

# 有明工業高等専門学校

## 一般科目（数学）50分

### 注意事項

- 1 試験時間開始の合図まで，この問題（解答）用紙を開いてはいけません。
- 2 問題冊子の枚数は3枚です。
- 3 解答にかかる前に，問題冊子の所定の箇所に受験番号を記入してください。
- 4 乱丁，乱丁及び印刷不鮮明の箇所等があれば，直ちに申し出てください。
- 5 解答は，問題（解答）用紙の所定の欄に記入してください。
- 6 問題（解答）用紙の総得点欄及び得点欄には記入しないでください。
- 7 試験開始後，20分は退室の許可を認められません。

令和 2 年度編入学試験 (工業高校系) 学力検査問題  
数 学 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

(1) 次の計算をしなさい.

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1)$$

(2) 次の計算をしなさい.

$$\sqrt[6]{a^5b} \div \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{6} \times \sqrt{ab}$$

(3) 次の方程式を解きなさい.

$$12x^4 - x^2 - 6 = 0$$

(4)  $A(4, -3)$  を通り,  $x$  軸および  $y$  軸の両方に接する円の半径を求めなさい.

(5)  $5^{30}$  は何桁の数であるか, 答えなさい. ただし,  $\log_{10} 2 = 0.3010$  とする.

(6)  $0 \leq x < 2\pi$  とする. 方程式  $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$  を満たす  $x$  を求めなさい.

(7) 不等式  $9^x + 3^{x+1} - 18 \geq 0$  を解きなさい.

(8) 第 3 項が 8, 第 6 項が 1 である等比数列  $\{a_n\}$  の一般項  $a_n$ , および初項から第  $n$  項までの和  $S_n$  を求めなさい. ただし, 公比は実数とする.

(9) ○, ×で答えるクイズ 7 問に, でたために解答したとき, 少なくとも 2 問正解する確率を求めなさい.

(10) 三角形 ABC において,  $BC = 2\sqrt{7}$ ,  $CA = 4$ ,  $A = 60^\circ$  のとき, AB の長さ, および三角形 ABC の面積を求めなさい.

2.  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  の増減表をかき, 極値を求めなさい.

3. 関数  $y = x^3 - 3x^2 + 2x \cdots \textcircled{1}$  のグラフ上にある点  $(0, 0)$  における接線の方程式を求めなさい. また, 求めた接線と  $\textcircled{1}$  のグラフとで囲まれた部分の面積  $S$  を求めなさい.

## 解答

$$\begin{aligned}
 1. (1) \quad & (\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1) \\
 &= \{(\sqrt{3} - 1) - \sqrt{2}\}\{(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{2}\} \\
 &= (\sqrt{3} - 1)^2 - 2 = \mathbf{2 - 2\sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \sqrt[6]{a^5b} \div \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{6} \times \sqrt{ab} = (a^5b)^{\frac{1}{6}} \div \frac{(ab^2)^{\frac{1}{3}}}{6} \times (ab)^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}} \div \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{6} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} \\
 &= a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}} \times \frac{6}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = \mathbf{6a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 12x^4 - x^2 - 6 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3x^2 + 2)(4x^2 - 3) = 0 \\
 & 3x^2 + 2 = 0 \text{ を解いて} \quad x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}i = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}i \\
 & 4x^2 - 3 = 0 \text{ を解いて} \quad x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & \text{よって} \quad x = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

- (4) A(4, -3) は第 4 象限の点であるから, 円の半径を  $r$ , 中心を  $(r, -r)$  とすると ( $r > 0$ ), 円の方程式は

$$(x - r)^2 + (y + r)^2 = r^2$$

これが点 A(4, -3) を通るから

$$(4 - r)^2 + (-3 + r)^2 = r^2 \quad \text{整理すると} \quad r^2 - 14r + 25 = 0$$

$r > 0$  に注意して, これを解くと  $r = \mathbf{7 \pm 2\sqrt{6}}$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \log_{10} 5^{30} = 30 \log_{10} 5 = 30 \log_{10} \frac{10}{2} = 30(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) \\
 &= 30(1 - 0.3010) = 30 \times 0.6990 = 20.97
 \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
 & 20 < \log_{10} 5^{30} < 21 \\
 & \log_{10} 10^{20} < \log_{10} 5^{30} < \log_{10} 10^{21} \\
 & 10^{20} < 5^{30} < 10^{21}
 \end{aligned}$$

よって  $\mathbf{21}$  桁

(6)  $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$  より  $(0 \leq x < 2\pi)$

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad (\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \quad \text{よって} \quad x = 0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$$

(7)  $9^x + 3^{x+1} - 18 \geq 0$  より  $(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x - 18 \geq 0$

$$t = 3^x \text{ とおくと } (t > 0)$$

$$t^2 + 3t - 18 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t - 3)(t + 6) \geq 0$$

$$t + 6 > 0 \text{ であるから } t - 3 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 3^x \geq 3^1 \quad \text{よって} \quad x \geq 1$$

(8) 初項を  $a$ , 公比を  $r$  とすると, 第3項が8, 第6項が1であるから

$$ar^2 = 8, \quad ar^5 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r^3 = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{1}{8}$$

$$r = \frac{1}{2} \text{ であるから, これを上第1式に代入すると}$$

$$a \left( \frac{1}{2} \right)^2 = 8 \quad \text{ゆえに} \quad a = 32$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{32\{1 - (\frac{1}{2})^n\}}{1 - \frac{1}{2}} = 64 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)$$

(9) 7問のうち正解数が0回または1回である確率は

$$\left( \frac{1}{2} \right)^7 + {}_7C_1 \left( \frac{1}{2} \right)^7 = \frac{1}{128} + \frac{7}{128} = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$$

$$\text{求める確率は, この余事象の確率であるから} \quad 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

(10)  $a = 2\sqrt{7}$ ,  $b = 4$ ,  $A = 60^\circ$  を余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  に代入すると

$$28 = 16 + c^2 - 2 \cdot 4c \cdot \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad c^2 - 4c - 12 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (c + 2)(c - 6) = 0 \quad c > 0 \text{ に注意して} \quad c = 6$$

$$\text{よって, 求める三角形 ABC の面積を } S \text{ とすると}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

2.  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$  より

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x + 1)(x - 3)$$

|      |            |      |            |     |            |
|------|------------|------|------------|-----|------------|
| $x$  | $\cdots$   | $-1$ | $\cdots$   | $3$ | $\cdots$   |
| $y'$ | $+$        | $0$  | $-$        | $0$ | $+$        |
| $y$  | $\nearrow$ | 極大   | $\searrow$ | 極小  | $\nearrow$ |

よって、 $x = -1$  で極大値 **10**、 $x = 3$  で極小値 **-22**

3.  $y = x^3 - 3x^2 + 2x$  より、 $y' = 3x^2 - 6x + 2$  であるから、 $x = 0$  のとき  $y' = 2$

求める接線は、原点  $(0, 0)$  を通り、傾き  $2$  の直線であるから  **$y = 2x$**

この接線と関数  $y = x^3 - 3x^2 + 2x$  の交点の  $x$  座標は

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x - 3) = 0$$

$0 \leq x \leq 3$  において、 $2x - (x^3 - 3x^2 + 2x) = x^2(3 - x) \geq 0$  であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 x^2(3 - x) dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3) dx \\ &= \left[ x^3 - \frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{4}} \end{aligned}$$