

有明工業高等専門学校

一般科目（数学）50分

注意事項

- 1 試験時間開始の合図まで，この問題(解答)用紙を開いてはいけません。
- 2 問題冊子の枚数は3枚です。
- 3 解答にかかる前に，問題冊子の所定の箇所に受験番号を記入してください。
- 4 乱丁，乱丁及び印刷不鮮明の箇所等があれば，直ちに申し出てください。
- 5 解答は，問題(解答)用紙の所定の欄に記入してください。
- 6 問題(解答)用紙の総得点欄及び得点欄には記入しないでください。
- 7 試験開始後，20分は退室の許可を認められません。

平成30年度編入学試験(工業高校系) 学力検査問題
数 学 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

(1) 次の計算をしなさい.

$$\frac{2}{2-\sqrt{3}} + (1-\sqrt{3})^2$$

(2) 次の計算をしなさい.

$$\sqrt[6]{24} \times \sqrt[3]{3} \div \sqrt{24}$$

(3) $(x^2 + 3x - 2)(x^2 + 3x - 6) + 4$ を因数分解しなさい.

(4) i を虚数単位とする. $z = \frac{1 + (x+2)i}{2+xi}$ が実数となるように実数 x の値を定め, そのときの z の値を答えなさい.

(5) xy 座標平面上で, 方程式 $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$ が表す円の中心 A と半径 r を求めなさい. また, この円と x 軸との共有点の x 座標を求めなさい.

(6) $0 \leq x < 2\pi$ とする. 不等式 $2\sin^2 x + \sin x \leq 0$ を満たす x の範囲を求めなさい.

(7) 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2$ を満たす実数 x の値を求めなさい.

(8) $\sum_{k=1}^{n-1} 2k(3k+1)$ を計算しなさい.

(9) 8 人を次のように分ける場合の数を求めなさい.

(a) 4 人, 3 人, 1 人の 3 グループ.

(b) それぞれ 4 人の 2 グループ

(10) 三角形 ABC において, $AB = 6$, $BC = 7$, $CA = 5$ のとき, $\cos A$ の値, および, $\cos(2A)$ の値を求めなさい.

2. 関数 $y = 2x^3 + 3(1-a)x^2 - 6ax + 2$ (a は定数) が $x = 1$ で極値をもつように a の値を定めなさい. また, $x = 1$ で極大と極小のどちらになるかを答えなさい.

3. 定積分 $\int_0^3 |x(x-2)| dx$ の値を計算しなさい.

解答

$$1. (1) \quad \frac{2}{2-\sqrt{3}} + (1-\sqrt{3})^2 = \frac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} = 8$$

$$(2) \quad \sqrt[6]{24} \times \sqrt[3]{3} \div \sqrt{24} = 24^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{3}} \div 24^{\frac{1}{2}} = 24^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{24}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) \quad A = x^2 + 3x \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= (A-2)(A-6) + 4 = A^2 - 8A + 16 = (A-4)^2 \\ &= (x^2 - 3x - 4)^2 = (x+1)^2(x-4)^2 \end{aligned}$$

$$(4) \quad z = \frac{1+(x+2)i}{2+xi} = \frac{\{1+(x+2)i\}(2-xi)}{(2+xi)(x-xi)} = \frac{x^2+2x+2+(x+4)i}{4+x^2}$$

z は実数であるから $x+4=0$ ゆえに $x=-4$

$$\text{このとき} \quad z = \frac{(-4)^2 + 2 \cdot (-4) + 2}{4 + (-4)^2} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0 \text{ より } (x+1)^2 + (y-3)^2 = 16$$

よって、中心 $A(-1, 3)$ 、半径 r が 4 の円。

$$(6) \quad \text{与えられた不等式から } \sin x(2\sin x + 1) \leq 0 \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{1}{2} \leq \sin x \leq 0$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{ より } \pi \leq x \leq \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{11}{6} \leq x < 2\pi$$

$$(7) \quad \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -2 \quad \cdots (*)$$

真数は正であるから

$$x+1 > 0 \text{ かつ } x-2 > 0 \text{ すなわち } x > 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(*) \text{ より } \log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\text{したがって } (x+1)(x-2) = 4 \quad \text{ゆえに } x^2 - x - 6 = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ に注意して、これを解くと } x = 3$$

$$(8) \quad 2k(3k+1) = 6k^2 + 2k \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} 2k(3k+1) &= 6 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= 6 \cdot \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1) + 2 \cdot \frac{1}{2}(n-1)n \\ &= n(n-1)(2n-1) + n(n-1) \\ &= n(n-1)\{(2n-1)+1\} = 2n^2(n-1) \end{aligned}$$

(9) (a) ${}_8C_4 \cdot {}_4C_3 = 70 \cdot 4 = \mathbf{280}$ (通り)

(b) 8人をA組4人とB組4人の分け方は

$${}_8C_4 = 70 \text{ (通り)}$$

A, B2つの組の区別をなくすとよいから

$$\frac{70}{2!} = \mathbf{35} \text{ (通り)}$$

(10) $a = 7$, $b = 5$, $c = 6$ であるから, 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

2. $f(x) = 2x^3 + 3(1-a)x^2 - 6ax + 2$ とおくと

$$f'(x) = 6x^2 + 6(1-a)x - 6a$$

$f'(1) = 0$ は, (x) が $x = 1$ で極値をとるための必要条件であるから

$$6 \cdot 1^2 + 6(1-a) \cdot 1 - 6a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

$a = 1$ のとき, $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$ であるから

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって, $x = 1$ で極大となる.

$$3. |x(x-2)| = \begin{cases} x(x-2) & (x \leq 0, 2 \leq x) \\ -x(x-2) & (0 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad \text{であるから}$$

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x(x-2)| dx &= -\int_0^2 x(x-2) dx + \int_2^3 x(x-2) dx \\ &= \frac{1}{6}(2-0)^3 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$