

有明工業高等専門学校

一般科目（数学）50分

注意事項

- 1 試験時間開始の合図まで，この問題（解答）用紙を開いてはいけません．
- 2 問題冊子の枚数は3枚です．
- 3 解答にかかる前に，問題冊子の所定の箇所に受験番号を記入してください．
- 4 乱丁，乱丁及び印刷不鮮明の箇所等があれば，直ちに申し出てください．
- 5 解答は，問題（解答）用紙の所定の欄に記入してください．
- 6 問題（解答）用紙の総得点欄及び得点欄には記入しないでください．
- 7 試験開始後，20分は退室の許可を認められません．

平成 29 年度編入学試験 (工業高校系) 学力検査問題
数 学 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

(1) 次の計算をしなさい.

$$\frac{\sqrt{(-6)^2}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{54}$$

(2) 次の式を展開しなさい.

$$(a + b - c - 5)(a - b - c + 5)$$

(3) 次の式を因数分解しなさい.

$$a^3 - 8b^3$$

(4) i を虚数単位とする. 2つの複素数 $(x^2 + y) + xi$ と $5 + (y - 3)i$ とが一致するように実数 x, y の値を定めなさい.

(5) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, 関数 $y = -\cos^2 x + \sin x + 1$ の最大値・最小値, および, それらを与える x の値を求めなさい.

(6) 次の方程式を満たす実数 x の値を求めなさい.

$$9^x - 5 \cdot 3^{x+1} + 54 = 0$$

(7) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする. 8^{30} は何桁の整数であることを答えなさい.

(8) 第3項が18, 第5項が162となるような等比数列の第 n 項 a_n を求めなさい.

(9) 10本のうち4本が当たりのくじがある. 一度引いたくじは戻さないものとして, A, Bの2人が, A, Bの順にくじを引くとする.

(a) 2人とも当たりくじを引く確率を求めなさい.

(b) Bが当たりを引く確率を求めなさい.

(10) 三角形 ABC において, $AB = 2$, $BC = 5$, $B = 60^\circ$ のとき, 辺 CA の長さを求めなさい. また, $\sin C$ の値を求めなさい.

2. xy 座標平面上で. 点 $(1, -3)$ から放物線 $y = x^2$ に引いた接線の方程式を求めなさい.

3. xy 座標平面上の曲線 $y = x^3 - x^2 \cdots \textcircled{1}$ と $y = 2x \cdots \textcircled{2}$ の共有点の座標を求めなさい. また, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ とで囲まれる部分の面積 S を求めなさい.

解答

1. (1) $\frac{\sqrt{(-6)^2}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{54} = \frac{6}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} = \frac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} - 3\sqrt[3]{2} = 0$
- (2) $(a+b-c-5)(a-b-c+5) = \{(a-c) + (b-5)\}\{(a-c) - (b-5)\}$
 $= (a-c)^2 - (b-5)^2$
 $= \mathbf{a^2 - 2ac + c^2 - b^2 + 10b - 25}$
- (3) $a^3 - 8b^3 = a^3 - (2b)^3 = (a-2b)\{a^2 + a \cdot 2b + (2b)^2\}$
 $= \mathbf{(a-2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)}$
- (4) $(x^2 + y) + xi = 5 + (y-3)i$ より (x, y) は実数

$$x^2 + y = 5, \quad x = y - 3$$

上の2式から, y を消去して

$$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-1) = 0$$

これを解いて $x = -2, 1$ よって $(x, y) = (-2, 1), (1, 4)$

- (5) $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ より, $t = \sin x$ とおくと $-1 \leq t \leq 1$

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ であるから

$$\begin{aligned} y &= -(1 - t^2) + t + 1 \quad (-1 \leq t \leq 1) \\ &= t^2 + t \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

よって $t = -\frac{1}{2}$ すなわち $x = -\frac{\pi}{6}$ のとき 最小値 $-\frac{1}{4}$

$t = 1$ すなわち $x = \frac{\pi}{2}$ のとき 最大値 2

- (6) $9^x = (3^x)^2$, $3^{x+1} = 3 \cdot 3^x$ であるから, 与えられた方程式は

$$(3^x)^2 - 15 \cdot 3^x + 54 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3^x - 9)(3^x - 6) = 0$$

よって, 解は $x = 2, \log_3 6$

$$(7) \log_{10} 8^{30} = \log_{10} 2^{90} = 90 \log_{10} 2 = 27.090$$

$$\text{ゆえに } 27 < \log_{10} 8^{30} < 28 \quad \text{すなわち } 10^{27} < 8^{30} < 10^{28}$$

よって 8^{30} は **28桁の整数**

$$(8) \text{初項を } a, \text{ 公比を } r \text{ とすると } ar^2 = 18, ar^4 = 162 \quad \cdots (*)$$

$$(*) \text{ から } a \text{ を消去すると } r^2 = 9 \quad \text{ゆえに } r = \pm 3$$

$$\text{これを } (*) \text{ に代入して } a = 2$$

$$\text{よって } a_n = 2 \cdot 3^{n-1} \quad \text{または } a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$$

$$(9) (a) \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

$$(b) A \text{ と } B \text{ の当たる確率は等しいから } \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

(10) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \\ &= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cos 60^\circ \\ &= 4 + 25 - 10 = 19 \end{aligned}$$

$$\text{よって } CA = b = \sqrt{19}$$

$$\text{正弦定理 } \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ により}$$

$$\frac{\sqrt{19}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin C} \quad \text{よって } \sin C = \sqrt{\frac{3}{19}}$$

$$2. y = x^2 \text{ を微分すると } y' = 2x$$

放物線 $y = x^2$ 上の点 (a, a^2) における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち } y = 2ax - a^2$$

これが点 $(1, -3)$ を通るから

$$-3 = 2a \cdot 1 - a^2 \quad \text{ゆえに } (a+1)(a-3) = 0$$

$$\text{これを解いて } a = -1, 3 \quad \text{よって } y = -2x - 1, y = 6x - 9$$

3. $y = x^3 - x^2 \cdots \textcircled{1}$, $y = 2x \cdots \textcircled{2}$

$f(x) = x^3 - x^2$, $g(x) = 2x$ とおくと

$$f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

$-1 \leq x \leq 0$ のとき $f(x) \geq g(x)$, $0 \leq x \leq 2$ のとき $f(x) \leq g(x)$

$f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

とおくと, 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{f(x) - g(x)\} dx - \int_0^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \left[F(x) \right]_{-1}^0 - \left[F(x) \right]_0^2 \\ &= 2F(0) - F(-1) - F(2) \\ &= 2 \cdot 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1 \right) - \left(4 - \frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{37}{12} \end{aligned}$$