

--

--

平成 26 年度編入学試験 (工業高校系) 学力検査問題

数 学 (1/2)

1 次の各問いに答えなさい。(計 80 点)

(1) 次の分数の分母を有理化しなさい。(8 点)

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - \sqrt{5}^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}) \times \sqrt{6}}{2\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - \sqrt{30}}{12}$$

得点

--

(2) 次の式を因数分解しなさい。(8 点)

$$(x^2 - x)^2 - 14x^2 + 14x + 24 = (x^2 - x)^2 - 14(x^2 - x) + 24, \quad x^2 - x = A \text{ とおくと}$$

$$\text{与式} = A^2 - 14A + 24 = (A - 2)(A - 12)$$

$$\text{元に戻して、与式} = (x^2 - x - 2)(x^2 - x - 12) = (x + 1)(x - 2)(x + 3)(x - 4)$$

(3) 次の式を簡単にしなさい。ただし、 $a > 0, b > 0$ とする。(8 点)

$$\sqrt[4]{(a^3b)^3} \times \sqrt{a} \div \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \sqrt[4]{(a^3b)^3} \times \sqrt{a} \times \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a^5b}} = (a^3b)^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{2}} \times (a^5b)^{-\frac{1}{4}}$$

$$= a^{\frac{9}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{4}} b^{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = a^2 b$$

得点

--

(4) xy 座標平面上で、頂点が直線 $x = 3$ 上にあり、点 $(2, 0), (-1, 3)$ を通るようなグラフを表す 2 次関数の式を求めなさい。(8 点)

求める 2 次関数を $y = a(x - 3)^2 + k$ とする。2 点を通るので

$$\begin{cases} a(2-3)^2 + k = 0 \\ a(-1-3)^2 + k = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + k = 0 \\ 16a + k = 3 \end{cases} \text{ を解いて、} a = \frac{1}{5}, k = -\frac{1}{5}$$

$$\text{よって、} y = \frac{1}{5}(x - 3)^2 - \frac{1}{5}$$

得点

--

(5) xy 座標平面上の円 $x^2 + y^2 = 5 \dots \textcircled{1}$ と直線 $y = 2x + 5k \dots \textcircled{2}$ が 2 点で交わるような k の範囲を求めなさい。(8 点)

① の中心 $(0, 0)$ と、② $2x - y + 5k = 0$ との距離は、① の半径 $\sqrt{5}$ より短いので、

$$\frac{|5k|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} < \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|5k|}{\sqrt{5}} < \sqrt{5} \Rightarrow |5k| < 5 \Rightarrow -5 < 5k < 5 \Rightarrow -1 < k < 1$$

得点

--

(6) 方程式 $4^x - 5 \cdot 2^{x+1} + 24 = 0$ を満たす実数 x を求めなさい。(8 点)

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x \cdot 2 + 24 = 0$$

$$a = 4, 6$$

$$(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 24 = 0$$

いはい $a > 0$ を満たす。

$$2^x = a \text{ とおくと } a > 0,$$

$$a = 2^x = 4 \text{ のとき } x = 2$$

よって

$$a^2 - 10a + 24 = 0$$

$$a = 2^x = 6 \text{ のとき } x = \log_2 6$$

$$x = 2, \log_2 6$$

$$(a - 4)(a - 6) = 0$$

(7) 不等式 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta + 1 > 0$ を満たす θ の範囲を求めなさい。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ とする。(8 点)

$$\sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) - \sin \theta + 1 > 0 \Rightarrow x < 0, \frac{1}{2} < x \text{ のとき}$$

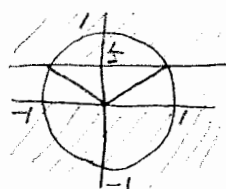
$$\sin \theta = x \text{ とおくと } -1 \leq x \leq 1$$

$$\sin \theta < 0, \frac{1}{2} < \sin \theta$$

$$x^2 - (-x^2) - x + 1 > 0$$

$$2x^2 - x > 0$$

$$2x(x - 1) > 0$$



$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5\pi}{6}$$

$$\pi < \theta < 2\pi$$

得点

--

平成26年度編入学試験（工業高校系）学力検査問題

数学 (2/2)

- (8) 次の条件を満たす等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求めなさい。また、初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい。ただし、 r は実数とする。(8点)

$a_2 = 6, a_5 = -48$

$$\begin{cases} a_2 = ar = 6 \cdots \textcircled{1} \\ a_5 = ar^4 = -48 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ より $r^3 = -8, r = -2,$

$\textcircled{1}$ に代入
 $-2a = 6$
 $a = -3$

このとき
 $S_n = \frac{-3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = \frac{-3\{1-(-2)^n\}}{3} = -1+(-2)^n$

よって

$a = -3, r = -2, S_n = (-2)^n - 1$

- (9) 方程式 $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x-2) = -3$ を満たす実数 x を求めなさい。(8点)

$x > 0, x-2 > 0$ より $x > 2$

$\log_{\frac{1}{2}} x(x-2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

$x(x-2) = 8$

$x^2 - 2x - 8 = 0$

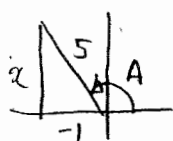
$(x+2)(x-4) = 0$

$x > 2$ より

$x = 4$

- (10) 三角形 ABC において、 $AB = 4, BC = 7, CA = 5$ のとき、 $\cos A$ と $\tan A$ の値をそれぞれ求めなさい。(8点)

$\cos A = \frac{4^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{16 + 25 - 49}{40} = -\frac{8}{40} = -\frac{1}{5}$



とすると

$x^2 = 5^2 - 4^2 = 9$

$x > 0$ より $x = 3$

$\tan A = \frac{2\sqrt{6}}{-1} = -2\sqrt{6}$

よって $\cos A = -\frac{1}{5}$
 $\tan A = -2\sqrt{6}$

- ② 関数 $y = x^3 - x$ の接線で傾きが2のものを求めなさい。(8点)

$y' = 3x^2 - 1$ 傾き2のとき

$3x^2 - 1 = 2$

$3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

$y = x^3 - x$ より 接点 $(1, 0), (-1, 0)$

接線は $(1, 0)$ を通り、傾き2. と
 $(-1, 0)$ を通り、傾き2.

よって $y = 2x - 2,$

$y = 2x + 2$

- ③ xy 座標平面上で、関数 $y = x \cdots \textcircled{1}$ のグラフと関数 $y = x^2 - 2x - 4 \cdots \textcircled{2}$ のグラフで囲まれる部分を図示しなさい。(②のグラフの頂点の座標、および、①と②のグラフの交点の座標を記入すること。) また、その面積 S を求めなさい。(12点)

② $y = x^2 - 2x - 4 = (x-1)^2 - 5$

頂点 $(1, -5)$

解: y を消去して

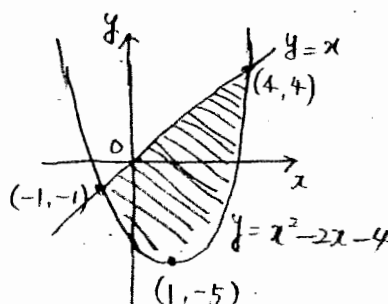
$x^2 - 2x - 4 = x$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x+1)(x-4) = 0 \quad x = -1, 4$

$y = x$ に代入して

交点: $(-1, -1), (4, 4)$



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^4 \{x - (x^2 - 2x - 4)\} dx \\ &= -\frac{1}{6} \{4 - (-1)\}^3 \\ &= \frac{125}{6} \end{aligned}$$