$ とおくと $P(-2)=0$

$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつから

$$P(x)=(x+2)(x^2-9)=(x+2)(x+3)(x-3)$$

よって, $P(x)=0$ の解は $x=-2, \pm 3$

(3)
$$\begin{cases} x^2+7x-18 < 0 \\ x^2+x-2 > 0 \end{cases}$$

第1式から $(x+9)(x-2) < 0$ ゆえに $-9 < x < 2 \cdots \textcircled{1}$

第2式から $(x+2)(x-1) > 0$ ゆえに $x < -2, 1 < x \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ の共通範囲を求めて

$$-9 < x < -2, 1 < x < 2$$

(4)
$$2\log_2 12 - \frac{1}{4}\log_2 \frac{8}{9} - 5\log_2 \sqrt{3}$$

$$= 2(2\log_2 2 + \log_2 3) - \frac{1}{4}(3\log_2 2 - 2\log_2 3) - 5 \cdot \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{13}{4}$$

(5) 線分 AB の垂直二等分線上の点を $P(x, y)$ とすると, $AP^2 = BP^2$ より

$$(x-1)^2 + (y-6)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 12y + 36 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1$$

$$4x - 10y + 27 = 0$$

2. $x=3$ のとき最大値 2 をとることから, 求める 2 次関数を

$$y = a(x-3)^2 + 2$$

とおく. これが点 $(-3, -34)$ を通るから

$$-34 = a(-3-3)^2 + 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = -1$$

よって $y = -(x+3)^2 + 2$

3. 2 次方程式 $x^2 - 2x + k = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつから , $D/4 > 0$ より

$$(-1)^2 - 1 \cdot k > 0 \quad \text{ゆえに} \quad k < 1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

2 次方程式 $x^2 - 2x + k = 0$ の解を α, α^2 とおくと , 解と係数の関係により

$$\alpha + \alpha^2 = 2, \quad \alpha \cdot \alpha^2 = k$$

上の第 1 式から $(\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$ ゆえに $\alpha = -2, 1$

$\alpha = 1$ のとき , 第 2 式から , $k = 1$ となり , $\textcircled{1}$ に反する .

$\alpha = -2$ のとき $k = -8$, 異なる 2 つの解は $-2, 4$

4. このとき , x 軸 , y 軸の両方に接する円の中心は第 1 象限にあるから , 求める円の方程式を

$$(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$$

とおくと ($r > 0$) , これが点 $(2, 4)$ を通るから $(2 - r)^2 + (4 - r)^2 = r^2$

ゆえに $r^2 - 12r + 20 = 0$ これを解いて $r = 2, 10$

よって $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$ または $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 100$

5. $\tan \alpha = -\sqrt{2}$ を $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ に代入すると

$$1 + (\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{3}$$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ より , $\cos \alpha < 0$ であるから

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = -\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

6. (1) $a = (1 + \sqrt{3})k$, $b = 2k$, $C = 60^\circ$ を (第 2) 余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= (1 + \sqrt{3})^2 k^2 + (2k)^2 - 2(1 + \sqrt{3})k \cdot 2k \times \frac{1}{2} = 6k^2 \end{aligned}$$

$c > 0$ であるから $AB = c = \sqrt{6}k$

(2) (1) の結果を正弦定理 $\frac{c}{\sin C} = 2R$ に適用すると

$$\frac{\sqrt{6}k}{\sin 60^\circ} = 2 \cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって} \quad BC = (1 + \sqrt{3}) \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$CA = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

(3) 正弦定理により $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\text{ゆえに} \quad \frac{2k}{\sin B} = \frac{\sqrt{6}k}{\sin 60^\circ} \quad \text{すなわち} \quad \sin B = \frac{2 \sin 60^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

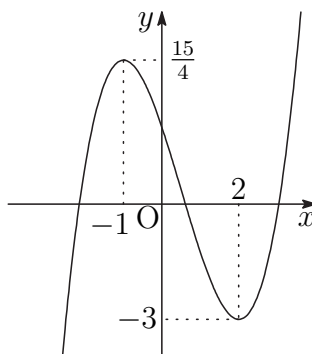
$C = 60^\circ$ より, $B < 120^\circ$ であるから $B = 45^\circ$

7. $y = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - 3x + 2$ を微分すると

$$y' = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 3 = \frac{3}{2}(x+1)(x-2)$$

よって $x = -1$ のとき極大値 $\frac{15}{4}$, $x = 2$ のとき極小値 -3

グラフは, 次のようなる.



8. (1) 点 $(1, 3)$ を通り, 傾き k の直線は

$$y - 3 = k(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = kx - k + 3$$

これと放物線 $y = -x^2$ から y を消去すると

$$kx - k + 3 = -x^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + kx - k + 3 = 0 \quad \cdots (*)$$

2 次方程式 $(*)$ は, 重解をもつから

$$k^2 - 4 \cdot 1(-k + 3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2 + 4k - 12 = 0$$

これを解いて $k = 2, -6$

このとき, 2 次方程式 $(*)$ の重解は $x = -\frac{k}{2}$

したがって, 2 本の接線の接点の x 座標は $x = -1, 3$

(2) (1) の結果から, x^2 の係数に注意して

$$S = \frac{1}{12} \{3 - (-1)\}^3 = \frac{16}{3}$$