工業高校生の

高専編入・県技短

数 学 正 解

2020 年 3 月 10 日

熊本県工業高等学校進学指導連絡協議会

目 次

第 1 章　北九州工業高等専門学校 **1**

1.1　平成 30 年度編入学試験 (60 分) 1
1.2　平成 29 年度編入学試験 (60 分) 6
1.3　平成 28 年度編入学試験 (60 分) 11
1.4　平成 27 年度編入学試験 (60 分) 14
1.5　平成 26 年度編入学試験 (60 分) 18
1.6　平成 25 年度編入学試験 (60 分) 23
1.7　平成 24 年度編入学試験 (60 分) 30
1.8　平成 23 年度編入学試験 (60 分) 36
1.9　平成 22 年度編入学試験 (60 分) 42
1.10　平成 21 年度編入学試験 (60 分) 48
1.11　平成 20 年度編入学試験 (60 分) 54
1.12　平成 19 年度編入学試験 (60 分) 59
1.13　平成 18 年度編入学試験 (60 分) 64
1.14　平成 17 年度編入学試験 (60 分) 68
1.15　平成 16 年度編入学試験 (60 分) 72
1.16　平成 15 年度編入学試験 (60 分) 76

第 2 章　有明工業高等専門学校 **81**

2.1　令和 2 年度編入学試験 (50 分) 81
2.2　平成 31 年度編入学試験 (50 分) 85
2.3　平成 30 年度編入学試験 (50 分) 89
2.4　平成 29 年度編入学試験 (50 分) 92
2.5　平成 28 年度編入学試験 (50 分) 96
2.6　平成 27 年度編入学試験 (50 分) 100
2.7　平成 26 年度編入学試験 (50 分) 104
2.8　平成 25 年度編入学試験 (50 分) 108
2.9　平成 24 年度編入学試験 (50 分) 112
2.10　平成 23 年度編入学試験 (50 分) 116
2.11　平成 22 年度編入学試験 (50 分) 119
2.12　平成 21 年度編入学試験 (50 分) 123
2.13　平成 20 年度編入学試験 (50 分) 127
2.14　平成 19 年度編入学試験 (50 分) 130
2.15　平成 18 年度編入学試験 (50 分) 133
2.16　平成 17 年度編入学試験 (50 分) 137

2.17 平成 16 年度編入学試験 (50 分) 141
2.18 平成 15 年度編入学試験 (50 分) 145

第 3 章 佐世保工業高等専門学校 149
3.1 平成 31 年度編入学試験 (90 分) 149
3.2 平成 30 年度編入学試験 (90 分) 156
3.3 平成 29 年度編入学試験 (90 分) 163
3.4 平成 28 年度編入学試験 (90 分) 170
3.5 平成 27 年度編入学試験 (90 分) 176
3.6 平成 26 年度編入学試験 (90 分) 183
3.7 平成 25 年度編入学試験 (90 分) 188
3.8 平成 24 年度編入学試験 (90 分) 197
3.9 平成 23 年度編入学試験 (90 分) 206
3.10 平成 22 年度編入学試験 (90 分) 213
3.11 平成 21 年度編入学試験 (90 分) 219
3.12 平成 20 年度編入学試験 (90 分) 223
3.13 平成 19 年度編入学試験 (90 分) 231
3.14 平成 18 年度編入学試験 (90 分) 241
3.15 平成 17 年度編入学試験 (90 分) 249
3.16 平成 16 年度編入学試験 (90 分) 257
3.17 平成 15 年度編入学試験 (90 分) 265

第 4 章 熊本高等専門学校 (熊本) 273
4.1 平成 29 年度編入学試験 (80 分) 273
4.2 平成 28 年度編入学試験 (80 分) 278
4.3 平成 27 年度編入学試験 (80 分) 282
4.4 平成 26 年度編入学試験 (80 分) 286
4.5 平成 25 年度編入学試験 (80 分) 290
4.6 平成 24 年度編入学試験 (80 分) 294
4.7 平成 23 年度編入学試験 (80 分) 298
4.8 平成 22 年度編入学試験 (80 分) 303
4.9 平成 21 年度編入学試験 (80 分) 308
4.10 平成 20 年度編入学試験 (80 分) 312
4.11 平成 19 年度編入学試験 (80 分) 316
4.12 平成 18 年度編入学試験 (80 分) 321
4.13 平成 17 年度編入学試験 (80 分) 325
4.14 平成 16 年度編入学試験 (80 分) 328
4.15 平成 15 年度編入学試験 (80 分) 332

第 5 章　熊本高等専門学校 (八代) **337**
5.1　平成 31 年度編入学試験 (40 分) 337
5.2　平成 30 年度編入学試験 (40 分) 342
5.3　平成 28 年度編入学試験 (60 分) 346
5.4　平成 27 年度編入学試験 (60 分) 349
5.5　平成 26 年度編入学試験 (60 分) 353
5.6　平成 25 年度編入学試験 (60 分) 357
5.7　平成 24 年度編入学試験 (60 分) 362
5.8　平成 23 年度編入学試験 (60 分) 367
5.9　平成 22 年度編入学試験 (60 分) 371
5.10　平成 21 年度編入学試験 (60 分) 374
5.11　平成 20 年度編入学試験 (60 分) 379
5.12　平成 19 年度編入学試験 (60 分) 384
5.13　平成 18 年度編入学試験 (60 分) 389
5.14　平成 17 年度編入学試験 (60 分) 394
5.15　平成 16 年度編入学試験 (60 分) 398
5.16　平成 15 年度編入学試験 (60 分) 402

第 6 章　大分工業高等専門学校 **407**
6.1　平成 31 年度編入学試験 (60 分) 407
6.2　平成 30 年度編入学試験 (60 分) 410
6.3　平成 29 年度編入学試験 (60 分) 413
6.4　平成 28 年度編入学試験 (60 分) 418
6.5　平成 27 年度編入学試験 (60 分) 422
6.6　平成 26 年度編入学試験 (60 分) 427
6.7　平成 25 年度編入学試験 (60 分) 431
6.8　平成 24 年度編入学試験 (60 分) 436
6.9　平成 23 年度編入学試験 (60 分) 440
6.10　平成 22 年度編入学試験 (60 分) 443
6.11　平成 21 年度編入学試験 (60 分) 447
6.12　平成 20 年度編入学試験 (60 分) 450
6.13　平成 19 年度編入学試験 (60 分) 455
6.14　平成 18 年度編入学試験 (60 分) 459
6.15　平成 17 年度編入学試験 (60 分) 464
6.16　平成 16 年度編入学試験 (60 分) 468
6.17　平成 15 年度編入学試験 (60 分) 472

第 7 章　都城工業高等専門学校 **477**
7.1　平成 31 年度編入学試験 (60 分) 477
7.2　平成 29 年度編入学試験 (60 分) 481
7.3　平成 28 年度編入学試験 (60 分) 488
7.4　平成 27 年度編入学試験 (60 分) 494
7.5　平成 26 年度編入学試験 (60 分) 498
7.6　平成 25 年度編入学試験 (60 分) 503
7.7　平成 24 年度編入学試験 (60 分) 508
7.8　平成 23 年度編入学試験 (60 分) 513
7.9　平成 22 年度編入学試験 (60 分) 518
7.10　平成 21 年度編入学試験 (90 分) 522
7.11　平成 20 年度編入学試験 (90 分) 526
7.12　平成 19 年度編入学試験 (90 分) 531
7.13　平成 18 年度編入学試験 (90 分) 535
7.14　平成 17 年度編入学試験 (90 分) 540
7.15　平成 16 年度編入学試験 (90 分) 545
7.16　平成 15 年度編入学試験 (90 分) 552

第 8 章　鹿児島工業高等専門学校 **559**
8.1　平成 31 年度編入学試験 (80 分) 559
8.2　平成 30 年度編入学試験 (80 分) 564
8.3　平成 29 年度編入学試験 (80 分) 568
8.4　平成 28 年度編入学試験 (80 分) 572
8.5　平成 27 年度編入学試験 (80 分) 576
8.6　平成 26 年度編入学試験 (80 分) 581
8.7　平成 25 年度編入学試験 (80 分) 586
8.8　平成 24 年度編入学試験 (80 分) 592
8.9　平成 23 年度編入学試験 (80 分) 597
8.10　平成 22 年度編入学試験 (80 分) 603
8.11　平成 21 年度編入学試験 (80 分) 608
8.12　平成 20 年度編入学試験 (80 分) 613
8.13　平成 19 年度編入学試験 (80 分) 617
8.14　平成 18 年度編入学試験 (80 分) 622
8.15　平成 17 年度編入学試験 (80 分) 626
8.16　平成 16 年度編入学試験 (80 分) 630
8.17　平成 15 年度編入学試験 (80 分) 635

第 9 章　県立技術短期大学校 (数学) **641**
9.1　令和 2 年度推薦前期試験 (90 分) 641
9.2　令和 2 年度推薦後期試験 (90 分) 647
9.3　令和 2 年度一般試験 (90 分) 655
9.4　平成 31 年度推薦前期試験 (90 分) 661
9.5　平成 31 年度推薦後期試験 (90 分) 666
9.6　平成 31 年度一般試験 (90 分) 672
9.7　平成 30 年度推薦前期試験 (90 分) 677
9.8　平成 30 年度推薦後期試験 (90 分) 683
9.9　平成 30 年度一般試験 (90 分) 689
9.10　平成 29 年度推薦前期試験 (90 分) 696
9.11　平成 29 年度推薦後期試験 (90 分) 702
9.12　平成 29 年度一般試験 (90 分) 708
9.13　平成 28 年度推薦前期試験 (90 分) 714
9.14　平成 28 年度推薦後期試験 (90 分) 718
9.15　平成 28 年度一般試験 (90 分) 722
9.16　平成 27 年度推薦前期試験 (90 分) 728
9.17　平成 27 年度推薦後期試験 (90 分) 732
9.18　平成 27 年度一般試験 (90 分) 737
9.19　平成 26 年度推薦前期試験 (90 分) 743
9.20　平成 26 年度推薦後期試験 (90 分) 747
9.21　平成 26 年度一般試験 (90 分) 753
9.22　平成 25 年度推薦前期試験 (90 分) 759
9.23　平成 25 年度推薦後期試験 (90 分) 765
9.24　平成 25 年度一般試験 (90 分) 771
9.25　平成 24 年度推薦前期試験 (90 分) 778
9.26　平成 24 年度推薦後期試験 (90 分) 784
9.27　平成 24 年度一般試験 (90 分) 791
9.28　平成 23 年度推薦前期試験 (90 分) 798
9.29　平成 23 年度推薦後期試験 (90 分) 803
9.30　平成 23 年度一般試験 (90 分) 808
9.31　平成 22 年度推薦前期試験 (90 分) 814
9.32　平成 22 年度推薦後期試験 (90 分) 820
9.33　平成 22 年度一般試験 (90 分) 826
9.34　平成 21 年度推薦前期試験 (90 分) 832
9.35　平成 21 年度推薦後期試験 (90 分) 839
9.36　平成 21 年度一般試験 (90 分) 844
9.37　平成 20 年度推薦前期試験 (90 分) 851

9.38 平成 20 年度推薦後期試験 (90 分) 856
9.39 平成 20 年度一般試験 (90 分) 861
9.40 平成 19 年度推薦試験 (90 分) 869
9.41 平成 19 年度一般試験 (90 分) 876
9.42 平成 18 年度推薦試験 (90 分) 883
9.43 平成 18 年度一般試験 (90 分) 892

第 10 章 ポリテクカレッジ川内 (数学) 899
10.1 平成 29 年度推薦試験 (50 分) 899
10.2 平成 28 年度推薦試験 (50 分) 902
10.3 平成 27 年度推薦試験 (50 分) 905
10.4 平成 26 年度推薦試験 (45 分) 908
10.5 平成 25 年度推薦試験 (45 分) 911
10.6 平成 24 年度推薦試験 (45 分) 914
10.7 平成 23 年度推薦試験 (45 分) 917
10.8 平成 22 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回 920
10.9 平成 22 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回 923
10.10平成 21 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回 926
10.11平成 21 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回 929
10.12平成 20 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回 932
10.13平成 20 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回 935
10.14平成 19 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回 938
10.15平成 19 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回 942
10.16平成 18 年度推薦試験 (45 分) 945

第 11 章 崇城大学 (数学) 949
11.1 平成 31 年度推薦試験 (60 分) 949
11.2 平成 30 年度推薦試験 (60 分) 952
11.3 平成 29 年度推薦試験 (60 分) 954
11.4 平成 28 年度推薦試験 (60 分) 957
11.5 平成 27 年度推薦試験 (60 分) 960
11.6 平成 26 年度推薦試験 (60 分) 963
11.7 平成 25 年度推薦試験 (60 分) 966
11.8 平成 24 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目 969
11.9 平成 24 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目 972
11.10平成 23 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目 975
11.11平成 23 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目 978
11.12平成 22 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目 981
11.13平成 22 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目 984

11.14平成 21 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目 987
11.15平成 21 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目 990
11.16平成 20 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目 993
11.17平成 20 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目 996
11.18平成 19 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目 999
11.19平成 19 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目 1002
11.20平成 18 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目 1005
11.21平成 18 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目 1009

第 1 章　北九州工業高等専門学校

1.1　平成 30 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ．

   (1) 次の式を因数分解せよ．

   $$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

   (2) 次の式の値を求めよ．

   $$(\log_2 27 + \log_{\frac{1}{2}} 3) \log_9 2$$

   (3) 次の恒等式が成り立つように，定数 A，B，C の値を定めよ．

   $$\frac{x}{(x+2)(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{x+4}$$

2. 次の問いに答えよ．

   (1) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (3x^2 - 2x)\,dx$ のとき，$f(t)$ の極大値と極小値を求めよ．

   (2) 2 つのベクトル $\vec{a} = (2,\ 0,\ 1)$，$\vec{b} = (3,\ 1, -2)$ と直交する単位ベクトルを求めよ．

   (3) $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \dfrac{1}{2} \cos x$ の最大値，最小値を求めよ．

3. a は $\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{7}$ $(a > 1)$ をみたす定数とする．次の問いに答えよ．

   (1) a) $a + \dfrac{1}{a}$

   b) $\sqrt{a^3} + \dfrac{1}{\sqrt{a^3}}$

   c) $\sqrt{a} - \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

   (2) $\sqrt{a}$ および a の値を求めよ．

4. 3 次関数 $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ のグラフを C，原点 O$(0,\ 0)$ における C の接線を ℓ とする．また，P，Q は原点 O とは異なる C 上の点とする．次の問いに答えよ．

   (1) ℓ の方程式を求めよ．また，C と ℓ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

   (2) 点 P における C の接線が ℓ に平行であるように点 P の座標を定めよ．

   (3) 点 Q における C の接線が原点を通るように点 Q の座標を定めよ．

解答例

1. (1) $a^2-b^2-c^2+2bc = a^2-(b-c)^2$
$= \{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$= \boldsymbol{(a+b-c)(a-b+c)}$

(2) $(\log_2 27+\log_{\frac{1}{2}} 3)\log_9 2 = \left(\log_2 27+\dfrac{\log_2 3}{\log_2 \frac{1}{2}}\right)\dfrac{\log_2 2}{\log_2 9}$
$= (\log_2 27-\log_2 3)\dfrac{1}{2\log_2 3}$
$= 2\log_2 3\cdot\dfrac{1}{2\log_2 3} = \boldsymbol{1}$

(3) 与式の両辺に $(x+2)(x+3)(x+4)$ を掛けると

$$x = A(x+3)(x+4)+B(x+2)(x+4)+C(x+2)(x+3) \quad \cdots(*)$$

$(*)$ に $x=-2$ を代入すると

$-2 = A\cdot 1\cdot 2$ ゆえに $\boldsymbol{A=-1}$

$(*)$ に $x=-3$ を代入すると

$-3 = B(-1)\cdot 1$ ゆえに $\boldsymbol{B=3}$

$(*)$ に $x=-4$ を代入すると

$-4 = C(-2)\cdot(-1)$ ゆえに $\boldsymbol{C=-2}$

2. (1) $f(t) = \displaystyle\int_0^t (3x^2-2x)\,dx = \left[\ x^3-x^2\ \right]_0^t = t^3-t^2$ より

$f'(t) = 3t^2-2t = t(3t-2)$

$f(t)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗

よって 極大値 $f(0)=\boldsymbol{0}$, 極小値 $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{4}{27}}$

(2) 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 0,\ 1)$，$\vec{b}=(3,\ 1,\ 2)$ と直交する単位ベクトルを

$$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$$

とおくと　$2x+z=0,\quad 3x+y-2z=0$

ゆえに　　$y=-7x,\ z=-2x$

$\vec{n}$ は単位ベクトルであるから　$x^2+y^2+z^2=1$

したがって　$x^2+(-7x)^2+(-2x)^2=1$　ゆえに　$x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{18}$

よって　　$\vec{n}=\left(\pm\dfrac{\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{18}},\mp\dfrac{\mathbf{7}\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{18}},\mp\dfrac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{6}}}{\mathbf{18}}\right)$　**(複合同順)**

(3) $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ より　最大値 $\mathbf{1}$，最小値 $\mathbf{-1}$

3. (1) a) $\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{7}\cdots(*)$ の両辺を平方すると

$$\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=7\quad \text{整理すると}\quad \boldsymbol{a+\frac{1}{a}=5}$$

b) a) の結果を利用すると

$$\sqrt{a^3}+\frac{1}{\sqrt{a^3}}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a+\frac{1}{a}-1\right)=\sqrt{7}(5-1)=\mathbf{4\sqrt{7}}$$

c) a) の結果を利用すると

$$\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=a+\frac{1}{a}-2=3$$

$a>1$ より　$\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}>0$　よって　$\boldsymbol{\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{3}}$

(2) c) の結果および $(*)$ より

$$\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)+\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=\frac{\mathbf{\sqrt{7}+\sqrt{3}}}{\mathbf{2}}$$

よって　　$a=\left(\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{\mathbf{5+\sqrt{21}}}{\mathbf{2}}$

4. (1) $y = x^3 - 4x^2 + 3x$ より　$y' = 3x^2 - 8x + 3$　ゆえに　$x = 0$ のとき　$y' = 0$

ℓ は，原点を通り，傾き 3 の直線であるから　$\boldsymbol{\ell : y = 3x}$

C と ℓ の方程式から，y を消去すると

$$x^3 - 4x^2 + 3x = 3x \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x-4) = 0$$

よって　　$S = \dfrac{1}{12} \cdot 4^4 = \boldsymbol{\dfrac{64}{3}}$

(2) $y' = 3$ とすると

$$3x^2 - 8x + 3 = 3 \quad \text{ゆえに} \quad x(3x-8) = 0$$

P は O と異なることに注意して　$x = \dfrac{8}{3}$　　このとき　$y = -\dfrac{40}{27}$

よって　$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\dfrac{8}{3}, -\dfrac{40}{27}}\right)$

(3) C 上の点 Q の座標を $(t,\ t^3 - 4t^2 + 3t)$ とおくと，この接線の方程式は

$$y - (t^3 - 4t^2 + 3t) = (3t^2 - 8t + 3)(x - t)$$

すなわち　　$y = (3t^2 - 8t + 3)x - 2t^3 + 4t^2 \quad \cdots (*)$

これが原点を通るから　$-2t^3 + 4t^2 = 0$　ゆえに　$t^2(t-2) = 0$

Q は O と異なることに注意して　$t = 2$　　よって　$\mathrm{Q}\boldsymbol{(2,\ -2)}$

1.2　平成 29 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) 次の分数式を計算し，簡単な形に直せ.

   $$\frac{x+1}{x^2+x-6}-\frac{x+2}{x^2+2x-3}$$

   (2) 不等式 $2|x-1|+|x-3| \leqq 9$ を解け.

   (3) 初項 -3，公比 -2 の等比数列の初項から第 10 項までの和を求めよ.

   (4) 2 次方程式 $3x^2+5x-1=0$ の 2 つの解を α，β とする.
   このとき $\dfrac{1}{\alpha-2}+\dfrac{1}{\beta-2}$ の値を求めよ.

2. 次の問いに答えよ.

   (1) $y=2\cdot 3^x+4\cdot 3^{-x}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ.

   (2) $\sin 15^\circ$ の値を求めよ.

   (3) $(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)$ の値を求めよ.

3. 2 つの曲線 $C_1 : y=x^2$ と $C_2 : y=x^2-8x+8$ について，次の問いに答えよ.

   (1) C_1 上の点 $(p,\ p^2)$ における C_1 の接線の方程式を求めよ.

   (2) C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ.

   (3) C_1，C_2，l で囲まれた部分の面積を求めよ.

4. $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|3\vec{a}+\vec{b}|=3$ となるベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，次の問いに答えよ.

   (1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ.

   (2) 2 つのベクトル $\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が直交するように実数 t の値を定めよ.

   (3) ベクトル $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小となるように実数 t の値を求め，そのときの最小値を求めよ.

解答例

1. (1) $$\frac{x+1}{x^2+x-6}-\frac{x+2}{x^2+2x-3}=\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}-\frac{x+2}{(x-1)(x+3)}$$
$$=\frac{(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$
$$=\frac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{(x-1)(x-2)(x+3)}}$$

(2) $2|x-1|+|x-3|\leqq 9$

(i) $x<1$ のとき

$$2(-x+1)+(-x+3)\leqq 9 \quad \text{これを解いて} \quad x\geqq -\frac{4}{3}$$

したがって $\quad -\frac{4}{3}\leqq x<1$

(ii) $1\leqq x<3$ のとき

$$2(x-1)+(-x+1)\leqq 9 \quad \text{これを解いて} \quad x\leqq 10$$

したがって $\quad 1\leqq x<3$

(iii) $x\geqq 3$ のとき

$$2(x-1)+(x-3)\leqq 9 \quad \text{これを解いて} \quad x\leqq \frac{14}{3}$$

したがって $\quad 3\leqq x\leqq \frac{14}{3}$

(i)〜(iii) より $\quad \boldsymbol{-\frac{4}{3}\leqq x\leqq \frac{14}{3}}$

(3) 初項 -3，公比 -2 の等比数列の初項から第 10 項までの和は

$$\frac{-3\{1-(-2)^{10}\}}{1-(-2)}=\boldsymbol{1023}$$

(4) 2 次方程式 $3x^2+5x-1=0$ の 2 つの解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{3}$$

したがって

$$\frac{1}{\alpha-2}+\frac{1}{\beta-2}=\frac{(\beta-2)+(\alpha-2)}{(\alpha-2)(\beta-2)}=\frac{\alpha+\beta-4}{\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4}$$
$$=\frac{-\frac{5}{3}-4}{-\frac{1}{3}-2\times\left(-\frac{5}{3}\right)+4}=\boldsymbol{-\frac{17}{21}}$$

2. (1) $2\cdot3^x > 0$，$4\cdot3^{-x} > 0$ であるから，相加・相乗平均の大小関係により

$$y = 2\cdot3^x + 4\cdot3^{-x} \geqq 2\sqrt{2\cdot3^x \times 4\cdot3^{-x}} = \mathbf{4\sqrt{2}} \text{ (最小値)}$$

等号が成立するのは

$$2\cdot3^x = 4\cdot3^{-x} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x = \frac{1}{2}\log_3 2}$$

(2) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(3) 底の変換公式により

$$\begin{aligned}&(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2) \\ =&\left(\log_2 3 + \frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3} + \frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right) \\ =&\left(\log_2 3 + \frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3} + \frac{1}{2\log_2 3}\right) \\ =&2\log_2 3 \times \frac{5}{2\log_2 3} = \mathbf{5}\end{aligned}$$

3. (1) $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

$C_1 : y = x^2$ の点 $(p,\ p^2)$ における C_1 の接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x - p) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 2px - p^2}$$

(2) (1) で求めた接線と C_2 から y を消去すると

$$x^2 - 8x + 8 = 2px - p^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2(p+4) + p^2 + 8 = 0 \quad \cdots ①$$

(1) で求めた接線と C_2 が接するから

$$(p+4)^2 - (p^2 + 8) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad p = -1$$

これを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{y = -2x - 1}$

(3) $p = -1$ より，C_1 と l の接点の x 座標は

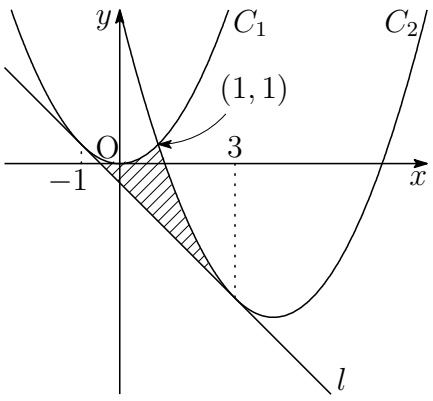
$$x = -1$$

① より，C_2 と l の接点の x 座標は

$$x = 3$$

C_1 と C_2 の交点の x 座標は，C_1，C_2 を解いて

$$x = 1$$



上の図から，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \{x^2 - (-2x - 1)\}\, dx + \int_{1}^{3} \{(x^2 - 8x + 8) - (-2x - 1)\}\, dx \\ &= \int_{-1}^{1} (x+1)^2\, dx + \int_{1}^{3} (x-3)^2\, dx \\ &= \left[\frac{1}{3}(x+1)^3 \right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3 \right]_{1}^{3} = \boldsymbol{\frac{16}{3}} \end{aligned}$$

4. (1) $|3\vec{a}+\vec{b}|=3$ より　　$9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$

これに $|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=2$ を代入すると

$$9+6\vec{a}\cdot\vec{b}+4=9 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$$

(2) $|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=2$ および (1) の結果により

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+t\vec{b}) &= |\vec{a}|^2+(t+1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2 \\ &= 1-\frac{2}{3}(t+1)+4t=\frac{10t+1}{3}\end{aligned}$$

$\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+t\vec{b}$ が直交するとき

$$\frac{10t+1}{3}=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t=-\frac{1}{10}}$$

(3) $|\vec{a}|=1$，$\vec{b}=2$ および (1) の結果により

$$\begin{aligned}|\vec{a}+t\vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2 \\ &= 1-\frac{4}{3}t+4t^2 \\ &= 4\left(t-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{8}{9}\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{t=\frac{1}{6}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

1.3 平成 28 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の計算をせよ.

   (1) $\dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}+\dfrac{5x-10}{x^2-4}$

   (2) $\dfrac{x^4-16}{x^2+2x+4}\times\dfrac{x^3-8}{x^2+4}\div(x^2-4x+4)\times\dfrac{1}{x+2}$

2. 次の値を求めよ.

   (1) $\log_2 27\times\log_3 0.5\times\log_4 8$

   (2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$

   (3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{7}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx$

   (4) 2 ベクトル $\vec{u}=(2,\ 4)$, $\vec{v}=(-6,-2)$ のなす角

   (5) i を虚数単位 ($i^2=-1$) とするとき, $(\cos 13^\circ+i\sin 13^\circ)(\cos 17^\circ+i\sin 17^\circ)$

3. 次の式や命題を証明せよ.

   (1) $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}=ab(a+b)^{-1}$

   (2) $\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)(1-\cos x)=\sin x\tan x$

   (3) $\dfrac{1}{\log_{ab} c}=\dfrac{1}{\log_a c}+\dfrac{1}{\log_b c}$

   (4) 実数 a に対して x の 2 次方程式 $x^2+ax-a-2=0$ は異なる 2 つの実数解をもつ.

   (5) 実数 a, b に対して a^2+2b+1 と b^2+2a+1 のうちのどちらかは必ず 0 以上である.

4. 関数 $y=x^3-x$ についてこの関数と x 軸との交点のうち x 座標が負のものを点 A とする. 次の問いに答えよ.

   (1) 増減, 極値, 凹凸, 変曲点を調べグラフの概形を描け.

   (2) 点 A を接点とするこのグラフの接線を求めよ.

   (3) この関数のグラフと上で求めた接線とで囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $\dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2}+\dfrac{5x-10}{x^2-4}=\dfrac{3x-1}{(x+2)(3x-1)}+\dfrac{5(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$$=\frac{1}{x+2}+\frac{5}{x+2}=\boldsymbol{\frac{6}{x+2}}$$

(2) $\dfrac{x^4-16}{x^2+2x+4}\times\dfrac{x^3-8}{x^2+4}\div(x^2-4x+4)\times\dfrac{1}{x+2}$

$$=\frac{(x^2+4)(x+2)(x-2)}{x^2+2x+4}\times\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^2+4}\times\frac{1}{(x-2)^2}\times\frac{1}{x+2}$$

$$=\boldsymbol{1}$$

2. (1) $\log_2 27\times\log_3 0.5\times\log_4 8=3\log_2 3\times\dfrac{-1}{\log_2 3}\times\dfrac{3}{2}=\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}}$

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4}x^5+\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{7}x^3+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}\right)dx$

$$=2\int_0^1\left(\frac{1}{5}x^4+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=2\left[\ \frac{1}{25}x^5+\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{2}x\ \right]_0^1=\boldsymbol{\frac{293}{225}}$$

(4) $\vec{u}=2\vec{a}$，$\vec{v}=2\vec{b}$ とおくと　$\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-3,-1)$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-5}{\sqrt{5}\sqrt{10}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，求める角は　135°

(5) $(\cos 13^\circ+i\sin 13^\circ)(\cos 17^\circ+i\sin 17^\circ)=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i}$

3. (1) $(a^{-1}+b^{-1})^{-1}=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)^{-1}=\left(\dfrac{a+b}{ab}\right)^{-1}=ab(a+b)^{-1}$

(2) $\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)(1-\cos x)=\dfrac{1}{\cos x}(1+\cos x)(1-\cos x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}=\sin x\tan x$

(3) $\dfrac{1}{\log_a c}+\dfrac{1}{\log_b c}=\log_c a+\log_c b=\log_c ab=\dfrac{1}{\log_{ab} c}$

(4) x の 2 次方程式 $x^2+ax-a-2=0$ の判別式を D とすると

$$D=a^2-4\cdot1\cdot(-a-2)=a^2+4a+8=(a+2)^2+4>0$$

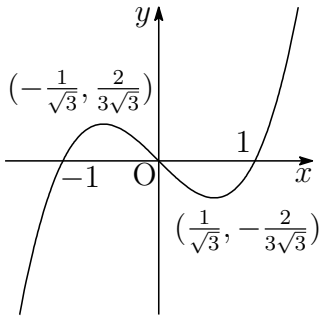
よって，この 2 次方程式は異なる 2 つの実数解をもつ．

(5) $$(a^2+2b+1)+(b^2+2b+1)=(a+1)^2+(b+1)^2 \geqq 0$$

よって，a^2+2b+1 と b^2+2b+1 のうちのどちらかは必ず 0 以上である．

4. (1) $y=x^3-x$ より，$y'=3x^2-1$，$y''=6x$
したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
y	↗	極大 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	変曲点 0	↘	極小 $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↗



(2) $x=-1$ のとき，$y'=2$ である．求める接線は，点 $(-1,\ 0)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y-0=2(x+1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=2x+2}$$

(3) (2) で求めた接線と $y=x^3-x$ の共有点の x 座標は

$$x^3-x=2x+2 \quad \text{整理すると} \quad (x+1)^2(x-2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=-1,2$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2}\{(2x+2)-(x^3-x)\}dx \\ &= \int_{-1}^{2}(x+1)^2(2-x)\,dx = \frac{1}{12}\{2-(-1)\}^4 = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

解説 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$

1.4　平成 27 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ．

   (1) $x^2 - 6y^2 + xy + 3x + 9y$ を因数分解せよ．

   (2) 次の式を計算せよ．

   $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

   (3) 方程式 $5^{2x} - 7\cdot 5^x + 10 = 0$ を解け．

2. △ABC において，線分 AB の中点を D，線分 BC を 3 : 1 に外分する点を E とする．D と E を結んだ線分 DE と線分 AC の交点を F とする．次の問いに答えよ．

   (1) $\overrightarrow{\mathrm{BF}} = a\overrightarrow{\mathrm{BA}} + b\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ とするとき，a と b の値を求めよ．

   (2) △ADF と △CEF の面積の比を求めよ．ただし，最も簡単な整数の比で表せ．

3. 放物線 $y = x^2 - 2(m-1)x - m - 1$ について次の問いに答えよ．ただし m は定数とする．

   (1) 放物線と x 軸との共有点の個数は，m の値によらず一定であることを示せ．

   (2) 放物線と x 軸との共有点のうち，1 つの共有点の x 座標が $x = 1$ であるとき，他の共有点の座標を求めよ．

   (3) 放物線と x 軸で囲まれた図形の面積が最小になるときの，m の値を求めよ．

4. 3 次関数 $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + k$ について次の問いに答えよ．ただし，k は定数とする．

   (1) 関数 $f(x)$ が極大値 20 をとるとき，定数 k の値を求めよ．

   (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフ上の $x = 2$ に対応する点における接線が原点を通るとき，定数 k の値を求めよ．

解答例

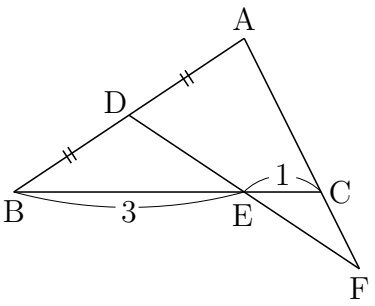
1. (1) $x^2 - 6y^2 + xy + 3x + 9y$
$= x^2 + (y+3)x - 3y(2y-3)$
$= (x+3y)\{x-(2y-3)\}$
$= \boldsymbol{(x+3y)(x-2y+3)}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$
$= \dfrac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})-(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$
$= \dfrac{2\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-5} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{30}}}{\boldsymbol{6}}$

(3) 与えられた方程式から $(5^x-5)(5^x-2)=0$

したがって $5^x = 5,\ 2$ よって $\boldsymbol{x = 1,\ \log_5 2}$

2. (1) △ABC と直線 BF について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{1}\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1$$

すなわち　CF : FA = 1 : 3

F は AC を 3 : 1 に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BF}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{BA}}+3\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{3-1}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}}$$

(2) △ADF と直線 BC について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{2}{1}\cdot\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{EF}}\cdot\frac{1}{2}=1 \quad \text{すなわち} \quad \mathrm{DE}=\mathrm{EF}$$

したがって　DF = 2EF，AF = 3CF　よって　△ADF : △CEF = **6 : 1**

3. (1) 放物線 $y=x^2-2(m-1)x-m-1\cdots(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=(m-1)^2-1\cdot(-m-1)=m^2-m+2=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$$

よって，m の値によらず，放物線と x 軸との共有点の個数は，**2 個.**

(2) 放物線 $(*)$ は点 $(1,\ 0)$ を通るから

$$0=1^2-2(m-1)\cdot1-m-1 \quad \text{これを解いて} \quad m=\frac{2}{3}$$

このとき，$(*)$ は　$y=x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}(x-1)(3x+5)$

よって，求める他の共有点の座標は　$\boldsymbol{\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)}$

(3) 放物線と x 軸の共有点の x 座標を α，β とすると $(\alpha<\beta)$，
これらは，2 次方程式 $x^2-2(m-1)x-m-1$ の解であるから

$$\alpha+\beta=2(m-1),\quad \alpha\beta=-m-1$$

したがって　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$$=4(m-1)^2-4(-m-1)=4\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+3$$

図形の面積を S とすると，$S=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であるから

S を最小にする m の値は　$\boldsymbol{m=\frac{1}{2}}$

4. (1) $f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 36x + k$ を微分すると

$$f'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1)(x-3)$$

$f(x)$ は $x = 1$ で極大となるから，$f(1) = 20$ より

$$4 - 24 + 36 + k = 20 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = 4}$$

(2) $f(2) = 32 - 96 + 72 + k = 8 + k$，$f'(2) = 12(2-1)(2-3) = -12$
$y = f(x)$ のグラフ上の $x = 2$ に対応する点における接線の方程式は

$$y - (8 + k) = -12(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = -12x + 32 + k$$

これが原点を通るから

$$32 + k = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{k = -32}$$

1.5　平成 26 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) 通分して一つの式にまとめよ.

   $$\frac{3x-1}{x^2-x-2}-\frac{7x+6}{3x^2-12}$$

   (2) 次を簡単にせよ.

   $$\sqrt{\frac{11}{2}-2\sqrt{6}}+\sqrt{\frac{5}{2}-\sqrt{6}}$$

   (3) 次の不等式を解け.

   $$\log_2(7-x)$$

   (4) $S=1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$，$T=3+3\cdot4+3\cdot4^2+\cdots+3\cdot4^{n-1}$ とするとき，T を S を用いて表せ.

2. 2 次方程式 $2x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α，β とする．次の問いに答えよ.

   (1) $8\alpha^3+8\beta^3$ の値を求めよ.

   (2) $\dfrac{1}{2\alpha+1}$，$\dfrac{1}{2\beta+1}$ を 2 つの解とする最も簡単な整数係数の 2 次方程式をつくれ.

3. 3 点 A$(3,\ 2)$，B$(-2,\ 1)$，C$(4,\ t)$ に対して，次の条件を満たす t の値を求めよ.

   (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

   (2) 3 点 A，B，C が一直線上に並ぶ.

   (3) 三角形 ABC の面積が $\dfrac{21}{2}$ になる．ただし，$t<0$ とする.

4. (1) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$ となる行列 A を求めよ.

(2) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して，$\det A = ad - bc$ と定義するとき，次の問いに答えよ.

① $\det \begin{pmatrix} 27 & 9 \\ 34 & 17 \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

② $\alpha + \beta = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき $\det \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix}$ の値を求めよ.

③ $\begin{pmatrix} x & x^2 - 1 \\ x + 1 & 4x - 4 \end{pmatrix} = 0$ を満たす x の値を求めよ.

5. 3 次関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ について，次の問いに答えよ.

(1) 増減，極値を調べて，$y = f(x)$ のグラフの概形を描け.

(2) 原点における $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ.

(3) $y = f(x)$ と (2) で求めた接線とで囲まれる図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $\dfrac{3x-1}{x^2-x-2}-\dfrac{7x+6}{3x^2-12}=\dfrac{3x-1}{(x-2)(x+1)}-\dfrac{7x+6}{3(x-2)(x+2)}$

$$=\frac{3(x+2)(3x-1)-(7x+6)(x+1)}{3(x-2)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{2x^2+2x-12}{3(x-2)(x+1)(x+2)}$$

$$=\frac{2(x+3)(x-2)}{3(x-2)(x+1)(x+2)}=\boldsymbol{\frac{2(x+3)}{3(x+1)(x+2)}}$$

(2) $\sqrt{\dfrac{11}{2}-2\sqrt{6}}+\sqrt{\dfrac{5}{2}-\sqrt{6}}=\sqrt{\dfrac{11-4\sqrt{6}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{6}}{2}}$

$$=\sqrt{\frac{11-2\sqrt{24}}{2}}+\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{8}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{1}$$

(3) 不等式から　$\log_2(7-x)<\log_2 2^4$　ゆえに　$\log_2(7-x)<\log_2 16$

したがって　$0<7-x<16$　よって　$\boldsymbol{-9<x<7}$

(4) $S=\dfrac{2^n-1}{2-1}=2^n-1$

$T=3(1+4+4^2+\cdots+4^{n-1})=3\cdot\dfrac{4^n-1}{4-1}=4^n-1$

$2^n=S+1$ であるから　$T=(2^n)^2-1=(S+1)^2-1=\boldsymbol{S^2+2S}$

2. (1) 解と係数の関係により　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{2},\ \alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

したがって　$8(\alpha^3+\beta^3)=8(\alpha^3+\beta^3)$

$$=8\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$$

$$=8\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3-3\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\right\}=\boldsymbol{-63}$$

(2) $\dfrac{1}{2\alpha+1}+\dfrac{1}{2\beta+1}=\dfrac{2(\alpha+\beta)+2}{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1}=\dfrac{2\cdot\frac{3}{2}+2}{4\cdot\frac{5}{2}+2\cdot\frac{3}{2}+1}=\dfrac{5}{14}$

$$\frac{1}{2\alpha+1}\cdot\frac{1}{2\beta+1}=\frac{1}{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1}=\frac{1}{4\cdot\frac{5}{2}+2\cdot\frac{3}{2}+1}=\frac{1}{14}$$

方程式は　$x^2-\dfrac{5}{14}x+\dfrac{1}{14}=0$　よって　$\boldsymbol{14x^2-5x+1=0}$

3. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2.\ 1) - (3,\ 2) = (-5, -1)$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (4,\ t) - (3,\ 2) = (1,\ t-2)$
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 0$ より

$$-5{\cdot}1 + (-1){\cdot}(t-2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t = -3}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (k は実数) とおけるから

$$(1,\ t-2) = k(-5, -1) \quad \text{ゆえに} \quad 1 = -5k,\ t-2 = -k$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{k = -\dfrac{1}{5},\ t = \dfrac{11}{5}}$

(3) $t < 0$ であるから

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|-5(t-2) - (-1){\cdot}1| = \frac{1}{2}|11 - 5t| = \frac{1}{2}(11 - 5t)$$

$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{21}{2}$ より

$$\frac{1}{2}(11 - 5t) = \frac{21}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{t = -2}$$

4. (1) 与えられた等式から

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ より

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) ① $\det\begin{pmatrix} 27 & 9 \\ 34 & 17 \end{pmatrix} = 27 \times 17 - 9 \times 34 = 9 \times 17(3-2) = \boldsymbol{153}$

② $\det\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\beta \\ \sin\alpha & \cos\beta \end{pmatrix} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$$= \cos(\alpha+\beta) = \cos\frac{2\pi}{3} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

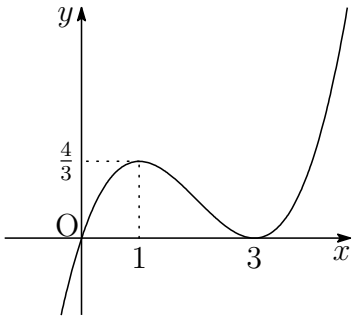
③ 与えられた等式から

$$x(4x-4)-(x^2-1)(x+1)=0 \quad \text{整理すると} \quad (x-1)^3=0$$

よって　　$\boldsymbol{x=1}$

5. (1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2-4x+3 \\ &= (x-1)(x-3) \end{aligned}$$



$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	
$f(x)$	↗	$\frac{4}{3}$	↘	0	↗

$x=1$ で極大値 $\boldsymbol{\frac{4}{3}}$，$x=3$ で極小値 $\boldsymbol{0}$

(2) $f'(0)=3$ より　$\boldsymbol{y=3x}$

(3) $y=f(x)$ と $y=3x$ の交点の x 座標は

$$\frac{1}{3}x^3-2x-2+3x=3x \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ 6$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^6 \left\{ 3x-\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right)\right\} dx \\ &= \int_0^6 \left(2x^2-\frac{1}{3}x^3\right) dx \\ &= \left[\ \frac{2}{3}x^3-\frac{1}{12}x^4\ \right]_0^6 = \boldsymbol{36} \end{aligned}$$

1.6 平成 25 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の各問に答えよ.

   (1) 方程式 $\sqrt{4-3x^2} = 1-2x$ を解け.

   (2) 方程式 $\log_2(x^3-3x+6) = 3$ を解け.

   (3) 方程式 $\sin 2x = \sin x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ を解け.

   (4) 3 辺の長さが 4，5，6 である三角形の最大の角を θ とするとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ.

   (5) 第 6 項が $3\sqrt{2}$，第 9 項が $\dfrac{3}{2}$ の等比数列の初項と公比を求めよ.

   (6) 2 直線 $l_1 : 2x + (1-t)y - 3 = 0$ と $l_2 : (2t+3) - y + 1 = 0$ が直交するとき，t の値を求めよ.

   (7) $\sqrt{(n-32)^2} + \sqrt{(64-2n)^2} = 36$ を解け.

   (8) 定積分 $\displaystyle\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} (x-\sqrt{2})^4\,dx$

   (9) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b-5 \\ 9-3a & 5 \end{pmatrix}$ を満たす a，b，c の値を求めよ.

2. x の 2 次関数 $y = x^2 + 4ax + 6a^2 - 5a - 7$ について，

   (1) グラフの頂点の座標を a を用いて表せ.

   (2) グラフの頂点が第 3 象限にあるように定数 a の値を求めよ.

   (3) グラフと x 軸との交点の 1 つが $(-1,\ 0)$ であるとき，もう一つの交点の座標を求めよ.

3. 3 次関数 $f(x) = x^3 - 3x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y = f(x)$ の増減，極値を調べて，そのグラフの概形を描け．

(2) $f(x)$ の極小値を m として，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = m$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) $\alpha = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$，$\beta = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ とし，曲線 $y = f(x)$ 上の 2 点を $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^3 - 3\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^3 - 3\beta)$ とする．このとき

i) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の値を求めよ．

ii) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ の値を求めよ．

iii) $\triangle \mathrm{OAB}$ の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) $\sqrt{4-3x^2} = 1-2x \cdots ①$ の両辺を平方して整理すると

$$7x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-1)(7x+3) = 0$$

① から $1-2x \geqq 0$ に注意して $\qquad x = \boldsymbol{-\dfrac{3}{7}}$

(2) 与えられた方程式から $\log_2(x^3-3x+6) = \log_2 8$

したがって $\qquad x^3 - 3x + 6 = 8$

$$(x-2)(x+1)^2 = 0$$

よって $\qquad \boldsymbol{x = 2, -1}$

(3) 与えられた方程式から $2\sin x \cos x = \sin x$

したがって $\sin x(2\cos x - 1) = 0$

$0 \leqq x < 2\pi$ において $\quad \sin x = 0$ より $\quad x = 0,\ \pi$

$2\cos -1 = 0$ より $\quad x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって $\qquad \boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(4) 余弦定理により

$$\cos\theta = \frac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot 4\cdot 5} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

また $\qquad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\dfrac{1}{8}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}$

(5) 初項を a，公比を r とすると，条件により

$$ar^5 = 3\sqrt{2} \cdots ①, \quad ar^8 = \frac{3}{2} \cdots ②$$

② ÷ ① より $\qquad r^3 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \quad$ ゆえに $\quad \boldsymbol{r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

これを ② に代入すると $\quad a\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^8 = \dfrac{3}{2} \quad$ ゆえに $\quad \boldsymbol{a = 24}$

(6) $l_1 : 2x + (1-t)y - 3 = 0$，$l_2 : (2t+3)x - y + 1 = 0$ の法線ベクトルを，それぞれ

$$\vec{a} = (2,\ 1-t), \quad \vec{b} = (2t+3, -1)$$

とすると，このとき $\vec{a} \perp \vec{b}$，すなわち，$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ であるから

$$2(2t+3) + (1-t)\cdot(-1) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{t = -1}$$

(7) 与えられた方程式から

$$\begin{aligned} |n-32| + |64-2n| &= 36 \\ |n-32| + 2|n-32| &= 36 \\ |n-32| &= 12 \\ n-32 &= \pm 12 \\ n &= \mathbf{44,\ 20} \end{aligned}$$

(8) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} (x-\sqrt{2})^4\,dx = \left[\ \frac{1}{5}(x-\sqrt{2})^5\ \right]_{\sqrt{2}-1}^{\sqrt{2}+1} = \mathbf{\frac{2}{5}}$

(9) 左辺を計算すると

$$\begin{pmatrix} 5+ab & a \\ 5b & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & b-5 \\ 9-3a & 5 \end{pmatrix}$$

成分を比較して

$$5 + ab = c, \quad a = b - 5, \quad 5b = 9 - 3a$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -2,\ b = 3,\ c = -1}$

2. (1) 2 次関数 $y = x^2 + 4ax + 6a^2 - 5a - 7$ を変形すると

$$y = (x + 2a)^2 + 2a^2 - 5a - 7$$

よって，頂点の座標は　　$\boldsymbol{(-2a,\ 2a^2 - 5a - 7)}$

(2) 頂点が第 3 象限にあるから，(1) の結果より

$$-2a < 0,\ \ 2a^2 - 5a - 7 < 0$$

第 1 式より　$a > 0$　$\cdots$①

第 2 式より　$(a + 1)(2a - 7) < 0$　ゆえに　$-1 < a < \dfrac{7}{2}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{0 < a < \dfrac{7}{2}}$

(3) 放物線 $y = x^2 + 4ax + 6a^2 - 5a - 7$ が，点 $(-1,\ 0)$ を通るから

$$0 = (-1)^2 + 4a\cdot(-1) + 6a^2 - 5a - 7 \quad \text{ゆえに} \quad 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

これを解いて　　$a = 2, -\dfrac{1}{2}$

この放物線の x 軸との共有点の x 座標を -1，β とすると，これは，2 次方程式 $x^2 + 4ax + 6a^2 - 5a - 7 = 0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$-1 + \beta = -4a \quad \text{ゆえに} \quad \beta = 1 - 4a$$

したがって，$a = 2$ のとき $\beta = -7$，$a = -\dfrac{1}{2}$ のとき $\beta = 3$

よって，もう一つの交点の座標は

$$\boldsymbol{a = 2 \text{ のとき } (-7,\ 0),\ \ a = -\frac{1}{2} \text{ のとき } (3,\ 0)}$$

3. (1) $f'(x) = 3x^2 - 3$
$= 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ とすると

$x = -1,\ 1$

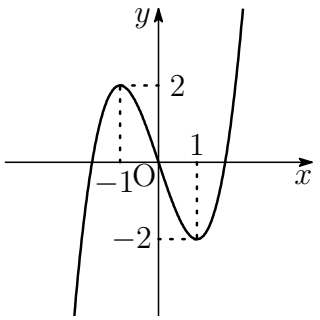
$f(x)$ の増減表は右のようになる．
したがって，この関数は

$x = -1$ で極大値 2

$x = 1$ で極小値 -2

をとる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗



(2) (1) の結果から　$m = -2$
曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = -2$ の共有点の x 座標は

$x^3 - 3x = -2$　ゆえに　$(x+2)(x-1)^2 = 0$　よって　$x = -2,\ 1$

したがって，求める面積 S は

$$S = \int_{-2}^{1} \{(x^3 - 3x) - (-2)\}\, dx$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1} = \mathbf{\frac{27}{4}}$$

(3) i) $\alpha = \sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}}$，$\beta = \sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}}$ より $\alpha\beta = \sqrt{5}$，$\alpha^2 + \beta^2 = 5$
したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \alpha\beta + (\alpha^3 - 3\alpha)(\beta^3 - 3\beta)\\ &= (\alpha\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) + 10\alpha\beta\\ &= (\sqrt{5})^3 - 3\cdot\sqrt{5}\cdot 5 + 10\cdot\sqrt{5}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

ii) $\alpha^2 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ であるから　$2\alpha^2 - 5 = \sqrt{5}$
さらに，上式の両辺を平方すると

$$(2\alpha^2-5)^2 = (\sqrt{5})^2 \quad \text{整理すると} \quad \alpha^4 = 5\alpha^2 - 5 \quad \cdots ①$$

したがって

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 &= \alpha^2 + (\alpha^3 - 3\alpha)^2\\ &= \alpha^2\alpha^4 - 6\alpha^4 + 10\alpha^2\\ &= \alpha^2(5\alpha^2-5) - 6(5\alpha^2-5) + 10\alpha^2\\ &= 5\alpha^4 - 25\alpha^2 + 30\\ &= 5(5\alpha^2-5) - 25\alpha^2 + 30\\ &= 5\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}}$

iii) ii) と同様にして　$\beta^4 = 5\beta^2 - 5$
したがって　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = \sqrt{5}$
よって，求める $\triangle$OAB の面積 S は

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2(\sqrt{5})^2 - 0^2} = \mathbf{\frac{5}{2}}\end{aligned}$$

1.7　平成 24 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ．

   (1) $\log_2 18 - 2\log_2 \dfrac{3}{4}$

   (2) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) \leq 2011$ をみたす最大の整数 n の値を求めよ．

   (3) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta}$ の値を求めよ．

   (4) 円 $x^2+y^2-6x+ay+b=0$ が x 軸にも y 軸にも接するように a，b の値を定めよ．

   (5) $|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2$ のとき，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ の値を求めよ．

2. A，B を直径の両端とする中心 O の半円がある．C は半円上の点で，C から AB に下ろした垂線の足を D とする．線分 AD と線分 BD の長さをそれぞれ a，b としたとき，次の各問いに答えよ．

   (1) 線分 CD の長さが $\sqrt{ab}$ であることを示せ．

   (2) (1) の結果を用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．

   $$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

   (3) $a+b=4\sqrt{ab}$ であるとき，$\angle\mathrm{ABC}=\theta$ の値と $\sin\theta$ の値を求めよ．

3. $x \geq 0$ について，

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \qquad f_{n+1}(x) = f_n(1 + \sqrt{x}) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で関数の列を定義する．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f_3(x) = \sqrt{3}$ を解け．

(2) $f_1\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - f_1\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ の値を求めよ．

(3) 不等式 $f_1(x) \geq f_2(x)$ を解け．

(4) $f_n\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ の値を求めよ．

4. $f(x) = \displaystyle\int_2^{x^2-x} (t-2)\,dt$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(3)$ の値を求めよ．

(2) $y = f(x)$ の増減と極値を調べて，そのグラフの概形をかけ．

(3) $y = f(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) $\log_2 18 - 2\log_2 \dfrac{3}{4} = \log_2 \left\{ 18 \div \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 \right\} = \log_2 32 = \log_2 2^5 = \mathbf{5}$

   (2) $1+3+5+7+\cdots+(2n-1) = n^2$，$44^2 = 1936$，$45^2 = 2025$ であるから

   $$1+3+5+7+\cdots+(2n-1) \leq 2011$$

   をみたす最大の整数 n は　$\mathbf{44}$

   (3) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\cos\theta < 0$ であるから

   $$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

   したがって

   $$\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{6}}}$$

   (4) x の 1 次の係数に注意して，円 $x^2+y^2-6x+ay+b=0$ は

   $$(x-3)^2+(y\pm 3)^2 = 3^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2+y^2-6x\pm 6y+9=0$$

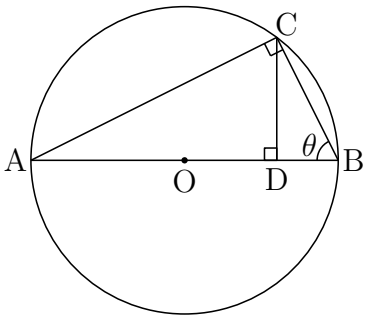
   よって　　$\boldsymbol{a=\pm 6,\ b=9}$

   (5) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b}) = 2$ より　$2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2 = 2$
   $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$ であるから　$2\cdot 2^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3^2 = 2$　ゆえに　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=3}$

   また　　$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$

   $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\boldsymbol{\theta = 60^\circ}$

2. (1) △ACD において



$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{AC}^2 \quad \cdots ①$$

△BCD において

$$\mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2 = \mathrm{BC}^2 \quad \cdots ②$$

$\mathrm{AC}^2 + \mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2$ に注意して，① と ② の辺々を加えると

$$\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2 + 2\mathrm{CD}^2 = \mathrm{AB}^2$$

$\mathrm{AD} = a$，$\mathrm{BD} = b$，$\mathrm{AB} = a + b$ であるから

$$a^2 + b^2 + 2\mathrm{CD}^2 = (a+b)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CD} = \sqrt{ab}$$

(2) 円 O の半径は $\dfrac{a+b}{2}$ であるから，$\dfrac{a+b}{2} \geq \mathrm{CD}$

よって $\quad \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

(3) $\angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACD}$ であるから

$\mathrm{AC} = \mathrm{AB}\sin\theta$，$\mathrm{AD} = \mathrm{AC}\sin\theta$ ゆえに $\mathrm{AD} = \mathrm{AB}\sin^2\theta$

$\mathrm{BC} = \mathrm{AB}\cos\theta$，$\mathrm{BD} = \mathrm{BC}\cos\theta$ ゆえに $\mathrm{BD} = \mathrm{AB}\cos^2\theta$

したがって $a = (a+b)\sin^2\theta$，$b = (a+b)\cos^2\theta$

$ab = (a+b)^2\sin^2\theta\cos^2\theta$

ゆえに $\sqrt{ab} = (a+b)\sin\theta\cos\theta$

$a + b = 4\sqrt{ab}$ であるとき，これを上式に代入して

$$\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab}\sin\theta\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2\theta = \frac{1}{2}$$

$0° < \theta < 90°$ $0° < 2\theta < 180°$ であるから $2\theta = 30°,\ 150°$

ゆえに $\boldsymbol{\theta = 15°,\ 75°}$

したがって $\boldsymbol{\theta = 15°}$ のとき $\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}}$

$\boldsymbol{\theta = 75°}$ のとき $\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$

3. (1)　$f_2(x) = f_1(1+\sqrt{x}) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

$f_3(x) = f_2(1+\sqrt{x}) = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

$\sqrt{3} = \sqrt{1+\sqrt{4}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{9}}}$

したがって，$f_3(x) = \sqrt{3}$ の解は　$\boldsymbol{x = 9}$

(2)　$f_1\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$f_1\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって　$f_1\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - f_1\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \mathbf{1}$

(3) $f_1(x) \geq f_2(x)$ より　$\sqrt{x} \geq \sqrt{1+\sqrt{x}}$

両辺を平方すると　$x \geq 1+\sqrt{x}$

$x - 1 \geq \sqrt{x}$　$\cdots$①

両辺を平方して整理すると　$x^2 - 3x + 1 \geq 0$

これを解いて　$x \leq \dfrac{3-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \leq x$

① より $x \geq 1$ であることに注意して　$\dfrac{\boldsymbol{3+\sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}} \leq \boldsymbol{x}$

(4)　$f_{n+1}\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = f_n\left(1+\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)$

$= f_n\left(1+\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = f_n\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$

したがって

$$f_n\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = f_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{5}+1}}{\boldsymbol{2}}$$

4. (1) $f(3) = \displaystyle\int_2^{3^2-3} (t-2)\,dt = \left[\ \frac{t^2}{2} - 2t\ \right]_2^6 = \mathbf{8}$

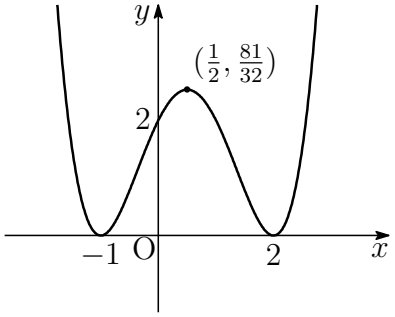
(2) $f(x) = \displaystyle\int_2^{x^2-x} (t-2)\,dt = \frac{1}{2}\left[\ (t-2)^2\ \right]_2^{x^2-x} = \frac{1}{2}(x^2-x-2)^2$

したがって　$f'(x) = (x+1)(2x-1)(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -1,\ \dfrac{1}{2},\ 2$

増減表およびグラフは，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{81}{32}$	↘	極小 0	↗



(3) $f(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2(x-2)^2 = \dfrac{1}{2}(x+1)^4 - 3(x+1)^3 + \dfrac{9}{2}(x+1)^2$

したがって，(2) の結果から，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{10}(x+1)^5 - \frac{3}{4}(x+1)^4 + \frac{3}{2}(x+1)^3\ \right]_{-1}^{2} \\ &= \mathbf{\frac{81}{20}} \end{aligned}$$

1.8　平成 23 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ．

   (1) $x = \dfrac{5+\sqrt{29}}{4}$，$y = \dfrac{5-\sqrt{29}}{4}$ のとき $x^3 + y^3$ の値を求めよ．

   (2) 等式 $\dfrac{\sin\theta}{1-\sin\theta} - \dfrac{\sin\theta}{1+\sin\theta} = 2\tan^2\theta$ が成り立つことを証明せよ．

   (3) $\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ とおくとき，$\log_{12} 180$ を a，b で表せ．

2. 等比数列 $\{a_n\} : 18, -9, \dfrac{9}{2}, -\dfrac{9}{4} \cdots$ に対し，一般項 b_n が $b_n = a_{3n-2}$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ を考える．次の問いに答えよ．

   (1) $\{b_n\}$ の最初の 4 項を求めよ．また，$\{b_n\}$ はどんな数列であるか．

   (2) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の和を求めよ．

3. 次の方程式および不等式を解け．

   (1) $\sqrt{2x+1} = x - 1$

   (2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$

   (3) $9^{2x-1} > 27^2$

   (4) $\dfrac{x+2}{x-1} \geqq \dfrac{x}{2}$

4. 2 つの円 $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$，$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 9 = 0$ の交点の座標を求めよ．

5. 次の問いに答えよ．

   (1) 2 点 A$(-3,\ 1)$，B$(1,\ 7)$ を結ぶ線分 AB を 3 : 1 の比に内分する点の座標を求めよ．

   (2) 2 つのベクトル $\vec{a} = (1,\ 3)$，$\vec{b} = (2, -4)$ のなす角を求めよ．

6. 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

   (1) 次の行列を計算せよ．

   ア) $(A+B)(A-B)$

   イ) $A^2 - B^2$

   (2) (1) においてア) の結果とイ) の結果が等しくない理由を述べよ．

7. 次の問いに答えよ.

(1) 放物線 $y=(2x-1)^2$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 関数 $y=(x+2)^2(x-1)\cdots$ ① について次の問いに答えよ.

ア) ① の増減, 極値を調べてグラフの概形をかけ.

イ) ① のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $$x+y=\frac{5+\sqrt{29}}{4}+\frac{5-\sqrt{29}}{4}=\frac{5}{2}$$
$$xy=\frac{5+\sqrt{29}}{4}\times\frac{5-\sqrt{29}}{4}=\frac{25-29}{16}=-\frac{1}{4}$$
したがって $$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$
$$=\left(\frac{5}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times\frac{5}{2}=\boldsymbol{\frac{35}{2}}$$

(2) $$\frac{\sin\theta}{1-\sin\theta}-\frac{\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{\sin\theta(1+\sin\theta)-\sin\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$$
$$=\frac{2\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=2\tan^2\theta$$

(3) $$\log_{12}180=\frac{\log_{10}180}{\log_{10}12}=\frac{\log_{10}(2\cdot3^2\cdot10)}{\log_{10}(2^2\cdot3)}$$
$$=\frac{\log_{10}2+2\log_{10}3+\log_{10}10}{2\log_{10}2+\log_{10}3}=\boldsymbol{\frac{a+2b+1}{2a+b}}$$

2. (1) $\{a_n\}$ は初項が 18，公比が $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$a_n = 18\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

したがって　　$b_n = a_{3n-2} = 18\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{(3n-2)-1}$

$$= 18\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって，$\boldsymbol{\{b_n\}}$ **は初項が 18，公比が** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{8}}$ **の等比数列**である．また

$$\boldsymbol{b_1 = 18,\ \ b_2 = -\frac{9}{4},\ \ b_3 = \frac{9}{32},\ \ b_4 = -\frac{9}{256}}$$

(2) (1) の結果から

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{18}{1-\left(-\frac{1}{8}\right)} = \boldsymbol{16}$$

3. (1) 根号の中の値および両辺の値は 0 以上であるから

$$2x+1 \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad x-1 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad x \geqq 1 \cdots ①$$

$\sqrt{2x+1} = x-1$ の両辺を平方すると

$$2x+1 = (x-1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad x(x-4) = 0$$

① に注意して　　$\boldsymbol{x = 4}$

(2) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$ の左辺を変形すると

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq x+\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{7}{3}\pi$ の範囲で上の方程式を解くと

$$x+\frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi}$$

(3) $9^{2x-1} > 27^x$ より　　$3^{2(2x-1)} > 3^3 x$

底 3 は 1 より大きいから　　$2(2x-1) > 3x$

よって　　$\boldsymbol{x > 2}$

(4) $\dfrac{x+2}{x-1} \geqq \dfrac{x}{2} \cdots ①$ とおく.

① より $x \neq 1$ であるから，両辺に $2(x-1)^2 > 0$ をかけると

$$2(x+2)(x-1) \geqq x(x-1)^2$$

ゆえに $\quad (x+1)(x-1)(x-4) \leqq 0$

$x \neq 1$ に注意して，これを解くと $\quad \boldsymbol{x \leqq -1,\ 1 < x \leqq 4}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2-2x-6y+1=0 & \cdots ① \\ x^2+y^2-10x-10y+9=0 & \cdots ② \end{cases}$ とおく.

① − ② より

$$8x+4y-8=0 \quad \text{ゆえに} \quad y=2-2x \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入すると

$$x^2+(2-2x)^2-2x-6(2-2x)+1=0$$

整理すると $\quad 5x^2+2x-7=0$

$$(x-1)(5x+7)=0$$

ゆえに $\quad x=1,\ -\dfrac{7}{5}$

求める交点の座標は，これらを ① に代入して

$$\boldsymbol{(1,\ 0),\ \left(-\frac{7}{5}, -\frac{24}{5}\right)}$$

5. (1) 2 点 A$(-3,\ 1)$，B$(1,\ 7)$ を結ぶ線分 AB を 3 : 1 の比に内分する点は

$$\left(\frac{1\cdot(-3)+3\cdot 1}{3+1},\ \frac{1\cdot 1+3\cdot 7}{3+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(0,\ \frac{11}{2}\right)}$$

(2) $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,-4)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1\cdot 2+3\cdot(-4)}{\sqrt{1^2+3^2}\sqrt{2^2+(-4)^2}} = \frac{-10}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから $\quad \theta = \boldsymbol{135^\circ}$

6. (1) ア) $A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

したがって

$(A+B)(A-B)=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{14} \\ \mathbf{-10} & \mathbf{-5} \end{pmatrix}$

イ) $A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$

$B^2=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

したがって

$A^2-B^2=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{18} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

(2) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2-AB+BA$

一般に行列の積の交換法則 $AB=BA$ は成り立たないので

$$-AB+BA\neq O$$

よって　　$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2$

7. (1) $y=(2x-1)^2=4x^2-4x+1$ であるから　$y'=8x-4$

ゆえに　　$x=0$ のとき　$y'=-4$

したがって，点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=-4(x-0)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-4x+1}$$

(2) ア) $y=(x+2)^2(x-1)=x^3+3x^2-4\cdots$① であるから

$y'=3x^2+6x$

$=6x(x+2)$

$y'=0$ とすると

$x=-2,\ 0$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

y の増減表は，右のようになる．

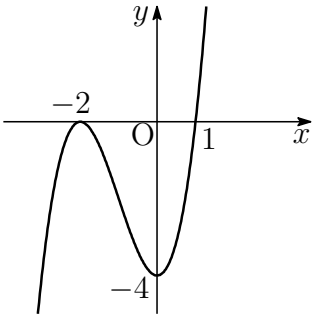
したがって，この関数は

$\boldsymbol{x=-2}$ で**極大値 0**，

$\boldsymbol{x=0}$ で**極小値 -4**

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



イ) $-2\leqq x\leqq 1$ において，$y\leqq 0$ であるから，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-2}^{1}\{-(x^3+3x^2-4)\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}-x^3+4x\right]_{-2}^{1}=\boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

1.9　平成 22 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $\dfrac{3}{x^2+x-2}-\dfrac{2}{x^2-1}$

   (2) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta$

   (3) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}\times\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{x}\times\sqrt[4]{x}}$

   (4) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}$

2. 次の方程式を解け.

   (1) $8^{2x+3}=4^{x+5}$

   (2) $\sin 2x=\cos x \quad (0\leq x<2\pi)$

3. 次の不等式を解け.

   (1) $\dfrac{3}{x-2}>x$

   (2) $\log_2(9-x)<2$

4. 座標平面上に 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(0,\ 2)$，C$(2,\ 1)$ がある．次の問いに答えよ.

   (1) 線分 BC の長さを求めよ.

   (2) $\angle$BAC を求めよ.

   (3) 線分 AB，AC を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ.

5. 行列 A は $A^2 = I$ が成り立つとする．ただし，I は単位行列とする．

   (1) $(A-I)^3 = k(A-I)$ を満たす定数 k の値を求めよ．

   (2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ について $A^2 = I$ が成り立つことを確かめよ．

   (3) (2) の A について，$(A-I)^9$ を (1) を利用して計算せよ．

6. 次の極限値を求めよ．

   (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x^2-4}$

   (2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{8x^2-2x-1}{4x^2-5x+1}$

7. 次の級数の和を求めよ．

   (1) $1{\cdot}2 + 2{\cdot}3 + 3{\cdot}4 + \cdots + 20{\cdot}21$

   (2) $\dfrac{1}{1{\cdot}2} + \dfrac{1}{2{\cdot}3} + \dfrac{1}{3{\cdot}4} + \cdots + \dfrac{1}{20{\cdot}21}$

8. 曲線 $y = -3x^3+6x^2 \cdots$ ①，直線 $y = -3x+6 \cdots$ ② について次の問いに答えよ．

   (1) 関数の増減を調べて，① の曲線のグラフの概形をかけ．

   (2) ① と ② の交点の座標を求めよ．

   (3) ① と ② で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. (1) $$\frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-1} = \frac{3}{(x-1)(x+2)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$
$$= \frac{3(x+1)-2(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$
$$= \frac{x-1}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \boldsymbol{\frac{1}{(x+1)(x+2)}}$$

   (2) $$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin\theta(1+\sin\theta)}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta + \sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}$$
$$= \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)} = \boldsymbol{\frac{1}{\cos\theta}}$$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{x^5}\times\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[6]{x}\times\sqrt[4]{x}}=\dfrac{x^{\frac{5}{3}}\times(x\cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{6}}\times x^{\frac{1}{4}}}=\dfrac{x^{\frac{5}{3}}\times x^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}}=\dfrac{x^{\frac{29}{12}}}{x^{\frac{5}{12}}}=x^{\frac{29}{12}-\frac{5}{12}}=\boldsymbol{x^2}$

(4) $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}=\dfrac{x-1}{(x-1)-x}=\boldsymbol{-x+1}$

2. (1) $8^{2x+3}=4^{x+5}$ より　$2^{3(2x+3)}=2^{2(x+5)}$

ゆえに　$3(2x+3)=2(x+5)$　これを解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{4}}$

(2) 方程式から

$$2\sin x\cos x=\cos x\quad\text{ゆえに}\quad\cos x(2\sin x-1)=0$$

したがって　$\cos x=0$　または　$\sin x=\dfrac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$ において

$\cos x=0$ を解いて　$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x=\dfrac{1}{2}$ を解いて　$x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$

3. (1)　［1］$x-2>0$　すなわち　$x>2$ のとき

$$3>x(x-2)\quad\text{ゆえに}\quad x^2-2x-3<0$$

したがって　$(x+1)(x-3)<0$

$x>2$ に注意して，これを解いて　$2<x<3$

［2］$x-2<0$　すなわち　$x<2$ のとき

$$3<x(x-2)\quad\text{ゆえに}\quad x^2-2x-3>0$$

したがって　$(x+1)(x-3)>0$

$x<2$ に注意して，これを解いて　$x<-1$

よって　$\boldsymbol{x<-1,\ 2<x<3}$

(2) 方程式から　$\log_2(9-x)<\log_2 4$

真数は正であり，底 2 は 1 より大きいから

$$0<9-x<4\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{5<x<9}$$

4. (1) $\mathrm{BC} = \sqrt{(2-0)^2+(1-2)^2} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

(2) $\mathrm{CA} = \sqrt{(-1-2)^2+(0-1)^2} = \sqrt{10}$,
$\mathrm{AB} = \sqrt{(0+1)^2+(2-0)^2} = \sqrt{5}$
余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{10+5-5}{2\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　　$\boldsymbol{\angle BAC = 45^\circ}$

(3) 求める平行四辺形の面積は

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin\angle\mathrm{BAC} = \sqrt{5}\sqrt{10}\sin 45^\circ = \sqrt{5}\sqrt{10}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{5}$$

5. (1) I は単位行列であるから

$$(A-I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I$$

このとき，$A^2 = I$，$A^3 = AA^2 = AI = A$ であるから

$$(A-I)^3 = A - 3I + 3A - I = 4(A-I)$$

よって　　$\boldsymbol{k = 4}$

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 2+(-1)\cdot 3 & 2\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2) \\ 3\cdot 2+(-2)\cdot 3 & 3\cdot(-1)+(-2)\cdot(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

(3) (2) の A は，(1) の結果より

$$\begin{aligned}(A-I)^9 &= \{(A-I)^3\}^3 = \{4(A-I)\}^3 = 4^3(A-I)^3 \\ &= 4^3\cdot 4(A-I) = 256(A-I)\end{aligned}$$

ここで

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

よって　　$(A-I)^9 = 256\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{256} & \boldsymbol{-256} \\ \boldsymbol{768} & \boldsymbol{-756} \end{pmatrix}$

6. (1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{2^2+2\cdot 2+4}{2+2}=\mathbf{3}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-2x-1}{4x^2-5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{8-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{4-\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\frac{8}{4}=\mathbf{2}$

7. (1) 求める和を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=1}^{20}k(k+1)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}\{(k+2)-(k-1)\}k(k+1)\\&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\&=\frac{1}{3}\cdot 20\cdot 21\cdot 22=\mathbf{3080}\end{aligned}$$

(2) 求める和を S とすると

$$S=\sum_{k=1}^{20}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{20}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{21}=\mathbf{\frac{20}{21}}$$

8. (1) $y'=-9x^2+12x$

$=-3x(3x-4)$

$y'=0$ とすると

$x=0,\ \frac{4}{3}$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 0	↗	極大 $\frac{32}{9}$	↘

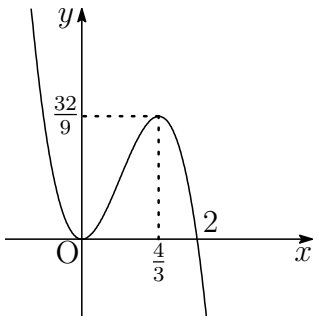
したがって，この関数は

$x=\frac{4}{3}$ で極大値 $\frac{32}{9}$，

$x=0$ で極小値 0

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



(2) ①，② から y を消去すると

$$-3x^2+6x^2=-3x+6 \quad \text{ゆえに} \quad x^3-2x^2-x+2=0$$

したがって $(x+1)(x-1)(x-2)=0$

交点の x 座標は $x=-1,\ 1,\ 2$

よって，交点の座標は **$(-1,\ 9)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 0)$**

(3) (1),(2) より

$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき $-3x+6 \geqq -3x^3+6x^2$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき $-3x^3+6x^2 \geqq -3x+6$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} \{(-3x+6)-(-3x^3+6x^2)\}\,dx \\ &\qquad + \int_{1}^{2} \{(-3x^3+6x^2)-(-3x+6)\}\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} (3x^3-6x^2-3x+6)\,dx + \int_{1}^{2} (-3x^3+6x^2+3x-6)\,dx \\ &= \left[\ \frac{3}{4}x^4-2x^3-\frac{3}{2}x^2+6x\ \right]_{-1}^{1} + \left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3+\frac{3}{2}x^2-6x\ \right]_{1}^{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{37}{4}} \end{aligned}$$

1.10　平成 21 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

   (2) $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-1}}}$

2. 次の方程式を解け.

   (1) $x^3-2x^2-5x+6=0$

   (2) $2^{2x+1}+3\cdot 2^x=2$

3. 次の不等式を解け.

   (1) $x+2\sqrt{-x+1}<0$

   (2) $\log_4(x+2)^2+\log_2(x-1)\leq 2$

4. 初項から第 n 項までの和 S_n が n^2-2n となる数列の一般項 a_n を求めよ.

5. 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$，$\mathrm{B}(-\sqrt{3},\ 3+\sqrt{3})$，$\mathrm{C}(2,\ 5)$ に対して，次の各問に答えよ.

   (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分をかけ．また，内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ.

   (2) $\angle\mathrm{BAC}$ を求め，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めよ.

6. 2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を焦点とする楕円 C_1 と双曲線 C_2 がある．次の各問いに答えよ.

   (1) 楕円 C_1 が点 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{3}\right)$ を通るとき，この楕円の方程式を求めよ.

   (2) 双曲線 C_2 の漸近線が $y=\pm\sqrt{3}\,x$ であるとき，この双曲線の方程式を求めよ.

7. 関数 $y=x^3-3x^2+2$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，この関数のグラフの概形をかけ.

8. $A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}$ とするとき，次の各問に答えよ．

(1) A の逆行列 A^{-1} を求めよ．

(2) 放物線 $y = -x^2 + 2$ を原点を中心に正の向きに 45° だけ回転させた図形の方程式を x，y を用いて表せ．

(3) (2) で求めた図形と直線 $y = x$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) $$\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos x(1+\sin x) + \cos x(1-\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$
$$= \frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{2\cos x}{\cos^2 x} = \boldsymbol{\frac{2}{\cos x}}$$

(2) $$\frac{1}{1-\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-1}}} = \frac{1}{1-\dfrac{x(x-1)}{(x-1)+1}} = \frac{1}{1-(x-1)} = \boldsymbol{\frac{1}{2-x}}$$

2. (1) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ とすると
$$P(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 6 = 0$$
よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち
$$P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$$
$$= (x-1)(x+2)(x-3)$$
$P(x) = 0$ から
$$\boldsymbol{x = 1, -2, 3}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad -x \quad -6 \\ \hline x-1 & x^3 -2x^2 -5x +6 \\ & \underline{x^3 \quad -x^2} \\ & \quad -x^2 -5x \\ & \quad \underline{-x^2 \quad +x} \\ & \quad\quad -6x +6 \\ & \quad\quad \underline{-6x +6} \\ & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

(2) $2^x = t$ とおくと　$t > 0$
$2^{2x+1} = 2^{2x}\cdot 2^1 = (2^x)^2\cdot 2 = 2t^2$ であるから，方程式は
$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$
ゆえに　$(t+2)(2t-1) = 0$
$t > 0$ より　$t = \dfrac{1}{2}$
したがって　$2^x = \dfrac{1}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{x = -1}$

3. (1) 与えられた不等式から　$2\sqrt{-x+1} < -x$　$\cdots$①

① から　　$-x+1 \geqq 0$　かつ　$-x > 0$

すなわち　　$x < 0$　$\cdots$②

① の両辺を平方すると

$$(2\sqrt{-x+1})^2 < (-x)^2$$

整理すると　　$x^2 + 4x - 4 < 0$

ゆえに　　$-2-2\sqrt{2} < x < -2+2\sqrt{2}$　$\cdots$③

②，③ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-2-2\sqrt{2} < x < 0}$

(2) 真数は正であるから

$$(x+2)^2 > 0 \quad \text{かつ} \quad x-1 > 0 \qquad \text{すなわち} \quad x > 1 \quad \cdots ①$$

① より $x+2 > 0$ であることに注意して

$$\log_4 (x+2)^2 = \frac{\log_2 (x+2)^2}{\log_2 4} = \frac{2\log_2 (x+2)}{2} = \log_2 (x+2)$$

与えられた不等式は

$$\log_2 (x+2) + \log_2 (x-1) \leq 2$$

ゆえに　　$\log_2 (x+2)(x-1) \leq \log_2 4$

底 2 は 1 より大きいので　　$(x+2)(x-1) \leq 4$

整理して　　$x^2 + x - 6 \leq 0$

左辺を因数分解すると　　$(x+3)(x-2) \leq 0$

したがって　　$-3 \leq x \leq 2$　$\cdots$②

よって，①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{1 < x \leq 2}$

【補足】 $\leq$，$\geq$ は，それぞれ $\leqq$，$\geqq$ と同じ．

4. 初項 a_1 は　　$a_1 = S_1 = 1^2 - 2\cdot 1 = -1$　　$\cdots$①

$n \geqq 2$ のとき　　$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\}$

すなわち　　$a_n = 2n - 3$

① より $a_1 = -1$ なので，この式は $n = 1$ のときにも成り立つ．

したがって，一般項は　　$\boldsymbol{a_n = 2n - 3}$

5. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-\sqrt{3}-(-1),\ (3+\sqrt{3})-2) = (1-\sqrt{3},\ 1+\sqrt{3})$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2-(-1),\ 5-2) = (3,\ 3)$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1-\sqrt{3})\cdot 3 + (1+\sqrt{3})\cdot 3 = \mathbf{6}$

(2) $\angle\mathrm{BAC}$ を求め，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めよ．

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$

よって $\cos\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{6}{2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \angle\mathrm{BAC} \leqq 180^\circ$ であるから $\quad \boldsymbol{\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ}$

したがって $\quad S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

6. (1) 楕円 C_1 の方程式は $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a>b>0)$ の形である．

焦点の座標について，$\sqrt{a^2-b^2} = 1$ であるから $\quad a^2 = b^2+1\cdots①$

C_1 は点 $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{3}\right)$ を通るから $\quad \dfrac{4}{5a^2}+\dfrac{4}{9b^2} = 1$

① より $\quad \dfrac{4}{5(b^2+1)}+\dfrac{4}{9b^2} = 1$

$36b^2 + 4\cdot 5(b^2+1) = 45b^2(b^2+1)$

整理すると $\quad 45b^4 - 11b^2 - 20 = 0$

ゆえに $\quad (5b^2-4)(9b^2+5) = 0$

$b^2>0$ であるから $\quad b^2 = \dfrac{4}{5}$ $\quad$ これを ① に代入して $\quad a^2 = \dfrac{9}{5}$

よって，C_1 の方程式は $\quad \boldsymbol{\dfrac{5}{9}x^2+\dfrac{5}{4}y^2 = 1}$

(2) 双曲線 C_2 の方程式は $\quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (a>0,\ b>0)$ の形である．

焦点の座標について，$\sqrt{a^2+b^2} = 1$ であるから $\quad a^2+b^2 = 1\cdots①$

漸近線が $y = \pm\sqrt{3}\,x$ であるから $\quad \dfrac{b}{a} = \sqrt{3}$ $\quad$ すなわち $\quad b = \sqrt{3}a \quad \cdots②$

② を ① に代入して $\quad a^2+(\sqrt{3}a)^2 = 1$ $\quad$ ゆえに $\quad a^2 = \dfrac{1}{4}$

$a>0$ であるから $\quad a = \dfrac{1}{2}$ $\quad$ これを ② に代入して $\quad b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，C_2 の方程式は $\quad \boldsymbol{4x^2-\dfrac{4}{3}y^2 = 1}$

7. $y' = 3x^2 - 6x$

$= 3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると

$x = 0,\ 2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

y の増減表は，右のようになる．

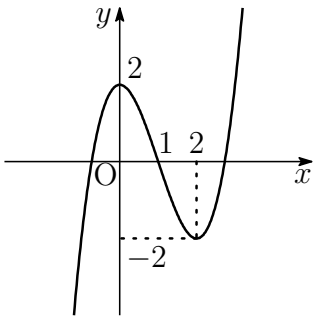
したがって，この関数は

$x = 0$ で極大値 2，

$x = 2$ で極小値 -2

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



8. (1) A は原点を中心に $45°$ だけ回転する 1 次変換を表す行列である．したがって，A^{-1} は原点を中心に $-45°$ だけ回転する 1 次変換を表す行列である．

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(-45°) & -\sin(-45°) \\ \sin(-45°) & \cos(-45°) \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

(2) 与えられた放物線上の点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とすると　$t = -s^2 + 2$　$\cdots$①

P を原点を中心に $45°$ だけ回転した点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とする．このとき (1) で求めた A^{-1} を用いて

$$\begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x+y \\ -x+y \end{pmatrix}$$

これを ① に代入して

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y) = -\frac{1}{2}(x+y)^2 + 2$$

よって　$\boldsymbol{(x+y)^2 + \sqrt{2}(-x+y) - 4 = 0}$

(3) (2) で求めた図形と直線 $y = x$ を原点を中心に $-45°$ だけ回転させたものは，それぞれ $y = -x^2 + 2$，$y = 0$ (x 軸) である．ゆえに，これらの図形で囲まれた部分の面積 S を求めればよい．

$y = -x^2 + 2$ の x 軸との共有点の座標は

$$-x^2 + 2 = 0 \quad \text{これをを解いて} \quad x = \pm\sqrt{2}$$

$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において　$-x^2 + 2 \geqq 0$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2 + 2)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{\mathbf{8\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

1.11　平成 20 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) 放物線 $y = 2x^2 - ax + b$ の頂点の座標が $(2,\ 3)$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ.

   (2) $\tan\theta = -\dfrac{5}{3}$ のとき，$\dfrac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$ の値を求めよ.

   (3) $\sin 15^\circ$ の値を求めよ.

   (4) 初項 32，公差 $-\dfrac{3}{5}$ の等差数列において，初めて負になるのは第何項か.

   (5) 初項が 9，公比が $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の等比数列において，$\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ は第何項か.

2. 次の方程式，不等式を解け.

   (1) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

   (2) $2\sin x + \sqrt{3} > 0 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$

3. 次の問に答えよ.

   (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3x+4}-2}{x}$ の値を求めよ.

   (2) ベクトル $\vec{a} = (4,\ 3)$，$\vec{b} = (2, -1)$ に対し，$|\vec{a} + t\vec{b}|$ が最小となるときの定数 t の値を求めよ.

   (3) 三角形 ABC において，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ L，M，N とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}} + \overrightarrow{\mathrm{CL}} = \overrightarrow{0}$ であることを証明せよ.

4. 次の問に答えよ.

   (1) 原点と点 $(8,\ 6)$ を直径とする円の方程式を求めよ.

   (2) 放物線 $y = x^2 - 3x + 1$ 上の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求めよ.

   (3) 双曲線 $x^2 - y^2 = 3$ と直線 $y = 2x + k$ が 2 点で交わるように実数の定数 k の値の範囲を求めよ.

   (4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ のとき，次の等式を満たす行列 X，Y を求めよ.

   a)　$A + X = 2(2X + B)$　　b)　$YA = B$

5. 関数 $y = \dfrac{3}{2}x^4 - 4x^3 + 3$ の増減を調べグラフの概形をかけ.

6. 2 つの放物線 $y = x^2$，$y = -x^2 + 2x + 4$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) 頂点が $(2,\ 3)$ の放物線で，x^2 の係数が 2 であるから

$$y = 2(x-2)^2 + 3 \quad \text{すなわち} \quad y = 2x^2 - 8x + 11$$

よって，係数を比較して　　$\boldsymbol{a = 8,\ b = 11}$

(2) $\tan\theta = -\dfrac{5}{3}$ より

$$\frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} = \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} = \frac{1 + \left(-\frac{5}{3}\right)}{1 - \left(-\frac{5}{3}\right)} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

(3) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(4) 初項 32，公差 $-\dfrac{3}{5}$ の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 32 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{5}\right) \quad \text{すなわち} \quad a_n = -\frac{3}{5}n + \frac{163}{5}$$

このとき　$-\dfrac{3}{5}n + \dfrac{163}{5} < 0$ より　$n > \dfrac{163}{3}$

$\dfrac{163}{3} = 54.3\cdots$ であるから，これを満たす最小の自然数 n は　$n = 55$

よって，求める項数は　**第 55 項**

(5) 初項 9，公比 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 9 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} \quad \text{すなわち} \quad a_n = 3^{\frac{5-n}{2}}$$

$\dfrac{\sqrt{3}}{9} = 3^{-\frac{3}{2}}$ であるから　$3^{\frac{5-n}{2}} = 3^{-\frac{3}{2}}$ を解いて　$n = 8$

よって，求める項数は　**第 8 項**

2. (1) 真数は正であるから　　$x > 0$　かつ　$x - 2 > 0$

すなわち　　$x > 2 \quad \cdots ①$

方程式を変形すると　　$\log_2 x(x-2) = 3$

よって　　$x(x-2) = 2^3$

式を整理すると　　$x^2 - 2x - 8 = 0$

$(x+2)(x-4) = 0$

① より　　$\boldsymbol{x = 4}$

(2) 不等式を変形すると　$\sin x > -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で解くと　$\boldsymbol{0 \leqq x < \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi < x < 2\pi}$

3. (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+3x+4}-2}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x^2+3x+4}-2)(\sqrt{x^2+3x+4}+2)}{x(\sqrt{x^2+3x+4}+2)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+3x+4)-4}{x(\sqrt{x^2+3x+4}+2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+3x+4}+2} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(2) $\vec{a} + t\vec{b} = (4,\ 3) + t(2, -1) = (4+2t,\ 3-t)$ より

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = (4+2t)^2 + (3-t)^2$$
$$= 5t^2 + 10t + 25$$
$$= 5(t+1)^2 + 20$$

$|\vec{a} + t\vec{b}|^2$ が最小のとき $|\vec{a} + t\vec{b}|$ も最小となるから

$|\vec{a} + t\vec{b}|$ は $\boldsymbol{t = -1}$ のとき最小値をとる.

(3) A，B，C の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とすると

L，M，N の位置ベクトルは，それぞれ

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},\ \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\ \frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}$$

であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} + \overrightarrow{\mathrm{BN}} + \overrightarrow{\mathrm{CL}} = \left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{a}\right) + \left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2} - \vec{b}\right) + \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \vec{c}\right)$$
$$= \vec{0}$$

4. (1) 求める円の中心を C，半径を r とする．
C は原点 O と点 (8, 6) の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{0+8}{2},\ \frac{0+6}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (4,\ 3)$$

また $\quad r = \mathrm{OC} = \sqrt{4^2+3^2} = 5$
よって，求める円の方程式は $\quad \boldsymbol{(x-4)^2+(y-3)^2=25}$

(2) $f(x) = x^2 - 3x + 1$ とすると $\quad f'(x) = 2x - 3$

$$f'(1) = 2\cdot 1 - 3 = -1$$

ゆえに，求める接線の方程式は

$$y - (-1) = -1(x-1)$$

よって $\quad \boldsymbol{y = -x}$

(3)

$$x^2 - y^2 = 3 \quad \cdots ①$$
$$y = 2x + k \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると $\quad x^2 - (2x+k)^2 = 3$
整理すると $\quad 3x^2 + 4kx + k^2 + 3 = 0$
① と ② の共有点が 2 個あるから，$D/4 > 0$ より

$$(2k)^2 - 3\cdot(k^2+3) > 0$$

整理すると $\quad k^2 - 9 > 0$
ゆえに $\quad (k+3)(k-3) > 0$
よって $\quad \boldsymbol{k < -3,\ 3 < k}$

(4) a) $A + X = 2(2X + B)$ より $3X = A - 2B$ であるから

$$X = \frac{1}{3}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{-2} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{1} \end{pmatrix}$$

b) A について $\quad \Delta = 1\cdot 9 - 4\cdot 2 = 1 \neq 0$
よって，A は逆行列をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって，等式 $YA = B$ を満たす行列 Y は

$$Y = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{8} & \boldsymbol{-3} \\ \boldsymbol{3} & \boldsymbol{-1} \end{pmatrix}$$

5. $y' = 6x^3 - 12x^2$

$= 6x^2(x-2)$

$y' = 0$ とすると

$x = 0,\ 2$

y の増減表は，右のようになる．

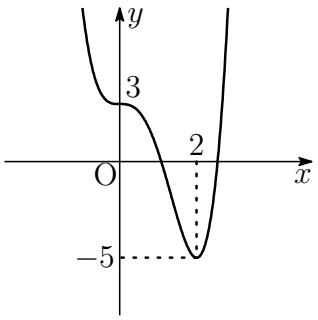
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	3	↘	極小 -5	↗

したがって，この関数は

$x = 2$ で極小値 -5

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



6. 方程式 $x^2 = -x^2 + 2x + 4$ を解くと　$x = -1,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ で，$-x^2 + 2x + 4 \geqq x^2$ であるから，求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(-x^2 + 2x + 4) - x^2\} dx \\ &= -2\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2) dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3 = \mathbf{9} \end{aligned}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

1.12 平成 19 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $(2a+b)^3-(2a-b)^3$

   (2) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

2. 次の方程式を解け.

   (1) $8^{2-x}=4^{x+1}$

   (2) $\sqrt{2x+5}-x=1$

3. 次の不等式を解け.

   (1) $2x \geq 8-x^2$

   (2) $2\log_4(x+1) \leq 1$

4. 無限数列 $\{a_n\}$: 2, 5, 8, 11, 14, $\cdots$ について，次の各問いに答えよ.

   (1) 第 n 項 a_n を n の式で表せ.

   (2) 初項から第 20 項までの和 S_{20} を求めよ.

   (3) 極限 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$ を求めよ.

5. 3 点 A$(-1,\ 1)$，B$(1,\ 4)$，C$(4,\ 2)$ がある．次の各問いに答えよ.

   (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の成分を書け.

   (2) $\angle \mathrm{BAC}=\theta$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

   (3) $\sin\theta$ 及び $\sin 2\theta$ の値を求めよ.

   (4) $\triangle$ABC の面積 S を求めよ.

6. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$ について，次の各問いに答えよ.

   (1) A^2 を求めよ.

   (2) $AX=B$ となる行列 X を求めよ.

7. $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ について，次の各問いに答えよ．

   (1) 増減を調べてグラフの概形を描け．

   (2) この曲線と x 軸で囲まれる図形の面積 S を求めよ．

8. 放物線 $y = \dfrac{5}{4}x^2 - 5x + \dfrac{131}{20} \cdots ①$ と楕円 $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \cdots ②$ について，次の各問いに答えよ．

   (1) 放物線 ① の頂点の座標を求めよ．

   (2) 放物線 ① 上の点 P における接線 l_1 の傾きは $\dfrac{1}{2}$ であるという．点 P の座標を求めよ．

   (3) 接線 l_1 と x 軸の交点 Q を求め，点 Q が楕円 ② の焦点の 1 つであることを確かめよ．

   (4) 線分 PQ の中点 M の座標を求めよ．また，線分 PQ の垂直二等分線 l_2 は楕円 ② の Q とは異なる焦点 Q′ を通ることを確かめよ．

   (5) 線分 PQ の垂直二等分線 l_2 と楕円 ② の 2 つの交点を A，B とするとき，△APM と △BQM の周の長さの和 L を求めよ．

解答例

1. (1) $(2a+b)^3 - (2a-b)^3 = (2a)^3 + 3(2a)^2 b + 3\cdot 2a\cdot b^2 + b^3$
   $\qquad -\{(2a)^3 - 3(2a)^2 b + 3\cdot 2a\cdot b^2 - b^3\}$
   $= 8a^3 + 12a^2 b + 6ab^2 + b^3 - (8a^3 - 12a^2 b + 6ab^2 - b^3)$
   $= \boldsymbol{24a^2 b + 2b^3}$

   (2) $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} + \dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x + (1+\sin x)^2}{(1+\sin x)\cos x} = \dfrac{\cos^2 x + 1 + 2\sin x + \sin^2 x}{(1+\sin x)\cos x}$
   $= \dfrac{2(1+\sin x)}{(1+\sin x)\cos x} = \dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{\cos x}}$

2. (1) $8^{2-x} = 4^{x+1}$ より　$2^{3(2-x)} = 2^{2(x+1)}$
   ゆえに　$3(2-x) = 2(x+1)$　これを解いて　$\boldsymbol{x = \dfrac{4}{5}}$

(2) 与えられた方程式から $\sqrt{2x+5} = x+1 \quad \cdots ①$
このとき $2x+5 \geqq 0$ かつ $x+1 \geqq 0$
ゆえに $x \geqq -1 \quad \cdots ②$
① の両辺を平方すると $2x+5 = (x+1)^2$
整理すると $x^2 - 4 = 0$
したがって $(x+2)(x-2) = 0$
② より $\boldsymbol{x = 2}$

3. (1) $2x \geq 8 - x^2$
整理すると $x^2 + 2x - 8 \geq 0$
ゆえに $(x+4)(x-2) \geq 0$
よって $\boldsymbol{x \leq -4,\ 2 \leq x}$

(2) 与えられた不等式から $\log_4(x+1) \leq \dfrac{1}{2}$
したがって $\log_4(x+1) \leq \log_4 2$ $\leftarrow \frac{1}{2} = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \log_4 2$
真数は正で，底 4 は 1 より大きいから $0 < x+1 \leq 2$
よって $\boldsymbol{-1 < x \leq 1}$

4. (1) $\{a_n\}$ は，初項 2，公差 3 の等差数列であるから
$a_n = 2 + (n-1)\cdot 3$ よって $\boldsymbol{a_n = 3n - 1}$

(2) $S_{20} = \dfrac{1}{2}\cdot 20\{2\cdot 2 + (20-1)\cdot 3\} = \mathbf{610}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} &= \sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1} \\ &= \frac{(\sqrt{3n+2} - \sqrt{3n-1})(\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1})}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1}} \\ &= \frac{(3n+2) - (3n-1)}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1}} = \frac{3}{\sqrt{3n+2} + \sqrt{3n-1}}\end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n}) = 0}$

5. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (1-(-1), 4-1) = \mathbf{(2,\ 3)}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (4-(-1),\ 2-1) = \mathbf{(5,\ 1)}$

(2) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{2\times 5 + 3\times 1}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{5^2+1^2}} = \dfrac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) $0° \leqq \theta \leqq 180°$ であるから，(2) の結果から $\theta = 45°$，$2\theta = 90°$
よって $\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$, $\boldsymbol{\sin 2\theta = 1}$

(4) (1) の結果から $S = \dfrac{1}{2}\left|\, 2\cdot 1 - 3\cdot 5 \,\right| = \boldsymbol{\dfrac{13}{2}}$

6. (1) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

(2) A について　　$\Delta = 1\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 3 \neq 0$

よって，A は逆行列をもち

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって，等式 $AX = B$ を満たす行列 X は

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

7. (1) $y' = -4x^3 + 4x$

$= -4x(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると

$x = -1,\ 0,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大 4	↘	極小 3	↗	極大 4	↘

y の増減表は，右のようになる．

したがって，この関数は

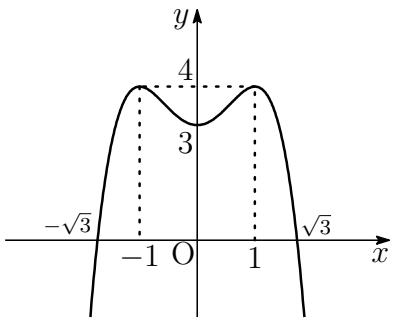
$x = -1$ で極大値 4

$x = 0$ で極小値 3

$x = 1$ で極大値 4

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



(2) グラフと x 軸との共有点の x 座標は，$-x^4 + 2x^2 + 3 = 0$ より

$$x^4 - 2x^2 - 3 = 0$$

したがって　　$(x^2+1)(x^2-3) = 0$

$x^2 \geqq 0$ であるから　$x^2 = 3$　ゆえに　$x = \pm\sqrt{3}$

$-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ で $-x^4 + 2x^2 + 3 \geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-x^4 + 2x^2 + 3)dx = 2\int_0^{\sqrt{3}} (-x^4 + 2x^2 + 3)dx$$

$$= 2\left[-\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + 3x\right]_0^{\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{32}{5}\sqrt{3}}$$

8. (1) 放物線 ① を変形すると $y = \dfrac{5}{4}(x-2)^2 + \dfrac{31}{20}$

よって，頂点の座標は $\left(\mathbf{2},\ \dfrac{\mathbf{31}}{\mathbf{20}}\right)$

(2) ① を微分すると $y' = \dfrac{5}{2}x - 5$

接線の傾きが $\dfrac{1}{2}$ である点の x 座標は，$y' = \dfrac{1}{2}$ より

$$\frac{5}{2}x - 5 = \frac{1}{2} \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{11}{5}$$

よって，接点 P の座標は ① より $\mathbf{P}\left(\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}},\ \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}\right)$

(3) l_1 は，点 P を通り傾き $\dfrac{1}{2}$ であるから，その方程式は

$$y - \frac{8}{5} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{11}{5}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

l_1 と x 軸との交点の座標 Q は，これに $y = 0$ を代入して $\mathbf{Q(-1,\ 0)}$

また，楕円 ② の焦点の座標は $(\pm\sqrt{4-3},\ 0)$ すなわち $(\pm 1,\ 0)$

(4) P，Q の中点 M の座標は

$$\left(\frac{\frac{11}{5} + (-1)}{2},\ \frac{\frac{8}{5} + 0}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}},\ \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}\right)$$

l_2 は M を通り，PQ に垂直な直線であるから，その方程式は

$$y - \frac{4}{5} = -2\left(x - \frac{3}{5}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x + 2$$

l_2 と x 軸との交点の座標 Q′ は，これに $y = 0$ を代入して $\mathbf{Q'(1,\ 0)}$

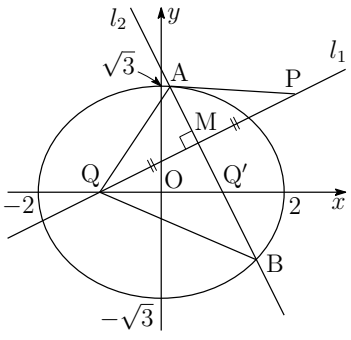
(3) で示したように，Q′ は楕円 ② の焦点の 1 つである．

(5) AP = AQ であるから，△APM と △BQM の周の長さの和 L は，△ABQ の周と線分 PQ の長さの和である．△ABQ の周の長さおよび PQ は

$(\mathrm{QA} + \mathrm{Q'A}) + (\mathrm{QB} + \mathrm{Q'B}) = 4 + 4 = 8$

$\mathrm{PQ} = \sqrt{\left\{\frac{11}{5} - (-1)\right\}^2 + \left(\frac{8}{5} - 0\right)^2} = \frac{8}{5}\sqrt{5}$

よって $\quad \boldsymbol{L = 8 + \dfrac{8}{5}\sqrt{5}}$



1.13　平成 18 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ．

   (1) $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y - 3$ を因数分解せよ．

   (2) 方程式 $2x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 12x - 3 = 0$ を解け．

   (3) $\log_2 7$，$\log_2 \sqrt{45}$，$\dfrac{1}{2}\log_2 50$ を大きいものから順に並べよ．

   (4) $\sin 52.5^\circ$ の値を求めよ．

   (5) $\vec{u} = (a,\ 2)$，$\vec{v} = (1 - a,\ 1)$ の内積が最大値をとるときの a の値を求めよ．

   (6) $y = (x - 2)^3$ のグラフ上の点 $(3,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ．

   (7) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 (x - 1)^3\, dx$ の値を求めよ．

2. 座標平面上で 2 点 A(3, 6)，B(5, 1) をとる．また原点を O，線分 OA を 2 : 1 に内分する点を C，線分 OB を 2 : 1 に外分する点を D，線分 AB と線分 CD との交点を E とする．次の問いに答えよ．

   (1) C と D の座標を求めよ．

   (2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}} = a\overrightarrow{\mathrm{OA}} + b\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，a と b の値を求めよ．

   (3) E は線分 AB を何対何に内分するか．

   (4) E は線分 CD を何対何に内分するか．

3. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$ の増減・極値を調べ，グラフを描け．

4. $y = x^2$ と $y = x + 2$ で囲まれる図形の面積を求めよ．

以下 5，6，7 の 3 題のうち 2 題を選択し解答せよ．

5. x，y が不等式 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1$ を満たすとき，$2x - 3y$ の最大値と最小値を求めよ．

6. 次の行列の積を計算し，最も簡単な形で表せ．

$$\begin{pmatrix} \cos 12^\circ & -\sin 12^\circ \\ \sin 12^\circ & \cos 12^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 18^\circ & -\sin 18^\circ \\ \sin 18^\circ & \cos 18^\circ \end{pmatrix}$$

7. 不等式 $\dfrac{x - 1}{x - 2} \leqq 3$ を解け．

解答例

1. (1) x について整理し，因数分解する．

$$\begin{aligned}
&x^2+xy-2y^2+2x+7y-3\\
=&x^2+(y+2)x-(2y^2-7y+3)\\
=&x^2+(y+2)x-(y-3)(2y-1)\\
=&\{x-(y-3)\}\{x+(2y-1)\}\\
=&\boldsymbol{(x-y+3)(x+2y-1)}
\end{aligned}$$

(2) $P(x)=2x^4+2x^3-13x^2+12x-3=0$ とすると　$P(1)=0$
よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち　$P(x)=(x-1)(2x^3+4x^2-9x+3)$
さらに，$Q(x)=2x^3+4x^2-9x+3$ とすると　$Q(1)=0$
よって，$Q(x)$ は $x-1$ を因数にもち　$Q(x)=(x-1)(2x^2+6x-3)$
ゆえに　　$P(x)=(x-1)^2(2x^2+6x-3)$
$P(x)=0$ から　$x-1=0$　または　$2x^2+6x-3=0$
したがって　　$\boldsymbol{x=1}$**(2 重解)**, $\boldsymbol{\dfrac{-3\pm\sqrt{15}}{2}}$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_2 50=\log_2\sqrt{50}$，$\sqrt{50}>7>\sqrt{45}$ で，底 2 は 1 より大きいから

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\log_2 50>\log_2 7>\log_2\sqrt{45}}$$

(4) $\theta=52.5^\circ$ とおくと　$2\theta=105^\circ$

$$\cos 2\theta=\cos 105^\circ=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ゆえに　$\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=\dfrac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$

$\sin 52.5^\circ>0$ であるから　$\sin 52.5^\circ=\sin\theta=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}}$

(5) $\vec{u}=(a,\ 2)$，$\vec{v}=(1-a,\ 1)$ より

$$\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v}&=a(1-a)+2\cdot 1=-a^2+a+2\\
&=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

したがって，内積 $\vec{u}\cdot\vec{v}$ は，$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$ で最大となる．

(6) $y=(x-2)^3$ を微分すると　$y'=3(x-2)^2$

したがって，$x=3$ のとき　$y'=3$

接線は点 $(3,\ 1)$ を通り，傾き 3 の直線の方程式であるから

$$y-1=3(x-3)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=3x-8}$$

(7) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^3\,dx=\left[\ \frac{1}{4}(x-1)^4\ \right]_1^2=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$

2. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{2}{3}(3,\ 6)=(2,\ 4)$　ゆえに　$\mathbf{C(2,\ 4)}$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2(5,\ 1)=(10,\ 2)$　ゆえに　$\mathbf{D(10,\ 5)}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad \cdots ①$

E は線分 AB 上にあるから，上式より　$a+b=1\quad \cdots ②$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ であるから，これを ① に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{3}{2}a\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}b\overrightarrow{\mathrm{OD}}\quad \cdots ③$$

E は線分 CD 上にあるから，上式より　$\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2}b=1\quad \cdots ④$

したがって，②，④ を解くと　$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{b=\frac{1}{2}}$

(3) $a=b=\dfrac{1}{2}$ を ① に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

よって，E は AB を **1 : 1** に内分する．

(4) $a=b=\dfrac{1}{2}$ を ③ に代入すると　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{2}$

よって，E は CD を **1 : 3** に内分する．

3. $y'=4x^3-12x^2+8x$

$=4x(x-1)(x-2)$

$y'=0$ とすると

$x=0,\ 1,\ 2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

y の増減表は，右のようになる．

したがって，この関数は

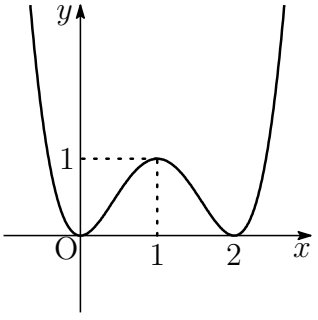
$x=0$ で極小値 0

$x=1$ で極大値 1

$x=2$ で極小値 0

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



4. 方程式 $x^2 = x + 2$ を解くと　$x = -1,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ で，$x + 2 \geqq x^2$ であるから，求める図形の面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^{2} \{(x+2) - x^2\} dx$$
$$= -\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2) dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

5. $2x - 3y = k$ とおくと　$y = \dfrac{2x-k}{3}$

これを $\dfrac{x^2}{4} + y^2 \leqq 1$ に代入すると

$$\frac{x^2}{4} + \left(\frac{2x-k}{3}\right)^2 \leqq 1$$

整理すると　$25x^2 - 16kx + 4k^2 - 36 \leqq 0$

この x に関する不等式は実数解をもつので，$D/4 \geqq 0$ より

$$(-8k)^2 - 25(4k^2 - 36) \geqq 0$$

ゆえに　$k^2 - 25 \leqq 0$

よって　$-5 \leqq k \leqq 5$

したがって　**最大値 5，最小値 −5**

別解 $\vec{u} = (4, -3)$，$\vec{v} = \left(\frac{x}{2},\ y\right)$ とおくと，$|\vec{u}| = 5$，$|\vec{v}| \leqq 1$

$-|\vec{u}||\vec{v}| \leqq \vec{u}\cdot\vec{v} \leqq |\vec{u}||\vec{v}|$ であるから　$-5 \leqq 2x - 3y \leqq 5$

6. 原点を中心にそれぞれ 12°，18° 回転する 1 次変換を表すので

$$\begin{pmatrix} \cos 12^\circ & -\sin 12^\circ \\ \sin 12^\circ & \cos 12^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 18^\circ & -\sin 18^\circ \\ \sin 18^\circ & \cos 18^\circ \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(12^\circ + 18^\circ) & -\sin(12^\circ + 18^\circ) \\ \sin(12^\circ + 18^\circ) & \cos(12^\circ + 18^\circ) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sqrt{3}} & \boldsymbol{-1} \\ \mathbf{1} & \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

7. 与えられた不等式から　$x \neq 2$

不等式の両辺に $(x-2)^2$ をかけると　$(x-1)(x-2) \leqq 3(x-2)^2$

整理すると　$(x-2)\{3(x-2) - (x-1)\} \geqq 0$

ゆえに　$(x-2)(2x-5) \geqq 0$

$x \neq 2$ に注意して　$\boldsymbol{x < 2,\ \frac{5}{2} \leqq x}$

1.14　平成 17 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式の値を求めよ.

   (1) $(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}-1)$

   (2) $\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5})$

   (3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$

   (4) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(2t-1)^2\,dt$

2. 次の問いに答えよ.

   (1) 5 個の数字 1，2，3，4，5 から異なる 4 個を選んで 4 桁の整数を作るとき，3200 より大きいものはいくつできるか.

   (2) 方程式 $3^{2x+3}=9^{-x+1}$ を解け.

   (3) $\log_4 10$，$\log_8 27$ の大小を比べよ.

3. 2 次関数 $y=2x^2-bx+3$ について次の問いに答えよ.

   (1) $b=7$ のとき，$y<0$ となるような整数 x の値を求めよ.

   (2) この 2 次関数のグラフが x 軸と異なる 2 点で交わるような b の値の範囲を求めよ.

4. 2 直線 $4x-3y+5=0$，$x+2y-7=0$ の交点を通り，直線 $2x+5y-7=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

5. 三角形 ABC で BC $=7$，CA $=3$，AB $=8$ のとき，次の問いに答えよ.

   (1) ∠A の大きさを求めよ.

   (2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ.

6. 次の問いに答えよ.

   (1) $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき $\sin(2\theta-60^\circ)=-\dfrac{1}{2}$ を解け.

   (2) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta}=\tan\theta$ を証明せよ.

7. 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ は，$x=-3$ で極大値をとり，$x=1$ で極小値をとる．次の問いに答えよ．

(1) 定数 a，b の値を求めよ．

(2) 極値を求め，$y=f(x)$ のグラフをかけ．

解答例

1. (1) $(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})(2^{\frac{2}{3}}+2^{-\frac{2}{3}}-1)=(2^{\frac{1}{3}}+2^{-\frac{1}{3}})\{(2^{\frac{1}{3}})^2-2^{\frac{1}{3}}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}+(2^{-\frac{1}{3}})^2\}$
$=(2^{\frac{1}{3}})^3+(2^{-\frac{1}{3}})^3$
$=2+2^{-1}=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

(2) $\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5})=\log_2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$
$=\log_2 4=\boldsymbol{2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-1)}{x-2}$
$\displaystyle=\lim_{x\to 2}(2x-1)=\boldsymbol{3}$

(4) $\displaystyle\int_{-1}^{3}(2t-1)^2\,dt=\left[\ \frac{(2t-1)^3}{6}\ \right]_{-1}^{3}=\frac{5^3-(-3)^3}{6}=\boldsymbol{\frac{76}{3}}$

公式 $\displaystyle\int(\boldsymbol{ax+b})^{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{dx}=\frac{(\boldsymbol{ax+b})^{\boldsymbol{n+1}}}{\boldsymbol{a(n+1)}}+\boldsymbol{C}$ を利用する．

2. (1) ［1］千の位が 3 の場合
百の位は 1 以外の 3 通り，十の位，一の位の並べ方は ${}_3\mathrm{P}_2$ 通りある．
［2］千の位が 4，5 の場合
千の位は 2 通り，百の位，十の位，一の位の並べ方は ${}_4\mathrm{P}_3$ 通りある．
よって，求める個数は $3\times{}_3\mathrm{P}_2+2\times{}_4\mathrm{P}_3=3\times 3\cdot 2+2\times 4\cdot 3\cdot 2=\boldsymbol{66}$ **(個)**

(2) $3^{2x+3}=9^{-x+1}$ より $3^{2x+3}=3^{2(-x+1)}$
ゆえに $2x+3=2(-x+1)$ これを解いて $\boldsymbol{x=-\frac{1}{4}}$

(3) $\log_4 10=\dfrac{\log_2 10}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}\log_2 10=\log_2\sqrt{10}$,
$\log_8 27=\dfrac{\log_2 27}{\log_2 8}=\dfrac{1}{3}\log_2 27=\log_2 3$
底 2 は 1 より大きく，$\sqrt{10}>3$ であるから $\boldsymbol{\log_4 10>\log_8 27}$

3. (1) 条件から　$2x^2-7x+3<0$

ゆえに　$(x-3)(2x-1)<0$

よって　$\dfrac{1}{2}<x<3$

これを満たす整数 x は　$\boldsymbol{x=1,\ 2}$

(2) グラフが x 軸と異なる 2 点で交わるので，$D>0$ より

$$(-b)^2-4\cdot2\cdot3>0$$

整理して　$b^2-24>0$

ゆえに　$(b+2\sqrt{6})(b-2\sqrt{6})>0$

よって　$\boldsymbol{b<-2\sqrt{6},\ 2\sqrt{6}<b}$

4. 2 直線 $4x-3y+5=0$，$x+2y-7=0$ の交点は　$(1,\ 3)$

直線 $2x+5y-7=0$ の傾きは　$-\dfrac{2}{5}$

これに垂直な直線の傾きを m とすると

$$-\frac{2}{5}m=-1 \quad \text{すなわち} \quad m=\frac{5}{2}$$

よって，求める直線は

$$y-3=\frac{5}{2}(x-1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{5x-2y+1=0}$$

別解 2 直線 $4x-3y+5=0$，$x+2y-7=0$ の交点を通る直線は，定数 k を用いて，次のようにかける．

$$4x-3y+5+k(x+2y-7)=0$$

すなわち　$(4+k)x+(-3+2k)y+5-7k=0 \quad \cdots①$

これが直線 $2x+5y-7=0$ に垂直であるから

$$2(4+k)+5(-3+2k)=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{7}{12}$$

これを ① に代入して整理すると　$\boldsymbol{5x-2y+1=0}$

補足 2 直線 $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ について

$$l_1/\!/\,l_2 \Longleftrightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$$

$$l_1\perp l_2 \Longleftrightarrow a_1a_2+b_1b_2=0$$

5. (1) $a=7$，$b=3$，$c=8$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\cdot3\cdot8}=\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{\angle A=60^\circ}$

(2) (1) の結果から

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot3\cdot8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$$

6. (1) $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より　$-60^\circ\leqq2\theta-60^\circ<660^\circ$

$\sin(2\theta-60^\circ)=-\dfrac{1}{2}$ を満たす θ は

$$2\theta-60^\circ=-30^\circ,\ 210^\circ,\ 330^\circ,\ 570^\circ$$

ゆえに　　$\theta=\boldsymbol{15^\circ,\ 135^\circ,\ 195^\circ,\ 315^\circ}$

(2) $\dfrac{\sin2\theta}{1+\cos2\theta}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)}=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$

7. (1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(x)=0$ の解が $x=-3,\ 1$ であるから，解と係数の関係により

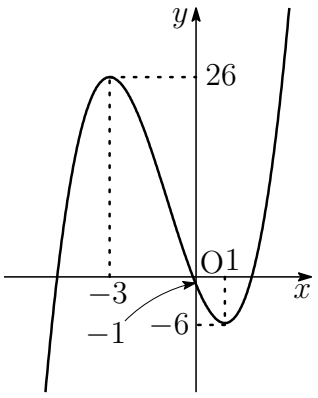
$$-3+1=-\frac{2a}{3},\quad -3\cdot1=\frac{b}{3}\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{a=3,\ \ b=-9}$$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3+3x^2-9x-1$

極大値は　$f(-3)=(-3)^3+3\cdot(-3)^2-9\cdot(-3)-1=\boldsymbol{26}$

極小値は　$f(1)=1^3+3\cdot1^2-9\cdot1-1=\boldsymbol{-6}$

よって，グラフは下の図のようになる．



1.15　平成 16 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問に答えよ.

   (1) $ab - bc - b^2 + ca$ を因数分解せよ.

   (2) 不等式 $2\sin x + 1 \leq 0 \ \ (0 \leq x < 2\pi)$ を解け.

   (3) 方程式 $(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x - 40 = 0$ を解け.

   (4) $\dfrac{x+9}{x^2-2x-3} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x+1}$ を満たす a, b を求めよ.

   (5) $y = \dfrac{1}{2}x^4 - 7x^2 + 12x + 3$ のグラフが減少である x の範囲を求めよ.

   (6) 定積分 $\displaystyle\int_0^3 2x(x^2+1)^2\,dx$ の値を求めよ.

2. 第 2 項が $a_2 = 223$, 第 11 項が $a_{11} = 160$ である等差数列について, 次の問に答えよ.

   (1) 一般項を求めよ.

   (2) $a_n < 0$ となる最初の項は第何項か.

   (3) $a_n > 0$ である項の総和を求めよ.

3. $y = (x-2)^2$ について, 次の問いに答えよ.

   (1) 曲線上の点 $(3,\ 1)$ における接線の方程式を求めよ.

   (2) この曲線と x 軸および y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

4. $y = -x^3 + 3x + 4$ について, 次の問いに答えよ.

   (1) 極大値および極小値を求めて, グラフの概形を描け.

   (2) $-2 \leq x \leq 3$ における最大値および極小値を求めよ.

5. 次の等式または不等式が成り立つことを証明せよ.

   (1) $\sin(x+y)\sin(x-y) = \sin^2 x - \sin^2 y$

   (2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 \geq a + b + c + d$

解答例

1. (1) a に着目すると

$$\begin{aligned} ab - bc - b^2 + ca &= a(b+c) - b(b+c) \\ &= \boldsymbol{(b+c)(a-b)} \end{aligned}$$

(2) 与えられた不等式から　$\sin x \leq -\dfrac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ において，これを解くと　$\boldsymbol{\dfrac{7}{6}\pi \leq x \leq \dfrac{11}{6}\pi}$

(3) $\log_2 x = t$ とおくと　$t^2 - 3t - 40 = 0$

ゆえに　$(t+5)(t-8) = 0$　これを解いて　$t = -5,\ 8$

したがって　$\log_2 x = -5,\ 8$　よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{32},\ 256}$

(4) 与式から　$\dfrac{x+9}{(x-3)(x+1)} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{x+1}$

両辺に $(x-3)(x+1)$ をかけると　$x + 9 = a(x+1) + b(x-3)$

等式の右辺を x について整理すると　$x + 9 = (a+b)x + (a-3b)$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから　$1 = a + b,\ 9 = a - 3b$

これを解いて　$\boldsymbol{a = 3,\ b = -2}$

(5) $y' = 2x^3 - 14x + 12$，$P(x) = y'$ とすると　$P(1) = 0$

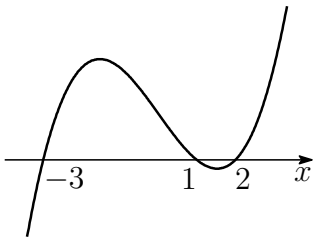
$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもち

$$P(x) = (x-1)(2x^2 + 2x - 12)$$

ゆえに　$P(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)$

グラフが減少であるとき　$y' \leq 0$

$P(x) \leq 0$ より　$\boldsymbol{x \leq -3,\ 1 \leq x \leq 2}$



(6) $\displaystyle\int_0^3 2x(x^2+1)^2\,dx = \int_0^3 (2x^5 + 4x^3 + 2x)\,dx$

$$= \left[\ \frac{x^6}{3} + x^4 + x^2\ \right]_0^3 = \boldsymbol{333}$$

2. (1) 初項を a，公差を d とすると，$a_2 = 223$，$a_{11} = 160$ であるから

$$a + d = 223,\quad a + 10d = 160$$

これを解いて　$a = 230$，$d = -7$

ゆえに　　$a_n = 230 + (n-1)\cdot(-7)$　よって　$\boldsymbol{a_n = -7n + 237}$

(2) $a_n < 0$ より　$-7n + 237 < 0$

これを解いて　$n > \dfrac{237}{7}$

$\dfrac{237}{7} = 33.8\cdots$ で，n は自然数であるから　　$n \geqq 34$

したがって，求める最初の項は　**第 34 項**

(3) (2) の結果から $a_n > 0$ であるのは　$1 \leqq n \leqq 33$

よって，初項から第 33 項までの和 S_{33} は

$$S_{33} = \frac{1}{2}\cdot 33\{2\cdot 230 + (33-1)\cdot(-7)\} = \mathbf{3894}$$

3. (1) $y = (x-2)^2$ を微分すると　$y' = 2(x-2)$

$x = 3$ のとき　$y' = 2(3-2) = 2$

点 $(3,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y - 1 = 2(x-3)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y = 2x - 5}$$

(2) 求める図形の面積 S は

$$S = \int_0^2 (x-2)^2\,dx = \left[\ \frac{(x-2)^3}{3}\ \right]_0^2 = \frac{0-(-2)^3}{3} = \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$$

微分・積分の公式

$$\boldsymbol{\{(ax+b)^n\}' = an(ax+b)^{n-1},}$$

$$\boldsymbol{\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C}$$

4. (1) $y' = -3x^2 + 3$
$= -3(x+1)(x-1)$
$y' = 0$ とすると
$x = -1,\ 1$

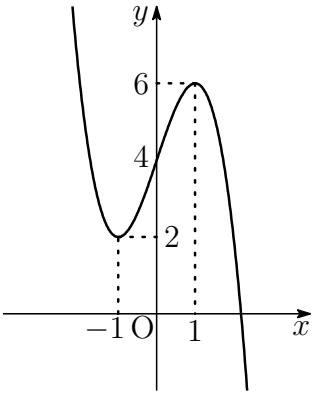
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 2	↗	極大 6	↘

y の増減表は，右のようになる．

したがって，この関数は

$x = 1$ で極大値 6，
$x = -1$ で極小値 2

をとる．
また，グラフは右の図のようになる．



(2) $x = -2$ で $y = 6$，$x = 3$ で $y = -14$
(1) の結果に注意して，$-2 \leq x \leq 3$ において
$x = -2,\ 1$ で最大値 6，
$x = 3$ で最小値 -14
をとる．

5. (1) 加法定理により

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin(x+y)\sin(x-y) &= (\sin x \cos y + \cos x \sin y)(\sin x \cos y - \cos x \sin y) \\ &= (\sin x \cos y)^2 - (\cos x \sin y)^2 \\ &= \sin^2 x \cos^2 y - \cos^2 x \sin^2 y \\ &= \sin^2 x(1 - \sin^2 y) - (1 - \sin^2 x)\sin^2 y \\ &= \sin^2 x - \sin^2 y\end{aligned}$$

(2) (左辺) $-$ (右辺) $= \left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(b - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(c - \dfrac{1}{2}\right) + \left(d - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geq 0$

よって　　$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 1 \geq a + b + c + d$

1.16　平成 15 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問に答えよ.

   (1) $x^2 - y^2 + 2y - 1$ を因数分解せよ.

   (2) 放物線 $y = 2x^2 - 4x + 3$ の頂点の座標を求めよ.

   (3) 不等式 $\log_2(x-2) + \log_2(x+1) < 2$ を解け.

   (4) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ$ の値を求めよ.

   (5) 整式 $x^3 + 3x^2 + x + a$ が $x + 2$ で割り切れる時の a の値を求めよ.

   (6) 関数 $y = x^3 - 2x^2$ の $x = 2$ における微分係数を求めよ.

   (7) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x-1)^2\,dx$ の値を求めよ.

   (8) 28^5 を 9 で割った余りはいくつか. 理由をつけて答えよ.

2. 2 次方程式 $2x^2 - 4x - 7 = 0$ の 2 つの解を α, β $(\alpha > \beta)$ とする. 次の問に答えよ.

   (1) α, β を求めよ.

   (2) $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ を求めよ.

   (3) $\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めよ.

   (4) α^2 と β^2 を解とする 2 次方程式を求めよ. ただし, x^2 の係数は 4 とする.

   (5) x の 2 次方程式 $2(x-\alpha)(x-\beta) = k$ が重解を持つとき, k の値を求めよ.

3. 次の問に答えよ.

   (1) 等式 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + \tan\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ が成り立つことを証明せよ.

   (2) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ を $y = r\sin(x+\theta)$ の形に変形せよ.

4. 関数 $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ の増減を調べて, グラフを描け.

5. $y = 4x - x^2$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ.

6. 直線 $y = 2x + 1$ に関して点 $(2, 1)$ と対称な点の座標を求めよ.

7. 不等式 $(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$ が成り立つことを証明せよ.

8. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ とする.

(1) S_3 を求めよ.

(2) $S_n = 10$ となる n を求めよ.

解答例

1. (1) (平方差による因数分解)

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 2y - 1 &= x^2 - (y^2 - 2y + 1) \\ &= x^2 - (y-1)^2 \\ &= \{x + (y-1)\}\{x - (y-1)\} \\ &= \boldsymbol{(x + y - 1)(x - y + 1)} \end{aligned}$$

(2) $y = 2x^2 - 4x + 3$ を変形すると

$y = 2(x-1)^2 + 1$ したがって，頂点の座標は $\boldsymbol{(1,\ 1)}$

(3) 真数は正であるから $x - 2 > 0$ かつ $x + 1 > 0$

すなわち $x > 2 \quad \cdots ①$

不等式を変形すると $\log_2(x-2)(x+1) < \log_2 4$

底 2 は 1 より大きいので $(x-2)(x+1) < 4$

展開して整理すると $x^2 - x - 6 < 0$

したがって $(x+2)(x-3) < 0$

① に注意して $\boldsymbol{2 < x < 3}$

(4) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 120^\circ \cos 150^\circ = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{1}$

(5) $P(x) = x^3 + 3x^2 + x + a$ とすると，$P(x)$ を $x + 2$ で割った余りは $P(-2)$

このとき，$P(-2) = 0$ であるから

$$(-2)^3 + 3\cdot(-2)^2 + (-2) + a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = -2}$$

(6) $f(x) = x^3 - 2x^2$ とおくと $f'(x) = 3x^2 - 4x$

よって，微分係数 $f'(2)$ は $f'(2) = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 = \boldsymbol{4}$

(7) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x-1)^2\,dx = \left[\ \frac{(x-1)^3}{3}\ \right]_{-1}^{2} = \frac{1^3 - (-2)^3}{3} = \boldsymbol{3}$

(8) $x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ に $x=28$ を代入すると

$$28^5-1=27(28^4+28^3+28^2+28+1)$$

上式から 28^5-1 は 27 で割り切れるので，28^5-1 は 9 で割り切れる．
したがって，28^5 を 9 で割った余りは　$\mathbf{1}$

2. (1) 2 次方程式 $2x^2-4x-7=0$ を解いて　$x=\dfrac{2\pm3\sqrt{2}}{4}$
よって，この 2 次方程式の解 α，β $(\alpha>\beta)$ は

$$\boldsymbol{\alpha=\frac{2+3\sqrt{2}}{2}},\quad \boldsymbol{\beta=\frac{2-3\sqrt{2}}{2}}$$

(2) 解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{-4}{2}=\mathbf{2},\quad \alpha\beta=\frac{-7}{2}=\boldsymbol{-\frac{7}{2}}$$

(3) (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\\&=2^3-3\times\left(-\frac{7}{2}\right)\times2=\mathbf{29}\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=11$$

$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}$$

α^2 と β^2 を解とする 2 次方程式は　$x^2-11x+\dfrac{49}{4}=0$
よって，x^2 の係数に注意して　　$\boldsymbol{4x^2-44x+49=0}$

(5) 与えられた 2 次方程式を，展開して整理すると

$$2x^2-2(\alpha+\beta)x+2\alpha\beta-k=0$$

(2) の結果をこれにを代入すると

$$2x^2-4x-7-k=0$$

重解をもつので，$D/4=0$ より

$$(-2)^2-2\cdot(-7-k)=0\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{k=-9}$$

3. (1) $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\tan\theta=\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{\cos^2\theta+\sin\theta+\sin^2\theta}{(1+\sin\theta)\cos\theta}$$

$$=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta(1+\sin\theta)}=\frac{1}{\cos\theta}$$

(2) 座標平面上に点 $\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3})$ をとると，$\mathrm{OP}=2$，OP の x 軸の正の部分となす角が 60° であるから

$$\boldsymbol{y=2\sin(x+60^\circ)}$$

4. $y'=-3x^2+12x-9$

$=-3(x-1)(x-3)$

$y'=0$ とすると

$x=1,\ 3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

y の増減表は，右のようになる．

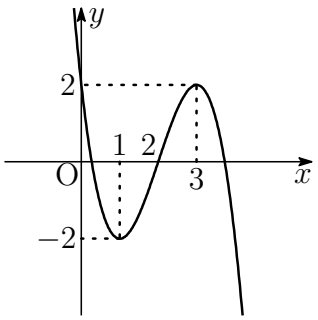
したがって，この関数は

$x=3$ で極大値 2,

$x=1$ で極小値 -2

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．



5. この放物線の x 軸との共有点の x 座標は，

$4x-x^2=0$　これを解いて　$x=0,\ 4$

$0\leqq x\leqq 4$ では，$y\geqq 0$ であるから，求める部分の面積を S とすると

$$S=\int_0^4(4x-x^2)dx=-\int_0^4 x(x-4)dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

6. 点 $(2,1)$ の座標を A，直線 $y=2x+1$ を l とし，l に関して A と対称な点を B$(p,\ q)$ とする．

［1］l の傾きは 2，直線 AB の傾きは $\dfrac{q-1}{p-2}$ である．$l\perp$AB であるから

$$2\cdot\frac{q-1}{p-2}=-1 \quad \text{すなわち} \quad p+2q-4=0 \quad \cdots①$$

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q+1}{2}\right)$ が l 上にあるから

$$\frac{q+1}{2}=2\cdot\frac{p+2}{2}+1 \quad \text{すなわち} \quad 2p-q+5=0 \quad \cdots②$$

①，② を解いて　$p=-\dfrac{6}{5}$，$q=\dfrac{13}{5}$　よって　$\left(\boldsymbol{-\dfrac{6}{5},\ \dfrac{13}{5}}\right)$

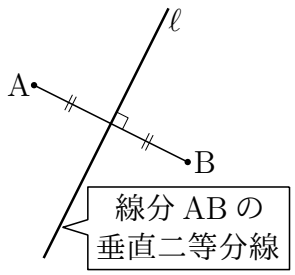
直線に関して対称な点

2 点 A，B が直線 ℓ に関して対称であるのは，次の［1］,［2］が成り立つときである．

［1］直線 AB は ℓ に垂直である．

［2］線分 AB の中点は ℓ 上にある．

補足　直線 ℓ は線分 AB の垂直二等分線である．



7. $$\begin{aligned}(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2&=b^2x^2-2abxy+a^2y^2\\&=(bx-ay)^2\geq 0\end{aligned}$$

よって　$(ax+by)^2\leq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

8. $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}=-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$ より

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}\\&=\sum_{k=1}^{n}(-\sqrt{k}+\sqrt{k+1})=-1+\sqrt{n+1} \quad \cdots(*)\end{aligned}$$

(1) $(*)$ より　$S_3=-1+\sqrt{3+1}=\boldsymbol{1}$

(2) $S_n=10$ を $(*)$ に代入して　$-1+\sqrt{n+1}=10$
したがって　$\sqrt{n+1}=11$　よって　$\boldsymbol{n=120}$

第 2 章　有明工業高等専門学校

2.1　令和２年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

   (1) 次の計算をしなさい.

   $$(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$$

   (2) 次の計算をしなさい.

   $$\sqrt[6]{a^5b} \div \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{6} \times \sqrt{ab}$$

   (3) 次の方程式を解きなさい.

   $$12x^4 - x^2 - 6 = 0$$

   (4) A$(4, -3)$ を通り，x 軸および y 軸の両方に接する円の半径を求めなさい.

   (5) 5^{30} は何桁の数であるか，答えなさい．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

   (6) $0 \leqq x < 2\pi$ とする．方程式 $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ を満たす x を求めなさい.

   (7) 不等式 $9^x + 3^{x+1} - 18 \geqq 0$ を解きなさい.

   (8) 第 3 項が 8，第 6 項が 1 である等比数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい．ただし，公比は実数とする.

   (9) ○，×で答えるクイズ 7 問に，でたらめに解答したとき，少なくとも 2 問正解する確率を求めなさい.

   (10) 三角形 ABC において，BC $= 2\sqrt{7}$，CA $= 4$，$A = 60°$ のとき，AB の長さ，および三角形 ABC の面積を求めなさい.

2. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ の増減表をかき，極値を求めなさい.

3. 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x \cdots$ ① のグラフ上にある点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式を求めなさい．また，求めた接線と ① のグラフとで囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

解答例

1. (1)　$(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}-1)$
$=\{(\sqrt{3}-1)-\sqrt{2}\}\{(\sqrt{3}-1)+\sqrt{2}\}$
$=(\sqrt{3}-1)^2-2=\boldsymbol{2-2\sqrt{3}}$

(2) $\sqrt[6]{a^5b}\div\frac{\sqrt[3]{ab^2}}{6}\times\sqrt{ab}=(a^5b)^{\frac{1}{6}}\div\dfrac{(ab^2)^{\frac{1}{3}}}{6}\times(ab)^{\frac{1}{2}}$

$$=a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\div\frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{6}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}$$

$$=a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{1}{6}}\times\frac{6}{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}\times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}=\boldsymbol{6a}$$

(3) $12x^4-x^2-6=0$　ゆえに　$(3x^2+2)(4x^2-3)=0$

$3x^2+2=0$ を解いて　$x=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}i=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}i$

$4x^2-3=0$ を解いて　$x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　　$\boldsymbol{x=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}i,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(4) $\mathrm{A}(4,-3)$ は第 4 象限の点であるから，円の半径を r，中心を $(r,-r)$ とすると $(r>0)$，円の方程式は

$$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$$

これが点 $\mathrm{A}(4,-3)$ を通るから

$$(4-r)^2+(-3+r)^2=r^2\quad\text{整理すると}\quad r^2-14r+25=0$$

$r>0$ に注意して，これを解くと　$r=\boldsymbol{7\pm2\sqrt{6}}$

(5) $\log_{10}5^{30}=30\log_{10}5=30\log_{10}\dfrac{10}{2}=30(\log_{10}10-\log_{10}2)$
$=30(1-0.3010)=30\times0.6990=20.97$
したがって

$$20<\log_{10}5^{30}<21$$
$$\log_{10}10^{20}<\log_{10}5^{30}<\log_{10}10^{21}$$
$$10^{20}<5^{30}<10^{21}$$

よって　　**21 桁**

(6) $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ より $(0 \leqq x < 2\pi)$

$$2(1-\cos^2 x) + \cos x - 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

ゆえに $(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$ よって $\boldsymbol{x = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$

(7) $9^x + 3^{x+1} - 18 \geqq 0$ より $(3^x)^2 + 3\cdot 3^x - 18 \geqq 0$
$t = 3^x$ とおくと $(t > 0)$

$$t^2 + 3t - 18 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-3)(t+6) \geqq 0$$

$t + 6 > 0$ であるから $t - 3 \geqq 0$ ゆえに $3^x \geqq 3^1$ よって $\boldsymbol{x \geqq 1}$

(8) 初項を a，公比を r とすると，第 3 項が 8，第 6 項が 1 であるから

$$ar^2 = 8, \quad ar^5 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad r^3 = \frac{ar^5}{ar^2} = \frac{1}{8}$$

$r = \dfrac{1}{2}$ であるから，これを上の第 1 式に代入すると

$$a\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 8 \quad \text{ゆえに} \quad a = 32$$

よって $\quad S = \dfrac{32\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\}}{1-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{64\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}$

(9) 7 問のうち正解数が 0 回または 1 回である確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^7 + {}_7\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{1}{128} + \frac{7}{128} = \frac{8}{128} = \frac{1}{16}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから $1 - \dfrac{1}{16} = \boldsymbol{\frac{15}{16}}$

(10) $a = 2\sqrt{7}$，$b = 4$，$A = 60^\circ$ を余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ に代入すると

$$28 = 16 + c^2 - 2\cdot 4c\cdot\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad c^2 - 4x - 12 = 0$$

したがって $(c+2)(c-6) = 0$ $c > 0$ に注意して $\boldsymbol{c = 6}$

よって，求める三角形 ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{6\sqrt{3}}$$

2. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ より

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$\boldsymbol{x = -1}$ で極大値 $\mathbf{10}$，$\boldsymbol{x = 3}$ で極小値 $\mathbf{-22}$

3. $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ より，$y' = 3x^2 - 6x + 2$ であるから，$x = 0$ のとき　$y' = 2$
求める接線は，原点 $(0,\ 0)$ を通り，傾き 2 の直線であるから　$\boldsymbol{y = 2x}$
この接線と関数 $y = x^3 - 3x^2 + 2x$ の交点の x 座標は

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2(x-3) = 0$$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，$2x - (x^3 - 2x^2 + 2x) = x^2(3-x) \geqq 0$ であるから

$$S = \int_0^3 x^2(3-x)\,dx = \int_0^3 (3x^2 - x^3)\,dx$$
$$= \left[\, x^3 - \frac{x^4}{4} \,\right]_0^3 = \boldsymbol{\frac{27}{4}}$$

2.2 平成 31 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

   (1) 次の計算をしなさい.

   $$(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

   (2) 次の計算をしなさい.

   $$\sqrt{xy} \div \frac{\sqrt[3]{x^2y}}{2} \times \sqrt[6]{xy^5}$$

   (3) 次の方程式を解きなさい.

   $$8x^3 - 27 = 0$$

   (4) A(2, 5)，B(−1, 3) を直径の両端とする円の方程式を求めよ.

   (5) $\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$ を小数で表すと，小数第何位に初めて 0 でない数字が表れるか，答えなさい．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする.

   (6) $0 \leqq x < 2\pi$ とする．不等式 $2\cos^2 x + \sin x - 1 \leqq 0$ を満たす x の範囲を求めなさい.

   (7) 方程式 $4^x + 2^{x+2} - 5 = 0$ を解きなさい.

   (8) 第 2 項が 31，第 5 項が 4 である等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n，および初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい.

   (9) 数直線上を動く点 P が原点の位置にある．さいころを投げて 3 の倍数の目が出たときには正の向きに 1 だけ進み，他の目が出たときには負の向きに 1 だけ進む．さいころを 6 回投げて投げたとき，P が原点にいる確率を求めなさい.

   (10) 三角形 ABC において，AB = 6，CA = 4，$A = 60°$ のとき，BC および $\sin B$ の値を求めなさい.

2. 関数 $y = x^3 - 2x^2 + 3$ の増減を調べ，極値を求めなさい.

3. 関数 $y = x^2 - 2x - 3 \cdots ①$ の点 $(2, -3)$ における接線の方程式を求めなさい．また，① と求めた接線および直線 $x = 3$ で囲まれた部分の面積 S を求めなさい.

解答例

1. (1)　$(\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})$
$=\{\sqrt{6}-(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}\{\sqrt{6}+(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}$
$=6-(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=\boldsymbol{1-2\sqrt{6}}$

(2)　$\sqrt{xy}\div\dfrac{\sqrt[3]{x^2y}}{2}\times\sqrt[6]{xy^5}=(xy)^{\frac{1}{2}}\div\dfrac{(x^2y)^{\frac{1}{3}}}{2}\times(xy^5)^{\frac{1}{6}}$
$=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\times\dfrac{2}{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}}\times x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}}=2y^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{2\sqrt[3]{y}}$

(3)　$8x^3-27=0$ より

$(2x-3)(4x^2+6x+9)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2},\ \dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{4}}$

(4)　2 点 A$(2,\ 5)$，B$(-1,\ 3)$ の中点，すなわち，円の中心は　$\left(\dfrac{1}{2},\ 4\right)$

$\mathrm{AB}=\sqrt{(-1-2)^2+(3-5)^2}=\sqrt{13}$　ゆえに　円の半径は$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2=\dfrac{13}{4}}$

(5)　$\log_{10}\dfrac{1}{5}=\log_{10}\dfrac{2}{10}=\log_{10}2-1=0.3010-1=-0.6990$

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}=10\log_{10}\dfrac{1}{5}=-20\times0.6990=-13.98$

ゆえに　　$-14<\log_{10}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}<-13$

したがって　$10^{-14}<\log\left(\dfrac{1}{5}\right)^{20}<10^{-13}$

よって，**小数第 14 位**に初めて 0 でない数字が表れる．

(6)　$2\cos^2x+\sin x-1\leqq0$ より

$2(1-\sin^2x)+\sin x-1\leqq0$　ゆえに　$(\sin x-1)(2\sin x+1)\geqq0$

$-1\leqq\sin x\leqq1$ に注意して　$-1\leqq\sin x\leqq-\dfrac{1}{2},\quad\sin x=1$

$0\leqq x<2\pi$ より　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi\leqq x\leqq\dfrac{11}{6}\pi}$

(7) 方程式 $4^x + 2^{x+2} - 5 = 0$ について，$t = 2^x$ とおくと $(t > 0)$

$$t^2 + 4t - 5 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-1)(t+5) = 0$$

$t > 0$ に注意して　$t = 1$　ゆえに　$2^x = 1$　すなわち　$\boldsymbol{x = 0}$

(8) 初項を a，公差を d とすると

$$a_2 = a + d = 31, \quad a_5 = a + 4d = 4 \quad \text{ゆえに} \quad a = 40,\ d = -9$$

よって　$S_n = \dfrac{1}{2}n\{2\cdot 40 + (n-1)\cdot(-9)\} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}n(89 - 9n)}$

(9) サイコロを 6 回投げて，3 の倍数の目が丁度 3 回である確率であるから

$${}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{6-3} = \boldsymbol{\frac{160}{729}}$$

(10) $b = 4$，$c = 6$，$A = 60^\circ$ であるから，余弦定理により

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = 4^2 + 6^2 - 2\cdot 4\cdot 6\cdot \frac{1}{2} = 28$$

$a > 0$ であるから　$\mathrm{BC} = a = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{4\cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{7}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}}$$

2. $y = x^3 - 2x^2 + 3$ より　$y' = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$\boldsymbol{x = 0}$ で極大値 $\boldsymbol{3}$，$\boldsymbol{x = \dfrac{4}{3}}$ で極小値 $\boldsymbol{\dfrac{49}{27}}$

3. $y = x^2 - 2x - 3$ より，$y' = 2x - 2$ であるから，$x = 2$ のとき　$y' = 2$

放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ 上の点 $(2, -3)$ における接線の方程式は

$$y + 3 = 2(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x - 7}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_2^3 \{(x^2 - 2x - 3) - (2x - 7)\}\, dx \\ &= \int_2^3 (x - 2)^2\, dx = \left[\frac{1}{3}(x - 2)^3 \right]_2^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

2.3 平成 30 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

   (1) 次の計算をしなさい.

   $$\frac{2}{2-\sqrt{3}}+(1-\sqrt{3})^2$$

   (2) 次の計算をしなさい.

   $$\sqrt[6]{24}\times\sqrt[3]{3}\div\sqrt{24}$$

   (3) $(x^2+3x-2)(x^2+3x-6)+4$ を因数分解しなさい.

   (4) i を虚数単位とする. $z=\dfrac{1+(x+2)i}{2+xi}$ が実数となるように実数 x の値を定め, そのときの z の値を答えなさい.

   (5) xy 座標平面上で, 方程式 $x^2+y^2+2x-6y-6=0$ が表す円の中心 A と半径 r を求めなさい. また, この円と x 軸との共有点の x 座標を求めなさい.

   (6) $0\leqq x<2\pi$ とする. 不等式 $2\sin^2 x+\sin x\leqq 0$ を満たす x の範囲を求めなさい.

   (7) 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=-2$ を満たす実数 x の値を求めなさい.

   (8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}2k(3k+1)$ を計算しなさい.

   (9) 8 人を次のように分ける場合の数を求めなさい.

      (a) 4 人, 3 人, 1 人の 3 グループ.

      (b) それぞれ 4 人の 2 グループ

   (10) 三角形 ABC において, AB $=6$, BC $=7$, CA $=5$ のとき, $\cos A$ の値, および, $\cos(2A)$ の値を求めなさい.

2. 関数 $y=2x^3+3(1-a)x^2-6ax+2$ (a は定数) が $x=1$ で極値をもつように a の値を定めなさい. また, $x=1$ で極大と極小のどちらになるかを答えなさい.

3. 定積分 $\displaystyle\int_0^3|x(x-2)|\,dx$ の値を計算しなさい.

解答例

1. (1)　$\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}+(1-\sqrt{3})^2=\dfrac{2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}+4-2\sqrt{3}=\boldsymbol{8}$

   (2)　$\sqrt[6]{24}\times\sqrt[3]{3}\div\sqrt{24}=24^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{3}}\div24^{\frac{1}{2}}=24^{-\frac{1}{3}}\times3^{\frac{1}{3}}=\left(\dfrac{3}{24}\right)^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

   (3)　$A=x^2+3x$ とおくと

   $$(\text{与式})=(A-2)(A-6)+4=A^2-8A+16=(A-4)^2$$
   $$=(x^2-3x-4)^2=\boldsymbol{(x+1)^2(x-4)^2}$$

   (4)　$z=\dfrac{1+(x+2)i}{2+xi}=\dfrac{\{1+(x+2)i\}(2-xi)}{(2+xi)(x-xi)}=\dfrac{x^2+2x+2+(x+4)i}{4+x^2}$

   z は実数であるから　$x+4=0$　ゆえに　$\boldsymbol{x=-4}$

   このとき　　$z=\dfrac{(-4)^2+2\cdot(-4)+2}{4+(-4)^2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

   (5)　$x^2+y^2+2x-6y-6=0$ より　$(x+1)^2+(y-3)^2=16$

   よって，中心 $\mathrm{A}\boldsymbol{(-1,\ 3)}$，半径 r が $\boldsymbol{4}$ の円.

   (6)　与えられた不等式から　$\sin x(2\sin x+1)\leqq0$　ゆえに　$-\dfrac{1}{2}\leqq\sin x\leqq0$

   $0\leqq x<2\pi$ より　　$\boldsymbol{\pi\leqq x\leqq\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi\leqq x<2\pi}$

   (7)　　$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=-2\quad\cdots(*)$

   真数は正であるから

   $$x+1>0\ \text{かつ}\ x-2>0\quad\text{すなわち}\quad x>2\quad\cdots①$$

   $(*)$ より　$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

   したがって　$(x+1)(x-2)=4$　ゆえに　$x^2-x-6=0$

   ① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x=3}$

   (8)　$2k(3k+1)=6k^2+2k$ より

   $$\sum_{k=1}^{n-1}2k(3k+1)=6\sum_{k=1}^{n-1}k^2+2\sum_{k=1}^{n-1}k$$
   $$=6\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$
   $$=n(n-1)(2n-1)+n(n-1)$$
   $$=n(n-1)\{(2n-1)+1\}=\boldsymbol{2n^2(n-1)}$$

(9) (a) ${}_8\mathrm{C}_4 \cdot {}_4\mathrm{C}_3 = 70 \cdot 4 = \mathbf{280}$ (通り)

(b) 8 人を A 組 4 人と B 組 4 人の分け方は

$${}_8\mathrm{C}_4 = 70 \text{ (通り)}$$

A，B2 つの組の区別をなくすとよいから

$$\frac{70}{2!} = \mathbf{35} \text{ (通り)}$$

(10) $a = 7$，$b = 5$，$c = 6$ であるから，余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 6^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{5}$$

2. $f(x) = 2x^3 + 3(1-a)x^2 - 6ax + 2$ とおくと

$$f'(x) = 6x^2 + 6(1-a)x - 6a$$

$f'(1) = 0$ は，(x) が $x = 1$ で極値をとるための必要条件であるから

$$6 \cdot 1^2 + 6(1-a) \cdot 1 - 6a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = 1$$

$a = 1$ のとき，$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$ であるから

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$x = 1$ で**極大**となる．

3. $|x(x-2)| = \begin{cases} x(x-2) & (x \leqq 0,\ 2 \leqq x) \\ -x(x-2) & (0 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^3 |x(x-2)|\,dx &= -\int_0^2 x(x-2)\,dx + \int_2^3 x(x-2)\,dx \\ &= \frac{1}{6}(2-0)^3 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \mathbf{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

2.4　平成 29 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

   (1) 次の計算をしなさい.

   $$\frac{\sqrt{(-6)^2}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{54}$$

   (2) 次の式を展開しなさい.

   $$(a+b-c-5)(a-b-c+5)$$

   (3) 次の式を因数分解しなさい.

   $$a^3 - 8b^3$$

   (4) i を虚数単位とする．2 つの複素数 $(x^2+y)+xi$ と $5+(y-3)i$ とが一致するように実数 x，y の値を定めなさい.

   (5) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，関数 $y = -\cos^2 x + \sin x + 1$ の最大値・最小値，および，それらを与える x の値を求めなさい.

   (6) 次の方程式を満たす実数 x の値を求めなさい.

   $$9^x - 5 \cdot 3^{x+1} + 54 = 0$$

   (7) $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．8^{30} は何桁の整数であるかを答えなさい.

   (8) 第 3 項が 18，第 5 項が 162 となるような等比数列の第 n 項 a_n を求めなさい.

   (9) 10 本のうち 4 本が当たりのくじがある．一度引いたくじは戻さないものとして，A，B の 2 人が，A，B の順にくじを引くとする.

   (a) 2 人とも当たりくじを引く確率を求めなさい.

   (b) B が当たりを引く確率を求めなさい.

   (10) 三角形 ABC において，AB $= 2$，BC $= 5$，$B = 60^\circ$ のとき，辺 CA の長さを求めなさい．また，$\sin C$ の値を求めなさい.

2. xy 座標平面上で．点 $(1, -3)$ から放物線 $y = x^2$ に引いた接線の方程式を求めなさい.

3. xy 座標平面上の曲線 $y = x^3 - x^2 \cdots$ ① と $y = 2x \cdots$ ② の共有点の座標を求めなさい．また，① と ② とで囲まれる部分の面積 S を求めなさい.

解答例

1. (1) $\dfrac{\sqrt{(-6)^2}}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{54} = \dfrac{6}{\sqrt[3]{4}} - \sqrt[3]{27}\sqrt[3]{2} = \dfrac{6\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} - 3\sqrt[3]{2} = \boldsymbol{0}$

   (2) $(a+b-c-5)(a-b-c+5) = \{(a-c)+(b-5)\}\{(a-c)-(b-5)\}$
   $= (a-c)^2 - (b-5)^2$
   $= \boldsymbol{a^2 - 2ac + c^2 - b^2 + 10b - 25}$

   (3) $a^3 - 8b^3 = a^3 - (2b)^3 = (a-2b)\{a^2 + a\cdot 2b + (2b)^2\}$
   $= \boldsymbol{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)}$

   (4) $(x^2+y) + xi = 5 + (y-3)i$ より ($x,\ y$ は実数)

   $$x^2 + y = 5, \quad x = y - 3$$

   上の 2 式から，y を消去して

   $$x^2 + x - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-1) = 0$$

   これを解いて　$x = -2,\ 1$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (-2,\ 1),\ (1,\ 4)}$

   (5) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$t = \sin x$ とおくと　$-1 \leqq t \leqq 1$

   $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ であるから

   $$\begin{aligned} y &= -(1-t^2) + t + 1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1) \\ &= t^2 + t \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   よって　$t = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = -\dfrac{\pi}{6}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$

   $t = 1$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{2}$

   (6) $9^x = (3^x)^2$，$3^{x+1} = 3\cdot 3^x$ であるから，与えられた方程式は

   $$(3^x)^2 - 15\cdot 3^x + 54 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (3^x - 9)(3^x - 6) = 0$$

   よって，解は　$\boldsymbol{x = 2,\ \log_3 6}$

(7) $\log_{10} 8^{30} = \log_{10} 2^{90} = 90 \log_{10} 2 = 27.090$

ゆえに　$27 < \log_{10} 8^{30} < 28$　すなわち　$10^{27} < 8^{30} < 10^{28}$

よって　8^{30} は **28 桁の整数**

(8) 初項を a，公比を r とすると　$ar^2 = 18$，$ar^4 = 162$　$\cdots (*)$

$(*)$ から a を消去すると　$r^2 = 9$　ゆえに　$r = \pm 3$

これを $(*)$ に代入して　　$a = 2$

よって　$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot 3^{n-1}}$　または　$\boldsymbol{a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}}$

(9) (a) $\dfrac{4}{10} \times \dfrac{3}{9} = \boldsymbol{\dfrac{2}{15}}$

(b) A と B の当たる確率は等しいから　$\dfrac{4}{10} = \boldsymbol{\dfrac{2}{5}}$

(10) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ &= 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cos 60^\circ \\ &= 4 + 25 - 10 = 19 \end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{CA} = b = \boldsymbol{\sqrt{19}}$

正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ により

$$\frac{\sqrt{19}}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sin C} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\sin C = \sqrt{\frac{3}{19}}}$$

2. $y = x^2$ を微分すると　$y' = 2x$

放物線 $y = x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2$$

これが点 $(1, -3)$ を通るから

$$-3 = 2a \cdot 1 - a^2 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)(a-3) = 0$$

これを解いて　$a = -1,\ 3$　よって　$\boldsymbol{y = -2x - 1,\ \ y = 6x - 9}$

3. $y = x^3 - x^2 \cdots ①$，$y = 2x \cdots ②$

$f(x) = x^3 - x^2$，$g(x) = 2x$ とおくと

$$f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

$-1 \leqq x \leqq 0$ のとき　$f(x) \geqq g(x)$，　$0 \leqq x \leqq 2$ のとき　$f(x) \leqq g(x)$

$f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

とおくと，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} \{f(x) - g(x)\}dx - \int_{0}^{2} \{f(x) - g(x)\}dx \\ &= \Big[\ F(x)\ \Big]_{-1}^{0} - \Big[\ F(x)\ \Big]_{0}^{2} \\ &= 2F(0) - F(-1) - F(2) \\ &= 2{\cdot}0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right) - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) = \boldsymbol{\frac{37}{12}} \end{aligned}$$

2.5　平成 28 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

   (1) 次の計算をしなさい．ただし i は虚数単位である.

   $$(3-2i)^2+\frac{1}{i(3-i)}$$

   (2) 次の式を因数分解しなさい

   $$x^2+9z^2+xy-3yz-6zx$$

   (3) 次の計算をしなさい.

   $$\sqrt[3]{24}\times\frac{1}{\sqrt{12}}\times 2^{\frac{1}{6}\log_2 3}$$

   (4) 2 次関数 $y=-2x^2-8x+1$ のグラフの頂点の座標を求めなさい．また，x 軸との共有点の x 座標を答えなさい.

   (5) xy 座標平面上の 2 円 $x^2+y^2=1\cdots$①，$(x-2)^2+(y+1)^2=8\cdots$② の共有点の座標を求めなさい.

   (6) 次の不等式をみたす実数 θ の範囲を求めなさい．ただし，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする.

   $$\cos(2\theta)+\cos\theta+1>0$$

   (7) 次の不等式をみたす実数 x の範囲を求めなさい.

   $$\log_2(x-3)+\log_2(x-1)\leqq 3$$

   (8) 初項が -2，第 20 項が -59 となるような等差数列の第 n 項 a_n および初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい.

   (9) 6 個の数字 0，1，2，3，4，5 の中の異なる 4 個の数字を用いてできる 4 桁の偶数は何個あるか答えなさい.

   (10) 三角形 ABC において，AB $=2$，AC $=2\sqrt{3}$，$C=30^\circ$ のとき，角 A，角 B の大きさと辺 BC の長さを求めなさい．ただし，$B>90^\circ$ とする.

2. xy 平面上の曲線 $y=f(x)=x^3-3x^2-24x$ の増減表をかき，極大値・極小値を求めなさい．(グラフを描く必要はありません．)

3. xy 座標平面上に曲線 $y=x^2(x-2)$ の概形を描きなさい．(x 軸との交点の x 座標を記入すること．極値を求める必要はありません．) また，この曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めなさい.

解答例

1. (1) $(3-2i)^2 = 9-12i+4i^2 = 5-12i$, $\quad \dfrac{1}{i(3-i)} = \dfrac{-i(3+i)}{-i^2(3+i)(3-i)} = \dfrac{1-3i}{10}$

よって $\quad (3-2i)^2 + \dfrac{1}{i(3-i)} = \boldsymbol{\dfrac{51}{10} - \dfrac{123}{10}i}$

(2) (最も次数の低い文字 y に着目)

$$\begin{aligned} x^2+9z^2+xy-3yz-6zx &= (x-3z)^2 + y(x-3z) \\ &= (x-3z)\{(x-3z)+y\} \\ &= \boldsymbol{(x-3z)(x+y-3z)} \end{aligned}$$

(3) $\sqrt[3]{24} \times \dfrac{1}{\sqrt{12}} \times 2^{\frac{1}{6}\log_2 3} = 2\sqrt[3]{3} \times \dfrac{1}{2\sqrt{3}} \times 2^{\log_2 3^{\frac{1}{6}}}$

$$= \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}} \times 3^{\frac{1}{6}} = \frac{3^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{6}} = \boldsymbol{1}$$

(4) $y = -2x^2 - 8x + 1 = -2(x+2)^2 + 9$ $\quad$ ゆえに $\quad$ 頂点 $\boldsymbol{(-2,\ 9)}$

x 軸との共有点の x 座標は，$y = 0$ を代入して $\quad 2x^2 + 8x - 1 = 0$

これを解いて $\quad x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 2\cdot(-1)}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{-4 \pm 3\sqrt{2}}{2}}$

(5) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8 \cdots$ ② より $\quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 3 = 0$

上式に $x^2 + y^2 = 1 \cdots$ ① を代入すると

$$1 - 4x + 2y - 3 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad y = 2x + 1 \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入すると

$$x^2 + (2x+1)^2 = 1 \quad \text{整理すると} \quad x(5x+4) = 0$$

ゆえに $x = 0, -\dfrac{4}{5}$ を ③ に代入して $\quad \boldsymbol{(0,\ 1)},\ \left(\boldsymbol{-\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}}\right)$

(6) $\cos 2\theta = 2\cos^2 - 1$ であるから，与えられた不等式は

$$2\cos^2\theta + \cos\theta > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta(2\cos\theta + 1) > 0$$

したがって $\qquad \cos\theta < -\dfrac{1}{2},\ 0 < \cos\theta$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ であるから

$$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta < 90^\circ,\ 120^\circ < \theta < 240^\circ,\ 270^\circ < \theta < 360^\circ}$$

(7)　　$\log_2(x-3)+\log_2(x-1) \leqq 3$

真数は正であるから　$x-3>0$，$x-1>0$　すなわち　$x>3$　$\cdots$①

与えられた不等式を変形すると　$\log_2(x-3)(x-1) \leqq \log_2 8$

ゆえに　$(x-3)(x-1) \leqq 8$　整理すると　$(x+1)(x-5) \leqq 0$

① に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{3 < x \leqq 5}$

(8) 初項が -2，第 20 項が -59 となる等差数列の公差を d とすると

$$-2+19d=-59 \quad \text{これを解いて} \quad d=-3$$

よって，一般項 a_n は

$$a_n=-2+(n-1)\cdot(-3)=\boldsymbol{-3n+1}$$

また，S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n\{2\cdot(-2)+(n-1)\cdot(-3)\}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}n(3n+1)}$$

(9) 一の位が 0 のとき　${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$ (個)

一の位が 2 または 4 のとき　$2\times4\times{}_4\mathrm{P}_2=2\times4\times12=96$ (個)

よって，求める個数は　　$60+96=\boldsymbol{156}$ (個)

(10) $b=2\sqrt{3}$，$c=2$，$C=30^\circ$ を正弦定理に適用すると

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B}=\frac{2}{\sin 30^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$B>90^\circ$ より　$\boldsymbol{B=120^\circ}$

また　$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(120^\circ+30^\circ)=\boldsymbol{30^\circ}$

$A=C$ であるから　　$\mathrm{BC}=\mathrm{AB}=\boldsymbol{2}$

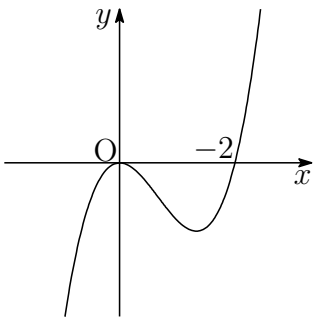
2. $f(x)=x^3-3x^2-24x$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-6x-24=3(x+2)(x-4)$$

したがって

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 28	↘	極小 -80	↗

3. $y = x^2(x-2)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は $x = 0,\ 2$



x^3 の係数が正であるから，この曲線の概形は，右の図のようになる．

よって，求める面積 S は

$$S = -\int_0^2 x^2(x-2)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

2.6　平成 27 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ．

(1) 次の計算をせよ．

$$(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i)^3+\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i}$$

(2) 次の式を因数分解せよ．

$$x^4-16y^4$$

(3) 次の計算をしなさい．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

$$\sqrt[4]{ab^6}\times\sqrt{ab^2}\div\sqrt[6]{(ab^3)^5}$$

(4) $x=1$ が方程式 $x^2-mx+m^2-2m-11=0$ の解になるように m の値を定めなさい．また，そのときの残りの解も求めなさい．

(5) xy 座標平面上で，中心が直線 $y=x$ 上にあり，x 軸に接し，点 $(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めなさい．

(6) 次の不等式をみたす実数 x の範囲を求めなさい．

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x)\geqq -2$$

(7) 関数 $y=(2^x)^2-2^{x+1}+2$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値・最小値を求めなさい．

(8) 初項が 64，第 10 項が 37 となるような等差数列の第 n 項 a_n を求めなさい．また，第何項が初めて負の値となるのか答えなさい．

(9) 赤球が 4 個，白球が 3 個，青球が 2 個入った袋から 2 個の球を取り出す時，それらが同じ色となる確率を求めなさい．

(10) 三角形 ABC において，$\mathrm{AC}=6$，$\mathrm{BC}=5$，$A=30^\circ$ のとき，$\sin B$ と $\cos B$ の値をそれぞれ求めなさい．ただし，$B>90^\circ$ とする．

2. xy 平面上の曲線 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ が，点 $(-1,\ 3)$ で接線 $y=2x+5$ をもち，$x=1$ で極値をとるように，a，b，c の値を求めなさい．

3. xy 座標平面上に曲線 $y=x(x-2)(x-4)$ の概形を描きなさい．(x 軸との交点の x 座標を記入すること．極値を求める必要はありません．) また，この曲線と x 軸とで囲まれる部分の面積 S を求めなさい．

解答例

1. (1) $(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i)^3 = (\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2\sqrt{2}\,i + 3\cdot\sqrt{3}(\sqrt{2}\,i)^2 - (\sqrt{2}\,i)^3$
$= 3\sqrt{3} - 9\sqrt{2}i - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{2}\,i$
$= -3\sqrt{3} - 7\sqrt{2}\,i$

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i)}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}\,i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i)} = \sqrt{3}+\sqrt{2}\,i$$

よって $\quad (\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i)^3 + \dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}\,i} = \boldsymbol{-2\sqrt{3} - 6\sqrt{2}\,i}$

(2) $x^4 - 16y^4 = (x^2+4y^2)(x^2-4y^2)$
$= \boldsymbol{(x^2+4y^2)(x+2y)(x-2y)}$

(3) $\sqrt[4]{ab^6} \times \sqrt{ab^2} \div \sqrt[6]{(ab^3)^5} = (ab^6)^{\frac{1}{4}} \times (ab^2)^{\frac{1}{2}} \div (a^5b^{15})^{\frac{1}{6}}$
$= a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b \div a^{\frac{5}{6}}b^{\frac{5}{2}}$
$= a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{5}{6}}b^{\frac{3}{2}+1-\frac{5}{2}} = a^{-\frac{1}{12}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt[12]{a}}}$

(4) $x=1$ は，方程式の解であるから

$$1^2 - m\cdot 1 + m^2 - 2m - 11 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad m^2 - 3m - 10 = 0$$

これを解いて $\quad m = -2,\ 5$
残りの解を α とすると，解と係数の関係により

$$1 + \alpha = m \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = m - 1$$

したがって，$m=-2$ のとき $\alpha = -3$，　$m=5$ のとき $\alpha = 4$

よって　$\boldsymbol{m=-2}$ のとき，残りの解 $\boldsymbol{-3}$
$\boldsymbol{m=5}$ のとき，残りの解 $\boldsymbol{4}$

(5) 円の中心が直線 $y=x$ 上にあり，x 軸に接するから

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

とおく．これが点 $(1,\ 2)$ を通るから $(r>0)$

$$(1-r)^2 + (2-r)^2 = r^2 \quad \text{ゆえに} \quad r^2 - 6r + 5 = 0$$

これを解いて $\quad r = 1,\ 5$ $\quad$ よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1,\ (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25}$$

(6) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2)+\log_{\frac{1}{2}}(3-x) \geqq -2$

真数は正であるから

$$x+2>0, \quad 3-x>0 \quad \text{すなわち} \quad -2<x<3 \quad \cdots ①$$

与えられた方程式から　　$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)(3-x) \geqq \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$$(x+2)(3-x) \leqq 4 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2) \geqq 0$$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{-2<x \leqq -1,\ 2 \leqq x<3}$

(7) $t=2^x$ とおくと，$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき　$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2$

$2^{x+1}=2\cdot 2^x=2t$ より　$y=t^2-2t+2=(t-1)^2+1$

よって　$t=2$　すなわち　$\boldsymbol{x=1}$ のとき　最大値 $\mathbf{2}$

　　$t=1$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ のとき　最小値 $\mathbf{1}$

(8) 初項が 64，第 10 項が 37 となる等差数列の公差を d とすると

$$64+9d=37 \quad \text{これを解いて} \quad d=-3$$

よって，一般項 a_n は

$$a_n=64+(n-1)\cdot(-3)=\boldsymbol{-3n+67}$$

$a_n<0$ とすると　$-3n+67<0$　すなわち　$n>\dfrac{67}{3}$

これを満たす最小の自然数 n は　$n=23$　よって　**第 23 項**

(9) $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\dfrac{6+3+1}{36}=\boldsymbol{\dfrac{5}{18}}$

(10) $a=5$，$b=6$，$A=30^\circ$ を正弦定理に適用すると

$$\frac{5}{\sin 30^\circ}=\frac{6}{\sin B} \quad \text{ゆえに} \quad \sin B=\frac{6\sin 30^\circ}{5}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

$B>90^\circ$ より，$\cos B<0$ であるから

$$\cos B=-\sqrt{1-\sin^2 B}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$

2. $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を微分すると，$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

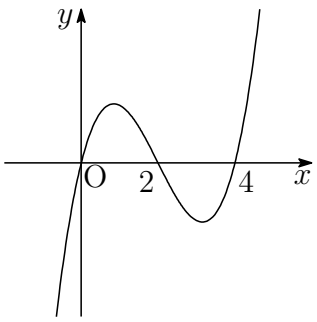
条件から，$f(-1) = 3$，$f'(-1) = 2$，$f'(1) = 0$ であるから

$$-1 + a - b + c = 3, \qquad 3 - 2a + b = 2, \qquad 3 + 2a + b = 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2},\ b = -2,\ c = \dfrac{5}{2}}$

3. $y = x(x-2)(x-4)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は　$x = 0,\ 2,\ 4$

x^3 の係数が正であるから，この曲線の概形は，右の図のようになる．



$x(x-2)(x-4) = x^3 - 6x^2 + 8x$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2$$

とおくと，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 x(x-2)(x-4)\,dx - \int_2^4 x(x-2)(x-4)\,dx \\ &= \Big[\, F(x) \,\Big]_0^2 - \Big[\, F(x) \,\Big]_2^4 \\ &= 2F(2) - F(0) - F(4) \end{aligned}$$

ここで　　$F(2) = 4$，$F(0) = 0$，$F(4) = 0$

よって　　$S = 2 \times 4 = \boldsymbol{8}$

2.7　平成 26 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

   (1) 次の分数の分母を有理化しなさい.

   $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$$

   (2) 次の式を因数分解しなさい.

   $$(x^2-x)^2-14x^2+14x+24$$

   (3) 次の式を簡単にしなさい．ただし，$a>0$，$b>0$ とする.

   $$\sqrt[4]{(a^3b)^3}\times\sqrt{a}\div\frac{\sqrt[4]{a^5b}}{\sqrt{ab}}$$

   (4) xy 座標平面上で，頂点が直線 $x=3$ 上にあり，点 $(2,\ 0)$，$(-1,\ 3)$ を通るようなグラフを表す 2 次関数の式を求めなさい.

   (5) xy 座標平面上の円 $x^2+y^2=5\cdots$① と直線 $y=2x+5k\cdots$② が 2 点で交わるような k の範囲を求めなさい.

   (6) 方程式 $4^x-5\cdot 2^{x+1}+24=0$ を満たす実数 x を求めなさい.

   (7) 不等式 $\sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta+1>0$ を満たす θ の範囲を求めなさい．ただし，$0\leqq\theta<2\pi$ とする.

   (8) 次の条件を満たす等比数列 $\{a_n\}$ の初項 a と公比 r を求めなさい．また，初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい．ただし，r は実数とする.

   $$a_2=6,\quad a_5=-48$$

   (9) 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=-3$ を満たす実数 x を求めなさい.

   (10) 三角形 ABC において，AB $=4$，BC $=7$，CA $=5$ のとき，$\cos A$ と $\tan A$ の値をそれぞれ求めなさい.

2. 関数 $y=x^3-x$ の接線で傾きが 2 のものを求めなさい.

3. xy 座標平面上で，関数 $y=x\cdots$① のグラフと関数 $y=x^2-2x-4\cdots$② のグラフで囲まれる部分を図示しなさい．(② のグラフの頂点の座標，および，① と ② のグラフの交点の座標を記入すること．) また，その面積 S を求めなさい.

解答例

1. (1) $$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$
$$= \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})\sqrt{6}}{2\sqrt{6}\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}}$$

(2) $x^2-x=A$ とおくと

$$(\text{与式}) = A^2-14A+24 = (A-2)(A-12)$$
$$= (x^2-x-2)(x^2-x-12)$$
$$= \boldsymbol{(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)}$$

(3) $$\sqrt[4]{(a^3b)^3}\times\sqrt{a}\div\frac{\sqrt[4]{a^5b}}{\sqrt{ab}} = (a^3b)^{\frac{3}{4}}\times a^{\frac{1}{2}}\times(ab)^{\frac{1}{2}}\times(a^5b)^{-\frac{1}{4}}$$
$$= a^{\frac{9}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{5}{4}}b^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}} = \boldsymbol{a^2b}$$

(4) 求める 2 次関数を $y=a(x-3)^2+q$ とする．2 点 $(2,\ 0)$，$(-1,\ 3)$ を通るので

$$\begin{cases} a(2-3)^2+q=0 \\ a(-1-3)^2+q=3 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} a+q=0 \\ 16a+q=3 \end{cases}$$

これを解いて　$a=\dfrac{1}{5}$，$q=-\dfrac{1}{5}$　よって　$\boldsymbol{y=\frac{1}{5}(x-3)^2-\frac{1}{5}}$

(5) 円 $x^2+y^2=5\cdots$① の半径を r，円 ① の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $2x-y+5k=0$ までの距離を d とすると

$$r=\sqrt{5},\quad d=\frac{|5k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}|k|$$

このとき，$d<r$ であるから

$$\sqrt{5}|k|<\sqrt{5}\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{-1<k<1}$$

(6) 与えられた方程式から　$(2^x)^2-10\cdot 2^x+24=0$
ゆえに　$(2^x-4)(2^x-6)=0$　よって　$\boldsymbol{x=2,\ \log_2 6}$

(7) $\sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta+1>$ より　$\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)-\sin\theta+1>0$
ゆえに　$\sin\theta(2\sin\theta-1)>0$　したがって　$\sin\theta<0,\ \dfrac{1}{2}<\sin\theta$

$0\leqq\theta<2\pi$ より，求める θ の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6}<\theta<\frac{5}{6}\pi,\ \pi<\theta<2\pi}$$

(8) $a_2 = 6$，$a_5 = -48$ より　$ar = 6 \cdots ①$，$ar^4 = -48 \cdots ②$

①，② から　$\dfrac{ar^4}{ar} = \dfrac{-48}{6}$　ゆえに　$r^3 = -8$　すなわち　$\boldsymbol{r = -2}$

これを ① に代入することにより　　$\boldsymbol{a = -3}$

このとき　$S_n = \dfrac{-3\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = \boldsymbol{-1 + (-2)^n}$

(9) 真数は正であるから

$$x > 0 \text{ かつ } x - 2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 2 \quad \cdots ①$$

与えられた方程式から　$\log_{\frac{1}{2}} x(x-2) = \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}$

ゆえに　$x(x-2) = 8$　すなわち　$(x+2)(x-4) = 0$

① に注意して　　$\boldsymbol{x = 4}$

(10) $a = 7$，$b = 5$，$c = 4$ であるから，これを余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 4^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \boldsymbol{-\frac{1}{5}}$$

これを $1 + \tan^2 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$ に代入すると

$$1 + \tan^2 A = (-5)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 A = 24$$

$\cos A < 0$ より，$\tan A < 0$ であるから　$\tan A = \boldsymbol{-2\sqrt{6}}$

2. $y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$

曲線上の接線の傾きが 2 である点の x 座標は

$$3x^2 - 1 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm 1$$

ゆえに，接点の座標は　　$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$

それぞれの接点における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = 2x - 2,\ \ y = 2x + 2}$$

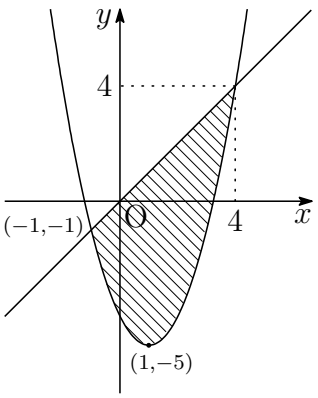
3. $y = x^2 - 2x - 4$ より

$$y = (x-1)^2 - 5$$

頂点の座標は $\mathbf{(1, -5)}$

$$\begin{cases} y = x & \cdots ① \\ y = x^2 - 2x - 4 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② を解いて
交点は $\mathbf{(-1, -1)}$, $\mathbf{(4,\ 4)}$



求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{4} \{x - (x^2 - 2x - 4)\} dx \\ &= -\int_{-1}^{4} (x+1)(x-4) dx \\ &= -\frac{-1}{6}\{4 - (-1)\}^3 = \mathbf{\frac{125}{6}} \end{aligned}$$

2.8　平成 25 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問いに答えなさい．(各 8 点)

(1) 次の計算をしなさい．

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

(2) 次の式を因数分解しなさい．

$$x^2+2xy+y^2+x+y-2$$

(3) 次の式を簡単にしなさい．

$$\frac{\sqrt[3]{8a^4}}{\sqrt{2a}}\times\sqrt[3]{4a}\div\sqrt[6]{2a}$$

(4) xy 座標平面上の放物線 $y=x^2+5x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線の方程式を求め，その頂点の座標を答えなさい．

(5) xy 座標平面上の円 $x^2+y^2=20\cdots$① と直線 $y=x+6\cdots$② との交点の座標を求めなさい．

(6) 次の連立不等式を満たす実数 x の範囲を求めなさい．

$$\begin{cases}\left(\dfrac{1}{7}\right)^x\leqq\dfrac{1}{49} & \cdots① \\ x^2-8x+15>0 & \cdots②\end{cases}$$

(7) 5^{10} は何桁の整数か答えなさい．($\log_{10}2=0.3010$ を利用してよい．)

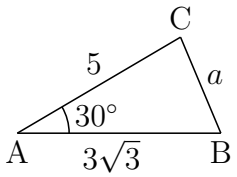
(8) 次の条件を満たす等差数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n，および，初項から第 n 項までの和 S_n を求めなさい．

$$a_2=1,\quad a_5=-8$$

(9) 次の方程式を満たす θ を求めなさい．ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

$$2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

(10) 図にある三角形 ABC において，辺 BC の長さ a の値を求めなさい．



2. 関数 $y = x^3 + 6x^2 - 15x - 25$ の増減表をかき，極大値・極小値を求めなさい．(グラフを描く必要はない．) (10 点)

3. xy 座標平面上で，関数 $y = -x^2$ のグラフと関数 $y = x^2 - 6x$ のグラフとで囲まれた部分を図示し，その面積 S を求めなさい．(10 点)

解答例

1. (1) $$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})+(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$
$$= \frac{2+2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}$$

(2) $$x^2+2xy+y^2+x+y-2 = (x+y)^2+(x+y)-2$$
$$= \{(x+y)+1\}\{(x+y)-2\}$$
$$= \boldsymbol{(x+y+1)(x+y-2)}$$

(3) $$\frac{\sqrt[3]{8a^4}}{\sqrt{2a}} \times \sqrt[3]{4a} \div \sqrt[6]{2a} = \frac{2a^{\frac{4}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}} \times 2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{6}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}}a^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{6}}a^{\frac{1}{6}}$$
$$= 2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}a^{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}$$
$$= \boldsymbol{2a}$$

(4) 放物線 $y = x^2 + 5x$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 4 だけ平行移動した放物線の方程式は

$$y - 4 = (x+2)^2 + 5(x+2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x^2 + 9x + 18}$$

上式から　$y = \left(x + \dfrac{9}{2}\right)^2 - \dfrac{9}{4}$　　頂点の座標は　　$\left(\boldsymbol{-\dfrac{9}{2}, -\dfrac{9}{4}}\right)$

(5) ② を ① に代入して

$$x^2 + (x+6)^2 = 20 \quad \text{整理すると} \quad x^2 + 6x + 8 = 0$$

これを解いて　　$x = -4, -2$

② より，交点の座標は　　$\boldsymbol{(-4,\ 2),\ (-2,\ 4)}$

(6) ① より　$\left(\dfrac{1}{7}\right)^x \leqq \left(\dfrac{1}{7}\right)^2$

底 $\frac{1}{7}$ は 1 より小さいから　　$x \geqq 2 \quad \cdots ①'$

② より　　$(x-3)(x-5) > 0$

これを解いて　　$x < 3,\ 5 < x \quad \cdots ②'$

①′ と ②′ の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{2 \leqq x < 3,\ 5 < x}$

(7)　　$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$

$\log_{10} 5^{10} = 10 \log_{10} 5 = 10 \times 0.6990 = 6.990$

したがって　$6 < \log_{10} 5^{10} < 7$

$\log_{10} 10^6 < \log_{10} 5^{10} < \log_{10} 10^7$

ゆえに　　$10^6 < 5^{10} < 10^7$

よって，5^{10} は **7 桁**の数である．

(8) 初項を a，交差を d とすると，$a_2 = 1$，$a_5 = -8$ より

$$a + d = 1, \quad a + 4d = -8$$

これを解いて　　$a = 4,\ d = -3$

よって　　$a_n = 4 + (n-1)\cdot(-3) = \boldsymbol{-3n + 7}$

$S_n = \dfrac{n}{2}\{2\cdot 4 + (n-1)\cdot(-3)\} = \boldsymbol{\dfrac{n}{2}(11 - 3n)}$

(9) 方程式を変形すると $2(1-\cos^2\theta)+\cos\theta-1=0$

$2\cos^2\theta-\cos\theta-1=0$

因数分解すると $(\cos\theta-1)(2\cos\theta+1)=0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから

$$\cos\theta = 1, -\frac{1}{2}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で解くと $\boldsymbol{\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi}$

(10) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} a^2 &= 5^2 + (3\sqrt{3})^2 - 2\cdot 5\cdot 3\sqrt{3}\cos 30^\circ \\ &= 25 + 27 - 30\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから $\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$

2. $y' = 3x^2+12x-15 = 3(x+5)(x-1)$

$y' = 0$ とすると $x = -5,\ 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-5	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 75	↘	極小 -33	↗

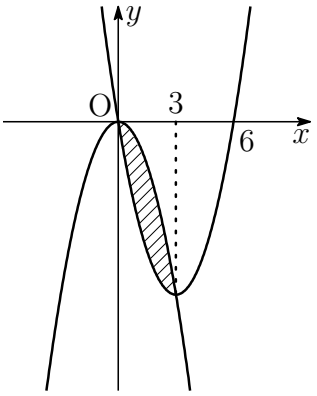
よって，**$x = -5$ のとき極大値 75，$x = 1$ のとき極小値 -33** をとる．

3. $y = -x^2$ と $y = x^2 - 6x$ のグラフの共有点の x 座標は

$-x^2 = x^2 - 6x$ これを解いて $x = 0,\ 3$

S は，図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{-x^2 - (x^2-6x)\}\,dx \\ &= -2\int_0^3 x(x-3)\,dx \\ &= -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(3-0)^3 = \mathbf{9} \end{aligned}$$



2.9　平成 24 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ．(各 8 点)

(1) 次の計算をしなさい．

$$(3+\sqrt{6}-\sqrt{3})(3-\sqrt{6}+\sqrt{3})$$

(2) 次の式を因数分解しなさい．

$$2xy+4x+y^2+3y+2$$

(3) 次の式を簡単にしなさい．

$$\sqrt[6]{x^3y}\times\sqrt[3]{xy}\div\frac{\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{xy^2}}$$

(4) 次の連立不等式を満たす x の範囲を求めなさい．

$$\begin{cases} x^2+4x<0 \\ x^2+5x+6\geqq 0 \end{cases}$$

(5) 方程式 $x^2+y^2-4x+2y=0$ は平面上のどのような図形をあらわすか求めなさい．

(6) 平面上の点 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$ と $\mathrm{B}(2,\ 3)$ の垂直二等分線の方程式を求めなさい．

(7) 次の計算をしなさい．

$$\log_2\sqrt{\frac{7}{48}}+\log_2 12-\frac{1}{2}\log_2 42$$

(8) $90^\circ<\theta<180^\circ$ で $\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい．

(9) $\cos 2x=-\sin x+1$ を満たす x を，$0\leqq x<2\pi$ の範囲で求めなさい．

(10) 次の式を簡単にしなさい．

$$\frac{x+2}{x^2+7x-8}-\frac{x}{2x^2-x-1}$$

2. $y=x^3-6x^2+9x$ の増減表をかき，極大値・極小値を求めなさい．(10 点)

3. $y=x^2+x-1$ のグラフと直線 $y=-x+2$ とで囲まれる部分の面積 S を求めなさい．(10 点)

解答例

1. (1) $(3+\sqrt{6}-\sqrt{3})(3-\sqrt{6}+\sqrt{3}) = \{3+(\sqrt{6}-\sqrt{3})\}\{3-(\sqrt{6}-\sqrt{3})\}$
$= 3^2-(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2$
$= 9-(6-2\sqrt{6}\sqrt{3}+3)$
$= \boldsymbol{6\sqrt{2}}$

(2) (次数の低い方の文字 x について整理する)

$$\begin{aligned} 2xy+4x+y^2+3y+2 &= 2x(y+2)+(y+1)(y+2) \\ &= (y+2)\{2x+(y+1)\} \\ &= \boldsymbol{(y+2)(2x+y+1)} \end{aligned}$$

(3) $\sqrt[6]{x^3y}\times\sqrt[3]{xy}\div\dfrac{\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{xy^2}} = x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}\times x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\div\dfrac{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}$
$= \dfrac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}}\times x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}\times x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}$
$= \dfrac{x^{\frac{7}{6}}y^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}} = \boldsymbol{xy}$

(4) 第 1 式から　$x(x+4)<0$　　これを解いて　$-4<x<0$　　$\cdots$①
第 2 式から　$(x+3)(x+2)\geqq 0$　これを解いて　$x\leqq -3,\ -2\leqq x$　$\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-4<x\leqq -3,\ -2\leqq x<0}$

(5) $x^2+y^2-4x+2y=0$ より

$$\begin{aligned} x^2-4x+4+y^2+2y+1 &= 4+1 \\ (x-2)^2+(y+1)^2 &= 5 \end{aligned}$$

よって，中心 $\boldsymbol{(2,-1)}$，半径 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ の円を表す.

(6) 線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{-3+2}{2},\ \frac{2+3}{2}\right) \quad \text{すなわち} \qquad \left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$$

直線 AB の傾きは　　$\dfrac{3-2}{2-(-3)}=\dfrac{1}{5}$

直線 AB に垂直な直線の傾きを m とすると

$$\frac{1}{5}m=-1 \quad \text{すなわち} \quad m=-5$$

よって，求める直線の方程式は

$$y-\frac{5}{2}=-5\left(x+\frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-5x}$$

(7) $\log_2\sqrt{\dfrac{7}{48}}+\log_2 12-\dfrac{1}{2}\log_2 42=\log_2\sqrt{\dfrac{7}{48}}+\log_2 12-\log_2\sqrt{42}$

$$=\log_2\left(\sqrt{\frac{7}{48}}\times 12\div\sqrt{42}\right)$$

$$=\log_2\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_2 2^{-1}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

(8) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ により

$$1+\tan^2\theta=\left(-\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta=\frac{5}{4}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より $\tan\theta<0$ であるから

$$\tan\theta=-\sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\tan\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}}$$

(9) 左辺を変形すると　　$1-2\sin^2 x=-\sin x+1$

整理すると　　$\sin x(2\sin x-1)=0$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　　$\sin x=0,\ \dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{x=0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \pi}$

(10) $\dfrac{x+2}{x^2+7x-8}-\dfrac{x}{2x^2-x-1}=\dfrac{x+2}{(x-1)(x+8)}-\dfrac{x}{(x-1)(2x+1)}$

$$=\frac{(x+2)(2x+1)-x(x+8)}{(x-1)(x+8)(2x+1)}$$

$$=\frac{x^2-3x+2}{(x-1)(x+8)(2x+1)}$$

$$=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+8)(2x+1)}=\boldsymbol{\frac{x-2}{(x+8)(2x+1)}}$$

2. $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると　$x = 1,\ 3$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

よって，$\boldsymbol{x = 1}$ **のとき極大値 4，**$\boldsymbol{x = 3}$ **のとき極小値 0** をとる．

3. 2 つの放物線の共有点の x 座標は

$$x^2 + x - 1 = -x + 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = -3,\ 1$$

$-3 \leqq x \leqq 1$ において，$-x + 2 \geqq x^2 + x - 1$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{1} \{(-x+2) - (x^2 + x - 1)\}\, dx \\ &= -\int_{-3}^{1} (x+3)(x-1)\, dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{1 - (-3)\}^3 = \boldsymbol{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

2.10　平成 23 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ.

(1) 次の計算をせよ.

$$(\sqrt{7}+\sqrt{3}-2)(\sqrt{7}-\sqrt{3}+2)$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$9x^2-30ax-24a^2$$

(3) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b}}\times\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}}\times\frac{1}{\sqrt[6]{a^2b^{-1}}}$$

(4) 次の連立不等式を満たす x の値の範囲を求めよ.

$$\begin{cases} x^2+x-2<0 & \cdots ① \\ x^2+x\geqq 0 & \cdots ② \end{cases}$$

(5) 不等式 $x^2+y^2-2x-4y+1<0$ の表す領域を図示せよ.

(6) 4 点 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,-2)$，$\mathrm{C}(4,\ 3)$，$\mathrm{D}(x,\ y)$ を頂点とする平行四辺形 ABCD の点 $\mathrm{D}(x,\ y)$ の座標を求めよ.

(7) 2^{100} は何桁か.

(8) 次の値を求めよ.

$$\sum_{k=0}^{n-1}\{(k+1)^3-k^3\}$$

(9) $\cos 2x=-3\cos x+1$ を満たす x を $(0\leq x<2\pi)$ の範囲で求めよ.

(10) 三角形 ABC において，辺 $b=2$，$c=3$，角 $A=60^\circ$ のとき辺 a を求めよ.

2. $y=x^3-3x^2-9x-2$ の増減表をかき極大値，極小値を求めよ.

3. 定積分 $\displaystyle\int_0^2|x^2-1|dx$ の値を求めよ.

解答例

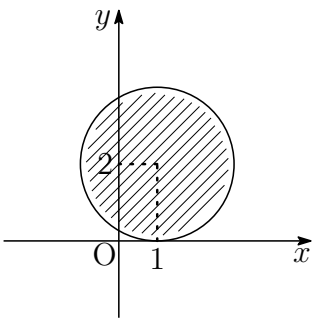
1. (1) $(\sqrt{7}+\sqrt{3}-2)(\sqrt{7}-\sqrt{3}+2) = \{\sqrt{7}+(\sqrt{3}-2)\}\{\sqrt{7}-(\sqrt{3}-2)\}$
$= (\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3}-2)^2$
$= 7 - (3 - 4\sqrt{3} + 4)$
$= \boldsymbol{4\sqrt{3}}$

(2) $9x^2 - 30ax - 24a^2 = 3(3x^2 - 10ax - 8a^2)$
$= \boldsymbol{3(x-4a)(3x+2a)}$

(3) $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{b}} \times \dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}} \times \dfrac{1}{\sqrt[6]{a^2b^{-1}}} = \dfrac{a^{\frac{4}{3}}}{b^{\frac{1}{2}}} \times \dfrac{b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} \times \dfrac{1}{a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{6}}}$
$= \dfrac{a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{ab^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{1}{3}} = \boldsymbol{\sqrt[3]{a}}$

(4) 第 1 式から $(x+2)(x-1) < 0$ これを解いて $-2 < x < 1$ $\cdots$①
第 2 式から $x(x+1) \geqq 0$ これを解いて $x \leqq -1,\ 0 \leqq x$ $\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて $\boldsymbol{-2 < x \leqq -1,\ 0 \leqq x < 1}$

(5) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 < 0$ より
$x^2 - 2x + y^2 - 4y < -1$
$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 < -1 + 1 + 4$
ゆえに $(x-1)^2 + (y-2)^2 < 4$
よって，不等式の現す領域は，中心が $(1,\ 2)$ で半径 2 の円の内部である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



(6) 平行四辺形の対角線は互いに他を二等分するから，線分 AC の中点と線分 BD の中点は一致する．
ゆえに $\dfrac{-3+4}{2} = \dfrac{2+x}{2}$, $\dfrac{2+3}{2} = \dfrac{-2+y}{2}$
これを解いて $x = -1$，$y = 7$ よって $\boldsymbol{D(-1,\ 7)}$

(7) $\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$
したがって $30 < \log_{10} 2^{100} < 31$
$\log_{10} 10^{30} < \log_{10} 2^{100} < \log_{10} 10^{31}$
ゆえに $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$
よって，2^{100} は **31 桁**の数である．

(8) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} = \{(n-1)+1\}^3 - 0^3 = \boldsymbol{n^3}$

(9)　　$\cos 2x = -3\cos x + 1 \quad (0 \leq x < 2\pi)$

左辺を変形すると　$2\cos^2 x - 1 = -3\cos x + 1$

$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

ゆえに　　$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$

$0 \leq x < 2\pi$ のとき　$\cos x = \dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(10) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 2^2 + 3^2 - 2\cdot 2\cdot 3\cos 60^\circ \\ &= 7 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$

2. $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 3$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -29	↗

よって，$\boldsymbol{x = -1}$ **のとき極大値 3，**$\boldsymbol{x = 3}$ **のとき極小値** $\boldsymbol{-29}$ **をとる．**

3.　　$0 \leqq x \leqq 1$ のとき　$|x^2 - 1| = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき　$|x^2 - 1| = x^2 - 1$

したがって

$$\begin{aligned} \int_0^2 |x^2 - 1|dx &= \int_0^1 (-x^2 + 1)dx + \int_1^2 (x^2 - 1)dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \boldsymbol{2} \end{aligned}$$

2.11 平成 22 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ.

(1) 次の計算をせよ.

$$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2^3}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2^3}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$9b-9-3ab+a^2$$

(3) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+2x}$$

(4) 次の連立不等式を満たす x の範囲を求めよ.

$$\begin{cases} x^2<25 & \cdots ① \\ x^2-x-12>0 & \cdots ② \end{cases}$$

(5) $y=x^2+1$ のグラフに，原点から引いた接線の方程式を求めよ.

(6) 原点 O からの距離と点 A$(3,\ 0)$ からの距離が $1:2$ である点 P の描く図形は何かを求めよ.

(7) $\log_2 x+\log_2(x-7)=3$ を満たす x を求めよ.

(8) 次の値を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$$

(9) $2\sin(2x+30^\circ)=\sqrt{3}$ を満たす x を $(0^\circ<x<90^\circ)$ の範囲で求めよ.

(10) $\cos\theta=-0.8$ のとき $\cos 2\theta$ の値を求めよ.

2. $\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形にせよ．ただし $(r>0,\ -80^\circ<\alpha<180^\circ)$.

3. $y=x^3-6x^2+9x-1$ の増減表をかき，極大値，極小値を求めよ.

4. グラフ $y=x^2-4x+2$ と $y=-x^2+2$ が囲む部分の面積 S を求めよ.

解答例

1. (1)　$(\sqrt{2}+\sqrt[4]{2^3}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{2^3}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})$

$=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt[4]{2^3}\sqrt[4]{3}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt[4]{2^3}\sqrt[4]{3}\}$

$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt[4]{2^3}\sqrt[4]{3})^2$

$=2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3-2\sqrt{2}\sqrt{3}$

$=\mathbf{5}$

(2) (b について整理する)

$$\begin{aligned}9b-9-3ab+a^2 &= a^2-9-3b(a-3)\\ &= (a+3)(a-3)-3b(a-3)\\ &= (a-3)\{(a+3)-3b\}\\ &= \boldsymbol{(a-3)(a-3b+3)}\end{aligned}$$

(3)　$\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x}$

$=\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{x(x+2)}$

$=\dfrac{(x+2)+x+(x+1)}{x(x+1)(x+2)}$

$=\dfrac{3(x+1)}{x(x+1)(x+2)}=\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x(x+2)}}$

(4) 第 1 式から　$(x+5)(x-5)<0$　これを解いて　$-5<x<5$　　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+3)(x-4)>0$　これを解いて　$x<-3,\ 4<x$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-5<x<-3,\ 4<x<5}$

(5) $y=x^2+1$ を微分すると　$y'=2x$

接点の座標を $(a,\ a^2+1)$ とすると，接線の傾きは $2a$ となるから，その方程式は

$$y-(a^2+1)=2a(x-a)$$

すなわち　$y=2ax-a^2+1$　$\cdots$①

この直線が原点 O を通るから

$$0=-a^2+1\quad\text{これを解いて}\quad a=\pm1$$

したがって，接線の方程式は，① より

$a=1$ のとき　　$\boldsymbol{y=2x}$

$a=-1$ のとき　　$\boldsymbol{y=-2x}$

(6) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．条件 $\mathrm{OP} : \mathrm{AP} = 1 : 2$ から $4\mathrm{OP}^2 = \mathrm{AP}^2$

$$\mathrm{OP}^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{AP}^2 = (x-3)^2 + y^2$$

を代入すると $4\{x^2 + y^2\} = (x-3)^2 + y^2$
整理すると $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$
よって $(x+1)^2 + y^2 = 2^2$
したがって P は**中心が $(-1,\ 0)$ で半径 2 の円**である．

(7) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x - 7 > 0$
すなわち $x > 7 \quad \cdots ①$
方程式を変形すると $\log_2 x(x-7) = \log_2 2^3$
ゆえに $x(x-7) = 2^3$
整理すると $x^2 - 7x - 8 = 0$
したがって $(x+1)(x-8) = 0$
① に注意して $\boldsymbol{x = 8}$

(8)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) &= \sum_{k=1}^{n}(k^2 - k) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1) - 3\} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)}\end{aligned}$$

(9) 方程式は $\sin(2x + 30^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$
$0^\circ < x < 90^\circ$ より $30^\circ < 2x + 30^\circ < 210^\circ$
したがって $2x + 30^\circ = 60^\circ,\ 120^\circ$
よって $\boldsymbol{x = 15^\circ,\ 45^\circ}$

(10) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2(-0.8)^2 - 1 = \mathbf{0.28}$

2. $r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$ より $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2}$
$-180^\circ < \alpha < 180^\circ$ でこれを解くと $\alpha = 30^\circ$
よって $\boldsymbol{2\sin(\theta + 30^\circ)}$

3. $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

   $y' = 0$ とすると　$x = 1,\ 3$

   したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

   よって，**$x = 1$ のとき極大値 3，$x = 3$ のとき極小値 -1 をとる．**

4. 2 つの放物線の共有点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0,\ 2$$

   $0 \leqq x \leqq 2$ において，$-x^2 + 2 \geqq x^2 - 4x + 2$

   よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-x^2+2) - (x^2 - 4x + 2)\}\, dx \\ &= \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

2.12 平成 21 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ.

   (1) 次の計算をせよ.

   $$\sqrt[6]{2} \div \sqrt{2} \times (\sqrt[3]{4})^2$$

   (2) 次の式を因数分解せよ.

   $$a^2 + ab + 2b - 4$$

   (3) 次の式を簡単にせよ.

   $$\frac{3x-2}{x^2-4} - \frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

   (4) 次の連立不等式を満たす x の範囲を求めよ.

   $$\begin{cases} 5x+3 > 3x+1 & \cdots ① \\ -x+4 \geqq 2(x+1) & \cdots ② \end{cases}$$

   (5) $y = -2x^2 - 4x + 1$ のグラフは $y = -2x^2$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q 平行移動したものである. p, q を求めよ.

   (6) 次の方程式は平面上のどんな図形を表すか求めよ.

   $$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

   (7) 次の値を求めよ.

   $$\log_{10} \frac{27}{35} - \log_{10} \frac{3}{70} + \log_{10} \frac{50}{9}$$

   (8) 次の値を求めよ.

   $$\sum_{p=1}^{100} (2p - 7)$$

   (9) 平面上の点 A(1, 2) と B(5, 8) の垂直二等分線の方程式を求めよ.

   (10) $\sin 165^\circ$ の値を求めよ.

2. 直線 $x - 2y = 0$ と直線 $3x - y = 0$ のなす角 θ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ を求めよ.

3. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ の増減表をかき, 極値を求めよ.

4. グラフ $y = x^2 - 1$ と $y = x + 1$ が囲む部分の面積 S を求めよ.

解答例

1. (1) $\sqrt[6]{2} \div \sqrt{2} \times (\sqrt[3]{4})^2 = 2^{\frac{1}{6}} \div 2^{\frac{1}{2}} \times (2^{\frac{2}{3}})^2$
$= 2^{\frac{1}{6}} \div 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{4}{3}}$
$= 2^{\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}} = 2^1 = \mathbf{2}$

(2) (b について整理する)

$$\begin{aligned} a^2+ab+2b-4 &= b(a+2)+a^2-4 \\ &= b(a+2)+(a+2)(a-2) \\ &= (a+2)\{b+(a-2)\} \\ &= \boldsymbol{(a+2)(a+b-2)} \end{aligned}$$

(3) $$\frac{3x-2}{x^2-4} - \frac{2x-3}{x^2-3x+2} = \frac{3x-2}{(x+2)(x-2)} - \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{(3x-2)(x-1)-(2x-3)(x+2)}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$
$$= \frac{x^2-6x+8}{(x+2)(x-2)(x-1)}$$
$$= \frac{(x-2)(x-4)}{(x+2)(x-2)(x-1)} = \frac{\boldsymbol{x-4}}{\boldsymbol{(x+2)(x-1)}}$$

(4) ① を解いて　$x > -1$

② を解いて　$x \leqq \dfrac{2}{3}$

①，② の共通範囲を求めて，$\boldsymbol{-1 < x \leqq \dfrac{2}{3}}$

(5) $y = -2x^2 - 4x + 1$ を変形すると　$y = -2(x+1)^2 + 3$

この放物線は，$y = -2x^2$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．したがって　$\boldsymbol{p = -1}$，$\boldsymbol{q = 3}$

(6) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ を変形すると　$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$

したがって，この方程式の表す図形は　**中心 $(2, -1)$，半径 1 の円**

(7) $$\log_{10}\frac{27}{35} - \log_{10}\frac{3}{70} + \log_{10}\frac{50}{9} = \log_{10}\left(\frac{27}{35} \div \frac{3}{70} \times \frac{50}{9}\right) = \log_{10} 10^2 = \mathbf{2}$$

(8) $$\sum_{p=1}^{100}(2p-7) = 2 \times \frac{1}{2}\cdot 100(100+1) - 7 \times 100 = \mathbf{9400}$$

(9) 線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{2+8}{2}\right)$$　すなわち　$(3,\ 5)$

線分 AB の傾きは $\dfrac{8-2}{5-1}=\dfrac{3}{2}$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$$\frac{3}{2}m=-1 \quad \text{ゆえに} \quad m=-\frac{2}{3}$$

よって，求める直線は，点 M を通り傾き $-\dfrac{2}{3}$ の直線であるから

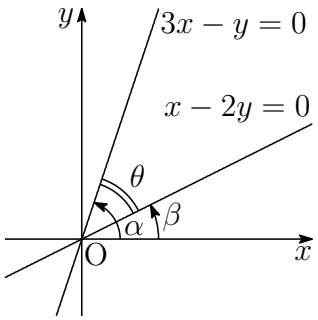
$$y-5=-\frac{2}{3}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{2x+3y-21=0}$$

(10) $\sin 165^\circ=\sin(180^\circ-15^\circ)=\sin 15^\circ$，加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ-30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ-\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{\sin 165^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$

2. x 軸の正の部分から 2 直線 $3x-y=0$，$x-2y=0$ まで測った角を，それぞれ α，β とすると，右の図より $\theta=\alpha-\beta$ である．



$$\tan\alpha=3,\quad \tan\beta=\frac{1}{2}$$

であるから

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ において　$\theta=45^\circ$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ であるから　　$\boldsymbol{\theta=45^\circ,\ 135^\circ}$

3. $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると　$x=0,\ 2$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

よって，$\boldsymbol{x=0}$ で**極大値 3**，$\boldsymbol{x=2}$ で**極小値 -1** をとる．

4. 放物線と直線の共有点の x 座標は

$$x^2-1=x+1\quad \text{これを解いて}\quad x=-1,\ 2$$

$-1\leqq x\leqq 2$ において，$x+1\geqq x^2-1$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

2.13 平成 20 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ.

(1) 次の計算をせよ.

$$(\sqrt{2^3} \div \sqrt[3]{2} \div 2)^6$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$a^2b + b^2c - a^2c - b^3$$

(3) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{1}{x^2+3x+2} + \frac{1}{x^2+x}$$

(4) 次の (小数第 3 位までの) 近似値を求めよ.

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$$

(5) $y = -2x^2 + 4x - 3$ のグラフの頂点の座標を求めよ.

(6) $2x^2 - 7x + 3 < 0$ を満たす x の範囲を求めよ.

(7) $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$ とするとき, 次の値を a, b で表せ.

$$\log_4 45$$

(8) 次の値を求めよ.

$$\sum_{k=1}^{100}(4k-3)$$

(9) 平面上の点 $\mathrm{A}(3,\ 3-\sqrt{2})$ と点 $\mathrm{B}(2+\sqrt{2},\ 2-2\sqrt{2})$ の距離を求めよ.

(10) $2\cos\theta < \sqrt{3}$ となる θ を $0 \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で求めよ.

2. $90^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ のとき $\sin 2\theta$ の値を求めよ.

3. $y = x^3 - 3x$ の $-2 < x < 2$ における最大値, 最小値を求めよ.

4. グラフ $y = x^2$ と $y = x + 2$ が囲む部分の面積 S を求めよ.

解答例

1. (1) $(\sqrt{2^3} \div \sqrt[3]{2} \div 2)^6 = (2^{\frac{3}{2}} \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2)^6 = (2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-1})^6 = (2^{\frac{1}{6}})^6 = \mathbf{2}$

   (2) (c について整理する)

$$\begin{aligned} a^2b + b^2c - a^2c - b^3 &= b(a^2 - b^2) - c(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 - b^2)(b - c) \\ &= \boldsymbol{(a+b)(a-b)(b-c)} \end{aligned}$$

   (3) $\dfrac{1}{x^2+3x+2} + \dfrac{1}{x^2+x} = \dfrac{1}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{1}{x(x+1)}$

$$= \frac{x + (x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{2(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \boldsymbol{\frac{2}{x(x+2)}}$$

   (4) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(2+1)+2\sqrt{2\cdot 1}} = \sqrt{2} + \sqrt{1} \fallingdotseq 1.414 + 1 = \mathbf{2.414}$

   (5) $y = -2x^2 + 4x - 3$ を変形すると　$y = -2(x-1)^2 - 1$
   したがって，頂点の座標は　　$\mathbf{(1, -1)}$

   (6) 左辺を因数分解して　$(x-3)(2x-1) < 0$
   したがって　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < x < 3}$

   (7) $\log_4 45 = \dfrac{\log_2 45}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2(3^2 \cdot 5)}{2} = \dfrac{2\log_2 3 + \log_2 5}{2} = \log_2 3 + \dfrac{\log_2 5}{2} = a + \dfrac{b}{2}$

   (8) $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(4k-3) = 4 \times \frac{1}{2} \cdot 100(100+1) - 3 \times 100 = \mathbf{19900}$

   (9) $\mathrm{AB} = \sqrt{(2+\sqrt{2}-3)^2 + \{(2-2\sqrt{2}) - (3-\sqrt{2})\}^2}$

$$= \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2 + (-\sqrt{2}-1)^2} = \boldsymbol{\sqrt{6}}$$

   (10) 不等式は　$\cos\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　これを解いて　$\mathbf{30^\circ < \theta < 330^\circ}$

2.　　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\cos\theta < 0$ であるから　$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{4}{9}} = -\dfrac{2}{3}$

よって　　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \dfrac{\sqrt{5}}{3} \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}$

3. $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗	2

よって，$-2 < x < 2$ において，

$x = -1$ で最大値 2，$x = 1$ で最小値 -2

をとる．

4. 放物線と直線の共有点の x 座標は

$x^2 = x + 2$　これを解いて　$x = -1,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において，$x + 2 \geqq x^2$ であるから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(x+2) - x^2\} dx \\ &= -\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2) dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

定積分の公式

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$

2.14　平成 19 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ.

(1) 次の計算をせよ.

$$\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[6]{a}$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$12x^2 + 5xy - 2y^2$$

(3) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} - \frac{4}{x^2 + 2x - 15} + \frac{5}{x^2 + 4x - 5}$$

(4) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

(5) $\sqrt{3} = 1.732$ のとき，次の値を求めよ.

$$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$$

(6) $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \leqq 0 & \cdots ① \\ 3x - 5 > 0 & \cdots ② \end{cases}$ を満たす x の範囲を求めよ.

(7) 次の値を求めよ.

$$\log_4 8 + \log_8 4$$

(8) 点 $\mathrm{A}(-2,\ 5)$ を通り，直線 $2x - 3y + 7 = 0$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

(9) 方程式 $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 60 = 0$ の表す図形は何か，求めよ.

(10) 次の和を求めよ.

$$S = 1 + 4 + 7 + 10 + \cdots + 1000$$

2. $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ で $\sin^2\theta \geq \dfrac{3}{4}$ となる θ の範囲を求めよ.

3. $y = x^3 + 3x^2 - 4$ は $x = \square$ のとき，極小値 (または，極大値)$y = \square$ となるか求めよ.

4. $y = x^2 - 4$，x 軸，$x = 3$ で囲まれる部分を図示して，面積を求めよ.

解答例

1. (1) $\sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[6]{a} = a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}} = \boldsymbol{a}$

   (2) $12x^2 + 5xy - 2y^2 = \boldsymbol{(3x + 2y)(4x - y)}$

   (3)
   $$\frac{1}{x^2-4x+3} - \frac{4}{x^2+2x-15} + \frac{5}{x^2+4x-5}$$
   $$= \frac{1}{(x-1)(x-3)} - \frac{4}{(x-3)(x+5)} + \frac{5}{(x-1)(x+5)}$$
   $$= \frac{(x+5) - 4(x-1) + 5(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+5)} = \frac{2x-6}{(x-1)(x-3)(x+5)}$$
   $$= \frac{2(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+5)} = \frac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{(x-1)(x+5)}}$$

   (4)
   $$\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} - \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{5}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$$
   $$= \sqrt{5}(\sqrt{3}+1) - \sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$
   $$= \boldsymbol{3 + \sqrt{5}}$$

   (5) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{(4+3) - 2\sqrt{4\cdot 3}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - 1.732 = \boldsymbol{0.268}$

   (6) ① を解いて　$-1 \leqq x \leqq 4$

   ② を解いて　$x > \dfrac{5}{3}$

   ①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{5}{3} < x \leqq 4}$

   (7) $\log_4 8 + \log_8 4 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 4}{\log_2 8} = \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{3} = \boldsymbol{\dfrac{13}{6}}$

   (8) 直線 $2x - 3y + 7 = 0$ の傾きは　$\dfrac{2}{3}$

   この直線に垂直な直線の傾きを m とすると

   $$\frac{2}{3}m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = -\frac{3}{2}$$

   求める直線の方程式は

   $$y - 5 = -\frac{3}{2}\{x - (-2)\} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{3x + 2y - 4 = 0}$$

   (9) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y - 60 = 0$ を変形すると　$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$

   したがって，この方程式の表す図形は　**中心 $(-1,\ 2)$，半径 5 の円**

(10) この等差数列の初項は 1，公差は 3 である．

項数を n とすると　　$1+(n-1)\cdot 3=1000$

これを解くと　　$n=334$

よって　　$S=\dfrac{1}{2}\cdot 334(1+1000)=\mathbf{167167}$

2. $\sin^2\theta \geq \dfrac{3}{4}$ より　$\left(\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\geq 0$

したがって　　$\sin\theta \leq -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\leq \sin\theta$

$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲でこれを解くと

$$\boldsymbol{60^\circ \leq \theta \leq 120^\circ,\ 240^\circ \leq \theta \leq 300^\circ}$$

【補足】$\leq$，$\geq$ は，それぞれ $\leqq$，$\geqq$ と同じ．

3. $y'=3x^2+6x=3x(x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=-2,\ 0$

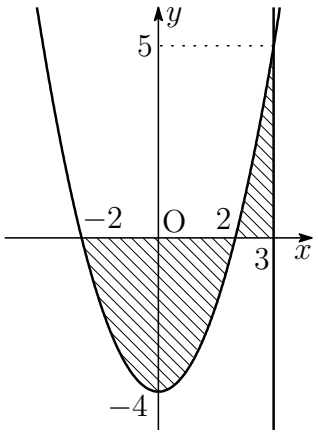
したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

よって，$\boldsymbol{x=-2}$ **のとき極大値 0，**$\boldsymbol{x=0}$ **のとき極小値 −4** をとる．

4. 放物線の x 軸との共有点の x 座標は

$$x^2-4=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm 2$$



$-2 \leqq x \leqq 2$ において　$x^2-4 \leqq 0$

$2 \leqq x \leqq 3$ において　$x^2-4 \geqq 0$

よって，求める部分の面積 S は

$$\begin{aligned}
S&=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)\,dx\\
&=-\int_{-2}^{2}(x+2)(x-2)\,dx+\left[\ \frac{x^3}{3}-4x\ \right]_2^3\\
&=-\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-2)\}^3+\frac{3^3-2^3}{3}-4(3-2)\\
&=\mathbf{13}
\end{aligned}$$

2.15 平成 18 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えよ.

(1) 次の計算をせよ.

$$(2a^2)^{\frac{2}{3}}(2a^{-1})^{\frac{1}{3}}$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$x^6 - 9x^3 + 8$$

(3) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{x+2}{2x^2+5x+3} + \frac{3x+1}{2x^2-x-6} + \frac{2x+5}{x^2-x-2}$$

(4) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}}$$

(5) $y = x^2 + mx - m$ のグラフが x 軸に接するとき m の値を求めよ.

(6) $x^2 + x < 1$ となる x の範囲を求めよ.

(7) 次の値を求めよ.

$$4\log_{10}\sqrt{150} - \log_{10} 54 + \log_{10} 24$$

(8) 次の値を求めよ.

$$\sum_{k=0}^{98} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}}$$

(9) 3 点 A$(-1,\ 1)$, B$(1, -1)$, C$(5, 3)$ を頂点とする三角形はどんな形の三角形か.

(10) ある数列の第 n 項までの和 S_n が n^2 のとき, 第 n 項 a_n を求めよ.

2. $90^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ であるとき, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ の値を求めよ.

3. $y = 3x^4 - 4x^3$ は $x =$ $\square$ のとき, 最小値 $\square$ をとる.

4. $y = x^2$ と $y = -x$ が囲む部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $(2a^2)^{\frac{2}{3}}(2a^{-1})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}(a^2)^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}(a^{-1})^{\frac{1}{3}}$
$= 2^{\frac{2}{3}}a^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}}a^{-\frac{1}{3}}$
$= 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}a^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = \boldsymbol{2a}$

(2) (複 2 次式の因数分解．$x^3 = A$ とおくと，与式 $= A^2 - 9A + 8$)

$$x^6 - 9x^3 + 8 = (x^3)^2 - 9x^3 + 8$$
$$= (x^3 - 1)(x^3 - 8)$$
$$= \boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)}$$

(3) $\dfrac{x+2}{2x^2+5x+3} + \dfrac{3x+1}{2x^2-x-6} + \dfrac{2x+5}{x^2-x-2}$

$$= \frac{x+2}{(x+1)(2x+3)} + \frac{3x+1}{(x-2)(2x+3)} + \frac{2x+5}{(x+1)(x-2)}$$
$$= \frac{(x+2)(x-2) + (3x+1)(x+1) + (2x+5)(2x+3)}{(x+1)(x-2)(2x+3)}$$
$$= \frac{8x^2+20x+12}{(x+1)(x-2)(2x+3)} = \frac{4(x+1)(2x+3)}{(x+1)(x-2)(2x+3)} = \boldsymbol{\frac{4}{x-2}}$$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}} = \dfrac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) - 2} = \dfrac{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1} = \boldsymbol{\sqrt{3}+2}$

(5) 放物線 $y = x^2 + mx - m$ が x 軸に接するので，$D = 0$ より

$m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m) = 0$
すなわち　$m(m+4) = 0$
よって　$\boldsymbol{m = 0, -4}$

(6) 与えられた不等式から　$x^2 + x - 1 < 0$

2 次方程式 $x^2 + x - 1 = 0$ の解は　$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

よって，求める不等式の解は　$\boldsymbol{\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$

(7) $4\log_{10}\sqrt{150} - \log_{10}54 + \log_{10}24 = 2\log_{10}150 + \log_{10}\dfrac{24}{54}$
$= 2\log_{10}150 + 2\log_{10}\dfrac{2}{3}$
$= 2\left(\log_{10}150 + \log_{10}\dfrac{2}{3}\right)$
$= 2\log_{10}100 = \boldsymbol{4}$

(8) $$\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})}$$
$$=\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{(k+2)-(k+1)}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$

したがって

$$\sum_{k=0}^{98}\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\sum_{k=0}^{98}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$
$$=\sqrt{98+2}-\sqrt{0+1}$$
$$=10-1=\mathbf{9}$$

(9) $\mathrm{AB}^2=(1+1)^2+(-1-1)^2=8$
$\mathrm{BC}^2=(5-1)^2+(3+1)^2=32$
$\mathrm{CA}^2=(-1-5)^2+(1-3)^2=40$

したがって　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2=\mathrm{CA}^2$　ゆえに　$\boldsymbol{B=90^\circ}$ **の直角三角形**

(10) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=1^2=1$　$\cdots$①
$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2$
すなわち　$a_n=2n-1$
① より $a_1=1$ なので，この式は $n=1$ のときにも成り立つ．
したがって，一般項は　$\boldsymbol{a_n=2n-1}$

2. $$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より $\cos\theta<0$ であるから　$\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{9}{25}}=-\dfrac{3}{5}$

よって　$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-\boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2=-\boldsymbol{\frac{7}{25}}$$

3. $y'=12x^3-12x^2$
$=12x^2(x-1)$
$y'=0$ とすると
$x=0,\ 1$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↘	極小 -1	↗

y の増減表は，右のようになる．

したがって，この関数は $\boldsymbol{x=1}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-1}$ をとる．

4. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -x$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = -x \quad \text{これを解いて} \quad x = -1,\ 0$$

$-1 \leqq x \leqq 0$ において　$-x \geqq x^2$

したがって，求める部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} (-x - x^2)\, dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x(x+1)\, dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)\{0 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

2.16 平成17年度編入学試験 (50分)

1. 次の各問に答えなさい.

(1) 次の式を展開せよ.

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$a^2-2ab+4a-2b+3$$

(3) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{x^3-27}{(x-3)^2}\div\frac{x^2+3x+9}{x^2+3x}\times\frac{x^2-9}{(x+3)^3}$$

(4) 次の式を簡単にせよ.

$$\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}$$

(5) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{8}{3-\sqrt{5}}-\frac{4}{4+2\sqrt{5}}$$

(6) 次の不等式をみたす x の値の範囲を求めよ.

$$\begin{cases} x^2+x\geqq 6 & \cdots ① \\ x^2-1<2x & \cdots ② \end{cases}$$

(7) 点 $\mathrm{A}(3,-1)$ を通り，直線 $x-2y+3=0$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

(8) 点 $\mathrm{A}(1,-2)$ と点 $\mathrm{B}(5,\ 6)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ.

(9) 次の式を簡単にせよ.

$$\log_3\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}-\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6}$$

(10) 次の値を求めよ.

$$1+3+5+7+\cdots+199=$$

2. $180^\circ<\theta<270^\circ$ で $\tan\theta=\dfrac{5}{12}$ であるとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ.

3. $y=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ の $-\sqrt{3}\leq x\leq\sqrt{3}$ における最大値 (また，そのときの x の値)，最小値 (また，そのときの x の値) を求めよ.

4. $y=x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ が囲む部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1)
$$\begin{aligned}
&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)\\
&=(x+1)(x+4)\times(x+2)(x+3)\\
&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)
\end{aligned}$$
$x^2+5x=A$ とおくと
$$\begin{aligned}
&=(A+4)(A+6)\\
&=A^2+10A+24
\end{aligned}$$
したがって
$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$$
よって
$$=\boldsymbol{x^4+10x^3+35x^2+50x+24}$$

(2) (b について整理する)
$$\begin{aligned}
a^2-2ab+4a-2b+3&=a^2+4a+3-2ab-2b\\
&=(a+1)(a+3)-2b(a+1)\\
&=(a+1)\{(a+3)-2b\}\\
&=\boldsymbol{(a+1)(a-2b+3)}
\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}
&\frac{x^3-27}{(x-3)^2}\div\frac{x^2+3x+9}{x^2+3x}\times\frac{x^2-9}{(x+3)^3}\\
&=\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x-3)^2}\times\frac{x(x+3)}{x^2+3x+9}\times\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^3}=\boldsymbol{\frac{x}{x+3}}
\end{aligned}$$

(4) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt{27}\div\sqrt[6]{243}=3^{\frac{1}{3}}\times3^{\frac{3}{2}}\div3^{\frac{5}{6}}=3^{\frac{1}{3}+\frac{3}{2}-\frac{5}{6}}=\boldsymbol{3}$

(5)
$$\begin{aligned}
\frac{8}{3-\sqrt{5}}-\frac{4}{4+2\sqrt{5}}&=\frac{8(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}-\frac{2}{\sqrt{5}+2}\\
&=\frac{8(3+\sqrt{5})}{9-5}-\frac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}\\
&=2(3+\sqrt{5})-2(\sqrt{5}-2)\\
&=\boldsymbol{10}
\end{aligned}$$

(6) ① より $x^2+x-6\geqq0$　これを解いて　$x\leqq-3,\ 2\leqq x$　$\cdots$③
② より $x^2-2x-1<0$　これを解いて　$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$　$\cdots$④
③，④ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{2\leqq x<1+\sqrt{2}}$

(7) 直線 $x-2y+3=0$ の傾きは　$\dfrac{1}{2}$
この直線に垂直な直線の傾きを m とすると
$$\frac{1}{2}m=-1\quad\text{すなわち}\quad m=-2$$
よって，求める直線は
$$y-(-1)=-2(x-3)\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{2x+y-5=0}$$

(8) 求める円の中心を C，半径を r とする．C は線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{-2+6}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3,\ 2)$$

また　$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(1-3)^2+(-2-2)^2} = \sqrt{20}$

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{(x-3)^2+(y-2)^2=20}$

(9) $\log_3\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{3}-\dfrac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6} = \dfrac{1}{2}\log_3 2+\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 6$

$$= \frac{1}{2}\left(\log_3 2+\log_3\frac{1}{3}-\log_3 6\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_3\left(2\times\frac{1}{3}\div 6\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 3^{-2} = \boldsymbol{-1}$$

(10) この等差数列の初項は 1，公差は 2 である．

項数を n とすると　　$1+(n-1)\cdot 2 = 199$

これを解くと　　$n = 100$

よって　$1+3+5+7+\cdots+199 = \dfrac{1}{2}\cdot 100(1+199) = \boldsymbol{10000}$

2. $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2} = \dfrac{144}{169}$

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ より，$\cos\theta < 0$ であるから　　$\cos\theta = \boldsymbol{-\dfrac{12}{13}}$

また　　$\sin\theta = \tan\theta\times\cos\theta = \dfrac{5}{12}\times\left(-\dfrac{12}{13}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{5}{13}}$

3. $y = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = x^3-3x$ を微分すると

$y' = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$

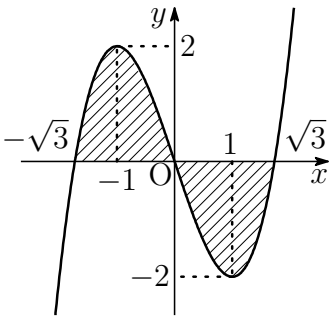
$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗	0

$-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ において　$\boldsymbol{x=-1}$ のとき最大値 $\boldsymbol{2}$，$\boldsymbol{x=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$

4. $y = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$ のグラフは，3 の結果から次のようになる．



$$-\sqrt{3} \leqq x \leqq 0 \text{ において} \quad y \geqq 0$$
$$0 \leqq x \leqq \sqrt{3} \text{ において} \quad y \leqq 0$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{0} (x^3 - 3x)dx - \int_{0}^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right]_{-\sqrt{3}}^{0} - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} \right]_{0}^{\sqrt{3}} \\ &= \boldsymbol{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

2.17 平成 16 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問に答えなさい.

(1) 次の式を展開せよ.

$$(x-2y+z)(x+2y-z)$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$x^2-xy-xz+yz$$

(3) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}+\frac{1}{x^2+2x}$$

(4) 次の式を簡単にせよ.

$$(\sqrt{2^3}\div\sqrt[3]{2}\div 2)^6$$

(5) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$$

(6) 次の不等式をみたす x の範囲を求めよ.

$$\begin{cases} x^2-x-6\leqq 0 & \cdots ① \\ x^2-x-2>0 & \cdots ② \end{cases}$$

(7) 次の方程式をみたす $(x,\ y)$ はどんな図形を表すか求めよ.

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0$$

(8) 点 $\mathrm{A}(1,-2)$ と点 $\mathrm{B}(5,\ 6)$ をむすぶ線分を垂直に二等分する直線の方程式を求めよ.

(9) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6}-\log_3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}$$

(10) x の整式 $P(x)=4x^3+ax+1$ が $(2x+1)$ で割り切れるとき，定数 a の値を求めよ.

2. $90^\circ<\theta<180^\circ$ で $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$ であるとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ.

3. $y=x^3-3x+1$ の $-2<x<2$ における最大値 (また，そのときの x の値)，最小値 (また，そのときの x の値) を求めよ.

4. $y=x^3$ と $y=x$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $(x-2y+z)(x+2y-z) = \{x-(2y-z)\}\{x+(2y-z)\}$
$= x^2-(2y-z)^2$
$= x^2-(4y^2-4yz+z^2)$
$= \boldsymbol{x^2-4y^2+4yz-z^2}$

(2) $x^2-xy-xz+yz = x^2-(y+z)x+yz$
$= \boldsymbol{(x-y)(x-z)}$

(3) $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+2x}$
$= \dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{x(x+2)}$
$= \dfrac{(x+2)+x+(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{3x+3}{x(x+1)(x+2)}$
$= \dfrac{3(x+1)}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{x(x+2)}}$

(4) $(\sqrt{2^3}\div\sqrt[3]{2}\div 2)^6 = (2^{\frac{3}{2}}\div 2^{\frac{1}{3}}\div 2)^6$
$= (2^{\frac{3}{2}-\frac{1}{3}-1})^6 = (2^{\frac{1}{6}})^6 = \boldsymbol{2}$

(5) $\dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \dfrac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = -\sqrt{k}+\sqrt{k+1}$

したがって

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}\\ =&(-1+\sqrt{2})+(-\sqrt{2}+\sqrt{3})+(-\sqrt{3}+\sqrt{4})+\cdots+(-\sqrt{8}+\sqrt{9})\\ =&-1+\sqrt{9} = \boldsymbol{2}\end{aligned}$$

(6) ① より $(x+2)(x-3)\leqq 0$　これを解いて　$-2\leqq x\leqq 3$　　$\cdots$③
② より $(x+1)(x-2)>0$　これを解いて　$x<-1,\ 2<x$　$\cdots$④
③，④ の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{-2\leqq x<-1,\ 2<x\leqq 3}$

(7) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ を変形すると　$(x-2)^2+(y+1)^2=9$
したがって，この方程式の表す図形は　**中心 $(2,-1)$，半径 3 の円**

(8) 線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{1+5}{2},\ \frac{-2+6}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3,\ 2)$$

線分 AB の傾きは $\dfrac{6-(-2)}{5-1}=2$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$$2m=-1 \quad \text{ゆえに} \quad m=-\frac{1}{2}$$

よって，求める直線は，点 M を通り傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+2y-7=0}$$

(9) $$\begin{aligned}\frac{3}{2}\log_3\sqrt[3]{6}-\log_3\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}&=\frac{1}{2}\log_3 6-\frac{1}{2}\log_3 2-\frac{1}{2}\log_3\frac{1}{3}\\&=\frac{1}{2}\left(\log_3 6-\log_3 2-\log_3\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{1}{2}\log_3 9=\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

(10) $P(x)$ は $2x+1$ で割り切れるので，$P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ より

$$4\left(-\frac{1}{2}\right)^3+a\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1}$$

2. $$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より $\cos\theta<0$ であるから $\cos\theta=-\sqrt{\dfrac{5}{9}}=-\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\boldsymbol{3}}$

また $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2}{3}\div\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)=-\dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{\sqrt{5}}}$

3. $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-1	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗	3

よって，$-2 < x < 2$ において，

$x = -1$ で最大値 3，$x = 1$ で最小値 -1

をとる．

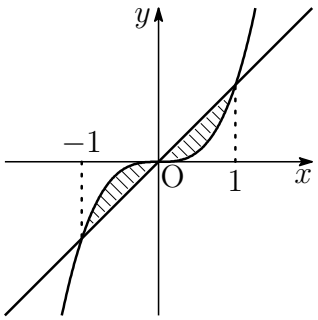
4. $y = x^3$ と $y = x$ の共有点の x 座標は

$x^3 = x$　これを解いて　$x = -1,\ 0,\ 1$

$-1 \leqq x \leqq 0$ において　$x^3 \geqq x$

$0 \leqq x \leqq 1$ において　$x \geqq x^3$

よって，求める部分は，右の図の斜線部分であり，その面積を S とすると



$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{1} \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

2.18 平成 15 年度編入学試験 (50 分)

1. 次の各問いに答えなさい.

   (1) 次の式を展開しなさい.

   $$(2x-3y)^3$$

   (2) 次の式を因数分解しなさい.

   $$a^3-a^2c-ab^2+b^2c$$

   (3) 次の 4 次方程式を解きなさい.

   $$x^4-3x^2+9=0$$

   (4) $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めなさい.

   (5) $x^4+3x^3+2x^2-1$ を x の整式 A で割ったときの商は x^2+1 で，余りは $-3x-2$ であった．式 A を求めなさい.

2. 関数 $y=x^2-2x+m$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が -3 であるように定数 m の値を定めなさい．また，このときの最大値を求めなさい.

3. 次の問いに答えなさい．ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする.

   (1) $\log_{10}5$ の値を求めなさい.

   (2) 5^{50} の桁数を求めなさい.

4. 底辺の半径が 2，高さが 4 の円錐に底面を共有している円柱があります.

   (1) 円錐の頂点から内接する円柱の上面までの距離を x とするとき円柱の体積 V を x で表しなさい.

   (2) V の最大値を求めなさい.

解答例

1. (1)　$(2x-3y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2\cdot 3y + 3\cdot 2x(3y)^2 - (3y)^3$
$= \boldsymbol{8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3}$

(2) (c に着目する)

$$\begin{aligned} a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c &= a(a^2-b^2) - c(a^2-b^2) \\ &= (a^2-b^2)(a-c) \\ &= \boldsymbol{(a+b)(a-b)(a-c)} \end{aligned}$$

(3) (平方差による因数分解)

$$\begin{aligned} &x^4 - 3x^2 + 9 = 0 \\ &x^4 + 6x^2 + 9 - 9x^2 = 0 \\ &(x^2+3)^2 - (3x)^2 = 0 \\ &(x^2+3x+3)(x^2-3x+3) = 0 \end{aligned}$$

よって　　$x^2+3x+3=0$　または　$x^2-3x+3=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{3}\,i}{3},\ \dfrac{3 \pm \sqrt{3}\,i}{3}}$

(4)　　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 = \dfrac{21}{25}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　$\cos\theta = \pm\sqrt{\dfrac{21}{25}} = \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{2}{5} \div \left(\pm\dfrac{\sqrt{21}}{5}\right) = \pm\dfrac{2}{\sqrt{21}}$

よって　　$\boldsymbol{\cos\theta = \pm\dfrac{\sqrt{21}}{5},\quad \tan\theta = \pm\dfrac{2}{\sqrt{21}}}$　(複号同順)

(5) この割り算について，次の等式が成り立つ．

$$x^4+3x^3+2x^2-1=A(x^2+1)-3x-2$$

整理すると

$$x^4+3x^3+2x^2+3x+1=A(x^2+1)$$

よって，$x^4+3x^3+2x^2+3x+1$ は x^2+1 で割り切れて，その商が A である．
右の計算により

$$\boldsymbol{A=x^2+3x+1}$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2+3x+1 \\ \hline
x^2+1 & x^4+3x^3+2x^2+3x+1 \\
 & x^4\quad\ +x^2 \\ \hline
 & 3x^3+x^2+3x \\
 & 3x^3\quad\ +3x \\ \hline
 & x^2+1 \\
 & x^2+1 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

2. $y=x^2-2x+m$ を変形すると　$y=(x-1)^2+m-1$

$-2\leqq x\leqq 2$ において $x=1$ で最小値 $m-1$ をとる．

ゆえに　$m-1=-3$　すなわち　$\boldsymbol{m=-2}$

したがって，関数 $y=(x-1)^2-3$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ は，

$x=-2$ で最大値 6

をとる．

3. (1) $\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=\log_{10}10-\log_{10}2=1-0.3010=\mathbf{0.6990}$

(2) (1) の結果より

$$\log_{10}5^{50}=50\log_{10}5=50\times 0.6990=34.95$$

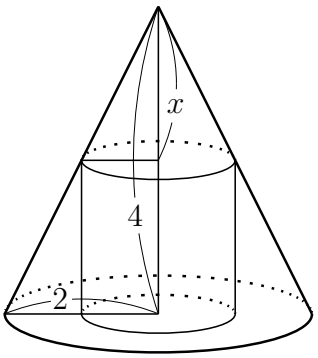
$34<\log_{10}5^{50}<35$ であるから

$$\log_{10}10^{34}<\log_{10}5^{50}<\log_{10}10^{35}$$

よって　$10^{34}<5^{50}<10^{35}$

したがって，5^{50} は **35 桁**の数である．

4. (1) 円錐の頂点から内接する円柱の上面までの距離が x であるから内接する円錐の半径は $\dfrac{x}{2}$，高さは $4-x$ である．



このとき　　$\dfrac{x}{2}>0$　かつ　$4-x>0$

すなわち　　$0<x<4$

したがって円錐の体積 V は

$$V=\pi\left(\frac{x}{2}\right)^2(4-x)$$
$$=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}x^2(4-x)}\quad\boldsymbol{(0<x<4)}$$

(2) (1) の結果から　$V=\dfrac{\pi}{4}(-x^3+4x^2)$

$$V'=\frac{\pi}{4}(-3x^2+8x)=-\frac{\pi}{4}x(3x-8)$$

V の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	4
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

V は $\boldsymbol{x=\dfrac{8}{3}}$ で最大となり，最大値は

$$\frac{\pi}{4}\left(\frac{8}{3}\right)^2\left(4-\frac{8}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{64}{27}\pi}$$

第 3 章　佐世保工業高等専門学校

3.1　平成 31 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えよ．

   (1) $(x+2)(x-3)(x+4)-(x-2)(x+3)(x-4)$ を展開せよ．

   (2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$ を因数分解せよ．

   (3) $x+\dfrac{1}{x}=2+\sqrt{3}$ のとき，$x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の値を求めよ．

   (4) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}$ を簡単にせよ．

   (5) $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a, b, c の値を定めよ．

   (6) 方程式 $|x+2|-|x-1|=x$ を解け．

   (7) $\tan x=3$ のとき，$\dfrac{1}{1+\sin x}+\dfrac{1}{1-\sin x}$ の値を求めよ．

   (8) $x=3$ で最小値 4 をとり，点 $(5,\ 8)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

   (9) AB = 6，BC = 4，CA = 5 の △ABC において，辺 BC の中点を M とするとき，線分 AM の長さを求めよ．

   (10) ∠ABC = 135°，AB = 4，AD = 6 である平行四辺形 ABCD の面積を求めよ．

2. 方程式 $(x+1)|x-3|=a$ の実数解の個数を a の値で場合を分けることによって求めよ．

3. 3 辺の長さが a, b, c である三角形の面積 S は $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられることを証明せよ．ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とする．

4. 次の小問に答えよ．

(1) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13$ とする．因数定理を用いて $P(x)$ を複素数の範囲で因数分解し，方程式 $P(x) = 0$ の解を複素数まで考えてすべて求めよ．

(2) 相加平均・相乗平均の不等式を用いて，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$a > 0,\ b > 0,\ c > 0 \text{ のとき，} \quad (a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$$

5. (1) xy 平面上の 3 頂点 A$(2,\ 3)$，B$(-2, -1)$，C$(4,\ 1)$ からなる三角形 ABC について，直線 BC の方程式を求めよ．

(2) (1) の三角形で ABC で，点 A を通り，直線 BC に垂直な直線の方程式を求めよ．

(3) xy 平面上で，原点 O から y 軸に接する円 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ に引いた 2 本の接線の方程式を考える．そのとき y 軸と異なる直線の方程式を求めよ．

6. 次の小問に答えよ．

(1) 三角関数 $y = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフを描け．

(2) $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin 2\theta$ の値を求めよ．

(3) 次の関数を $y = r\sin(\theta + \alpha)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \alpha < 2\pi)$ の形で表せ．

$$y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$$

7. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ について，次の小問に答えよ．

(1) y' を求めよ．

(2) $y' = 0$ となる x の値とそのときの y 座標を求めよ．

(3) 増減表を作れ．

(4) グラフと y 軸との交点の y 座標を求めよ．

(5) 増減表をもとにグラフを描け．

解答例

1. (1) $(x+2)(x-3)(x+4)-(x-2)(x+3)(x-4)=\boldsymbol{6x^2-48}$

(2) (a について整理する)

$$\begin{aligned}&ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\\=&a^2b-ab^2+bc(b-c)+c^2a-ca^2\\=&a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)\\=&(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\=&(b-c)(a-b)(a-c)=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

(3) $x+\dfrac{1}{x}=2+\sqrt{3}$ の両辺を平方すると

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=4+4\sqrt{3}+3 \quad \text{よって} \quad x^2+\frac{1}{x^2}=\boldsymbol{5+4\sqrt{3}}$$

(4) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}}=1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{(x-1)-x}}$

$$=1-\frac{1}{1+(x-1)}=1-\frac{1}{x}=\boldsymbol{\frac{x-1}{x}}$$

(5) $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ の両辺に x^3+1 を掛けると

$$\begin{aligned}1&=a(x^2-x+1)+(bx+c)(x+1)\\&=(a+b)x^2+(-a+b+c)x+a+c\end{aligned}$$

同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b=0, \quad -a+b+c=0, \quad a+c=1$$

よって $\quad \boldsymbol{a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{1}{3},\ c=\frac{2}{3}}$

(6) 方程式 $|x+2|-|x-1|=x$

(i) $x<-2$ のとき

$$(-x-2)-(-x+1)=x \quad \text{これを解いて} \quad x=-3$$

(ii) $-2\leqq x<1$ のとき

$$(x+2)-(-x+1)=x \quad \text{これを解いて} \quad x=-1$$

(iii) $1 \leqq x$ のとき

$$(x+2)-(x-1)=x \quad \text{これを解いて} \quad x=3$$

(i)〜(iii) より　$\boldsymbol{x=-3,-1,\ 3}$

(7)
$$\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}=\frac{(1-\sin x)+(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}=\frac{2}{\cos^2 x}$$

$\dfrac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x=1+3^2=10$ であるから

$$\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}=2\times 10=\mathbf{20}$$

(8) 放物線の方程式を $y=a(x-3)^2+4$ とおく．これが点 $(5,\ 8)$ を通るから

$$8=a(5-3)^2+4 \quad \text{ゆえに} \quad a=1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=(x-3)^2+4}$$

(9) $\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2=2(\mathrm{AM}^2+\mathrm{BM}^2)$ であるから

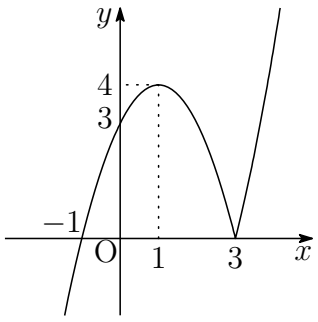
$$6^2+5^2=2(\mathrm{AM}^2+2^2) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AM}^2=\frac{53}{2} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AM}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{106}}}{\mathbf{2}}$$

(10) $\angle \mathrm{DAB}=45^\circ$ であるから，求める面積は

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos 45^\circ=4\cdot 6\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{12\sqrt{2}}$$

2. $y=(x+1)|x-1|$ とおくと

$$y=\begin{cases}-(x+1)(x-3) & (x \leqq 3)\\ (x+1)(x-3) & (x \geqq 3)\end{cases}$$



求める個数は，このグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数であるから

$$\begin{cases}\boldsymbol{a<0,\ 4<a} \text{ のとき} & \mathbf{1}\text{個}\\ \boldsymbol{a=0,\ 4} \text{ のとき} & \mathbf{2}\text{個}\\ \boldsymbol{0<a<4} \text{ のとき} & \mathbf{3}\text{個}\end{cases}$$

3. $2S=bc\sin A$ の両辺を平方して

$$4S^2=b^2c^2\sin^2 A=b^2c^2(1-\cos^2 A)=bc(1+\cos A)\cdot bc(1-\cos A)$$

ここで $2bc(1+\cos A) = 2bc + 2bc\cos A = 2bc + (b^2+c^2-a^2)$
$= (b+c)^2 - a^2 = (b+c+a)(b+c-a)$
$= 2s(2s-2a) = 4s(s-a)$

同様に $2bc(1-\cos A) = 2bc - (b^2+c^2-a^2)$
$= a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$
$= (2s-2c)(2s-2b) = 4(s-b)(s-c)$

したがって $4S^2 = 2s(s-a)\cdot 2(s-b)(s-c)$ よって $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

4. (1) $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 + 4x - 13$ より $P(1) = 0$, $P(-1) = 0$
したがって，$P(x)$ は $x^2 - 1$ を因数にもつことに注意して

$$\begin{aligned} P(x) &= x^4 + 12x^2 - 13 - 4x^3 + 4x \\ &= (x^2-1)(x^2+13) - 4x(x^2-1) \\ &= (x^2-1)(x^2-4x+13) \\ &= (x+1)(x-1)\{(x-2)^2+9\} \\ &= \boldsymbol{(x+1)(x-1)(x-2+3i)(x-2-3i)} \end{aligned}$$

よって，$P(x) = 0$ の解は $\boldsymbol{x = \pm 1,\ 2 \pm 3i}$

(2) $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$a + b \geqq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geqq 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geqq 2\sqrt{ca}$$

上の 3 式の辺々を掛けると $(a+b)(b+c)(c+a) \geqq 8abc$

5. (1) 2 点 B$(-2, -1)$，C$(4,\ 1)$ を通る直線の方程式は

$$y + 1 = \frac{1+1}{4+2}(x+2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}}$$

(2) 点 A$(2\ 3)$ を通り，直線 BC に垂直な直線の方程式は

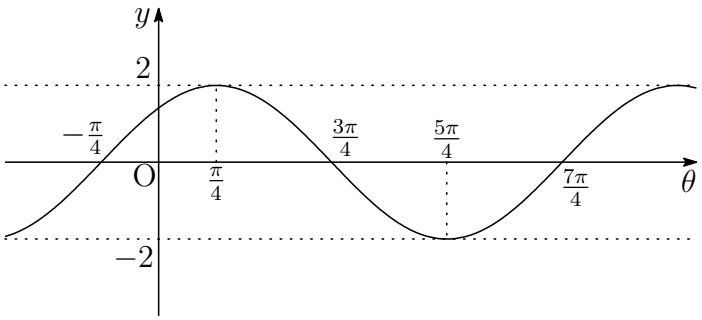
$$y - 3 = -3(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -3x + 9}$$

(3) 求める直線の方程式を $y = mx$ $(mx - y = 0)$ とおくと，この直線と点 $(2,\ 3)$ の距離が 2 であるから

$$\frac{|2m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = 2 \quad \text{これを解いて} \quad m = \frac{5}{12}$$

よって，求める直線の方程式は $\boldsymbol{y = \frac{5}{12}x}$

6. (1) $y = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ のグラフは $y = 2\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向に $-\dfrac{\pi}{4}$ だけ平行移動したものである．



(2) $\pi < \theta < \dfrac{3}{2}\pi$，$\cos\theta < 0$ であるから，$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{2}}{9}}$$

(3) $y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = \boldsymbol{2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)}$

7. (1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ より　$\boldsymbol{y' = 3x^2 - 12x + 9}$

(2) $y' = 0$ とすると

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1,\ 3$$

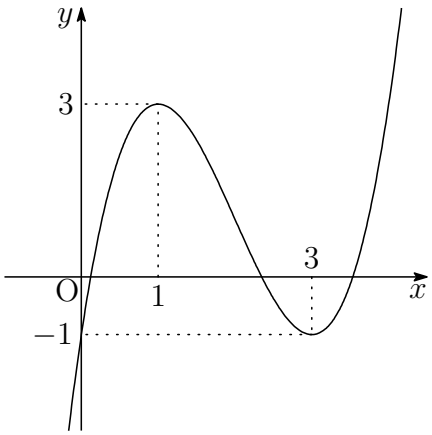
$\boldsymbol{x = 1}$ のとき $\boldsymbol{y = 3}$, $\boldsymbol{x = 3}$ のとき $\boldsymbol{y = -1}$

(3) (2) の結果を利用して

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	-1	↗

(4) $x = 0$ のとき　$\boldsymbol{y = -1}$

(5) (2)〜(4) の結果から



3.2　平成 30 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい.

   (1) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$ を展開しなさい.

   (2) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ を因数分解しなさい.

   (3) $\dfrac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ の分母を有理化しなさい.

   (4) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ を簡単にしなさい.

   (5) $\dfrac{1}{x^3+x}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を求めなさい.

   (6) 不等式 $|x|+|x-1|>3x$ を解きなさい.

   (7) $\sin x-\cos x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin^3 x-\cos^3 x$ の値を求めなさい.

   (8) 放物線 $y=x^2-4x+3$ を x 軸の方向に平行移動して原点を通るようにしたとき，この放物線の方程式を求めなさい.

   (9) △ABC において，$\sin A:\sin B:\sin C=5:8:7$ のとき，$\cos C$ の値を求めなさい.

   (10) $\angle \mathrm{B}=120^\circ$，$\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{BC}=8$，$\mathrm{CD}=10$，$\mathrm{DA}=9$ である四角形 ABCD の面積を求めなさい.

2. a を定数とする．関数 $y=x^2-4x+3$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ の最小値を求めなさい.

3. 2 次方程式 $x^2-ax+1=0$ の 1 つの解が 0 と 1 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるように，定数 a の値の範囲を定めなさい.

4. 次の各小問に答えなさい.

(1) $\dfrac{3-4i}{5+3i}+\dfrac{3+4i}{5-3i}$ を簡単にしなさい．ただし，i は虚数単位.

(2) $\sqrt{(7^x-7^{-x})^2+4}$ を簡単にしなさい.

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$ を解きなさい.

(4) 方程式 $\log_2 x = \log_4(x+2)$ を解きなさい.

(5) 不等式 $9^x - 2{\cdot}3^{x+1} - 27 < 0$

(6) θ が第 2 象限の角で $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めなさい.

(7) 円 $x^2+y^2-2x+4y+5-a^2=0$ (a は正の定数) が x 軸に接するときの a の値を求めなさい．また，このときの円が y 軸を切り取ってできる線分の長さを求めなさい.

(8) 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りが 4，$x+1$ で割ったときの余りが 1，x^2-1 で割ったときの余りが $Ax+B$ のとき，A，B の値を求めなさい.

5. 関数 $f(x)=x^3-3x^2$ について，x が a から b まで変化するときの平均変化率 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を $M_{a,b}$ で表す.

(1) $M_{0,2}$ を求めなさい.

(2) $x=c$ $(0<c<2)$ における微分係数 $f'(c)$ が (1) で求めた平均変化率 $M_{0,2}$ に等しいとき，c の値を求めよ.

(3) $f'(c)=-3$ となるとき，c の値を求めなさい.

(4) $f(x)=x^3-3x^2$ は，平均値の定理：

> 任意の実数 a, b $(a<b)$ に対して
>
> $$M_{a,b}=f'(c)$$
>
> となる c $(a<c<b)$ が 1 個以上存在する.

が成り立っている.

$M_{a,b} \geqq -3$ であることを証明しなさい.

解答例

1. (1) $(x-1)(x+3)=x^2+2x-3$，$(x-2)(x+4)=x^2+2x-8$ より

$$A=x^2+2x$$

とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式})&=(A-3)(A-8)=A^2-11A+24\\&=(x^2+2x)^2-11(x^2+2x)+24\\&=x^4+4x^3+4x^2-11x^2-22x+24\\&=\boldsymbol{x^4+4x^4-7x^2-22x+24}\end{aligned}$$

(2) (a について整理する)

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\\=&(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)\\=&(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\=&(b-c)(a-b)(a-c)=\boldsymbol{-(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

(3) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ に注意して

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}&=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}\\&=\frac{3+2\sqrt{6}+2}{\{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\}^2}\\&=\frac{5+2\sqrt{6}}{(3-2)^2}=\boldsymbol{5+2\sqrt{6}}\end{aligned}$$

(4) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1-x}{(1-x)-1}=1+\dfrac{1-x}{x}=\boldsymbol{\dfrac{1}{x}}$

(5) $\dfrac{1}{x^3+x}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$ の両辺に x^3+x を掛けると

$$\begin{aligned}1&=a(x^2+1)+x(bx+c)\\&=(a+b)x^2+cx+a\end{aligned}$$

同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b=0,\quad c=0,\quad a=1$$

よって　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1,\ c=0}$

(6) 不等式 $|x|+|x-1|>3x$

(i) $x<0$ のとき

$$-x+(-x+1)>3x \quad \text{これを解いて} \quad x<\frac{1}{5}$$

したがって $x<0$

(ii) $0 \leqq x<1$ のとき

$$x+(-x+1)>3x \quad \text{これを解いて} \quad x<\frac{1}{3}$$

したがって $0 \leqq x<\dfrac{1}{3}$

(iii) $1 \leqq x$ のとき

$$x+(x-1)>3x \quad \text{これを解いて} \quad x<-1$$

したがって，解なし

(i)〜(iii) から $\boldsymbol{x<\dfrac{1}{3}}$

(7) $\sin x-\cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を平方すると

$$(\sin x-\cos x)^2=\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 1-2\sin x\cos x=\frac{1}{2}$$

$\sin x\cos x=\dfrac{1}{4}$ であるから

$$\begin{aligned}\sin^3 x-\cos^3 x&=(\sin x-\cos x)(\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x)\\&=(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{4\sqrt{2}}}\end{aligned}$$

(8) $y=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$

x 軸との共有点間の距離が 2 であるから，x^2 の係数に注意して

$$\boldsymbol{y=x(x-2)} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{y=x(x+2)}$$

(9) $\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 8 : 7$ であるから，正弦定理により

$$a : b : c = 5 : 8 : 7$$

$a = 5k$，$b = 8k$，$c = 7k$ であるから (k は定数)，余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(5k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 8k} = \frac{25 + 64 - 49}{80} = \frac{1}{2}$$

よって　　$C = 60^\circ$

(10) 三角形 ABC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \cos 120^\circ \\ &= 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 169 \end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{AC} = 13$

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2} \mathrm{AB} \cdot \mathrm{BC} \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3}$$

$\mathrm{AC} = 13,\ \mathrm{CD} = 10,\ \mathrm{DA} = 9$ をヘロンの公式に適用すると

$$s = \frac{13 + 10 + 9}{2} = 16$$

$$\triangle \mathrm{ACD} = \sqrt{16(16 - 13)(16 - 10)(16 - 9)} = 12\sqrt{14}$$

よって，求める面積は　$\triangle \mathrm{ABC} + \triangle \mathrm{ACD} = \boldsymbol{14\sqrt{3} + 12\sqrt{14}}$

2. $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$，最小値を m とおくと

(i) $a + 1 < 2$ のとき，$m = f(a + 1) = (a - 1)^2 + 1 = \boldsymbol{a^2 - 2a + 2}$

(ii) $a \leqq 2 \leqq a + 1$，すなわち，$1 \leqq a \leqq 2$ のとき，$m = f(2) = \boldsymbol{-1}$

(iii) $2 < a$ のとき，$m = f(a) = \boldsymbol{a^2 - 4a + 3}$

3. $f(x) = x^2 - ax + 1$ とおくと，条件により

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 > 0 \\ f(1) &= 2 - a < 0 \\ f(2) &= 5 - 2a < 0 \\ f(3) &= 10 - 3a > 0 \end{aligned}$$

これらを同時に満たす a の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{5}{2} < a < \dfrac{10}{3}}$

4. (1) $\dfrac{3-4i}{5+3i}+\dfrac{3+4i}{5-3i}=\dfrac{(3-4i)(5-3i)+(3+4i)(5+3i)}{(5+3i)(5-3i)}$

$$=\frac{30+24i^2}{25-9i^2}=\frac{6}{34}=\boldsymbol{\frac{3}{17}}$$

(2) $\sqrt{(7^x-7^{-x})^2+4}=\sqrt{(7^x+7^{-x})^2}=\boldsymbol{7^x+7^{-x}}$

(3) $2\sin^2 x-3\cos x=0$ より

$$2(1-\cos^2 x)-3\cos x=0 \quad \text{ゆえに} \quad 2\cos^2 x+3\cos x-2=0$$

したがって $\qquad (\cos x+2)(2\cos x-1)=0$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ に注意して $\qquad \cos x=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから $\qquad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi}$

(4) 方程式 $\log_2 x=\log_4(x+2)$ の真数は正であるから

$$x>0 \quad \text{かつ} \quad x+2>0 \quad \text{すなわち} \quad x>0 \quad \cdots ①$$

方程式を変形すると $\log_4 x^2=\log_4(x+2)$

ゆえに $x^2=x+2$ すなわち $(x+1)(x-2)=0$

① に注意して，これを解くと $\qquad \boldsymbol{x=2}$

(5) 不等式 $9^x-2\cdot 3^{x+1}-27<0$ を変形すると

$$(3^x)^2-6\cdot 3^x-27<0 \quad \text{ゆえに} \quad (3^x+3)(3^x-9)<0$$

$3^x+3>0$ より $3^x-9<0$ これを解いて $\boldsymbol{x<2}$

(6) $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ より，$\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ であるから

$$1-2\sin^2\frac{\theta}{2}=-\frac{4}{5} \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{9}{10}$$

θ は第 2 象限の角であるから，$0<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より $\sin\dfrac{\theta}{2}>0$

よって $\qquad \sin\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{\dfrac{9}{10}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

(7) 円 $x^2+y^2-2x+4y+5-a^2=0$ より　$(x-1)^2+(y+2)^2=a^2$　$\cdots(*)$

円の中心が $(1,-2)$ で，この円が x 軸に接するから　$a=2$
したがって，$(*)$ に $a=2$，$x=0$ を代入すると

$$(y+1)^2=3 \quad \text{これを解いて} \quad y=-1\pm\sqrt{3}$$

よって求める線分の長さは

$$(-1+\sqrt{3})-(-1-\sqrt{3})=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

(8) $P(x)$ を $x-1$，$x+1$ で割った余りが，それぞれ 4，-1 であるから，剰余の定理により

$$P(1)=4, \quad P(-1)=1 \quad \cdots(*)$$

$P(x)$ を x^2-1 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x^2-1)Q(x)+Ax+B$$

上式に $(*)$ を代入すると

$$A+B=4, \quad -A+B=-1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{A=\frac{5}{2}},\ \boldsymbol{B=\frac{3}{2}}$$

5. (1) $f(x)=x^3-3x^2$ より $f(0)=0$，$f(2)=2^3-3\cdot2^2=-4$

よって　　$M_{0,2}=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{-4}{2}=\boldsymbol{-2}$

(2) $f'(x)=3x^2-6x$ より，$f'(c)=-2$ であるから

$$3c^2-6c=-2 \quad \text{ゆえに} \quad 3c^2-6c+2=0$$

$0<c<2$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{c=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{3}}$

(3) $f'(c)=-3$ となるとき

$$3c^2-6c=-3 \quad \text{ゆえに} \quad c^2-2c+1=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c=1}$$

(4) $f'(x)=3x^2-6x=3(x-1)^2-3\geqq-3$ より，$f'(c)\geqq-3$
平均値の定理により

$$M_{a,b}=f'(c) \quad (a<c<b) \quad \text{よって} \quad M_{a,b}\geqq-3$$

3.3 平成 29 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい.

   (1) $(4x^2 - 3xy + 2y^2)(2x - 3y)$ を展開しなさい.

   (2) $x^4 - 6x^2 - 7$ を因数分解しなさい.

   (3) $\dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{3}}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい.

   (4) 2 次方程式 $3x^2 + 4ax + 2a = 0$ (a は定数) が 2 つの異なる実数解を持ち，その 2 つの解の符号が異なるとき，a の値の範囲を求めなさい.

   (5) グラフが 3 点 $(-1,\ 4)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$ を通る 2 次関数を求めなさい.

   (6) 等式 $7x^3 + x + 2 = 7(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + 10$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めなさい.

   (7) 鈍角 θ に対して $\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい.

   (8) $\triangle$ABC について $\angle \mathrm{A} = 60°$，$\angle \mathrm{B} = 45°$，$\mathrm{BC} = 5$ のとき，この三角形の外接円の半径 R を求めなさい.

   (9) (8) において $\triangle$ABC の面積 S を求めなさい.

   (10) 不等式 $3x + 5 > 5|x - 1|$ を解きなさい.

2. x の関数 $y = \sin^2 x - \cos x + 1$ $(0° \leqq x < 360°)$ がある.

   (1) $\cos x = t$ とおいて，y を t の関数で表せ．また t の値の範囲を求めなさい.

   (2) y の最小値を求めなさい．またそのときの x の値を求めなさい.

3. 点 $\mathrm{P}(1,\ 5)$ を直線 $\ell : y = x + 1$ に関して対称点 Q に移動させる．さらに点 Q を y 軸に関して対称点 R に移動させる．点 R の座標を求めなさい.

4. 次の各小問に答えなさい．

   (1) 整式 $P(x) = x^3 - 2ax + 3$ を $x + 2$ で割った余りが -1 であるように a の値を求めなさい．

   (2) $2x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$ の解を求めなさい．

   (3) $\dfrac{x - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}}{1 - \dfrac{1}{x + 1}}$ を計算して簡単にしなさい．

   (4) $(\sqrt{-6} - \sqrt{-24}) \times \sqrt{-9}$ を計算して簡単にしなさい．

   (5) 点 $(-1,\ 3)$ を通り，2 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 0)$ を結ぶ線分に垂直な直線の方程式を求めなさい．

   (6) 2 点 $(4, -2)$，$(-6,\ 2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めなさい．

   (7) $2^x - 24 \cdot 2^{-x} = 5$ の解を求めなさい．

   (8) $2\log_3 x - \log_3(x + 2) = 0$ の解を求めなさい．

   (9) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin(2x)$ の値を求めなさい．

   (10) 極限値 $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$ を求めなさい．

5. 次の各設問に答えなさい．

   (1) 関数 $f(x) = x^2 + x$ の導関数を定義に従って求めなさい．

   (2) 曲線 $y = x^2 - 2x$ 上の点 $(1, -1)$ における接線の方程式を求めなさい．

6. 次の各設問に答えなさい．

   (1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ の増減表を書いて，極値を求めなさい．

   (2) (1) の増減表を用いて，$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ のグラフを書きなさい．

解答例

1. (1) $(4x^2-3xy+2y^2)(2x-3y)=\boldsymbol{8x^3-18x^2y+13xy^2-6y^3}$

   (2) $x^4-6x^2-7=\boldsymbol{(x^2+1)(x^2-7)}$

   (3) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{6}+1}=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{6}-1)}{(\sqrt{6}+1)(\sqrt{6}-1)}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{5}}$

   (4) 2 次方程式 $3x^2+4ax+2a=0\cdots(*)$ は異なる 2 つの実数解をもつから

   $$D/4=(2a)^2-3\cdot 2a=2a(2a-3)>0 \quad \text{ゆえに} \quad a<0,\ \frac{3}{2}<a \quad \cdots①$$

   $(*)$ の 2 解を α，β とすると，この 2 解の符号が異なるから，解と係数の関係により

   $$\alpha\beta=\frac{2a}{3}<0 \quad \text{ゆえに} \quad a<0 \quad \cdots②$$

   ①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{a<0}$

   (5) 求める 2 次関数は点 $(0,\ 1)$ を通るから

   $$y=ax^2+bx+1$$

   とおく．これが 2 点 $(-1,\ 4)$，$(1,\ 0)$ を通るから

   $$4=a-b+1,\ \ 0=a+b+1 \quad \text{ゆえに} \quad a-b=3,\ \ a+b=-1$$

   これを解いて　$a=1$，$b=-2$　よって　$\boldsymbol{y=x^2-2x+1}$

   (6) $7x^3+x+2=7(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+10$ の右辺を整理すると

   $$7x^3+x+2=7x^3+(-21+a)x^2+(21-2a+b)x+a-b+3$$

   同じ次数の項の係数は等しいので

   $$0=-21+a,\ \ 1=21-2a+b,\ \ 2=a-b+3$$

   これを解いて　　$\boldsymbol{a=21,\ b=22}$

   (7) $\cos\theta=-\dfrac{1}{3}$ を $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

   $$1+\tan^2\theta=9 \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2\theta=8$$

   θ が鈍角であるから，$\tan\theta<0$ より　　$\boldsymbol{\tan\theta=-2\sqrt{2}}$

(8) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=2R$　よって　$R=\dfrac{5}{2\sin 60^\circ}=\boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{3}}}$

(9) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B}=2R$

ゆえに　$b=2R\sin B=2\times\dfrac{5}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(60^\circ+45^\circ)=75^\circ$

このとき，加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ+30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\\ &=\frac{25(\sqrt{3}+1)}{4\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{25(3+\sqrt{3})}{12}}\end{aligned}$$

(10) 与えられた不等式から

$$-(3x+5)<5(x-1)<3x+5$$

ゆえに　$\begin{cases}-(3x+5)<5(x-1)\\ 5(x-1)<3x+5\end{cases}$　これを解いて　$\boldsymbol{0<x<5}$

2. (1) $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t^2$ より $(0^\circ\leqq x<360^\circ)$

$$\boldsymbol{y=-t^2-t+2\quad(-1\leqq t\leqq 1)}$$

(2) (1) の結果から

$$y=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

よって　$t=1$　すなわち　$\boldsymbol{x=0^\circ}$ のとき，最小値 $\mathbf{0}$

3. 点 $\mathrm{P}(1,\ 5)$ を通り $\ell : y = x + 1$ に垂直な直線は

$$y - 5 = -(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad y = -x + 6$$

この直線と ℓ の交点の座標は $\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

この点は 2 点 P，Q の中点であるから，点 Q の座標を $(a,\ b)$ とすると，

$$\frac{a+1}{2} = \frac{5}{2},\quad \frac{b+5}{2} = \frac{7}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Q}(4,\ 2)$$

y 軸に関して Q と対称な点 R の座標は $\quad \boldsymbol{(-4,\ 2)}$

4. (1) $P(x) = x^3 - 2ax + 3$ を $x + 2$ で割った余りが -1 であるから，$P(-2) = -1$ より

$$-8 + 4a + 3 = -1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 1}$$

(2) $2x^3 - x^2 - 4x - 1 = 0$ より $\quad (x+1)(2x^2 - 3x - 1) = 0$

これを解いて $\quad \boldsymbol{x = -1,\ \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{4}}$

(3) $\dfrac{x - \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{x}}}{1 - \dfrac{1}{x+1}} = \dfrac{x - \dfrac{x}{x+1}}{1 - \dfrac{1}{x+1}} = \dfrac{x(x+1) - x}{(x+1) - 1} = \dfrac{x^2}{x} = \boldsymbol{x}$

(4) $(\sqrt{-6} - \sqrt{-24}) \times \sqrt{-9} = (\sqrt{6}\,i - 2\sqrt{6}\,i) \times 3i = -\sqrt{6}\,i \times 3i = \boldsymbol{3\sqrt{6}}$

(5) 2 点 $(1,\ 1)$，$(3,\ 0)$ を通る直線の傾きは $\quad \dfrac{0-1}{3-1} = -\dfrac{1}{2}$

点 $(-1,\ 3)$ を通り，これに垂直な直線の方程式は

$$y - 3 = 2(x + 1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = 2x + 5}$$

(6) 2 点 $(4, -2)$，$(-6,\ 2)$ の中点は $\quad (-1,\ 0)$

したがって，円の半径は $\quad \sqrt{(4+1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

よって，求める円の方程式は $\quad \boldsymbol{(x+1)^2 + y^2 = 29}$

(7) $2^x - 24 \cdot 2^{-x} = 5$ について，$t = 2^x$ とおくと $(t > 0)$

$$t - \frac{24}{t} = 5 \quad \text{ゆえに} \quad (t+3)(t-8) = 0$$

$t > 0$ より $\quad t = 8 \quad$ ゆえに $\quad 2^x = 8 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{x = 3}$

(8) $2\log_3 x - \log_3(x+2) = 0$

真数は正であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad x+2 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 0 \quad \cdots ①$$

方程式を変形すると　$\log_3 x^2 = \log_3(x+2)$

ゆえに　$x^2 = x+2$　すなわち　$(x-2)(x+1) = 0$

① に注意して　$\boldsymbol{x = 2}$

(9) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{3}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x = \frac{1}{9} \quad \text{ゆえに} \quad 2\sin x\cos x = -\frac{8}{9}$$

よって　　$\sin(2x) = 2\sin x\cos x = \boldsymbol{-\dfrac{8}{9}}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2-x+1) = \boldsymbol{3}$

5. (1) 導関数の定義により

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+(x+h)-(x^2+x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2+h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h+1) = 2x+1$$

(2) (1) の結果から

$$f'(1) = 2\cdot 1 + 1 = 3$$

求める接線は，点 $(1,-1)$ を通り，傾き 3 の直線であるから

$$y-(-1) = 3(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 3x-4}$$

6. (1) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

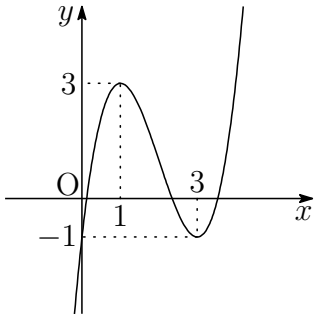
$y' = 0$ とすると　$x = 1,\ 3$

したがって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

よって，$\boldsymbol{x = 1}$ で極大値 **3**，$\boldsymbol{x = 3}$ で極小値 $\boldsymbol{-1}$

(2) (1) の結果から，次のようになる．



3.4　平成 28 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい.

   (1) $(x^2-2x+3)^2$ を展開しなさい.

   (2) $a^2x-bc^2+a^2b-c^3$ を因数分解しなさい.

   (3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{10}}{\sqrt{10}-2\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい.

   (4) 繁分数式 $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ を簡単にしなさい.

   (5) 2 次関数 $y=-x^2+ax-9$ が x 軸と接するように a の値を定めなさい.

   (6) 等式 $\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2-x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めなさい.

   (7) $\cos x-\sin x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\cos^3 x-\sin^3 x$ の値を求めなさい.

   (8) △ABC について $\mathrm{AB}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{CA}=1+\sqrt{3}$ のとき，∠C の大きさを求めなさい.

   (9) (8) において △ABC の面積 S を求めなさい.

   (10) 不等式 $|2x+1|>7$ を解きなさい.

2. 次の各問いに答えなさい.

   (1) $\sin(90^\circ-x)-\sin(180^\circ+x)+\cos(90^\circ+x)+\cos(180^\circ-x)$ を簡単にしなさい.

   (2) $0^\circ<x<180^\circ$ で $\tan x=2$ のとき，$\dfrac{1-\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$ の値を求めなさい.

3. 2 直線 $2x-y+3=0$，$x+y=0$ の交点を通り，直線 $x-y+3=0$ に垂直な直線の方程式を求めなさい.

4. 次の各小問に答えなさい．

(1) $\dfrac{5-3i}{3+2i}+\dfrac{5+3i}{3-2i}$ を簡単にしなさい．ただし，i は虚数単位とする．

(2) 整式 $P(x)$ を x^2+x-2 で割ったときの余りが $3x-2$ であるとき $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めなさい．

(3) 平面上に 3 点 A$(1,\ 3)$，B$(-2,-2)$，C$(3,\ 0)$ がある．四角形 ABCD が平行四辺形となり，線分 AC がこの平行四辺形の対角線となる位置に点 D があるとき，点 D の座標を求めなさい．

(4) 円 $x^2-2ax+y^2+4y+2+2a^2=0$ が y 軸に接するとき，a の値を求めなさい．

(5) α が第 2 象限の角で $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\tan\dfrac{\alpha}{2}$ の値を求めなさい．

(6) $0\leq x<2\pi$ のとき，方程式 $2\cos^2 x-3\sin x=0$ を解きなさい．

(7) $a>0$ とする．$\sqrt{1+\left(\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^2}$ を簡単にしなさい．

(8) 不等式 $4^x-2^{x+1}-8>0$ を解きなさい．

(9) 方程式 $\log_3 x=\log_9(x+6)$ を解きなさい．

(10) a，b，c を定数とする．このとき，関数 $f(x)=a(c^2x^2+b^2cx)-bc^3$ の導関数を求めなさい．

5. 関数 $f(x)=x^3-4x+1$ について，次の問いに答えなさい．

(1) この関数の x が -1 から 2 まで変化するときの平均変化率を求めなさい．

(2) この関数の $x=c$ $(-1<c<2)$ における微分係数が (1) で求めた平均変化率に等しいとき，c の値を求めなさい．

(3) (2) で求めた c に対して，点 C$(c,\ f(c))$ における関数 $y=f(x)$ のグラフの接線 l を求めなさい．

(4) (3) で求めた点 C における接線 l と関数 $y=f(x)$ のグラフとの点 C 以外の交点を求めなさい．

解答例

1. (1) $(x^2-2x+3)^2 = \boldsymbol{x^4-4x^3+10x^2-12x+9}$

(2) (最低次数の文字 b に着目する)

$$\begin{aligned} a^2c-bc^2+a^2b-c^3 &= b(a^2-c^2)+c(a^2-c^2) \\ &= (a^2-c^2)(b+c) \\ &= \boldsymbol{(a+c)(a-c)(b+c)} \end{aligned}$$

(3) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{10}}{\sqrt{10}-2\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{10}-\sqrt{3})(2\sqrt{3}+\sqrt{10})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{10})(2\sqrt{3}+\sqrt{10})} = \boldsymbol{\dfrac{4+\sqrt{30}}{2}}$

(4) $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{y^2-x^2}{xy(x+y)} = \dfrac{(y+x)(y-x)}{xy(x+y)} = \boldsymbol{\dfrac{y-x}{xy}}$

別解 $\dfrac{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} = \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y} = \boldsymbol{\dfrac{y-x}{xy}}$

(5) 係数について

$$a^2-4\cdot(-1)\cdot(-9)=0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=36 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=\pm 6}$$

(6) 与えられた等式から

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}$$

上式の両辺に $(x+1)(x^2-x+1)$ に掛けると

$$1 = a(x^2-x+1)+(x+1)(bx+c)$$

右辺を x について整理すると

$$1 = (a+b)x^2+(-a+b+c)x+(a+c)$$

同じ次数の項の係数は等しいから

$$a+b=0, \quad -a+b+c=0, \quad a+c=1$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3},\ b=-\dfrac{1}{3},\ c=\dfrac{2}{3}}$

(7) $\cos x - \sin x = \dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると $(\cos x - \sin x)^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

ゆえに $1 - 2\cos x \sin x = \dfrac{1}{4}$ したがって $\cos x \sin x = \dfrac{3}{8}$

よって

$$\begin{aligned}\cos^3 x - \sin^3 x &= (\cos x - \sin x)(\cos^2 x + \cos x \sin x + \sin^2 x) \\ &= (\cos x - \sin x)(1 + \cos x \sin x) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{8}\right) = \boldsymbol{\frac{11}{16}}\end{aligned}$$

(8) $a = 2$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$ であるから，余弦定理により

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2^2 + (1+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2 \cdot (1+\sqrt{3})} = \frac{2(3+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $\boldsymbol{C = 30^\circ}$

(9) (8) の結果から

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot 2(1+\sqrt{3}) \cdot \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

(10) $|2x + 1| > 7$ より

$2x + 1 < -7$ または $7 < 2x + 1$ よって $\boldsymbol{x < -4,\ 3 < x}$

2. (1) $\sin(90^\circ - x) - \sin(180^\circ + x) + \cos(90^\circ + x) + \cos(180^\circ - x)$
$= \cos x + \sin x - \sin x - \cos x = \boldsymbol{0}$

(2) $$\begin{aligned}\frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1-\sin x} &= \frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x(1+\sin x)}{(1+\sin x)(1-\sin x)} \\ &= \frac{1-\sin x}{\cos x} + \frac{1+\sin x}{\cos x} = \frac{2}{\cos x}\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 2^2 = 5$ $\quad 0^\circ < x < 90^\circ$ より $\quad \dfrac{1}{\cos x} = \sqrt{5}$

よって $\quad \dfrac{1-\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1-\sin x} = \boldsymbol{2\sqrt{5}}$

3. 2 直線 $2x - y + 3 = 0$, $x + y = 0$ の交点は $(-1,\ 1)$

直線 $x - y + 3 = 0$ $(y = x + 3)$ に垂直な直線の傾きは -1

よって，求める直線は

$y - 1 = -1(x + 1)$ すなわち $\boldsymbol{y = -x}$

4. (1) $\dfrac{5-3i}{3+2i}+\dfrac{5+3i}{3-2i}=\dfrac{(5-3i)(3-2i)+(5+3i)(3+2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\boldsymbol{\dfrac{18}{13}}$

(2) $P(x)$ を x^2+x-2 で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+3x-2$$

よって，$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは　$P(1)=\boldsymbol{1}$

(3) D$(x,\ y)$ とする．四角形 ABCD が平行四辺形であるとき，線分 AC，BC の中点は一致するから

$$\frac{1+3}{2}=\frac{-2+x}{2},\quad \frac{3+0}{2}=\frac{-2+y}{2}$$

これを解いて　$x=6,\ y=5$

よって，点 D の座標は　$\boldsymbol{(6,\ 5)}$

(4) 円 $x^2-2ax+y^2+4y+2+2a^2=0$ を変形すると

$$(x-a)^2+(y+2)^2=2-a^2$$

この円は中心 $(a,-2)$，半径 $\sqrt{2-a^2}$．これが y 軸に接するから

$$|a|=\sqrt{2-a^2}$$

よって　$\boldsymbol{a=\pm 1}$

(5)
$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}=5$$

α は第 2 象限の角より，$\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから　$\tan\dfrac{\alpha}{2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(6) $2\cos^2 x-3\sin x=0$ より

$$2(1-\sin^2 x)-3\sin x=0$$

ゆえに　$(\sin x+2)(2\sin x-1)=0$

$0\leqq x<2\pi$ に注意して　$\sin x=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

(7) $\sqrt{1+\left(\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}}$

(8) $t=2^x$ とおくと，$t>0$．与えられた不等式は

$$t^2-2t-8>0$$

ゆえに　$(t+2)(t-4)>0$

したがって　$t>4$　よって，$2^x>4$ を解くと　$\boldsymbol{x>2}$

(9)
$$\log_3 x=\log_9(x+6)$$

真数は正であるから　$x>0$　かつ　$x+6>0$　すなわち　$x>0$　$\cdots$①

方程式から，$\log_9 x^2=\log_9(x+6)$ となるから

$$x^2=x+6$$

ゆえに　$(x+2)(x-3)=0$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x=3}$

(10) $\boldsymbol{f'(x)=ac(2cx+b^2)}$

5. (1) 求める平均変化率は

$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{1-4}{3}=\boldsymbol{-1}$$

(2) $f'(x)=3x^2-4$. このとき，$f'(c)=-1$ であるから

$3c^2-4=-1$　このとき c の値の範囲に注意して　$\boldsymbol{c=1}$

(3) $f(1)=-2$. l の方程式は，点 $(1,-2)$ を通り，傾き -1 の直線であるから

$y-(-2)=-1(x-1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=-x-1}$

(4) (3) の結果から　$x^3-4x+1=-x-1$　ゆえに　$(x-1)^2(x+2)=0$
C 以外の交点の x 座標は　-2　よって，(3) の結果から　$\boldsymbol{(-2,\ 1)}$

3.5　平成 27 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えよ．

   (1) $(2x^2-3xy+4y^2)(3x-2y)$ を展開しなさい．

   (2) x^4+5x^2-6 を因数分解しなさい．

   (3) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化しなさい．

   (4) 2 次方程式 $3x^2+6ax-2a=0$ (a は定数) が異なる 2 つの解を持ち，その 2 つの解の間に -1 があるとき，a の値の範囲を求めなさい．

   (5) 2 点 $(2,\ 9)$，$(1,-6)$ を通り，対称軸が $x=-1$ である 2 次関数を求めなさい．

   (6) 等式 $3x^3-x+2=a(x-1)^3+b(x-1)^2+8(x-1)+4$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めなさい．

   (7) 鈍角 x に対して $\tan x=-3$ のとき，$\sin x$ の値を求めなさい．

   (8) △ABC について $\angle \mathrm{A}=60^\circ$，$\angle \mathrm{C}=75^\circ$，$\mathrm{BC}=10$ のとき，この三角形の外接円の半径 R を求めなさい．

   (9) (8) において AC を求めなさい．

   (10) 不等式 $5|x-2|<3x+2$ を解きなさい．

2. x の関数 $y=\cos^2 x-\sin x$ $(0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$ がある．

   (1) $\sin x=t$ とおいて，y を t の関数で表せ．また t の値の範囲を求めなさい．

   (2) y の最大値を求めなさい．またそのときの x の値を求めなさい．

3. 点 $\mathrm{P}(1,\ 4)$ の直線 $\ell : y=x+1$ に関する対称点 Q の座標を求めなさい．

4. 次の各小問に答えなさい.

(1) 等式 $(3i-2)x+(3-2i)y=4-i$ を満たす実数 x, y の値を求めなさい. ただし, i は虚数単位とする.

(2) 整式 $P(x)=x^3-3x^2+5x+a$ を $x-2$ で割ったときの余りが 3 となるように, 定数 a の値を求めなさい.

(3) 円 $x^2+y^2=1$ と円 $(x-1)^2+(y+2)^2=r^2$ $(r>0)$ が外接するとき, r の値を求めなさい.

(4) α が第 1 象限の角, β が第 2 象限の角で, $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\sin\beta=\dfrac{3}{5}$ のとき, $\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めなさい.

(5) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき, $2\sin x-\sqrt{3} \leqq 0$ を解きなさい.

(6) $\sqrt{a^3b}\times\sqrt[3]{(ab)^2}\div\sqrt[6]{ab^{-5}}$ を簡単にしなさい.

(7) $9^{\log_3 2}$ を簡単にしなさい.

(8) 方程式 $9^x-2\cdot3^{x+1}-27=0$ を解きなさい.

(9) 不等式 $\log_2(x-3)<1$ を解きなさい.

(10) 関数 $f(x)=x^2+x+1$ において, x が a から b まで変化するときの平均変化率を求めなさい.

5. 関数 $y=f(x)=x^3-3x^2-9x$ について, 次の問いに答えなさい.

(1) この関数の極値を求めなさい.

(2) この関数の区間 $[-2,\ 2]$ における最大値と最小値を求めなさい.

(3) この関数のグラフの接線で点 $(-1,\ 5)$ を通るものを求めなさい.

解答例

1. (1) $\boldsymbol{6x^3-13x^2y+18xy^2-8y^3}$

(2) $x^4+5x^2-6=(x^2-1)(x^2+6)$

$$=\boldsymbol{(x+1)(x-1)(x^2+6)}$$

(3) $\dfrac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}-1}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\boldsymbol{2\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2}-1}$

(4) $f(x)=3x^2+6ax-2a$ とおくと，$f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D/4=(3a)^2-3\cdot(-2a)=9a^2+6a=3a(3a+2)$$

方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの (実数) 解をもつから，$D>0$ より

$$3a(3a+2)>0\quad\text{これを解いて}\quad a<-\frac{2}{3},\ 0<a\quad\cdots①$$

条件により，$f(-1)<0$ であるから

$$3(-1)^2+6a\cdot(-1)-2a<0\quad\text{これを解いて}\quad a>\frac{9}{8}\quad\cdots②$$

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{a>\dfrac{9}{8}}$

(5) 対称軸が $x=-1$ である 2 次関数を

$$y=a(x+1)^2+q$$

とおくと，これが 2 点 $(2,\ 9)$，$(1,-6)$ を通るから

$$9=9a+q,\quad -6=4a+q\quad\text{これを解いて}\quad a=3,\ q=-18$$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=3(x+1)^2-18}$

(6) 与えられた等式から

$$a(x-1)^3+b(x-1)^2=3x^3-9x+6$$
$$=3(x-1)^2(x+2)$$

両辺を $(x-1)^2$ で割ると

$$a(x-1)+b=3(x+2)=3(x-1)+9$$

よって　　$\boldsymbol{a=3,\ b=9}$

(7) $\tan x = -3$ を $1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ に代入すると

$$1 + (-3)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2 x = \frac{1}{10}$$

x が鈍角のとき，$\sin x > 0$ であるから

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

(8) 正弦定理により

$$2R = \frac{10}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad R = \frac{10}{2\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{10\sqrt{3}}{3}}$$

(9) $A = 60^\circ$，$C = 75^\circ$ より

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

正弦定理により $\dfrac{10}{\sin 60^\circ} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 45^\circ}$ よって $\mathrm{AC} = \dfrac{10\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \boldsymbol{\dfrac{10\sqrt{6}}{3}}$

(10) 不等式 $5|x - 2| < 3x + 2$ より

$$-(3x + 2) < 5(x - 2) < 3x + 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{1 < x < 6}$$

2. (1) $t = \sin x$，$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ より $\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq 1}$
$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ であるから

$$y = \cos^2 x - \sin x = (1 - t^2) - t = \boldsymbol{-t^2 - t + 1}$$

(2) (1) の結果から

$$y = -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$$

よって $t = -\dfrac{1}{2}$ すなわち $\boldsymbol{x = 210^\circ, 330^\circ}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

3. 点 Q の座標を $(a,\ b)$ とする．

PQ の中点 $\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{4+b}{2}\right)$ は直線 $\ell : y = x + 1$ 上にあるから

$$\frac{4+b}{2} = \frac{1+a}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad a - b = 1 \quad \cdots ①$$

直線 ℓ の傾きは 1，直線 PQ の傾きは $\dfrac{b-4}{a-1}$

直線 ℓ と直線 PQ は垂直であるから

$$1 \cdot \frac{b-4}{a-1} = -1 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 5 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$a = 3$，$b = 2$　よって　$\mathrm{Q}\boldsymbol{(3,\ 2)}$

4. (1) 与えられた等式から

$$-2x + 3y + (3x - 2y)i = 4 - i$$

$-2x + 3y$，$3x - 2y$ は実数であるから

$$-2x + 3y = 4,\ \ 3x - 2y = -1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = 1,\ y = 2}$$

(2) 剰余の定理により，$P(2) = 3$ であるから

$$8 - 12 + 10 + a = 3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -3}$$

(3) 2 円の中心間の距離は　$\sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

2 円の半径は，1 と r であるから，これらが外接するとき

$$1 + r = \sqrt{5} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\sqrt{5} - 1}$$

(4) α は第 1 象限の角であるから，$\sin\alpha > 0$ より

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

β は第 2 象限の角であるから，$\cos\beta < 0$ より

$$\cos\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

よって，加法定理により

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{5}{13} \times \left(-\frac{4}{5}\right) - \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} = \boldsymbol{-\frac{56}{65}}\end{aligned}$$

(5) $\sin x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ であるから

$$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{3},\quad \frac{2}{3}\pi \leqq x < 2\pi}$$

(6) $\sqrt{a^3b} \times \sqrt[3]{(ab)^2} \div \sqrt[6]{ab^{-5}} = (a^3b)^{\frac{1}{2}} \times (a^2b^2)^{\frac{1}{3}} \div (ab^{-5})^{\frac{1}{6}}$
$= a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{1}{6}}b^{-\frac{5}{6}}$
$= a^{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{6}} = \boldsymbol{a^2b^2}$

(7) $9^{\log_3 2} = 3^{2\log_3 2} = 3^{\log_3 4} = \boldsymbol{4}$

補足 $a^m = M$ のとき，$m = \log_a M$ であるから　$\boldsymbol{a^{\log_a M} = M}$

(8) 与えられた不等式から　$(3^x)^2 - 6\cdot 3^x - 27 = 0$

したがって　　$(3^x + 3)(3^x - 9) = 0$

$3^x > 0$ であるから　$3^x = 9$　よって　$\boldsymbol{x = 2}$

(9) 与えられた不等式から　$\log_2(x-3) < \log_2 2$
底 2 は 1 より大きいから　$0 < x - 3 < 2$　よって　$\boldsymbol{3 < x < 5}$

(10) 求める平均変化率は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b^2+b+1)-(a^2+a+1)}{b-a}$$
$$= \frac{(b-a)(a+b+1)}{b-a} = \boldsymbol{a+b+1}$$

5. (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

よって，極大値 $\boldsymbol{f(-1) = 5}$，極小値 $\boldsymbol{f(3) = -27}$

(2) $[-2,\ 2]$ における $f(x)$ の増減表は

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	5	↘	-22

よって，最大値 $\boldsymbol{f(-1) = 5}$，最小値 $\boldsymbol{f(2) = -22}$

(3) $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = 3(a^2-2a-3)x - 2a^3 + 3a^2 \cdots (*)$$

これが，点 $(-1,\ 5)$ を通るから

$$5 = 3(a^2 - 2a - 3)\cdot(-1) - 2a^3 + 3a^2 \quad \text{整理すると} \quad a^3 - 3a - 2 = 0$$

したがって　$(a-1)^2(a-2) = 0$　これを解いて　$a = 1, 2$
これらを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{y = 5, \quad y = -9x - 4}$$

3.6 平成 26 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各問いに答えなさい.

   (1) $(x^2-2x-1)(2x^2-4x+1)$ を展開しなさい.

   (2) $2ab-2bc+a^2-ac$ を因数分解しなさい.

   (3) $\alpha=2+\sqrt{3}$, $\beta=2-\sqrt{3}$ のとき, $\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\beta}$ の値を求めなさい.

   (4) $|2x-3|<3\sqrt{2}$ を満たす整数はいくつあるか答えなさい.

   (5) n を自然数とするとき, $3n^2-26n$ が最小となる n の値を求めなさい.

   (6) $90^\circ<\theta<180^\circ$ で, $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, $\tan\theta$ の値を求めなさい.

   (7) 三角形 ABC において AC $=2$, $\angle$B $=45^\circ$, $\angle$C $=60^\circ$ であるとき, 三角形 ABC の面積を求めなさい.

2. 二次関数 $f(x)=x^2-2px+p$ (p は実数) のグラフを C とする. このとき, 次の問いに答えなさい.

   (1) C が x 軸と異なる 2 点で交わるとき, p の値の範囲を求めなさい.

   (2) C が x 軸の正の部分と異なる 2 点で交わるとき, p の値の範囲を求めなさい.

   (3) C が x 軸の $1<x<2$ の部分と交わるとき, p の値の範囲を求めなさい.

3. 三角形 ABC において, AB $=$ CA $=3$, BC $=4$ であるとき,

   (1) $\cos A$ の値を求めなさい.

   (2) 三角形 ABC の外接円の半径を求めなさい.

   (3) 頂点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし, 三角形 ABC を直線 AH のまわりに 1 回転してできる直円すいを V とする・直円すい V を含む最小の球の体積を求めなさい.

4. 次の問いに答えなさい.

   (1) 式 $27a^3-8$ を因数分解しなさい.

   (2) 2 次方程式 $2x^2-12x+22=0$ の解を求めなさい.

   (3) 3 次方程式 $x^3-3x^2-x+3=0$ の解を求めなさい.

   (4) $\dfrac{a+b}{\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}}$ を変形して普通の分数式で表しなさい.

(5) 2 直線 $x+2y=0$，$6x-y-13=0$ の交点を求め，さらにこの交点と点 $(-1,\ 4)$ を通る直線の方程式を求めなさい．

(6) 円 $x^2+y^2-6x+4y-37=0$ と直線 $x-y+3=0$ との交点を求めなさい．

(7) 指数方程式 $2^{2x+1}+2^{3x}=5\cdot 2^{x+4}$ の解を求めなさい．

(8) 式 $4\log\sqrt{150}-\log 54+\log 24=0$ の値は整数となる．この値を求めなさい．ただし，log は常用対数を表すとする．

(9) $\sqrt{3}\cos x+\sin x$ を $r\sin(x\pm\alpha)$ $\left(0\leqq\alpha\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の形で表しなさい．

(10) 式 $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(x+\pi)$ をできるだけ簡単にしなさい．

5. 関数 $y=x^3-6x^2+9x\cdots$ ① について，次の問いに答えなさい．

(1) 曲線 ① の極値を調べ，下の増減表を完成し，その曲線を図示しなさい．

(2) 曲線 ① 上の $x=2$ に対応する点における接線の方程式を求めなさい．

(3) 曲線 ① 上の極大をとる点を P，極小をとる点を Q とおくとき，直線 PQ の方程式を答えなさい．

(4) 曲線 ① の $x=a$ から $x=b$ $(a<b)$ までの平均変化率 K を a と b の式で表しなさい．

解答例

1. (1) $\boldsymbol{2x^4 - 8x^3 + 7x^2 + 2x - 1}$

(2) b に着目すると

$$\begin{aligned} 2ab - 2bc + a^2 - ac &= 2b(a-c) + a(a-c) \\ &= \boldsymbol{(a-c)(a+2b)} \end{aligned}$$

(3) $\alpha = 2+\sqrt{3}$，$\beta = 2-\sqrt{3}$ より　$\alpha+\beta = 4$，$\alpha\beta = 1$

よって　$\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} = \dfrac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \dfrac{4^2 - 2\cdot 1}{1} = \boldsymbol{14}$

(4) $|2x-3| < 3\sqrt{2}$ を解いて　$\dfrac{3-3\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}$　$\cdots$①

$$-1 < \frac{3-3\sqrt{2}}{2} < 0,\ 3 < \frac{3+3\sqrt{2}}{2} < 4 \text{ より}$$

① を満たす整数 x は　$0,\ 1,\ 2,\ 3$　よって　**4** 個

(5) $3n^2 - 26n = 3\left(n^2 - \dfrac{26}{3}n\right) = 3\left(n - \dfrac{13}{3}\right)^2 - \dfrac{169}{9}$

$\left|n - \dfrac{13}{3}\right|$ を最小にする整数 n であるから　$\boldsymbol{n = 4}$

(6) $2x^2 - x - 1 = 2$ を解くと　$a = -1,\ \dfrac{3}{2}$

このとき，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-1 < a \leqq \dfrac{3}{2}}$

(7) $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$ より

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

よって　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(8) $b = 2$，$B = 45^\circ$，$C = 60^\circ$ であるから，正弦定理により

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad c = \frac{2\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{6}$$

$A = 180^\circ - (B+C) = 75^\circ$

よって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}}$

2. (1) $f(x)=0$ の判別式を D とすると　$D/4=p^2-p$
このとき，$D>0$ であるから　$p^2-p>0$　よって　$\boldsymbol{p<0,\ 1<p}$

(2) 下に凸の放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式 $x=p$ および $f(0)=p$ から

$$p>0$$

また，これと (1) の結果により　　$\boldsymbol{p>1}$

(3) $f(1)=1-p$，$f(2)=4-3p$，このとき，$f(1)f(2)<0$ であるから

$$(1-p)(4-3p)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{1<p<\frac{4}{3}}$$

3. (1) $a=4$，$b=c=3$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+3^2-4^2}{2\cdot3\cdot3}=\boldsymbol{\frac{1}{9}}$$

(2) (1) の結果から　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

正弦定理により　$2R=\dfrac{a}{\sin A}$

よって　$R=\dfrac{1}{2}\cdot4\div\dfrac{4\sqrt{5}}{9}=\boldsymbol{\dfrac{9\sqrt{5}}{10}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^3=\boldsymbol{\frac{243\sqrt{5}}{50}\pi}$$

4. (1) $27a^3-8=\boldsymbol{(3a-2)(9a^2+6a+4)}$

(2) $x^2-6x+11=0$ を解いて　$\boldsymbol{x=3\pm\sqrt{2}\,i}$

(3) 与えられた方程式から

$$\begin{aligned} x^3-3x^2-x+3&=0\\ x^2(x-3)-(x-3)&=0\\ (x-3)(x^2-1)&=0\\ (x-3)(x+1)(x-1)&=0 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{x=3,\ \pm1}$

(4) $\dfrac{a+b}{\dfrac{b}{a}-\dfrac{a}{b}}=\dfrac{ab(a+b)}{b^2-a^2}=\dfrac{ab(a+b)}{(b+a)(b-a)}=\boldsymbol{\dfrac{ab}{b-a}}$

(5) 2 直線 $x+2y=0$，$6x-y-13=0$ の交点は $\boldsymbol{(2,\,-1)}$
この交点と $(-1,\ 4)$ を通る直線の方程式は $\boldsymbol{5x+3y-7=0}$

(6) 連立方程式を解いて $\boldsymbol{(2,\ 5),\ (-4,\,-1)}$

(7) $t=2^x$ とおくと $(t>0)$

$$2t^2+t^3=80t \quad \text{ゆえに} \quad t(t+10)(t-8)=0$$

したがって $t=8$ よって $\boldsymbol{x=3}$

(8) $4\log\sqrt{150}-\log 54+\log 24=\log\dfrac{150^2\times 24}{54}=\log 10^4=\boldsymbol{4}$

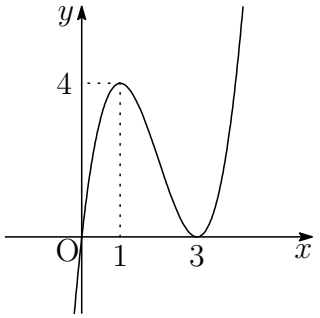
(9) $\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

(10) $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos x$，$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$，$\sin(x+\pi)=-\sin x$
よって (与式) $=\boldsymbol{-\sin x}$

5. (1) $y=x^3-6x^2+9x$ より

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2-12x+9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4	↘	0	↗



$x=1$ で極大値 $\boldsymbol{4}$，$x=3$ で極小値 $\boldsymbol{0}$

(2) $f(x)=x^3-6x^2+9x$ とすると，接線の方程式は

$$y-f(2)=f'(2)(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad y-2=-3(x-2)$$

よって $\boldsymbol{y=-3x+8}$

(3) P$(1,\ 4)$，Q$(3,\ 0)$ より，直線 PQ の方程式は

$$y-0=\frac{0-4}{3-1}(x-3) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-2x+6}$$

(4) 求める平均変化率は

$$\begin{aligned} K &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= \frac{(b^3-a^3)-6(b^2-a^2)+9(b-a)}{b-a} \\ &= \boldsymbol{a^2+ab+b^2-6a-6b+9} \end{aligned}$$

3.7　平成 25 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい.

(1) $(x+2y-3z)^2$ を展開しなさい.

(2) $x^2+xy+2x+y+1$ を因数分解しなさい.

(3) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}-\dfrac{2}{2+\sqrt{5}}$ を簡単にしなさい.

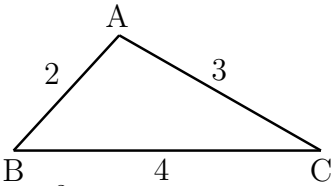
(4) 不等式 $\begin{cases} \dfrac{x+7}{4} \geq \dfrac{2x-1}{3} \\ 4x-7 > -5(x+2) \end{cases}$ を解きなさい.

(5) 2 次関数 $y=x^2$ $(-2 \leq x \leq 1)$ の最大値，最小値を求めなさい.

(6) グラフが次の 3 点を通るとき，2 次関数を求めなさい.

$$(-1,\ 7),\quad (0,\ 2),\quad (1,-5)$$

(7) 次のような三角形 ABC の面積を求めなさい.

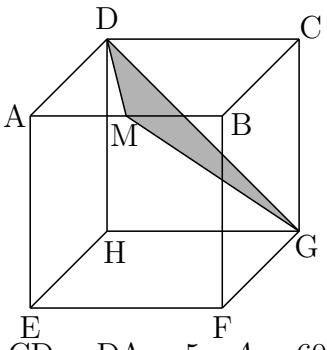


(8) 関数 $f(x)=-x^2+6x+a$ $(1 \leq x \leq 4)$ の最小値が -2 であるように定数 a を定めなさい.

(9) 2 直線 $x-\sqrt{3}y=0$，$x+\sqrt{3}y=0$ のなす鋭角を求めなさい.

(10) 三角形 ABC において，$a:b:c=8:5:7$ のとき，$\angle$C の大きさを求めなさい.

2. 次の図のような，一辺の長さが 2 の立方体において，辺 AB の中点を M とするとき，以下のものを求めなさい．



(1) 線分 MG の長さ

(2) ∠DMG の大きさ

3. 円に内接する四角形 ABCD において，AB $= 8$，CD $=$ DA $= 5$，$A = 60^\circ$ のとき，次のものを求めよ．

(1) BD の長さ

(2) 四角形 ABCD の外接円の半径

(3) 四角形 ABCD の面積

4. 次の各小問に答えなさい．

(1) 整式 $f(x)$ を $x^2 - 2x + 3$ で割ったら商が $3x + 1$，余りが $x - 2$ であった．整式 $f(x)$ を求めよ．

(2) $8x^3 + 1$ を因数分解しなさい．

(3) $\dfrac{1 + \dfrac{x-2}{x+2}}{1 - \dfrac{x-2}{x+2}}$ を簡単にしなさい．

(4) $\dfrac{1}{(1+i)^2}$ を簡単にしなさい．

(5) 2 直線 $x - 3y = 0$，$x + 2y - 10 = 0$ の交点と点 $(1,\ 1)$ を通る直線の方程式を求めよ．

(6) 直線 $x + 3y + 3 = 0$ に関して，点 A$(2, -1)$ と対称な点の座標を求めよ．

(7) $\cos x + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \cos(x + \pi)$ を簡単にせよ．

(8) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ を簡単にせよ．

(9) $4^{x-1} = 2^{7-x}$ を解け．

(10) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x-2}\right)$ を求めよ．

5. 次の各設問に答えよ．

   (1) 関数 $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ の $x = 2$ における微分係数 $f'(2)$ を微分係数の定義に従って求めよ．

   (2) 関数 $f(x) = x^2$ の微分係数が $x = a$ から $x = b$ まで平均変化率に等しくなる x の値を求めよ．

6. 関数 $y = x^3 + x^2 \cdots ①$ について次の各設問に答えよ．

   (1) 曲線 ① の極値を調べて増減表を作成し，グラフの概形を描け．

   (2) x 座標が $x = -1$ である曲線 ① 上の点における接線の方程式を求めよ．

   (3) (2) で求めた接線と曲線 ① とのもう一つの交点の座標を求めよ．

   (4) 方程式 $x^3 + x^2 = a$ の実数解の個数を a について場合を分けて求めよ．

   (5) (2) で求めた接線と曲線 ① とで囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

1. (1) $(x+2y-3z)^2 = \{x+2y+(-3z)\}^2$
$= x^2+(2y)^2+(-3z)^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot 2y\cdot(-3z)+2\cdot(-3z)\cdot x$
$= \boldsymbol{x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6zx}$

(2) (次数の低い方の文字 y について整理する)

$$\begin{aligned} x^2+xy+2x+y+1 &= y(x+1)+x^2+2x+1 \\ &= y(x+1)+(x+1)^2 \\ &= (x+1)\{y+(x+1)\} \\ &= \boldsymbol{(x+1)(x+y+1)} \end{aligned}$$

(3) (それぞれの分母を有理化して計算する)

$$\begin{aligned} \frac{8}{3-\sqrt{5}}-\frac{2}{2+\sqrt{5}} &= \frac{8(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}-\frac{2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} \\ &= 2(3+\sqrt{5})-2(\sqrt{5}-2) \\ &= \boldsymbol{10} \end{aligned}$$

(4) ($\leq$, $\geq$ はそれぞれ $\leqq$, $\geqq$ と同意)

$\dfrac{x+7}{4} \geq \dfrac{2x-1}{3}$ を解いて　$x \leq 5$　$\cdots$①

$4x-7 > -5(x+2)$ を解いて　$x > -\dfrac{1}{3}$　$\cdots$②

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\dfrac{1}{3} < x \leq 5}$

(5) **$x=-2$ で最大値 4, $x=0$ で最小値 0**

(6) 点 $(0,\ 2)$ を通るから

$$y = ax^2+bx+2 \quad \cdots(*)$$

とおける.

$(*)$ は点 $(-1,\ 7)$ を通るから

$$7 = a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+2 \quad \text{ゆえに} \quad a-b=5 \cdots ①$$

$(*)$ は点 $(1, -5)$ を通るから

$$-5 = a\cdot 1^2+b^seki1+2 \quad \text{ゆえに} \quad a+b=-7 \quad \cdots ②$$

①, ② を解いて　$a=-1$, $b=-6$

よって　　$\boldsymbol{y=-x^2-6x+2}$

(7) $a=4$，$b=3$，$c=2$ をヘロンの公式に適用する．
$s=\dfrac{1}{2}(4+3+2)=\dfrac{9}{2}$ より，求める三角形の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC}=\sqrt{\frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}-4\right)\left(\frac{9}{2}-3\right)\left(\frac{9}{2}-2\right)}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{15}}$$

(8) $f(x)=-x^2+6x+a=-(x-3)^2+a+9$ であるから，$1\leq x\leq 4$ において，
$f(x)$ は $x=1$ で最小値 $a+5$ をとる．このときの最小値が -2 であるから

$$a+5=-2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=-7}$$

(9) 直線 $x-\sqrt{3}y=0$ すなわち $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ は x 軸の正の向きに 30° 回転したもの．また，直線 $x+\sqrt{3}y=0$ すなわち $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$ は x 軸の正の向きに -30° 回転したもの．
したがって，これらの 2 直線のなす鋭角は　　$\boldsymbol{60^\circ}$

(10) $a:b:c=8:5:7$ より，定数 k をもちいて

$$a=8k,\quad b=5k,\quad c=7k$$

とおける．これを余弦定理に適用して

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(8k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 8k\cdot 5k}=\frac{1}{2}$$

よって，これを満たす C は　　$\boldsymbol{C=60^\circ}$

2. (1) $\mathrm{BG}^2=\mathrm{BF}^2+\mathrm{FG}^2=2^2+2^2=8$
$\mathrm{MG}^2=\mathrm{MB}^2+\mathrm{BG}^2=1^2+8=9$
$\mathrm{MG}>0$ であるから　　$\boldsymbol{\mathrm{MG}=3}$

(2) $\mathrm{DG}^2=\mathrm{DC}^2+\mathrm{CG}^2=2^2+2^2=8$
$\mathrm{DM}^2=\mathrm{DA}^2+\mathrm{AM}^2=2^2+1^2=5$
したがって，$\mathrm{DM}=\sqrt{5}$，$\mathrm{MG}=3$，$\mathrm{DG}=2\sqrt{2}$ を余弦定理に適用して

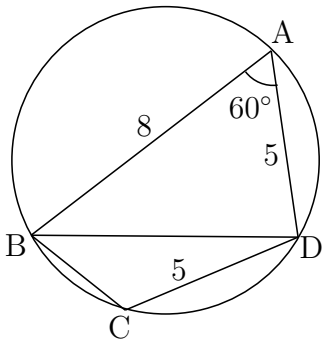
$$\cos\angle\mathrm{DGB}=\frac{\mathrm{MG}^2+\mathrm{DG}^2-\mathrm{DM}^2}{2\cdot\mathrm{MG}\cdot\mathrm{DG}}=\frac{9+8-5}{2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　　$\boldsymbol{\angle\mathrm{DGM}=45^\circ}$

3. (1) △ABD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 8^2 + 5^2 - 2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ \\ &= 49\end{aligned}$$

BD > 0 であるから　$\mathbf{BD = 7}$



(2) 外接円の半径を R とする．正弦定理により

$$2R = \frac{7}{\sin 60^\circ} \quad \text{よって} \qquad R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \frac{\mathbf{7\sqrt{3}}}{\mathbf{3}}$$

(3) 四角形 ABCD は円に内接するので　$C = 120^\circ$
BC $= x$ とおいて，△BCD に余弦定理を適用して

$$7^2 = 5^2 + x^2 - 2\cdot 5\cdot x\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 5x - 24 = 0$$

$x > 0$ に注意して，これを解いて　$x = 3$

$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin\mathrm{A} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{BCD} = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin\mathrm{C} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 120^\circ = \frac{15}{4}\sqrt{3}$$

よって，四角形 ABCD の面積は

$$10\sqrt{3} + \frac{15}{4}\sqrt{3} = \frac{\mathbf{55}}{\mathbf{4}}\mathbf{\sqrt{3}}$$

4. (1)　$f(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x + 1) + x - 2$
$= \mathbf{3x^3 - 5x^2 + 8x - 1}$

(2)　$8x^3 + 1 = (2x)^3 + 1^3$
$= (2x + 1)\{(2x)^2 - 2x\cdot 1 + 1^2\}$
$= \mathbf{(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)}$

(3)　$\dfrac{1 + \dfrac{x-2}{x+2}}{1 - \dfrac{x-2}{x+2}} = \dfrac{(x+2) + (x-2)}{(x+2) - (x-2)} = \dfrac{2x}{4} = \dfrac{\boldsymbol{x}}{\mathbf{2}}$

(4)　$\dfrac{1}{(1+i)^2} = \dfrac{1}{1 + 2i + i^2} = \dfrac{1}{2i} = \dfrac{i}{2i^2} = -\dfrac{\boldsymbol{i}}{\mathbf{2}}$

(5) 2 直線 $x-3y=0$，$x+2y-10=0$ の交点を通る直線の方程式は，定数 k を用いて

$$(x-3y)+k(x+2y-10)=0 \quad \cdots(*)$$

これが，点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$(1-3\cdot 1)+k(1+2\cdot 1-10)=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=-\frac{2}{7}$$

これを $(*)$ に代入して

$$(x-3y)-\frac{2}{7}(x+2y-10)=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x-5y+4=0}$$

(6) 求める点を $\mathrm{B}(p,\ q)$ とおく．

直線 $\ell : x+3y+3=0$ の傾きは $-\dfrac{1}{3}$，直線 AB の傾きは $\dfrac{q+1}{p-2}$ である．

AB$\perp\ell$ であるから

$$-\frac{1}{3}\cdot\frac{q+1}{p-2}=-1 \quad \text{すなわち} \quad 3p-q=7 \quad \cdots①$$

線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+2}{2},\ \dfrac{q-1}{2}\right)$ は直線 ℓ 上の点であるから

$$\frac{p+2}{2}+3\cdot\frac{q-1}{2}+3=0 \quad \text{すなわち} \quad p+3q=-5 \quad \cdots②$$

①，② を解いて　　$p=\dfrac{8}{5}$，$q=-\dfrac{11}{5}$

よって，求める点の座標は　　$\boldsymbol{\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{11}{5}\right)}$

(7) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin x$，$\cos(x+\pi)=-\cos x$ であるから

$$\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(x+\pi)=\boldsymbol{-\sin x}$$

(8) (底の変換公式を用いる)

$$\begin{aligned}
&(\log_2 3+\log_4 9)(\log_3 4+\log_9 2)\\
&=\left(\log_2 3+\frac{\log_2 9}{\log_2 4}\right)\left(\frac{\log_2 4}{\log_2 3}+\frac{\log_2 2}{\log_2 9}\right)\\
&=\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 3}{2}\right)\left(\frac{2}{\log_2 3}+\frac{1}{2\log_2 3}\right)\\
&=2\log_2 3\times\frac{5}{2\log_2 3}=\mathbf{5}
\end{aligned}$$

(9) $4^{x-1}=2^{7-x}$ から　$2^{2(x-1)}=2^{7-x}$

したがって　$2(x-1)=7-x$　これを解いて　$\boldsymbol{x=3}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left\{\frac{(x-2)+2}{2(x-2)}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(x-2)}=-\mathbf{\frac{1}{4}}$

5. (1) $x=a$ における微分係数 $f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ により

$$\begin{aligned}
f(2)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)^2-2(2+h)+1-(3\cdot 2^2-2\cdot 2+1)}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}\frac{10h+3h^2}{h}\\
&=\lim_{h\to 0}(10+3h)=\mathbf{10}
\end{aligned}$$

(2) $f(x)$ の $x=a$ から $x=b$ までの平均変化率は

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{b^2-a^2}{b-a}=\frac{(b+a)(b-a)}{b-a}=a+b\quad\cdots①$$

$f(x)=x^2$ を微分して　$f'(x)=2x\quad\cdots②$

①，② から

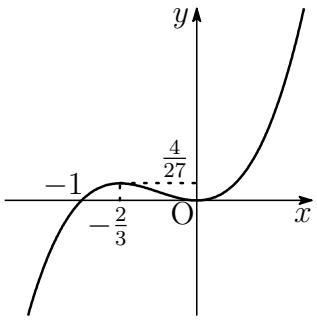
$$2x=a+b\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{x=\frac{a+b}{2}}$$

6. (1) $y = x^3 + x^2$ を微分すると

$$y' = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$$

$y = x^3 + x^2$ の増減表は

x	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 $\frac{4}{27}$	↘	極小 0	↗



グラフは，右の図のとおり．

(2) $x = -1$ のとき

$$y = (-1)^3 + (-1)^2 = 0, \quad y' = 3\cdot(-1)^2 + 2\cdot(-1) = 1$$

よって，求める接線の方程式は

$$y - 0 = 1\{x - (-1)\} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = x + 1}$$

(3) $y = x^3 + x^2 \cdots ①$，$y = x + 1 \cdots ②$ から y を消去すると

$$x^3 + x^2 = x + 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)^2(x - 1) = 0$$

したがって，接点以外の交点の x 座標は　$x = 1$

これを ② に代入すると　$y = 2$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{(1,\ 2)}$

(4) $x^3 + x^2 = a$ の実数解の個数は，$y = x^3 + x^2$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数であるから，(1) のグラフから

$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \frac{4}{27}} \text{のとき} & \textbf{3 個} \\ \boldsymbol{a = 0,\ \frac{4}{27}} \text{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a < 0,\ \frac{4}{27} < a} \text{のとき} & \textbf{1 個} \end{cases}$$

(5) (1) のグラフから，$-1 \leqq x \leqq 1$ において，直線 $y = x + 1$ は曲線 $y = x^3 + x^2$ の上側にあるので，求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^{1} \{(x + 1) - (x^3 + x^2)\} dx$$
$$= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

3.8 平成 24 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい.

   (1) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)$ を展開しなさい.

   (2) $x^4 - 5x^2 + 4$ を因数分解しなさい.

   (3) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$, $y = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ のとき, $x^3 + y^3$ の値を求めよ.

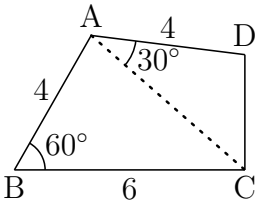
   (4) 1 次不等式 $6 - 4x < 5 - 2x$ の解のうち, 最小の整数を求めよ.

   (5) $y = x^2 - 4x + 7$ のグラフを x 軸方向に -3, y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる曲線を表す方程式を求めよ.

   (6) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする. このとき $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta + 1) = 0$ を満たす θ の値を求めよ.

   (7) △ABC において, $\dfrac{\sin A}{5} = \dfrac{\sin B}{16} = \dfrac{\sin C}{19}$ のとき, C を求めよ.

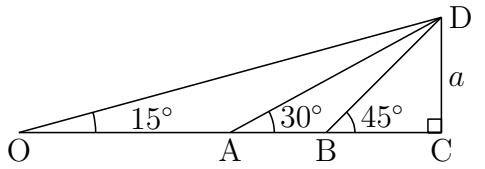
   (8) 図のような AB = 4, BC = 6, AD = 4, ∠ABC = 60°, ∠CAD = 30° である四角形 ABCD の面積を求めよ.



   (9) $x^2 - 5|x| - 6 = 0$ を解け.

   (10) 連立方程式 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases}$ を解け.

2. 右の図において



   (1) AC, OA, OB を a(= CD) で表せ.

   (2) OD を a で表せ.

   (3) $\sin 15^\circ$, $\tan 15^\circ$ を求めよ.

3. 2 直線 $x + ay + 1 = 0$, $ax + (a+2)y + 2 = 0$ について次の条件を満たす a の値を求めよ.

   (1) 2 直線が平行になる.

   (2) 2 直線が一致する.

   (3) 2 直線が垂直になる.

4. 次の各小問に答えなさい.

(1) 整式 $f(x) = x^3 - 2x - 1$ を $2x - 1$ で割ったときの余りを求めよ.

(2) $6x^3 + 25x^2 + 3x - 4$ を因数分解しなさい.

(3) $\dfrac{\dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}}$ を簡単にしなさい.

(4) $\dfrac{1+2i}{2-3i}$ を簡単にしなさい.

(5) 点 $(-4,\ 3)$ を通り，直線 $2x - \sqrt{3}y - 1 = 0$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

(6) 点 $(2, -1)$ と直線 $3x - 4y - 15 = 0$ との距離を求めよ.

(7) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-3}$ を解け.

(8) $\log_{10}(x+5) + \log_{10}(x-5) = 2$ を解け.

(9) $-\sqrt{3}x + \cos x = 2\sin(x + \alpha)$ が成り立つように α を求めよ.

(10) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}$ を求めよ.

5. 次の各設問に答えよ.

(1) 2 つの曲線 $y = x^3 + 3$，$y = x^3 - 1$ の両方に接する直線の方程式を求めよ.

(2) 曲線 $y = x^4 - 3x^2 + 2x$ 上の異なる 2 点で接する接線の方程式を求めよ.

6. 次の各設問に答えよ.

(1) $y = x^4 - 6x^2 - 8x + 13$ の増減表をかき，極値を求めよ.

(2) (1) の増減表を用いて，$y = x^4 - 6x^2 - 8x + 13$ のグラフをかけ.

解答例

1. (1) $(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) = (x+1)(x-3) \times (x+2)(x-4)$
$= (x^2-2x-3)(x^2-2x-8)$
$= \{(x^2-2x)-3\}\{(x^2-2x)-8\}$
$= (x^2-2x)^2 - 11(x^2-2x) + 24$
$= \boldsymbol{x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24}$

(2) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2)^2 - 5x^2 + 4$
$= (x^2-1)(x^2-4)$
$= \boldsymbol{(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)}$

(3) $x + y = (\sqrt{3}+\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}$
$xy = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$

したがって

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$
$$= (2\sqrt{3})^3 - 3\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}$$
$$= 24\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = \boldsymbol{18\sqrt{3}}$$

(4) $6 - 4x < 5 - 2x$ を解いて　$x > \dfrac{1}{2}$

これを満たす最小の整数は　**1**

(5) $y = x^2 - 4x + 7$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動して得られる曲線の方程式は

$$y - 2 = (x+3)^2 - 4(x+3) + 7 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = x^2 + 2x + 6}$$

(6) $(\cos\theta + 1)(2\cos\theta + 1) = 0$ より　$\cos\theta = -1, -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において

$\cos\theta = -1$ を解くと　$\theta = 180^\circ$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ を解くと　$\theta = 120^\circ$

よって　$\boldsymbol{\theta = 120^\circ,\ 180^\circ}$

(7) 正弦定理により　$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$
与式から　　$\sin A : \sin B : \sin C = 5 : 16 : 19$
したがって，定数 k を用いて

$$a = 5k, \quad b = 16k, \quad c = 19k$$

とおける．これを余弦定理に適用すると

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(5k)^2 + (16k)^2 - (19k)^2}{2 \cdot 5k \cdot 16k} = -\frac{1}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{C = 120^\circ}$

(8) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = 4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cos 60^\circ = 28$$

$\mathrm{AC} > 0$ より　$\mathrm{AC} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$
よって，求める四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{DAC} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{7} \sin 30^\circ \\ &= \boldsymbol{6\sqrt{3} + 2\sqrt{7}} \end{aligned}$$

(9) $x^2 = |x|^2$ であるから，与えられた方程式は

$$|x|^2 - 5|x| - 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (|x| + 1)(|x| - 6) = 0$$

$|x| \geqq 0$ に注意して　$|x| = 6$　　よって　　$\boldsymbol{x = \pm 6}$

(10) $\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ① \\ x^2 + y^2 = 13 & \cdots ② \end{cases}$
① を ② に代入すると

$$x^2 + (x + 1)^2 = 13 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + x - 6 = 0$$

これを解いて　$x = -3,\ 2$
① より　　$x = -3$ のとき $y = -2$,　　$x = 2$ のとき $y = 3$
よって　　$\boldsymbol{(x,\ y) = (-3, -2),\ (2,\ 3)}$

2. (1) $\mathbf{AC = \sqrt{3}a}$

△DOA は二等辺三角形であるから　$\mathrm{OA} = \mathrm{AD} = \mathbf{2}\boldsymbol{a}$

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} - \mathrm{BC} = \sqrt{3}a - a = (\sqrt{3} - 1)a$ であるから

$$\mathrm{OB} = \mathrm{OA} + \mathrm{AB} = 2a + (\sqrt{3} - 1)a = \mathbf{(\sqrt{3} + 1)}\boldsymbol{a}$$

(2) △OBD に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{OD}}{\sin\angle\mathrm{OBD}} = \frac{\mathrm{OB}}{\sin\angle\mathrm{BDO}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{OD}}{\sin 135^\circ} = \frac{(\sqrt{3}+1)a}{\sin 30^\circ}$$

したがって　$\mathbf{OD = (\sqrt{6} + \sqrt{2})}\boldsymbol{a}$

(3) 直角三角形 OCD により

$$\sin 15^\circ = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OD}} = \frac{a}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})a} = \frac{\mathbf{\sqrt{6} - \sqrt{2}}}{\mathbf{4}}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{OA} + \mathrm{AC}} = \frac{a}{2a + \sqrt{3}a} = \mathbf{2 - \sqrt{3}}$$

3. (1) 2 直線の平行条件により

$$1\cdot(a+2) - a\cdot a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a^2 - a - 2 = 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = -1,\ 2}$

(2) (1) の結果から，2 直線はそれぞれ

$a = -1$ のとき　$x - y + 1 = 0$，$-x + y + 2 = 0$

$a = 2$ のとき　$x + 2y + 1 = 0$，$2x + 4y + 2 = 0$

よって，2 直線が一致するのは　$\boldsymbol{a = 2}$

(3) 2 直線の垂直条件により

$$1\cdot a + a(a+2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad a^2 + 3a = 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = 0,\ -3}$

2 直線の平行条件と垂直条件

2 直線 $\ell_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$，$\ell_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ について

$$\ell_1 /\!/ \ell_2 \iff a_1b_2 - b_1a_2 = 0$$

$$\ell_1 \perp \ell_2 \iff a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

4. (1) 整式 $f(x)$ を $2x-1$ で割った余りは $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ であるから

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\cdot\frac{1}{2}-1=-\boldsymbol{\frac{15}{8}}$$

(2) $P(x)=6x^3+25x^2+3x-4$ とすると

$P(-\frac{1}{2})=6\cdot(-\frac{1}{2})^3+25\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot(-\frac{1}{2})-4=0$

よって，$P(x)$ は $2x+1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$6x^3+25x^2+3x-4=(2x+1)(3x^2+11x-4)$

したがって

$6x^3+25x^2+3x-4=\boldsymbol{(2x+1)(x+4)(3x-1)}$

$$\begin{array}{r} 3x^2\ +11x\ \ -4 \\ \hline 2x+1\,)\,6x^3+25x^2\ +3x-4 \\ \underline{\ 6x^3\ +3x^2\ \ \ \ } \\ 22x^2\ +3x \\ \underline{\ 22x^2+11x\ } \\ -8x-4 \\ \underline{\ -8x-4\ } \\ 0 \end{array}$$

(3) 与式の分母・分子に $(x+1)(x-1)$ を掛けると

$$(\text{与式})=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)+(x+1)}=\frac{-2}{2x}=-\boldsymbol{\frac{1}{x}}$$

(4) $\dfrac{1+2i}{2-3i}=\dfrac{(1+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\dfrac{2+7i+6i^2}{4-9i^2}=\boldsymbol{\dfrac{-4+7i}{13}}$

(5) 直線 $2x-\sqrt{3}y-1=0$ の傾きは　$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

これと垂直な直線の傾きを m とすると

$$\frac{2}{\sqrt{3}}m=-1\quad\text{ゆえに}\quad m=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，求める直線は，点 $(-4,\ 3)$ を通り，傾き $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ であるから

$$y-3=-\frac{\sqrt{3}}{2}(x+4)\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{\sqrt{3}x+2y+4\sqrt{3}-6=0}$$

(6) 求める距離を d とすると

$$d=\frac{|3\cdot2-4\cdot(-1)-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=\boldsymbol{1}$$

(7) $\dfrac{2}{3}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-1}$ により，与えられた方程式は

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{-x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2x-3} \quad \text{ゆえに} \quad -x=2x-3$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x=1}$

(8) 真数は正であるから

$$x+5>0 \quad \text{かつ} \quad x-5>0 \quad \text{すなわち} \quad x>5 \quad \cdots ①$$

与えられた方程式は

$$\log_{10}(x+5)(x-5)=2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+5)(x-5)=10^2$$

したがって　　$x^2=125$

① に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{x=5\sqrt{5}}$

(9) $\boldsymbol{\alpha=\dfrac{2}{3}\pi}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+4)}{(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x+1}=\frac{2+4}{2+1}=\mathbf{2}$

5. (1) 求める接線と 2 曲線 $y=x^3+3$，$y=x^3-1$ との接点を，それぞれ $\mathrm{A}(a,\ a^3+3)$，$\mathrm{B}(b,\ b^3-1)$ とする．

$y'=3x^2$ であるから，A における接線の方程式は

$$y-(a^3+3)=3a^2(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=3a^2x-2a^3+3 \quad \cdots ①$$

同様に，B における接線の方程式は

$$y-(b^3-1)=3b^2(x-b) \quad \text{すなわち} \quad y=3b^2x-2b^3-1 \quad \cdots ②$$

①，② の方程式は一致するので

$$3a^2=3b^2, \quad -2a^3+3=-2b^3-1$$

上の第 1 式から　$b=a$　または　$b=-a$

$b=a$ のとき，第 2 式を満たさない．

$b=-a$ のとき，これを第 2 式に代入して　$a=1$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{y=3x+1}$

(2) 求める接線と曲線 $y = x^4 - 3x^2 + 2x$ との異なる 2 つの接点を

$$\mathrm{A}(a,\ a^4 - 3a^2 + 2a), \qquad \mathrm{B}(b,\ b^4 - 3b^2 + 2b)$$

とする．$y' = 4x^3 - 6x + 2$ であるから，A における接線の方程式は

$$y - (a^4 - 3a^2 + 2a) = (4a^3 - 6a + 2)(x - a)$$

すなわち　　$y = (4a^3 - 6a + 2)x - 3a^4 + 3a^2 \quad \cdots ①$

同様に，B における接線の方程式は

$$y = (4b^3 - 6b + 2)x - 3b^4 + 3b^2 \quad \cdots ②$$

①，② の方程式は一致するので

$$4a^3 - 6a + 2 = 4b^3 - 6b + 2, \quad -3a^4 + 3a^2 = -3b^4 + 3b^2$$

第 1 式より　$(a - b)\{2(a^2 + ab + b^2) - 3\} = 0$
第 2 式より　$(a - b)(a + b)(a^2 + b^2 - 1) = 0$
このとき，$a \neq b$ であるから，上の 2 式から

$$\begin{cases} 2(a^2 + ab + b^2) - 3 = 0 \quad \cdots ③ \\ (a + b)(a^2 + b^2 - 1) = 0 \quad \cdots ④ \end{cases}$$

④ から　$a + b = 0$　または　$a^2 + b^2 = 1$
$a^2 + b^2 = 1$ のとき，これを ③ に代入すると　$ab = \dfrac{1}{2}$
このとき　　$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab = 1 - 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 0$
ゆえに　$a - b = 0$ となり，条件に反するので $a + b = 0$
したがって，$b = -a$ を ③ に代入して　$a^2 = \dfrac{3}{2} \quad \cdots ⑤$
① は　　$y = \{2a(2a^2 - 3) + 2\}x - 3(a^2)^2 + 3a^2$
よって，⑤ をこれに代入して

$$\boldsymbol{y = 2x - \frac{9}{4}}$$

6. (1) $y = x^4 - 6x^2 - 8x + 13$ を微分すると

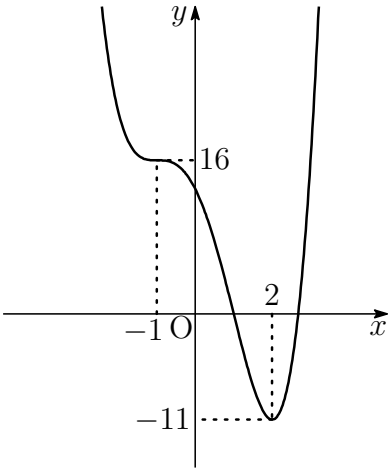
$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 - 12x - 8 \\ &= 4(x+1)^2(x-2) \end{aligned}$$

$y = x^4 - 6x^2 - 8x + 13$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	16	$\searrow$	極小 -11	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{x = 2}$ で**極小値 $\boldsymbol{-11}$** をとる

(2) (1) の増減表により



3.9　平成 23 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各問に答えなさい.

(1) $(-2xy)^2 \times (3x^3y^2)^3$ を計算しなさい.

(2) $(3a+2b-1)^2$ を展開しなさい.

(3) $x^2+2xy+y^2+5x+5y+6$ を因数分解しなさい.

(4) 方程式 $3x^2-4x-1=0$ を解きなさい.

(5) 連立方程式 $\begin{cases} 2x-6 \leqq 0 \\ 2x^2+x-6>0 \end{cases}$ を解きなさい.

(6) 平地に立っている木の根元から 10m 離れた地点に立って，木の上端を望むときの仰角が 37° であった．目の高さを 1.6m とするとき，木の高さはおよそ何 m であるか求めなさい．ただし，$\sin 37^\circ = 0.6$ とする.

(7) $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ であるとき，$\sin\alpha\cos\alpha$ の値を求めなさい.

(8) △ABC において，AB = 8，BC = 7，CA = 5 のとき，△ABC の面積を求めなさい.

2. 次の各問に答えなさい．

(1) $\sqrt{\dfrac{25}{3}} - \sqrt[4]{\dfrac{16}{9}} + \sqrt{48}$ を計算しなさい．

(2) $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{8}\sqrt[4]{3} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{8}\sqrt[4]{3} + \sqrt{3})$ を簡単にしなさい．

(3) $2^x - 2^{-x} = 3$ のとき，8^x の値を求めなさい．

(4) 次の数の大小を調べなさい．理由も述べなさい．

$$\log_2 3, \quad \frac{3}{2}$$

(5) 次の不等式を解きなさい．

$$\log_3(x-1) + \log_3(x+7) < 2$$

(6) 整式 A を $x+2$ で割ると商が $x+3$，余りが -4 となった．整式 A を求めなさい．

(7) 次の 2 直線のなす鋭角を求めなさい．

$$3x + y = 2, \quad 2x - y = 3$$

(8) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $2\sin\theta - \sqrt{3} \leqq 0$ を解きなさい．

3. xy 平面上において，変数 t に対して座標が $\mathrm{P}(20t\cos\theta,\ 20t\sin\theta - 5t^2)$，$\mathrm{Q}(10,\ 20 - 5t^2)$ で定まる動点 P，Q がある．次の各問いに答えなさい．

(1) 点 P の y 座標の最大値を θ を用いて表しなさい．

(2) 点 P の x 座標が 10 となるとき，点 P の y 座標を θ を用いて表しなさい．

(3) t がある値のとき，点 P と点 Q の座標が一致したとする．このとき，$\tan\theta$ の値を求めなさい．

(4) 変数 t が任意の実数値をとるとき点 P は曲線を描く．$\tan\theta$ を (3) で求めた値とするとき，点 P が描く曲線を $0 \leqq x \leqq 40$ の範囲で図示しなさい．

4. 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ の $0 \leqq x \leqq a\ (a > 0)$ における最大値と最小値を求めたい．次の各問いに答えなさい．

(1) 導関数 y' を求め，増減表をかきなさい．

(2) $0 \leqq x \leqq 3$ における y のグラフをかき，この範囲での y の最大値，最小値を求めなさい．

(3) $0 \leqq x \leqq a$ における最大値と最小値を求めなさい．

解答例

1. (1) $(-2xy)^2 \times (3x^3y^2)^3 = 4x^2y^2 \times 27x^9y^6$
$= \boldsymbol{108x^{11}y^8}$

(2) $(3a+2b-1)^2 = \{3a+2b+(-1)\}^2$
$= (3a)^2 + (2b)^2 + (-1)^2 + 2\cdot 3a\cdot 2b + 2\cdot 2b\cdot(-1) + 2\cdot(-1)\cdot 3a$
$= \boldsymbol{9a^2 + 4b^2 + 12ab - 6a - 4b + 1}$

(3) $x^2+2xy+y^2+5x+5y+6 = (x+y)^2 + 5(x+y) + 6$
$= \{(x+y)+2\}\{(x+y)+3\}$
$= \boldsymbol{(x+y+2)(x+y+3)}$

(4) 解の公式により

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3\cdot(-1)}}{3} = \frac{\boldsymbol{2 \pm \sqrt{7}}}{\boldsymbol{3}}$$

2 次方程式の解の公式

$ax^2+bx+c=0$ の解は　　$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$ax^2+2b'x+c=0$ の解は　　$x = \dfrac{-b' \pm \sqrt{b'^2-ac}}{a}$

(5) $2x-6 \leqq 0$ を解いて　$x \leqq 3$　$\cdots$①
$2x^2+x-6>0$　すなわち　$(x+2)(2x-3)>0$
これを解いて　$x<-2,\ \dfrac{3}{2}<x$　$\cdots$②
よって，①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x<-2,\ \dfrac{3}{2}<x \leqq 3}$

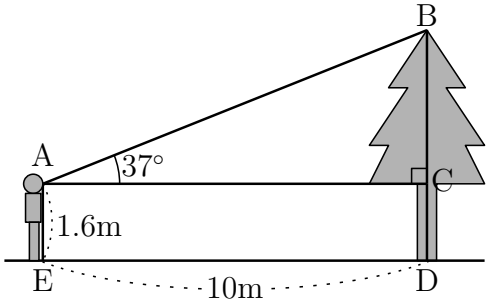
(6) $\sin 37^\circ = 0.6$ より　$\cos 37^\circ = 0.8$，$\tan 37^\circ = 0.75$
右の図において

$\mathrm{BC} = \mathrm{AC} \times \tan 37^\circ$
$= 10 \times 0.75 = 7.5$

よって，木の高さ BD は

$\mathrm{BD} = 7.5 + 1.6 = 9.1$

(答)　$\boldsymbol{9.1}$m



(7) $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{3}{8}}$$

(8) $a=7$，$b=5$，$c=8$ であるから，ヘロンの公式により

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(7+5+8)=10$$

よって，求める $\triangle$ABC の面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)}\\&=\boldsymbol{10\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2. (1) $\sqrt{\dfrac{25}{3}}-\sqrt[4]{\dfrac{16}{9}}+\sqrt{48}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}+4\sqrt{3}=\boldsymbol{5\sqrt{3}}$

(2) $\quad(\sqrt{2}+\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{3}+\sqrt{3})$
$=\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{3}\}\{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{3}\}$
$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-\sqrt{8}\sqrt{3}$
$=(2+2\sqrt{6}+3)-2\sqrt{2}\sqrt{3}$
$=\boldsymbol{5}$

(3) $2^x=t$ とおくと $(t>0)$，$2^x-2^{-x}=3$ より

$$t-\frac{1}{t}=3\quad\text{ゆえに}\quad t^2-3t-1=0\quad\cdots①$$

$t>0$ に注意して，これを解くと $\quad t=\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\quad\cdots②$
このとき $\qquad 8^x=(2^x)^3=t^3$
t^3 を t^2-3t-1 で割った商は $t+3$，余りは $10t+3$ であるから

$$t^3=(t^2-3t-1)(t+3)+10t+3$$

上式の右辺に ①，② を代入すると

$$t^3=10\times\frac{3+\sqrt{13}}{2}+3=18+5\sqrt{13}$$

よって $\qquad\boldsymbol{8^x=18+5\sqrt{13}}$

(4)　$\dfrac{3}{2} = \log_2 2^{\frac{3}{2}} = \log_2 \sqrt{8}$

底 2 は，1 より大きいので　$\log_2 \sqrt{8} < \log_2 3$

よって　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2} < \log_2 3}$

(5) 真数は正であるから　$x-1>0$　かつ　$x+7>0$

すなわち　$x>1 \quad \cdots ①$

不等式は　$\log_3 (x-1)(x+7) < \log_3 3^2$

底 3 は 1 より大きいので　$(x-1)(x+7) < 3^2$

整理すると　$x^2 - 6x - 16 < 0$

ゆえに　$(x+2)(x-8) < 0$

① に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{1 < x < 8}$

(6)　$A = (x+2)(x+3) + (-4)$

$= \boldsymbol{x^2 + 5x + 2}$

(7) 2 直線 $3x+y=2$，$2x-y=3$ の傾きは，それぞれ -3，2 であり，この 2 直線が x 軸の正の向きとなす角 α，β を次のように定めると

$$\tan\alpha = -3, \quad \tan\beta = 2 \quad (0 < \beta < \alpha < \pi)$$

ゆえに　$\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} = \dfrac{-3-2}{1+(-3)\cdot 2} = 1$

$0 < \alpha - \beta < \pi$ であるから　$\alpha - \beta = \dfrac{\pi}{4}$

よって，2 直線のなす鋭角は　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(8) 不等式を変形すると　$\sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より，これを解くと

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}, \quad \frac{2}{3}\pi \leqq \theta < 2\pi}$$

3. (1) $20t\sin\theta - 5t^2 = -5(t^2 - 4t\sin\theta)$

$$= -5(t - 2\sin\theta)^2 + 20\sin^2\theta$$

よって，P の y 座標の最大値は $\quad \boldsymbol{20\sin^2\theta}$

(2) $20t\cos\theta = 10$ より，$t = \dfrac{1}{2\cos\theta}$ であるから

$$20t\sin\theta - 5t^2 = 20 \times \frac{1}{2\cos\theta} \times \sin\theta - 5\left(\frac{1}{2\cos\theta}\right)^2$$

$$= \boldsymbol{10\tan\theta - \frac{5}{4\cos^2\theta}}$$

(3) 2 点 P，Q の座標が一致するとき

$$20t\cos\theta = 10, \quad 20t\sin\theta - 5t^2 = 20 - 5t^2$$

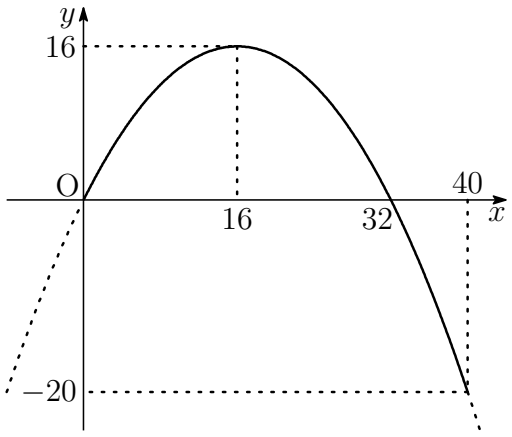
ゆえに $\quad 2t\cos\theta = 1$，$t\sin\theta = 1 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{\tan\theta = 2}$

(4) $x = 20t\cos\theta$，$y = 20t\sin\theta - 5t^2$ とおくと

$$y = 20t\cos\theta \times \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 5 \times \frac{(20t\cos\theta)^2}{(20\cos\theta)^2}$$

$$= x\tan\theta - \frac{x^2}{80\cos^2\theta} = x\tan\theta - \frac{x^2(1+\tan^2\theta)}{80}$$

よって $\quad y = 2x - \dfrac{x^2}{16} = -\dfrac{1}{16}(x-16)^2 + 16 \quad (0 \leqq x \leqq 40)$

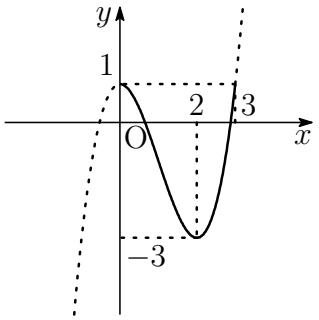


4. (1) $y' = 3x^2 - 6x = \boldsymbol{3x(x-2)}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 1	↘	極小 -3	↗

(2) (1) およびグラフから

$x = 0,\ 3$ で**最大値 1** をとり，$x = 2$ で**最小値 -3** をとる．



(3) (2) のグラフから，次のようになる．

$0 < a \leqq 3$ のとき最大値 $\boldsymbol{1}$，$3 < a$ のとき最大値 $\boldsymbol{a^3 - 3a^2 + 1}$

$0 < a < 2$ のとき最小値 $\boldsymbol{a^3 - 3a^2 + 1}$，$2 \leqq a$ のとき最小値 $\boldsymbol{-3}$

3.10 平成 22 年度編入学試験 (90 分)

1. 以下の各小問に答えよ.

   (1) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$ を展開しなさい.

   (2) $3a^2-8ab-3b^2$ を因数分解しなさい.

   (3) $\dfrac{2-x}{3} > x+2$ を解きなさい.

   (4) 2 次方程式 $3x^2-4x-2=0$ の 2 つの解を $a,\ b\,(a<b)$ とするとき，a^2+b^2 の値を求めなさい.

   (5) 放物線 $y=x^2-4x+3$ を原点 O に関して対称移動した放物線を表す 2 次関数を求めよ.

   (6) 等式 $\dfrac{1}{x^2-3x+2}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x-2}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ.

   (7) 学生 6 人を組を区別しないで，2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか求めよ.

   (8) △ABC について $\angle \mathrm{B}=60°$，$\angle \mathrm{C}=75°$，$\mathrm{BC}=2$ のとき，この三角形の外接円の半径 R を求めよ.

   (9) (8) における △ABC の面積 S を求めよ.

   (10) $x+2y=1$，$x^2+4y^2=4$ のとき，xy の値を求めよ.

2. x の関数 $y=\sin^2 x+\cos x\ (0° \leqq x \leqq 360°)$ がある.

   (1) $\cos x=t$ とおいて，y を t の関数で表せ．また t の値の範囲を求めよ.

   (2) y の最大値，最小値を求めよ．またそのときの x の値を求めよ.

3. △ABC において，次の等式が成り立つことを証明せよ.

   ただし，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ である.

   $$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

4. 次の各小問に答えなさい．

(1) $(a^3b^{-1})^3 \times (a^2b^{-3})^{-2}$ を計算し最も簡単な形に書き直しなさい．

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6}$ を計算しなさい．

(3) 2^{30}，3^{20}，6^{10} を大きい順に左から並べ替えなさい．

(4) 不等式 $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x < 16$ を解きなさい．

(5) $\log_2 25 - 2\log_4 10 - 3\log_8 10$ を計算し簡単にしなさい．

(6) 対数方程式 $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$ を解きなさい．

(7) 中心が $(3, -4)$ で原点を通る円の方程式を求めよ．

(8) $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき，不等式 $2\cos\theta \geqq -1$ を解きなさい．

(9) x が 0 から 3 まで変化するとき，関数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ の平均変化率を求めよ．

(10) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3}$ の値を求めよ．

5. 3 次関数 $y = f(x) = -x^3 + 3x$ がある．

(1) この 3 次関数のグラフを書きなさい．また極大値，極小値があれば答えなさい．

(2) $a > -2$ とする．$-2 \leqq x \leqq a$ における 3 次関数 $y = f(x)$ の最小値は a の値に応じてどのように変化するか，場合分けをしなさい．

(3) $x = 2$ における 3 次関数 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ．

(4) $x = c$ における 3 次関数 $y = f(x)$ の接線が点 $(2,\ 6)$ を通るとき，c の値を求めよ．またその接線の方程式も求めよ．

解答例

1. (1) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2) = (2x-3y)\{(2x)^2+2x\cdot 3y+(3y)^2\}$
$= (2x)^3-(3y)^3 = \boldsymbol{8x^3-27y^3}$

(2) $3a^2-8ab-3b^2 = \boldsymbol{(a-3b)(3a+b)}$

(3) $\boldsymbol{x<-1}$

(4) 2 次方程式の解と係数の関係により　$a+b=\dfrac{4}{3}$，$ab=-\dfrac{2}{3}$

よって　　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\left(\dfrac{4}{3}\right)^2-2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{28}{9}}$

(5) $y=x^2-4x+3$ を原点 O に関する対称移動をした放物線の方程式は

$$-y=(-x)^2-4(-x)+3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-x^2-4x-3}$$

(6) 等式の両辺に $(x-1)(x-2)$ をかけると，次の等式が得られる．

$$1=a(x-2)+b(x-1)$$

右辺を整理すると

$$1=(a+b)x+(-2a-b)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0=a+b, \quad 1=-2a-b$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-1,\ b=1}$

(7) 学生 6 人を A，B，C の 3 つの組に，2 人ずつ分ける方法は

$${}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2=\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\times\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=90 \text{ (通り)}$$

この分け方で，A，B，C の区別をなくすと同じ組が 3! 通りずつできる．

よって，求める分け方の総数は　　$\dfrac{90}{3!}=\dfrac{90}{6}=\boldsymbol{15}$ (通り)

(8) $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

正弦定理により　　$\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=2R$

よって　　$R=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=\dfrac{1}{2}\times 2\div\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

(9) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin 60^\circ} = 2 \times \sqrt{2}$

ゆえに　$b = 2\sqrt{2}\sin 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

よって　$S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{6}\sin 75^\circ = \sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}}$

(10) $x + 2y = 1$ の両辺を平方すると　$x^2 + 4xy + 4y^2 = 1$

$x^2 + 4y^2 = 4$ により　$4 + 4xy = 1$　ゆえに　$\boldsymbol{xy = -\dfrac{3}{4}}$

2. (1) $\cos x = t$ とおくと，$0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

$y = \sin^2 x + \cos x = (1 - \cos^2 x) + \cos x$ であるから

$$\boldsymbol{y = -t^2 + t + 1 \ \ (-1 \leqq t \leqq 1)}$$

(2) (1) の結果から　$y = -\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4} \ \ (-1 \leqq t \leqq 1)$

よって　$t = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = 60^\circ, 300^\circ}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

$t = -1$　すなわち　$\boldsymbol{x = 180^\circ}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-1}$

3. 余弦定理により

$$\begin{aligned}\frac{a - c\cos B}{b - c\cos A} &= \left(a - c \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\right) \div \left(b - c \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \\ &= \frac{2a^2 - (c^2 + a^2 - b^2)}{2a} \div \frac{2b^2 - (b^2 + c^2 - a^2)}{2b} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} \times \frac{2b}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{b}{a} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

正弦定理により

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \qquad \text{ゆえに} \qquad \frac{\sin B}{\sin A} = \frac{b}{a} \quad \cdots ②$$

よって，①，② により　$\dfrac{a - c\cos B}{b - c\cos A} = \dfrac{\sin B}{\sin A}$

4. (1) $(a^3b^{-1})^3 \times (a^2b^{-3})^{-2} = a^9b^{-3} \times a^{-4}b^6 = a^{9+(-4)}b^{-3+6} = \boldsymbol{a^5b^3}$

(2) $\sqrt{6} \times \sqrt[4]{54} \div \sqrt[4]{6} = \sqrt{6} \times \sqrt[4]{\dfrac{54}{6}} = \sqrt{6} \times \sqrt[4]{9} = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = \boldsymbol{3\sqrt{2}}$

(3) $2^{30} = (2^3)^{10} = 8^{10}$，$3^{20} = (3^2)^{10} = 9^{10}$ より

$9^{10} > 8^{10} > 6^{10}$　ゆえに　$\boldsymbol{3^{20} > 2^{30} > 6^{10}}$

(4) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x < 16$ より $\quad 2^{-3x} < 2^4$

底 2 は 1 より大きいので $\quad -3x < 4 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{x > -\dfrac{4}{3}}$

(5) $\quad \log_2 25 - 2\log_4 10 - 3\log_8 10$

$= \log_2 25 - 2 \times \dfrac{\log_2 10}{\log_2 4} - 3 \times \dfrac{\log_2 10}{\log_2 8}$

$= \log_2 25 - \log_2 10 - \log_2 10$

$= \log_2 \dfrac{1}{4} = \boldsymbol{-2}$

(6) 真数は正であるから $\quad x+1 > 0 \quad$ かつ $\quad x > 0$

すなわち $\qquad x > 0 \quad \cdots$①

方程式を変形すると $\quad \log_2(x+1)x = \log_2 2$

ゆえに $\qquad (x+1)x = 2$

整理すると $\qquad x^2 + x - 2 = 0$

したがって $\qquad (x+2)(x-1) = 0$

① に注意して $\qquad \boldsymbol{x = 1}$

(7) 半径 r は，原点と点 $(3, -4)$ の距離であるから $\quad r = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

よって，求める円の方程式は $\qquad \boldsymbol{(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25}$

(8) 与えられた不等式から $\quad \cos\theta \geqq -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲でこれを解くと $\quad \boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ,\ 240^\circ \leqq \theta < 360^\circ}$

(9) 求める平均変化率は

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(3^2 - 2\cdot 3 - 3) - (-3)}{3} = \boldsymbol{1}$$

(10) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - x - 12}{x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-4)}{(x+3)(x-1)} = \lim_{x \to -3} \frac{x-4}{x-1} = \frac{-3-4}{-3-1} = \boldsymbol{\frac{7}{4}}$

5. (1) $f'(x)= -3x^2+3$

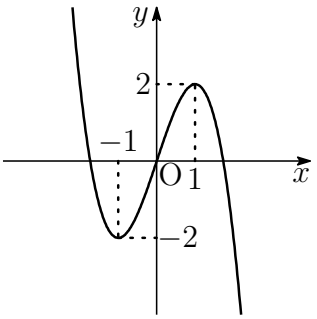
$= -3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると

$x=-1,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

$f(x)$ の増減表は，右のようになる．



したがって，この関数は

$x=1$ で極大値 2,

$x=-1$ で極小値 -2

をとる．

また，グラフは右の図のようになる．

(2) $f(-1)=f(2)=-2$ であるから，$-2 \leqq x \leqq a$ における $f(x)$ の最小値は

$-2<a<-1$ のとき　**$x=a$ で最小値 $-a^3+3a$**

$-1 \leqq a<2$ のとき　**$x=-1$ で最小値 -2**

$2 \leqq a$ のとき　**$x=a$ で最小値 $-a^3+3a$**

(3)　$f(2)=-2^3+3\cdot 2=-2$，$f'(2)=-3\cdot 2^2+3=-9$

したがって $x=2$ における接線の方程式は

$y-(-2)=-9(x-2)$　すなわち　**$y=-9x+16$**

(4) 接点 $(c,\ -c^3+3c)$ における接線の傾きは $-3c^2+3$ となるから，その接線の方程式は

$$y-(-c^3+3c)=(-3c^2+3)(x-c)$$

すなわち　$y=(-3c^2+3)x+2c^3$　$\cdots$①

この直線が点 $(2,\ 6)$ を通るから

$$6=(-3c^2+3)\cdot 2+2c^3$$

整理すると　$c^3-3c^2=0$

すなわち　$c^2(c-3)=0$

よって　**$c=0,\ 3$**

したがって，接線の方程式は，① より

$c=0$ のとき　**$y=3x$**

$c=3$ のとき　**$y=-24x+54$**

3.11 平成 21 年度編入学試験 (90 分)

1. 以下の各小問に答えよ.

   (1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ を計算せよ.

   (2) $(2+i)^3+(2-i)^3$ を計算せよ (ただし $i^2=-1$).

   (3) 単項式 $(xy^2)^3 \times \left(-\dfrac{1}{4}x^3y\right)^2$ を計算せよ.

   (4) 整式 $A=x^3-x$, $B=2x-4x^2-5+3x^3$ のとき, $2(A+B)-(3B-A)$ を求めよ.

   (5) 整式 x^3+3x^2-4 を整式 $f(x)$ で割ると割り切れて, 商が $x-1$ となる. $f(x)$ を求めよ.

   (6) 2 次の整式 $g(x)$, $h(x)$ の最大公約数は $x-2$, 最小公倍数は $(x-2)(x+1)(x-1)$ である. $g(x)$, $h(x)$ を求めよ.

   (7) 連立不等式 $\begin{cases} x^2-3x>0 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$ を解け.

   (8) 方程式 $3\cdot 2^{2x}-11\cdot 2^x-4=0$ を解け.

2. CA $=7$, AB $=4$, $\angle$A $=60^\circ$ である $\triangle$ABC の面積を求めよ.

3. 次の三角方程式・不等式を解け. ただし, $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ とする.

   (1) $\sin(90^\circ-\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   (2) $\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$

4. 3 点 A$(2,-1)$, B$(4,-3)$, C$(6,\ 7)$ について, 以下の各小問に答えよ.

   (1) 線分 BC の中点 M の座標を求めよ.

   (2) 線分 CA を 2 : 1 に外分する点 P の座標を求めよ.

   (3) $\triangle$ABC の重心 G の座標を求めよ.

5. 3 点 $(3,-1)$, $(1,\ 3)$, $(3,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ.

6. 軸が直線 $x=-1$ で 2 点 $(2,\ 9)$, $(1,-6)$ を通る 2 次関数の方程式を求めよ.

7. $\varphi(x)=x^2+(a^2-1)x+\dfrac{1}{2}a^2-4a$ に対して, $S(a)=\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ とする. $b=S(a)$ はどのような曲線を描くか.

解答例

1. (1) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3}) = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2 = \mathbf{2}$

   (2) $(2+i)^3 + (2-i)^3 = (8+12i+6i^2+i^3) + (8-12i+6i^2-i^3)$
   $= 16 + 12i^2 = 16 + 12\cdot(-1) = \mathbf{4}$

   (3) $(xy^2)^3 \times \left(-\frac{1}{4}x^3y\right)^2 = x^3y^6 \times \frac{1}{16}x^6y^2 = \frac{1}{16}x^{3+6}y^{6+2} = \boldsymbol{\frac{1}{16}x^9y^8}$

   (4) $2(A+B) - (3B-A) = 3A - B$
   $= 3(x^3-x) - (2x - 4x^2 - 5 + 3x^3)$
   $= \boldsymbol{4x^2 - 5x + 5}$

   (5) この割り算について，次の等式が成り立つ．

   $$x^3 + 3x^2 - 4 = f(x) \times (x-1)$$

   よって，x^3+3x^2-4 を $x-1$ で割った商が $f(x)$ である．右の割り算により

   $$\boldsymbol{f(x) = x^2 + 4x + 4}$$

   $$\begin{array}{r|l} & x^2 + 4x + 4 \\ \hline x-1 & x^3 + 3x^2 \quad -4 \\ & x^3 - x^2 \\ \hline & 4x^2 \\ & 4x^2 - 4x \\ \hline & 4x - 4 \\ & 4x - 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

   (6) ともに 2 次の整式であるから，$g(x)$，$h(x)$ は

   $$\boldsymbol{(x-2)(x+1),\ (x-2)(x-1)}$$

   (7) 第 1 式から　$x(x-3) > 0$　　これを解いて　$x < 0,\ 3 < x$　$\cdots$①
   第 2 式から　$(x+1)(x-5) < 0$　これを解いて　$-1 < x < 5$　$\cdots$②
   ①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-1 < x < 0,\ 3 < x < 5}$

   (8) $2^x = t$ とおくと　$t > 0$　$\cdots$①
   方程式は　$3t^2 - 11t - 4 = 0$
   ゆえに　$(t-4)(3t+1) = 0$
   ① より　$t = 4$
   したがって　$2^x = 4$　よって　$\boldsymbol{x = 2}$

2. $\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot 7\cdot 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{7\sqrt{3}}$

3. (1) $\sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta$ であるから，方程式は　$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   したがって，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で解くと　$\boldsymbol{\theta = 30^\circ,\ 330^\circ}$

(2) 不等式 $\cos\theta > -\dfrac{1}{2}$ を $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ の範囲で解くと

$$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta < 120^\circ,\ \ 240^\circ < \theta < 360^\circ}$$

4. (1) 線分 BC の中点の座標 M は

$$\left(\frac{4+6}{2},\ \frac{-3+7}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(5,\ 2)}$$

(2) 線分 CA を 2 : 1 に外分する点 P の座標は

$$\left(\frac{-1\cdot 6+2\cdot 2}{2-1},\ \frac{-1\cdot 7+2\cdot(-1)}{2-1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(-2,\,-9)}$$

(3) △ABC の重心 G の座標は

$$\left(\frac{2+4+6}{3},\ \frac{-1+(-3)+7}{3}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(4,\ 1)}$$

5. 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする.

点 $(3,-1)$ を通るから $\quad 3^2+(-1)^2+l\cdot 3+m\cdot(-1)+n=0$
点 $(1,\ 3)$ を通るから $\quad 1^2+3^2+l\cdot 1+m\cdot 3+n=0$
点 $(3,\ 3)$ を通るから $\quad 3^2+3^2+l\cdot 3+m\cdot 3+n=0$

整理すると

$$3l-m+n+10=0$$
$$l+3m+n+10=0$$
$$3l+3m+n+18=0$$

これを解くと $\quad l=-4,\ m=-2,\ n=0$

よって，求める円の方程式は $\quad \boldsymbol{x^2+y^2-4x-2y=0}$

6. 軸が直線 $x=-1$ であるから，この 2 次関数は

$$y=a(x+1)^2+q$$

の形に表される．グラフが

点 $(2,\ 9)$ を通るから $\quad 9=a(2+1)^2+q$
点 $(1,-6)$ を通るから $\quad -6=a(1+1)^2+q$

よって $\quad 9a+q=9,\ 4a+q=-6$

これを解くと $\quad a=3,\ q=-18$

したがって $\quad \boldsymbol{y=3(x+1)^2-18}$

7. $\varphi(x) = x^2 + (a^2-1)x + \dfrac{1}{2}a^2 - 4a$ を $S(a) = \displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx$ に代入すると

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^1 \left\{ x^2 + (a^2-1)x + \frac{1}{2}a^2 - 4a \right\} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}(a^2-1)x^2 + \left(\frac{1}{2}a^2 - 4a \right) x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}(a^2-1) + \left(\frac{1}{2}a^2 - 4a \right) \\ &= a^2 - 4a - \frac{1}{6} \end{aligned}$$

よって，$b = S(a)$ のグラフは，放物線

$$b = a^2 - 4a - \frac{1}{6} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b = (a-2)^2 - \frac{25}{6}}$$

3.12 平成 20 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えよ.

   (1) $(a^2b^3 - 2a^4b^3) \div 2a^2b^3$

   (2) $(x^2 + 2x - 3)(x^2 + 2x + 1)$ を計算せよ.

   (3) $3^{x+1} + 2 = 3^{x+2}$ を満たす整数 x を求めよ.

   (4) 2 次関数 $y = x^2 + 2x$ の $-2 \leqq x \leqq 1$ における最小値を求めよ.

   (5) $\sin 30^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 60^\circ$ の値を求めよ.

   (6) x の整式 $f(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りが $3x - 4$ であった. $f(x)$ を $x - 2$ で割ったときの余りを求めよ.

   (7) 次の極限値を求めよ.

   $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2}$$

   (8) $\log_{10} 8 + \log_{10} 400 - 5 \log_{10} 2$ の値を求めよ.

   (9) 不等式 $|x - 2| \geqq 3$ を解け.

   (10) 三角形 ABC において, AB = 3, BC = 5, CA = 7 である. この三角形の面積を求めよ.

2. 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 3 \cdots$ ① について

   (1) ① のグラフを x 軸方向に -3, y 軸方向に 2 だけ平行移動したときの 2 次関数を求めよ.

   (2) ある 2 次関数のグラフを x 軸方向に 1, y 軸方向に 2 だけ平行移動すると ① のグラフと一致した. このときもとの関数を求めよ.

3. 2 直線 $x + ay + (a - 3) = 0$, $ax + (a + 2)y - 2 = 0$ について

   (1) 2 直線が平行となるように, a の値を定めよ.

   (2) 2 直線が垂直となるように, a の値を定めよ.

4. 2 次方程式 $x^2 - 2ax + 3a + 4 = 0$ が, 次のような解をもつように, 定数 a の値の範囲を求めよ.

   (1) 2 より大きい異なる 2 つの解

   (2) 2 より大きい解と 2 より小さい解

5. 三角形 ABC において，AB = 5，AC = 8，∠A = 60° の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき，次の問いに答えよ．

   (1) BD の長さを求めよ．

   (2) AD の長さを求めよ．

6. x の整式 $f(x)$ が $xf''(x) + (1-x)f'(x) + 3f(x) = 0$，$f(0) = 1$ を満たすとき，次の問いに答えよ．

   (1) $f(x)$ の次数を求めよ．

   (2) $f(x)$ を求めよ．

7. 3 次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + 1$ は $x = -1$ で極大値をとるとする．次の問いに答えよ．

   (1) $f(x)$ が $x = p$ で極小値をとるとき，b と p を a で表せ．

   (2) $f(x)$ の極大値と極小値の差が $\dfrac{1}{2}$ のとき，a の値を求めよ．

解答例

1. (1) $(a^2b^3 - 2a^4b^3) \div 2a^2b^3 = \dfrac{a^2b^3}{2a^2b^3} - \dfrac{2a^4b^3}{2a^2b^3} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2} - a^2}$

   (2) $(x^2+2x-3)(x^2+2x+1) = \{(x^2+2x)-3\}\{(x^2+2x)+1\}$
   $= (x^2+2x)^2 - 2(x^2+2x) - 3$
   $= \boldsymbol{x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x - 3}$

   (3) $3^x = t$ とおくと，$3^{x+1} = 3t$，$3^{x+2} = 9t$ であるから，方程式は

   $$3t + 2 = 9t \quad \text{これを解いて} \qquad t = \frac{1}{3}$$

   ゆえに　$3^x = \dfrac{1}{3}$　よって　$\boldsymbol{x = -1}$

   (4) $y = (x+1)^2 - 1$ であるから，$-2 \leqq x \leqq 1$ において
   $\boldsymbol{x = -1}$ **で最小値** $\boldsymbol{-1}$ をとる.

   (5) $\sin 30^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 60^\circ = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

   (6) x の整式 $f(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの余りが $3x - 4$ であるので，このときの商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ.

   $$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - x - 2)Q(x) + 3x - 4 \\ &= (x-2)(x+1)Q(x) + 3x - 4 \end{aligned}$$

   $f(x)$ を $x - 2$ で割った余りは $f(2)$ であるから，上式に $x = 2$ を代入すると

   $$f(2) = 2 \quad \text{したがって，求める余りは} \quad \mathbf{2}$$

   (7) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{x(x-2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{x+1} = \frac{2}{2+1} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

   (8) $\log_{10} 8 + \log_{10} 400 - 5\log_{10} 2 = \log_{10} \dfrac{8 \times 400}{2^5} = \log_{10} 100 = \mathbf{2}$

   (9) $|x - 2| \geqq 3$ から

   $$x - 2 \leqq -3, \quad 3 \leqq x - 2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x \leqq -1, \quad 5 \leqq x}$$

   (10) $a = 5$，$b = 7$，$c = 3$ より，$2s = a + b + c$ とおくと　$s = \dfrac{15}{2}$
   ヘロンの公式により，求める面積 S は

   $$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2} - 5\right)\left(\frac{15}{2} - 7\right)\left(\frac{15}{2} - 3\right)} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

2. (1) ① を変形すると　$y=(x-1)^2+2$ ゆえに，① の頂点は　$(1,\ 2)$
① を x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の頂点の座標は

$$(1-3,\ 2+2)\quad \text{すなわち}\quad (-2,\ 4)$$

したがって，求める放物線の方程式は x^2 の係数が 1 であることに注意して

$$\boldsymbol{y=(x+2)^2+4}$$

(2) もとの放物線の頂点の座標を $(p,\ q)$ とすると，これを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した放物線の頂点の座標は　$(p+1, q+2)$
これが ① の頂点に一致するから

$$p+1=1,\quad q+2=2\quad \text{すなわち}\quad p=0,\quad q=0$$

よって，求める放物線の頂点は原点で，x^2 の係数が 1 であるから

$$\boldsymbol{y=x^2}$$

3. (1) 2 直線が平行であるから

$$1\cdot(a+2)-a\cdot a=0$$

すなわち　$a^2-a-2=0$
ゆえに　$(a+1)(a-2)=0$
よって　$\boldsymbol{a=-1,\ 2}$

(2) 2 直線が垂直であるから

$$1\cdot a+a(a+2)=0$$

すなわち　$a^2+3a=0$
ゆえに　$a(a+3)=0$
よって　$\boldsymbol{a=0,-3}$

2 直線の平行条件・垂直条件

2 直線 $l_1: a_1x+b_1y+c_1=0$，$l_2: a_2x+b_2y+c_2=0$ について

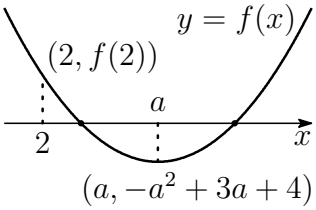
$$l_1 /\!/ l_2 \iff a_1b_2-a_2b_1=0$$
$$l_1 \perp l_2 \iff a_1a_2+b_1b_2=0$$

4. $f(x) = x^2 - 2ax + 3a + 4$ とおくと　$f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 3a + 4$

$y = f(x)$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標が $f(x) = 0$ の解である.

(1) $f(x) = 0$ が 2 より大きい異なる 2 つの解をもつための条件は

$$\begin{cases} f(2) > 0 & \cdots ① \\ a > 2 & \cdots ② \\ -a^2 + 3a + 4 < 0 & \cdots ③ \end{cases}$$



① より

$$2^2 - 2a\cdot 2 + 3a + 4 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad a < 8 \quad \cdots ①'$$

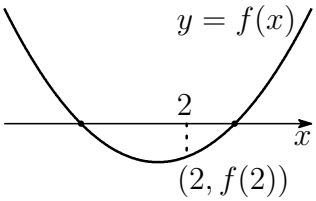
③ より

$$a^2 - 3a - 4 > 0 \quad \text{これを解いて} \quad a < -1,\ 4 < a \cdots ③'$$

したがって，①′，②，③′ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{4 < a < 8}$

(2) $f(x) = 0$ が 2 より大きい解と 2 より小さい解をもつための条件は

$$f(2) < 0$$

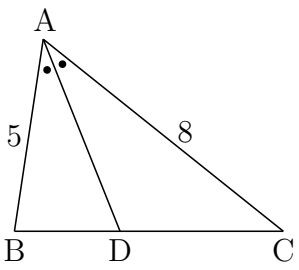


したがって

$$2^2 - 2a\cdot 2 + 3a + 4 < 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a > 8}$

5. (1) BC の長さ a は，$b=8$，$c=5$，$A=60^\circ$ を余弦定理に適用して



$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= 8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cos 60^\circ \\ &= 64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{1}{2} \\ &= 49 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから　$a=7$

AD は ∠A の二等分線であるから　BD : DC = AB : AC

ゆえに，点 D は線分 BC を 5 : 8 に内分する点である．

よって　$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\times\dfrac{5}{5+8}=7\times\dfrac{5}{13}=\boldsymbol{\dfrac{35}{13}}$

(2) AD $=x$ とすると，△ABD + △ACD = △ABC より

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot x\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 8\cdot x\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 8\sin 60^\circ$$

$$\frac{5}{4}x+2x=10\sqrt{3}$$

$$x=\frac{40\sqrt{3}}{13}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AD}=\dfrac{40\sqrt{3}}{13}}$

6. (1) 与式から $\{xf''(x)+f'(x)\}+\{-xf'(x)+3f(x)\}=0 \quad \cdots ①$

$f(x)$ を n 次式とすると

$xf''(x)+f'(x)$ は $n-1$ 次式，$-xf'(x)+3f(x)$ は n 次式

$f(x)$ の最高次の項を ax^n とすると $(a\neq 0)$，① の最高次の項について

$$-x\cdot anx^{n-1}+3ax^n=0 \quad \text{ゆえに} \quad a(-n+3)x^n=0$$

$a\neq 0$ より $\quad -n+3=0 \quad$ よって，$f(x)$ の次数は $\quad \mathbf{3}$

(2) $f(x)$ は 3 次式，$f(0)=1$ により

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$$

とおくと $\quad f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

これらを ① に代入すると

$$\{x(6ax+2b)+(3ax^2+2bx+c)\}$$
$$+\{-x(3ax^2+2bx+c)+3(ax^3+bx^2+cx+1)\}=0$$

整理すると

$$(9a+b)x^2+(4b+2c)x+c+3=0$$

上式は x についての恒等式であるから

$$9a+b=0, \quad 4b+2c=0, \quad c+3=0$$

これを解いて $\quad a=-\dfrac{1}{6}, \quad b=\dfrac{3}{2}, \quad c=-3$

よって $\qquad \boldsymbol{f(x)=-\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{3}{2}x^2-3x+1}$

7. (1) $f'(x)=3x^2+6ax+3b$，$f'(x)=0$ の解が $x=-1,\ p$ であるから，解と係数の関係により

$$-1+p=-\frac{6a}{3}=-2a,\quad -1\cdot p=\frac{3b}{3}=b$$

上の 2 式より　$\boldsymbol{b=2a-1,\ \ p=1-2a}$

(2) (1) の結果から　$f(x)=x^3+3ax^2+3(2a-1)x+1$

極大値は　$f(-1)=(-1)^3+3a(-1)^2+3(2a-1)\cdot(-1)+1$
$=-3a+3$

極小値は　$f(p)=f(1-2a)$
$=(1-2a)^3+3a(1-2a)^2+3(2a-1)\cdot(1-2a)+1$
$=4a^3-12a^2+9a-1$

条件から　$(-3a+3)-(4a^3-12a^2+9a-1)=\dfrac{1}{2}$

$$-4a^3+12a^2-12a+4=\frac{1}{2}$$

$$a^3-3a^2+3a-1=-\frac{1}{8}$$

$$(a-1)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

ゆえに　$a-1=-\dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{2}}$

3.13 平成 19 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい．(答だけ解答しなさい．)

   (1) $(x+1)^2(x^2-x+1)^2$ を展開しなさい．

   (2) $9x^2-30xy+25y^2$ を因数分解しなさい．

   (3) $x-\dfrac{5x-7}{3} \geqq -3$ を解きなさい．

   (4) 2 次方程式 $x^2-x-5=0$ の 2 つの解を a，b $(a<b)$ とするとき，a^2+b^2 の値を求めなさい．

   (5) 放物線 $y=2x^2-x+3$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線を表す 2 次関数を求めよ．

   (6) 等式 $ax(x+1)+bx(x-1)+c(x-1)(x+3)=2x^2+9x-9$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b，c の値を定めよ．

   (7) a，b，c，d，e の 5 人がくじ引きで順番を決めて 1 列に並ぶとき，a，b が両端に並ぶ確率を求めよ．

   (8) △ABC について $a+b : b+c : c+a = 5 : 7 : 6$ のとき，$\sin A : \sin B : \sin C$ を求めよ．

   (9) △ABC で，$\angle \mathrm{A} = 120^\circ$，$\mathrm{BC} = 19$，$\mathrm{CA} = 16$ のとき，辺 AB の長さ c を求めよ．

   (10) $x+y=1$，$x^3+y^3=4$ のとき，xy の値を求めよ．

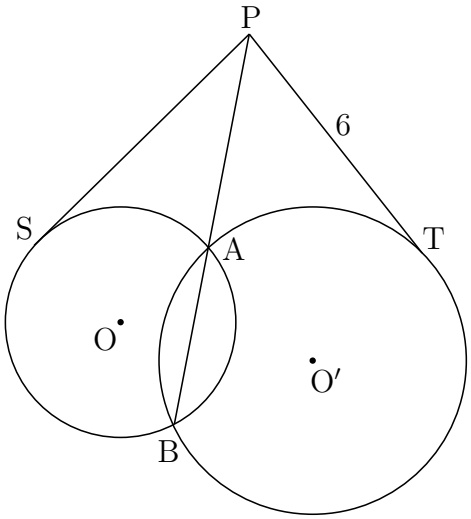
2. x の関数 $y=\sin^2 x+\cos x+1$ $(0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ)$ がある．

   (1) $\cos x = t$ とおいて，y を t の関数で表せ．また t の値の範囲を求めよ．

   (2) y の最大値，最小値を求めよ．またそのときの x の値を求めよ．

3. 2 円 O，O′ が 2 点 A，B で交わるとき，直線 BA の A の方への延長上に点 P をとり，P から円 O，O′ に接線 PS，PT(S，T は接点) をひくと，PT = 6 であった．

(1) PS の長さを求めよ．



(2) AB = 5 のとき，PA の長さを求めよ．

4. 次の各小問に答えなさい．(答だけ解答しなさい．)

(1) $(2x^4 - 3x^3 + x - 5) \div (x^2 - x + 1)$ を計算し，商と余りを求めよ．

(2) 分数式 $\dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{y-z}{yz} + \dfrac{z-x}{zx}$ を簡単にせよ．

(3) 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の 1 つの解が $5 - \sqrt{3}i$ であるように，p，q を決定せよ．

(4) 方程式 $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12 = 0$ を解いて解を求めよ．

(5) 2 点 $(2, -1)$，$(-3,\ 4)$ を通る直線の方程式を求めよ．

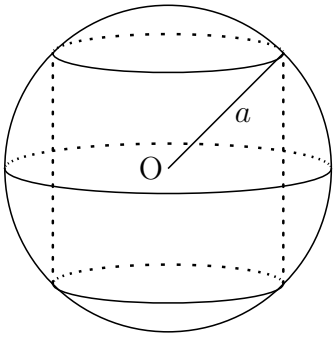
(6) 円 $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 37 = 0$ と直線 $x - y + 3 = 0$ との交点の座標を求めよ．

(7) 方程式 $2^{2x} - 2^{x+1} + 1 = 0$ を解いて解を求めよ．

(8) $4\sin\theta\cos\theta = \sqrt{3}$ のとき，$\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ．

(9) 対数関数 $y = \log_2 8x - 1$ のグラフを描け．

5. 半径 a の球に内接する直円柱の体積を V とするとき，その体積が最大になるときの底円の半径，高さ，およびその体積を求めよ．

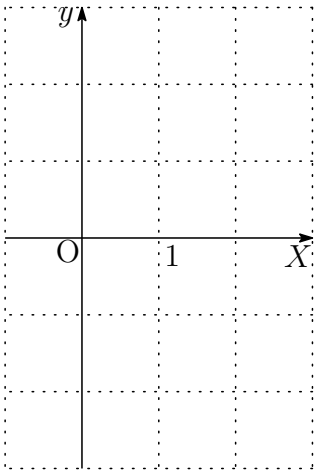


6. 関数 $f(x) = 8^x - 3 \cdot 2^x$ について考える．

(1) $X = 2^x$ とおいて変数変換し，$f(x)$ を X の式で表せ．

(2) (1) で求めた X の式を $g(X)$ とおくとき，下の増減表を完成し，関数 $y = g(X)$ のグラフを描け．

X	0			
y'				
y				



(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ の範囲での最大値を求めよ．

解答例

1. (1) $(x+1)^2(x^2-x+1)^2 = \{(x+1)(x^2-x+1)\}^2$
$= (x^3-1)^2$
$= \boldsymbol{x^6 - 2x^3 + 1}$

(2) $9x^2 - 30xy + 25y^2 = (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 5y + (5y)^2$
$= \boldsymbol{(3x - 5y)^2}$

(3) $\boldsymbol{x \leqq 8}$

(4) 解と係数の関係により　$a+b=1$，$ab=-5$
よって　$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 1^2 - 2\cdot(-5) = \boldsymbol{11}$

(5) 放物線 $y = 2x^2 - x + 3$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$y + 2 = 2(x-1)^2 - (x-1) + 3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x^2 - 5x + 4}$$

(6) 等式の右辺を x について整理すると

$$(a+b+c)x^2 + (a-b+2c)x + 3c = 2x^2 + 9x - 9$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a+b+c = 2, \quad a-b+2c = 9, \quad 3c = 9$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 1,\ \ b = -2,\ \ c = 3}$

(7) 5 人全員の並び方は，5! 通りある．
a，b が両端に並ぶ方法は，$2 \times 3!$ 通りある．
よって，求める確率は　$\dfrac{2 \times 3!}{5!} = \boldsymbol{\dfrac{1}{10}}$

(8) $a+b : b+c : c+a = 5 : 7 : 6$ より，定数 k を用いて

$$a+b = 5k, \quad b+c = 7k, \quad c+a = 6k$$

これから　$a = 2k$，$b = 3k$，$c = 4k$
正弦定理により　$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$
よって　$\boldsymbol{\sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 4}$

(9) 余弦定理により　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$19^2 = 16^2 + c^2 - 2\cdot 16\cdot c\cos 120^\circ$
ゆえに　　$c^2 + 16c - 105 = 0$
よって　　$(c+21)(c-5) = 0$
$c > 0$ より　　$\boldsymbol{c = 5}$

(10) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ に $x+y=1$，$x^3+y^3=4$ を代入して

$$4=1^3-3xy\cdot 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{xy=-1}$$

2. (1) $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ において $\quad -1 \leqq \cos x \leqq 1$

また $\quad y=\sin^2 x+\cos x+1=(1-\cos^2 x)+\cos x+1$

$$=-\cos^2 x+\cos x+2$$

$\cos x=t$ より $\qquad \boldsymbol{y=-t^2+t+2 \ \ (-1 \leqq t \leqq 1)}$

(2) (1) の結果から $\quad y=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4} \ \ (-1 \leqq t \leqq 1)$

よって $\quad t=\dfrac{1}{2}$ $\quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{x=60^\circ}$ のとき $\quad$ **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$

$t=-1$ $\quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{x=180^\circ}$ のとき $\quad$ **最小値 0**

3. (方べきの定理から次のページの補題 1，さらに補題 2 が導かれる．本問においては，補題 2 を用いた．)

(1) 方べきの定理 (補題 2) を円 O，O′ に適用して

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2, \ \ \mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PS}^2$$

ゆえに $\quad \mathrm{PT}^2=\mathrm{PS}^2 \quad$ すなわち $\quad \mathrm{PT}=\mathrm{PS}$

よって，$\mathrm{PT}=6$ より $\quad \mathbf{PS=6}$

(2) $\mathrm{PA}=x$ とおくと，$\mathrm{AB}=5$ より $\quad \mathrm{PB}=x+5$

これらを $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$ に代入すると (補題 2)

$$x(x+5)=6^2$$

整理すると $\quad x^2+5x-36=0$

すなわち $\quad (x+9)(x-4)=0$

$x>0$ より $\quad x=4$

したがって $\qquad \mathbf{PA=4}$

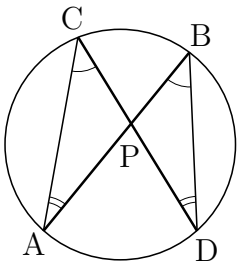
方べきの定理

円の 2 つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，

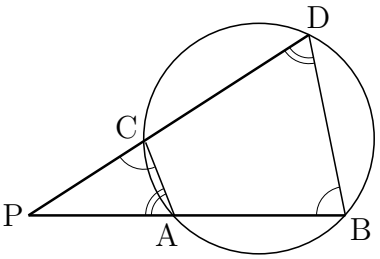
$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}$$

が成り立つ．

［1］

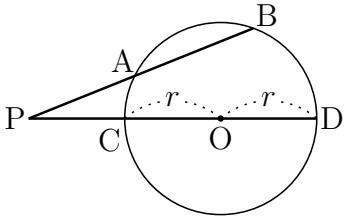


［2］



補題 1

右の図において，円 O の半径を r とするとき，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PO}^2 - r^2$ である．このことを示せ．



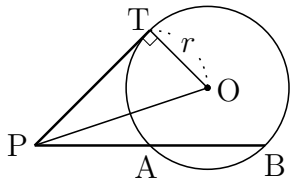
証明　方べきの定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} &= \mathrm{PC}\cdot\mathrm{PD}\\ &= (\mathrm{PO}-\mathrm{OC})(\mathrm{PO}+\mathrm{OD}) = (\mathrm{PO}-r)(\mathrm{PO}+r)\end{aligned}$$

よって　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PO}^2 - r^2$　　**証終**

補題 2

右の図のように，円 O の外部の点 P を通る直線が円 O と 2 点 A，B で交わるとする．P から円 O に接線を引き，その接点を T とすると，$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$ が成り立つことを証明せよ．



証明　方べきの定理から

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PO}^2 - r^2$$

一方，△POT は直角三角形であるから，三平方の定理により

$$\mathrm{PT}^2 = \mathrm{PO}^2 - \mathrm{OT}^2 = \mathrm{PO}^2 - r^2$$

したがって，上の 2 式から　　$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB} = \mathrm{PT}^2$　　**証終**

4. (1)
$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad -x \quad -3 \\ x^2-x+1\,)\,\overline{2x^4-3x^3 \qquad +x-5} \\ \underline{2x^4-2x^3+2x^2} \\ -x^3-2x^2+x \\ \underline{-x^3+x^2-x} \\ -3x^2+2x-5 \\ \underline{-3x^2+3x-3} \\ -x-2 \end{array}$$

商 $2x^2-x-3$，余り $-x-2$

(2) $$\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}+\frac{z-x}{zx}=\frac{z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)}{xyz}$$
$$=\frac{zx-yz+xy-zx+yz-xy}{xyz}=\mathbf{0}$$

(3) $5-\sqrt{3}i$ が方程式 $x^2+px+q=0$ の解であるから
$$(5-\sqrt{3}i)^2+p(5-\sqrt{3}i)+q=0$$
すなわち $\quad (5p+q+22)+(-p-10)\sqrt{3}i=0$

$5p+q+22$，$-p-10$ は実数であるから

$$5p+q+22=0, \quad -p-10=0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{p=-10,\ q=28}$

(4) $P(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x-12=0$ とすると $\quad P(2)=0$
よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもち $\quad P(x)=(x-2)(x^3+4x^2+5x+6)$
さらに，$Q(x)=x^3+4x^2+5x+6$ とすると $\quad Q(-3)=0$
よって，$Q(x)$ は $x+3$ を因数にもち $\quad Q(x)=(x+3)(x^2+x+2)$
ゆえに $\quad P(x)=(x-2)(x+3)(x^2+x+2)$
$P(x)=0$ から $\quad x-2=0$，$x+3=0$，$x^2+x+2=0$
したがって $\quad \boldsymbol{x=2,-3,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}}$

(5) 2 点 $(2,-1)$，$(-3,\ 4)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{4-(-1)}{-3-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x+y-1=0}$$

(6) 直線の方程式から　$y = x + 3$　$\cdots$①

これを円の方程式に代入すると

$$x^2 + (x+3)^2 - 6x + 4(x+3) - 37 = 0$$

整理すると　$x^2 + 2x - 8 = 0$

ゆえに　$x = -4,\ 2$

① より　$x = -4$ のとき　$y = -1$,　$x = 2$ のとき　$y = 5$

よって，共有点の座標は　$\boldsymbol{(-4, -1),\ (2,\ 5)}$

(7) $2^x = t$ とおくと　$t > 0$　$\cdots$①

方程式は　$t^2 - 2t + 1 = 0$

ゆえに　$(t-1)^2 = 0$

① に注意して　$t = 1$

したがって　$2^x = 1$　よって　$\boldsymbol{x = 0}$

(8) $4\sin\theta\cos\theta = \sqrt{3}$ より　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0° \leqq \theta < 360°$ の範囲でこれを解くと

$2\theta = 60°,\ 120°, 420°,\ 480°$　すなわち　$\theta = 30°,\ 60°,\ 210°,\ 240°$

θ	$30°$	$60°$	$210°$	$240°$
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

$\theta = 30°,\ 60°$ のとき　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \dfrac{1+3\sqrt{3}}{8}$

$\theta = 210°,\ 240°$ のとき　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -\dfrac{1+3\sqrt{3}}{8}$

よって　$\boldsymbol{\sin^3\theta + \cos^3\theta = \pm\dfrac{1+3\sqrt{3}}{8}}$

別解　$\sin\theta + \cos\theta = \pm\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2} = \pm\sqrt{1 + 2\sin\theta\cos\theta}$

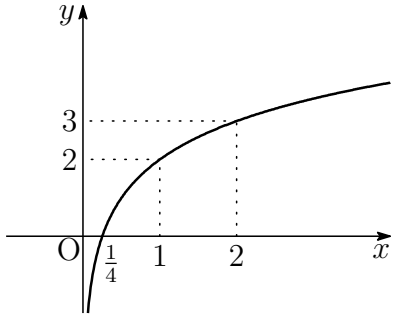
$$= \pm\sqrt{1 + 2\times\frac{\sqrt{3}}{4}} = \pm\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

よって　$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

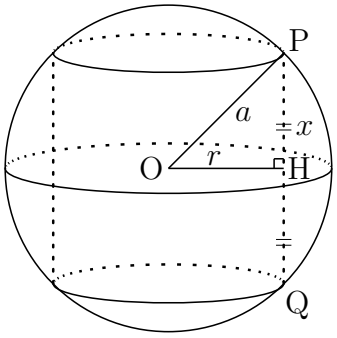
$$= (\sin\theta+\cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$$

$$= \pm\frac{\sqrt{3}+1}{2} \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \pm\boldsymbol{\frac{1+3\sqrt{3}}{8}}$$

(9) $y = \log_2 8x - 1 = \log_2 4x$ であるから



5. 右の図において PH $= x$ とすると直円柱の半径 r は，直角三角形 OPH において，三平方の定理より



$$r^2 = a^2 - x^2$$

直円柱の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \times \mathrm{PQ} \\ &= \pi(a^2 - x^2) \times 2x \\ &= 2\pi x(a^2 - x^2) \quad (0 < x < a) \end{aligned}$$

$$V' = -2\pi(3x^2 - a^2)$$

V の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	a
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大	↘	

V は $x = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ のとき最大となり，最大値は

$$2\pi \times \frac{a}{\sqrt{3}} \left\{ a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\pi a^3$$

このとき $\quad r^2 = a^2 - \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}} \right)^2 = \dfrac{2}{3}a^2 \quad$ ゆえに $\quad r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$

$$\mathrm{PQ} = 2x = 2 \times \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}a$$

以上のことから，直円柱の体積が最大となるとき，その半径，高さ，体積は

$$\textbf{半径 } \frac{\sqrt{6}}{3}\boldsymbol{a}\textbf{，高さ } \frac{2\sqrt{3}}{3}\boldsymbol{a}\textbf{，体積 } \frac{4\sqrt{3}}{9}\boldsymbol{\pi a^3}$$

6. (1) $2^x = X$，$8^x = 2^{3x} = (2^x)^3$ より

$$f(x) = 8^x - 3\cdot 2^x = \boldsymbol{X^3 - 3X} \quad (X > 0)$$

(2) $g(X) = X^3 - 3X$ を微分すると

$$\begin{aligned} g'(X) &= 3X^2 - 3 \\ &= 3(X+1)(X-1) \end{aligned}$$

$X > 0$ において $g'(X) = 0$ を解くと

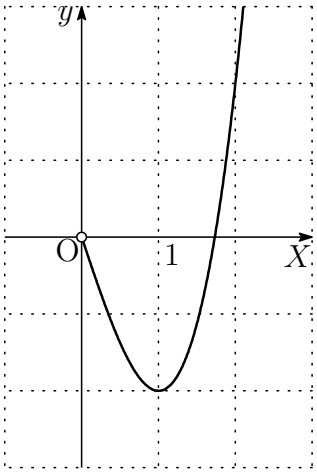
$$X = 1$$

$g(X)$ の増減表は右のようになる．
したがって，この関数は

$$\boldsymbol{X = 1 \text{ で極小値 } -2}$$

をとる．また，グラフは，右の図のようになる．

X	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	／	$-$	0	$+$
y	／	↘	極小 -2	↗



(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ のとき　$\dfrac{1}{4} \leqq X \leqq 2$
(2) のグラフから

$$X = 2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x = 1 \text{ のとき}} \quad \textbf{最大値 2}$$

をとる．

3.14 平成 18 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えよ.

   (1) $(x-y)^2-(x+y)(x^2-3x+1)$ を展開せよ.

   (2) $6x^2-x-2$ を因数分解せよ.

   (3) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ を因数分解せよ.

   (4) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$ を簡単にせよ.

   (5) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の公式を答えよ.

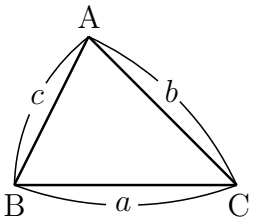
   (6) 2 次方程式 $3(x-1)(x-2)=4-x-x^2$ を解け.

   (7) 2 次関数 $y=-2x^2-4x$ のグラフを描け.

   (8) グラフが x 軸と 2 点 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $(1,\ 0)$ で交わり, 点 $(2,\ 5)$ を通る 2 次関数を求めよ.

   (9) 2 次不等式 $-x^2+2x+2 \leqq 0$ を解け.

   (10) 右の三角形 ABC について, 外接円の半径を R とするとき, 正弦定理を答えよ.



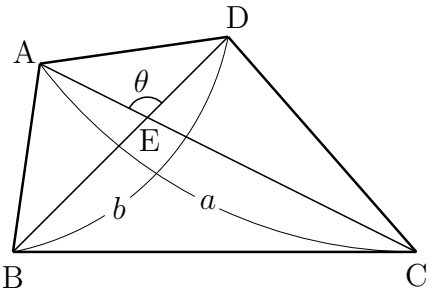
   (11) 半径 2 の円に内接する正八角形の面積を求めよ.

2. 関数 $y=-x^2+2ax$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ について, 次の問いに答えよ. ただし, a は定数で, $0<a<1$ とする.

   (1) 関数が最小値をとる x の値を求めよ.

   (2) 関数の最小値が -5 であるように, 定数 a の値を定めよ.

3. 右の図のような四角形の対角線の長さが a，b で，そのなす角が θ であるとき，この四角形の面積は $\dfrac{1}{2}ab\sin\theta$ であることを示せ．



4. 次の各小問に答えよ．

(1) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\right)^6 \times \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 \div a^{-\frac{1}{2}} \div b$ を簡単にせよ．

(2) $\left(\left(\dfrac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\dfrac{5}{27}}$ を簡単にせよ．

(3) $2^{3x-2} = 8$ を解け．

(4) $8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ を解け．

(5) $\log_4 x = -\dfrac{1}{2}$ を解け．

(6) $\log_3 x \leqq 2$ を解け．

(7) $\sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を解け．

(8) $(\log_2 3 - \log_8 9)(\log_3 8 - \log_9 32)$ を簡単にせよ．

(9) 関数の最大値と極大値の違いを簡単に説明しなさい．

(10) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ と $\sin^3\theta + \cos^3\theta$ の値を求めよ．

(11) $y = \dfrac{2^x}{4}$ のグラフを描け．

5. 連立不等式 $\begin{cases} x + y \geqq \sqrt{3} - 1 \\ x^2 + y^2 \leqq 4 \end{cases}$ の表す領域を図示せよ．

6. $y = x^3 - 6x$ の $-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ．

7. $y = 2x^3 + 2$ について，傾きが 6 である接線の方程式を求めよ．

8. $y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ $(0^\circ \leqq \theta < 180^\circ)$ の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ．

解答例

1. (1) $\boldsymbol{-x^3-x^2y+4x^2+xy-x+y^2-y}$

   (2) $\boldsymbol{(2x+1)(3x-2)}$

   (3) (a について整理する)

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc\\
=&\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc\\
=&(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)-abc\\
=&(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\
=&(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\
=&\boldsymbol{(b+c)(a+c)(a+b)}
\end{aligned}$$

   (4) $\dfrac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}+\sqrt{3})-(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$

$$=\frac{2\sqrt{21}+2\sqrt{7}}{7-3}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{21}+\sqrt{7}}{2}}$$

   (5) $\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

   (6) 与えられた方程式を整理すると　$2x^2-4x+1=0$

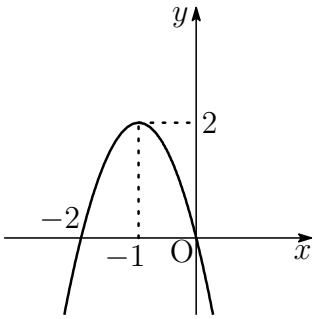
   これを解いて　　$\boldsymbol{x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}}$

   (7) $y=-2x^2-4x$ を変形すると

$$y=-2(x+1)^2+2$$

   よって，頂点の座標は　$(-1,\ 2)$

   グラフは，右の図のようになる．



(8) x 軸と 2 点 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$，$(1,\ 0)$ で交わるので，求める 2 次関数を

$$y = a\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1)$$

とおく．これが点 $(2,\ 5)$ を通るから

$$5 = a\left(2 + \frac{1}{2}\right)(2 - 1) \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

したがって，求める 2 次関数は

$$y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x^2 - x - 1}$$

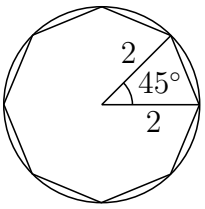
補足 2 次関数のグラフが x 軸と 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ で交わる
$\Longleftrightarrow$ 2 次関数 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$

(9) 与えられた不等式から　$x^2 - 2x - 2 \geqq 0$
2 次方程式 $x^2 - 2x - 2 = 0$ の解は　$x = 1 \pm \sqrt{3}$
よって，求める 2 次不等式の解は　$\boldsymbol{x \leqq 1 - \sqrt{3},\ 1 + \sqrt{3} \leqq x}$

(10) $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{2R}$

(11) 正八角形の面積の面積を S とすると

$$S = 8 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 45^\circ$$
$$= 16 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{8\sqrt{2}}$$



2. (1) $y = -x^2 + 2ax$ を変形すると　$y = -(x - a)^2 + a^2$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

軸の方程式は　$x = a$ $(0 < a < 1)$

定義域の中央 $\frac{3}{2}$ は，軸 $x = a$ $(0 < a < 1)$ より右側にあるので，関数の最小値は $\boldsymbol{x = 3}$ (定義域の右端) でとる．

(2) (1) の結果から，$x = 3$ のとき $y = -5$ であるから

$$-5 = -3^2 + 2a \cdot 3$$

$0 < a < 1$ に注意して　$\boldsymbol{a = \dfrac{2}{3}}$

3. EA $= x$，ED $= y$ とすると

$$\triangle \mathrm{EDA} = \frac{1}{2}xy\sin\theta$$

$$\triangle \mathrm{EAB} = \frac{1}{2}x(b-y)\sin(180^\circ-\theta) = \frac{1}{2}x(b-y)\sin\theta$$

$$\triangle \mathrm{EBC} = \frac{1}{2}(a-x)(b-y)\sin\theta$$

$$\triangle \mathrm{ECD} = \frac{1}{2}(a-x)y\sin(180^\circ-\theta) = \frac{1}{2}(a-x)y\sin\theta$$

四角形の面積 S は $\triangle\mathrm{EDA} + \triangle\mathrm{EAB} + \triangle\mathrm{EBC} + \triangle\mathrm{ECD}$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}xy\sin\theta + \frac{1}{2}x(b-y)\sin\theta + \frac{1}{2}(a-x)(b-y)\sin\theta + \frac{1}{2}(a-x)y\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}\{xy + x(b-y) + (a-x)(b-y) + (a-x)y\}\sin\theta \\ &= \frac{1}{2}ab\sin\theta \end{aligned}$$

4. (1) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{3}}\right)^6 \times \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 \div a^{-\frac{1}{2}} \div b$

$= a^3b^{-2} \times a^{-2}b^2 \div a^{-\frac{1}{2}} \div b$

$= a^{3+(-2)-(-\frac{1}{2})}b^{-2+2-1} = \boldsymbol{a^{\frac{3}{2}}b^{-1}}$

(2) $\left(\left(\dfrac{125}{27}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\dfrac{5}{27}} = \left(\left(\dfrac{5}{3}\right)^3\right)^{-\frac{1}{6}} \times \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

$= \left(\dfrac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}} \times \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}} \times \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

(3) $2^{3x-2} = 8$ より　$2^{3x-2} = 2^3$

ゆえに　$3x-2=3$　よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{3}}$

(4) $8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-1} > \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ より

$2^3 \times (2^{-1})^{x-1} > (2^{-2})^x$

ゆえに　$2^{-x+4} > 2^{-2x}$

底 2 は 1 より大きいので　$-x+4 > -2x$　これを解いて　$\boldsymbol{x > -4}$

(5) $\log_4 x = -\dfrac{1}{2}$ より

$x = 4^{-\frac{1}{2}}$　よって　$x = (2^2)^{-\frac{1}{2}} = 2^{-1} = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(6) $\log_3 x \leqq 2$ を変形すると　$\log_3 x \leqq \log_3 9$

真数は正で，底 2 は 1 より大きいので　$\boldsymbol{0 < x \leqq 9}$

(7) $\boldsymbol{0° \leqq \theta < 60°,\ 120° < \theta \leqq 180°}$

(8)　$(\log_2 3 - \log_8 9)(\log_3 8 - \log_9 32)$

$$= \left(\log_2 3 - \frac{\log_2 9}{\log_2 8}\right)\left(\frac{\log_2 8}{\log_2 3} - \frac{\log_2 32}{\log_2 9}\right)$$

$$= \left(\log_2 3 - \frac{2\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{3}{\log_2 3} - \frac{5}{2\log_2 3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\log_2 3 \times \frac{1}{2\log_2 3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(9) 関数 $f(x)$ は，区間 I で定義されている関数とする．

$f(x)$ が $x = a$ で最大であるとは，I に属するすべての x に対して，

$$f(x) \leqq f(a)$$

が成り立つことである．

$f(x)$ が $x = b$ で極大であるとは，$x = b$ の前後で，増加から減少に変わることである．

補足　「$x = b$ を含む十分小さい開区間における最大値は極大値」である．

(10) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{4}$ の両辺を平方すると

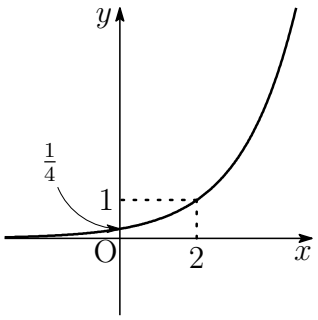
$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{16}$$

ゆえに
$$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{16}$$

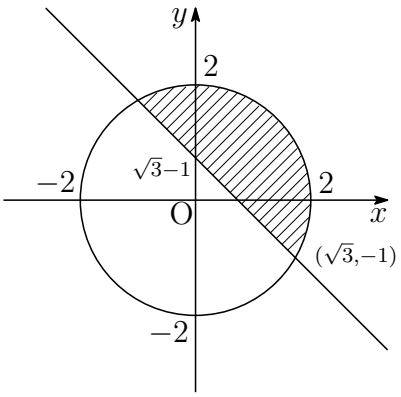
よって
$$\boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = -\frac{15}{32}}$$

さらに
$$\sin^3\theta + \cos^3\theta = (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$$
$$= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)$$
$$= \frac{1}{4} \times \left\{1 - \left(-\frac{15}{32}\right)\right\} = \boldsymbol{\frac{47}{128}}$$

(11) $y = \dfrac{2^x}{4} = \dfrac{2^x}{2^2} = 2^{x-2}$ であるから



5. 第 1 式の表す領域は
直線 $x + y = \sqrt{3} - 1$ の上側である.
第 2 式の表す領域は
円 $x^2 + y^2 = 4$ の内部である.
よって，求める領域は，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む.



6. $y' = 3x^2 - 6 = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$
$y' = 0$ を解くと　$x = \pm\sqrt{2}$
y の増減表は次のようになる.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	4	↗	極大 $4\sqrt{2}$	↘	極小 $-4\sqrt{2}$	↗	9

よって，y は，$-2 \leqq x \leqq 3$ において

$x = 3$ で最大値 9,

$x = \sqrt{2}$ で最小値 $-4\sqrt{2}$

をとる.

7. $f(x) = 2x^3 + 2$ とおくと　$f'(x) = 6x^2$

接点を $(a,\ 2a^3 + 2)$ とすると．接線の傾きは　$f'(a) = 6a^2$

したがって，接線の方程式は

$$y - (2a^3 + 2) = 6a^2(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 6a^2x - 4a^3 + 2 \quad \cdots ①$$

条件から　$6a^2 = 6$　これを解いて　$a = \pm 1$

したがって，接線の方程式は，① より

$a = 1$ のとき　　$\boldsymbol{y = 6x - 2}$

$a = -1$ のとき　　$\boldsymbol{y = 6x + 6}$

8. $y = \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin(\theta - 60^\circ)$

$$0^\circ \leqq \theta < 180^\circ \text{ より} \quad -60^\circ \leqq \theta - 60^\circ < 120^\circ$$

よって

$\theta - 60^\circ = 90^\circ$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 150^\circ}$ のとき 最大値 $\mathbf{2}$

$\theta - 60^\circ = -60^\circ$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0^\circ}$ のとき 最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{3}}$

をとる．

3.15 平成 17 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の□に適する式や数を入れよ.

   (1) 不等式 $2(2x+1) > 7(x-1)$ を満たす正の整数は□個である.

   (2) 方程式 $|x-12| = 2$ の小さい方の解は□である.

   (3) 2 次方程式 $x^2 + ax - 10 = 0$ が $x = 2$ を解にもつとき, $a =$ □ である.

   (4) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)$ を展開すると□になる.

   (5) $a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c$ を因数分解すると□になる.

   (6) $x + y = 1$, $xy = -1$ のとき, $x^3 + y^3 =$ □ である.

   (7) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a, 小数部分を b とすると, $a + 2b + b^2 =$ □ である.

   (8) 整式 $f(x)$ を $x-3$ で割ると 3 余り, $x+5$ で割ると -13 余る. このとき, $f(x)$ を $(x-3)(x+5)$ で割ると余りは□になる.

   (9) 平面上の 3 つの点 $(0,\ 0)$, $(0, -4)$, $(3, -3)$ を通る円の半径は□である.

   (10) SASEBO のすべての文字を使ってできる順列は□通りである.

2. 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = -x^2 + bx - b$ について, 次の問いに答えよ.

   (1) C_1 と C_2 が共有点をもたないような定数 b の値の範囲を求めよ.

   (2) C_1 と C_2 が接するような b の値をすべて求めよ. また, そのときの接点の座標を求めよ.

3. $f(x) = 2 + \sin 2x - \sin x - \cos x$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ とする. 次の問いに答えよ.

   (1) $a = \sin x + \cos x$ とおくとき, a のとり得る値の範囲を求めよ.

   (2) $f(x)$ の最大値と, そのときの x の値を求めよ.

4. 整数 $A = 3^{100}$ について, 次の問いに答えよ. ただし必要ならば, $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いて計算せよ.

   (1) A は何桁の数であるか答えよ.

   (2) A の最高位の数字を答えよ.

5. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - (1+ax)}{x^2} = b$ が成り立つように定数 a, b の値を定めよ.

6. $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ について，傾きが 3 であるような接線 (2 本) の方程式を求めよ．

7. a が 0 でない実数のとき，関数 $y = ax^3 - 3(a^2+1)x^2 + 12ax$ について，

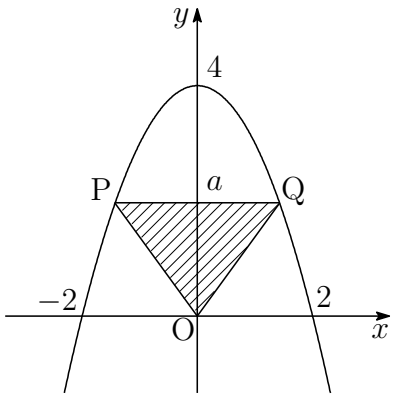
   (1) 極値をもたないように定数 a の値を定めよ．

   (2) 極大値が正で極小値が負となるような a の値の範囲を求めよ．

8. 点 O を原点とする座標平面上で，曲線 $y = 4 - x^2$ と直線 $y = a$ $(0 < a < 4)$ との交点を P，Q とする．このとき，△OPQ の面積が最大となるときの a の値と，そのときの △OPQ の面積を求めたい．次のア～クに適する数や式を答えよ．

   (解)

   $y = 4 - x^2$ と $y = a$ との交点 P の x 座標は［　ア　］，交点 Q の x 座標は［　イ　］である．ゆえに線分 PQ の長さは［　ウ　］となるので，△OPQ の面積 S は，$S =$［　エ　］である．S^2 が最大のとき S も最大となるから，$S^2 = f(a) =$［　オ　］とおくと，$f'(a) =$［　カ　］．そこで増減表を作成して考えると，$a =$［　キ　］のとき S^2 が最大で，そのときの面積 $S =$［　ク　］である．



解答例

1. (1) $2(2x+1) > 7(x-1)$ を解いて　$x < 3$
   これを満たす正の整数は 1，2 の **2** 個

   (2) 方程式 $|x-12| = 2$ の解は

   $$x - 12 = \pm 2 \quad \text{すなわち} \quad x = 14,\ 10$$

   よって，小さい方の解は　$\boldsymbol{x = 10}$

   (3) $x = 2$ は，2 次方程式 $x^2 + ax - 10 = 0$ の解であるから

   $$2^2 + a\cdot 2 - 10 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 3}$$

   (4) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2) = (x^2-y^2)(x^2+y^2)$
   $$= \boldsymbol{x^4 - y^4}$$

   (5) (c について整理する)

   $$\begin{aligned} a^3 - a^2c - ab^2 + b^2c &= a(a^2-b^2) - c(a^2-b^2) \\ &= (a^2-b^2)(a-c) \\ &= \boldsymbol{(a+b)(a-b)(a-c)} \end{aligned}$$

   (6) $x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$
   $= 1^3 - 3(-1)\cdot 1 = \boldsymbol{4}$

   (7)　$$\frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = 2 + \sqrt{3}$$

   $1 < \sqrt{3} < 2$ より $3 < 2 + \sqrt{3} < 4$ であるから　$a = 3$
   $a + b = 2 + \sqrt{3}$ より　$b = 2 + \sqrt{3} - a = \sqrt{3} - 1$
   よって　$a + 2b + b^2 = 3 + 2(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{3}-1)^2 = \boldsymbol{5}$

   (8) $P(x)$ を 2 次式 $(x-3)(x+5)$ で割った余りを $ax + b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

   $$P(x) = (x-3)(x+5)Q(x) + ax + b$$

   この等式より　$P(3) = 3a + b$，$P(-5) = -5a + b$

   また，$x - 3$ で割った余りが 3 であるから　$P(3) = 3$
   $x + 5$ で割った余りが -13 であるから　$P(-5) = -13$

   よって　$3a + b = 3$，$-5a + b = -13$
   これを解くと　$a = 2$，$b = -3$
   したがって，求める余りは　$\boldsymbol{2x - 3}$

(9) 原点を含む 3 点を通る円の方程式を $x^2+y^2+ax+by=0$ とする．

点 $(0,-4)$ を通るから　$(-4)^2+b\cdot(-4)=0$

点 $(3,-3)$ を通るから　$3^2+(-3)^2+a\cdot 3+b\cdot(-3)=0$

整理すると　$-4b+16=0$，$3a-3b+18=0$

これを解くと　　$a=-2$，$b=4$

ゆえに，円の方程式は　　$x^2+y^2-2x+4y=0$

すなわち　　$(x-1)^2+(y+2)^2=5$

よって，求める円の半径は　$\boldsymbol{\sqrt{5}}$

(10) S2 個と A,E,B,O のそれぞれ 1 個の計 6 個を並べる順列の総数であるから

$$\frac{6!}{2!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=\mathbf{360}\ (\text{個})$$

2. C_1，C_2 から y を消去すると　$2x^2-bx+b=0$　$\cdots$①

方程式 ① の判別式 D は　$D=(-b)^2-4\cdot2\cdot b=b(b-8)$

(1) C_1 と C_2 が共有点をもたないとき，$D<0$ であるから

$b(b-8)<0$　これを解いて　$\boldsymbol{0<b<8}$

(2) C_1 と C_2 が接するとき，① は重解をもつので，$D=0$ より

$b(b-8)=0$　これを解いて　$b=0,\ 8$

① から，接点の x 座標は　$x=-\dfrac{-b}{2\cdot2}=\dfrac{b}{4}$

C_1 より，接点の座標は　　$\left(\dfrac{b}{4},\ \dfrac{b^2}{16}\right)$

よって，b およびそのときの接点の座標は

$\boldsymbol{b=0}$ のとき　$\boldsymbol{(0,\ 0)}$

$\boldsymbol{b=8}$ のとき　$\boldsymbol{(2,\ 4)}$

3. (1) $a = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$ であるから

$0 \leqq x < 2\pi$ において $\quad \boldsymbol{-\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{2}}$

(2) $a = \sin x + \cos x$ の両辺を平方すると

$$\begin{aligned} a^2 &= (\sin x + \cos x)^2 \\ &= \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x \\ &= 1 + \sin 2x \end{aligned}$$

ゆえに $\quad \sin 2x = a^2 - 1$

これから $\quad f(x) = 2 + \sin 2x - (\sin x + \cos x)$

$$\begin{aligned} &= 2 + (a^2 - 1) - a \\ &= a^2 - a + 1 \\ &= \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \end{aligned}$$

よって，$f(x)$ は $a = -\sqrt{2}$ のとき最大値 $3 + \sqrt{2}$ をとる．

このとき $\quad x + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3}{2}\pi \quad$ すなわち $\quad x = \dfrac{5}{4}\pi$

したがって $\quad f(x)$ は $\boldsymbol{x = \dfrac{5}{4}\pi}$ のとき**最大値 $\boldsymbol{3 + \sqrt{2}}$** をとる．

4. (1) $\log_{10} 3^{100} = 100 \log_{10} 3 = 100 \times 0.4771 = 47.71$

$47 < \log_{10} 3^{100} < 48$ であるから

$$\log_{10} 10^{47} < \log_{10} 3^{100} < \log_{10} 10^{48}$$

よって $\quad 10^{47} < 3^{100} < 10^{48}$

したがって，A は **48 桁**の数である．

(2) (1) の結果から $\quad \log_{10} 3^{100} = 0.71 + 47$

ここで $\quad \log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6991$

$$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$$

上の 3 式から $\quad \log_{10} 5 + 47 < \log_{10} 3^{100} < \log_{10} 6 + 47$

したがって $\quad \log_{10}(5 \times 10^{47}) < \log_{10} 3^{100} < \log_{10}(6 \times 10^{47})$

よって $\quad 5 \times 10^{47} < 3^{100} < 6 \times 10^{47}$

したがって，A の最高位の数字は $\quad \boldsymbol{5}$

5. 与式の左辺を変形すると

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)}{x^2}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{\{\sqrt{1+x+x^2}-(1+ax)\}\{\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\}}{x^2\{\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\}}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{(1+x+x^2)-(1+ax)^2}{x^2\{\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\}}\\
=&\lim_{x\to 0}\frac{(1-2a)x+(1-a^2)x^2}{x^2\{\sqrt{1+x+x^2}+(1+ax)\}}
\end{aligned}$$

この極限値が定数 b になるのは，上式より

$$1-2a=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$$

のときである．このとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{1+x+x^2}+\left(1+\frac{1}{2}x\right)}=b \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b=\frac{3}{8}}$$

6. $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$ とおくと　$f'(x)=x^2-2x$

接点を $\left(a,\ \dfrac{1}{3}a^3-a^2+1\right)$ とすると．接線の傾きは　$f'(a)=a^2-2a$

したがって，接線の方程式は

$$y-\left(\frac{1}{3}a^3-a^2+1\right)=(a^2-2a)(x-a)$$

すなわち　　$y=(a^2-2a)x-\dfrac{2}{3}a^3+a^2+1 \quad \cdots ①$

条件から　$a^2-2a=3$　これを解いて　$a=3,-1$

したがって，接線の方程式は，① より

$a=3$ のとき　　$\boldsymbol{y=3x-8}$

$a=-1$ のとき　　$\boldsymbol{y=3x+\dfrac{8}{3}}$

7. $f(x) = ax^3 - 3(a^2+1)x^2 + 12ax \cdots ①$ とおく

(1) $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3ax^2 - 6(a^2+1)x + 12a \\ &= 3\{ax^2 - (2a^2+2)x + 4a\} \\ &= 3(x-2a)(ax-2) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ を解くと　$x = 2a,\ \dfrac{2}{a}$

関数 ① が極値をもたないための条件は

$$2a = \frac{2}{a} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \pm 1}$$

別解 $f'(x) = 0$ について，判別式 D は

$$\begin{aligned} D/4 &= \{-3(a^2+1)\}^2 - 3a \cdot 12a \\ &= 9(a^2+1)^2 - 36a^2 = 9(a^4 - 2a^2 + 1) \\ &= 9(a^2-1)^2 = 9(a+1)^2(a-1)^2 \end{aligned}$$

関数 ① が極値をもたないための条件は　$D \leqq 0$

したがって　$(a+1)^2(a-1)^2 \leqq 0$　よって　$\boldsymbol{a = \pm 1}$

(2) $a \neq \pm 1$ のとき，$f(x)$ は $x = 2a,\ \dfrac{2}{a}$ で極値をとる．

$$\begin{aligned} f(2a) &= a(2a)^3 - 3(a^2+1)(2a)^2 + 12a \cdot 2a \\ &= -4a^4 + 12a^2 = -4a^2(a^2-3) \quad \cdots ② \\ f\left(\frac{2}{a}\right) &= a\left(\frac{2}{a}\right)^3 - 3(a^2+1)\left(\frac{2}{a}\right)^2 + 12a \cdot \frac{2}{a} \\ &= 12 - \frac{4}{a^2} = \frac{4(3a^2-1)}{a^2} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

$f(x)$ の極大値が正で極小値が負となるための条件は　$f(2a) \times f\left(\dfrac{2}{a}\right) < 0$

②，③ より　$-4a^2(a^2-3) \times \dfrac{4(3a^2-1)}{a^2} < 0$

ゆえに　$(a^2-3)(3a^2-1) > 0$

よって　$a^2 < \dfrac{1}{3},\ \ 3 < a^2$

したがって，$a \neq 0, \pm 1$ に注意して

$$\boldsymbol{a < -\sqrt{3},\ -\frac{1}{\sqrt{3}} < a < 0,\ 0 < a < \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sqrt{3} < a}$$

8. $y = 4 - x^2$，$y = a$ の交点の x 座標は

$$4 - x^2 = a \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{4-a}$$

図の P，Q の x 座標の符号に注意して

$$\text{P の } x \text{ 座標は } -\sqrt{4-a}, \qquad \text{Q の } x \text{ 座標は } \sqrt{4-a}$$

ゆえに，線分 PQ の長さは　$\sqrt{4-a} - (-\sqrt{4-a}) = 2\sqrt{4-a}$

図から △OPQ の面積 S は　$S = \dfrac{1}{2}a \times 2\sqrt{4-a} = a\sqrt{4-a}$

$S^2 = f(a)$ とおくと　$f(a) = a^2(4-a) = -a^3 + 4a^2$

$f'(a) = -3a^2 + 8a = -a(3a-8)$

$0 < a < 4$ の範囲における $f(a)$ の増減表は，次のようになる．

a	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	4
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		↗	極大 $\frac{256}{27}$	↘	

したがって，S^2 は $a = \dfrac{8}{3}$ で最大となり，そのときの面積 S は

$$S = \sqrt{\frac{256}{27}} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$$

ア	イ	ウ	エ
$-\sqrt{4-a}$	$\sqrt{4-a}$	$2\sqrt{4-a}$	$a\sqrt{4-a}$
オ	カ	キ	ク
$-a^3 + 4a^2$	$-3a^2 + 8a$	$\dfrac{8}{3}$	$\dfrac{16\sqrt{3}}{9}$

3.16 平成 16 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各小問に答えなさい (答だけ解答欄に記入しなさい).

   (1) 方程式 $3x^2 - 3x + 2 = 0$ を解きなさい.

   (2) 整式 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ を因数分解しなさい.

   (3) 不等式 $2x^2 \geqq 10x + 12$ を解きなさい.

   (4) 方程式 $4^x - 7 \cdot 2^x - 8 = 0$ を解きなさい.

   (5) $\log_{10} 2 = 0.3010$ として，2^{100} は何けたの数か答えなさい.

   (6) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ を簡単にしなさい.

   (7) $\dfrac{1}{2}\log_4 5 - \log_4 \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ を簡単にしなさい.

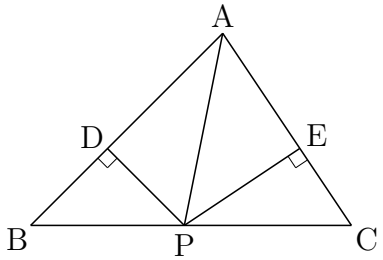
   (8) 40 人のクラスで，運動部に入っている学生は 23 人，文化部に入っている学生は 16 人，運動部にも文化部にも入っていない学生は 8 人であった．このクラスで運動部と文化部の両方に入っている学生の人数を答えなさい.

   (9) $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$ の値を求めなさい.

   (10) 2 点 $(1, -4)$，$(-3,\ 8)$ を通る直線の方程式を求めなさい.

   (11) 立方体の各面に異なる 6 色を塗るとき，何通りの異なる配色があるか答えなさい.

2. △ABC において角 A が鋭角であるとき，辺 BC 上の点 P から辺 AB，AC におろした垂線を PD，PE とする．次の小問に答えなさい.



   (1) 線分 DE の長さを角 A の大きさ θ(ラジアン) と線分 AP の長さ l で表しなさい．(理由も述べよ)

   (**ヒント**：△ADP，△AEP，△ADE の外接円を考察しなさい)

   (2) 線分 DE の長さが最小となるような点 P の位置を，線分 AP と BC の位置関係で答えなさい.

3. 円 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ と直線 $x-y+3=0$ について，次の小問に答えなさい．

   (1) これらの交点を求めなさい．

   (2) この円が直線から切り取る弦の長さを求めなさい．

   (3) この弦を直径とする円の方程式を求めなさい．

4. 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が次の条件ア～オをすべて満たしているとする．

   ア $a<0$　イ $f'(x)=0$ が 2 つの正の実数 $\alpha<\beta$ をもつ

   ウ $f(\alpha)<0$　エ $f(\beta)<0$　オ $d>0$

   (1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描きなさい．ただし，条件ア～オがグラフにどう反映しているかわかるようにすること．

   (2) (1) の関数 $f(x)$ の係数 a，b，c，d を用いて，関数 $g(x)=-ax^3-bx^2-cx+d$ を作る．$y=g(x)$ のグラフの概形を描きなさい．

5. 放物線 $y=x^2$ 上の点 A における接線が，放物線 $y=-x^2+10x-25$ に接している．点 A の座標を求めなさい．

6. 定数 a の値で場合分けして，$y=x^3-3ax$ のグラフを描きなさい．

7. 各小問に答えなさい．

   (1) 関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ の定義式を極限を用いて表しなさい．

   (2) (1) の式を計算して，関数 $y=x^5$ の $x=a$ における微分係数が $5a^4$ になることを示しなさい．

解答例

1. (1) 2 次方程式の解の公式により

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 3\cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{6} = \frac{\mathbf{3 \pm \sqrt{15}\, i}}{\mathbf{6}}$$

(2) $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ とすると

$$P(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 6 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1)(x^2 - x - 6)$$

したがって

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = \mathbf{(x-1)(x+2)(x-3)}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad -x \quad -6 \\ \hline x-1 & x^3 - 2x^2 - 5x + 6 \\ & x^3 \quad -x^2 \\ \hline & \quad -x^2 - 5x \\ & \quad -x^2 \quad +x \\ \hline & \quad\quad -6x + 6 \\ & \quad\quad -6x + 6 \\ \hline & \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

(3) 不等式を整理すると

$$x^2 - 5x - 6 \geqq 0$$

すなわち $\quad (x+1)(x-6) \geqq 0$

よって $\quad \boldsymbol{x \leqq -1,\ 6 \leqq x}$

(4) $2^x = t$ とおくと $\quad t > 0$

方程式は $\quad t^2 - 7t - 8 = 0$

すなわち $\quad (t+1)(t-8) = 0$

$t > 0$ より $\quad t = 8$

したがって $\quad 2^x = 8 \quad$ これを解いて $\quad \boldsymbol{x = 3}$

(5) $\log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$

$30 < \log_{10} 2^{100} < 31$ であるから

$$\log_{10} 10^{30} < \log_{10} 2^{100} < \log_{10} 10^{31}$$

よって $\quad 10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$

したがって，2^{100} は **31 桁**の数である．

(6)
$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$
$$= \frac{8+2\sqrt{15}}{5-3} - \frac{2(\sqrt{3}-1)}{3-1}$$
$$= (4+\sqrt{15}) - (\sqrt{3}-1)$$
$$= \mathbf{5 + \sqrt{15} - \sqrt{3}}$$

(7) $\dfrac{1}{2}\log_4 5 - \log_4 \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \log_4 \sqrt{5} - \log_4 \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \log_4 \left(\sqrt{5} \div \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$= \log_4 2 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(8) クラス全体の集合を U，運動部に入っている学生の集合を A，文化部に入っている学生の集合を B とすると，条件から

$$n(U) = 40,\ n(A) = 23,\ n(B) = 16,\ n(\overline{A} \cap \overline{B}) = 8$$

$n(\overline{A} \cap \overline{B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)$ であるから

$$8 = 40 - n(A \cup B) \quad \text{ゆえに} \quad n(A \cup B) = 32$$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ であるから

$$32 = 23 + 16 - n(A \cap B) \quad \text{これを解いて} \quad n(A \cap B) = 7$$

よって，運動部と文化部の両方に入っている学生の人数 $n(A \cap B)$ は　**7 人**

(9) $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$，$\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

したがって　　$\sin 15^\circ + \cos 15^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(10) 2 点 $(1, -4)$，$(-3,\ 8)$ を通る直線の方程式は

$$y - (-4) = \frac{8 - (-4)}{-3 - 1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -3x - 1}$$

(11) 特定の 1 色に着目し，その色を下面に固定する．このとき，上の面の塗り方は，残り 5 色のどれかになり，側面はその残り 4 色の円順列になる．
したがって，6 色による立方体の色塗りの総数は

$$5 \times (4-1)! = 5 \times 3{\cdot}2{\cdot}1 = \mathbf{30}\ (\text{通り})$$

2. (1) $\boldsymbol{\mathrm{DE} = l \sin \theta}$
(理由：$\angle\mathrm{ADP} = \angle\mathrm{AEP} = 90^\circ$ であるから，四角形 ADPE は AP を直径とする円に内接する．このとき，$\triangle\mathrm{ADE}$ を正弦定理に適用すると $\dfrac{\mathrm{DE}}{\sin A} = l$ であるから，$\mathrm{DE} = l \sin A$)

(2) (1) の結果から，AP が最小のとき DE は最小となる．
このとき，**AP は BC に下ろした垂線**である．

3. (1) 直線の方程式から $y = x + 3$ $\cdots$①
これを円の方程式に代入すると $(x-3)^2 + (x+3-4)^2 = 4$
整理すると $x^2 - 4x + 3 = 0$ ゆえに $x = 1,\ 3$
① より $x = 1$ のとき $y = 4$，$x = 3$ のとき $y = 6$
よって，求める交点は $\mathbf{(1,\ 4)}$，$\mathbf{(3,\ 6)}$

(2) 求める弦の長さは，(1) で求めた 2 つの交点を結ぶ線分の長さであるから

$$\sqrt{(3-1)^2 + (6-4)^2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

(3) 円の中心は，(1) で求めた 2 つの交点の中点であるから

$$\left(\frac{1+3}{2},\ \frac{4+6}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (2,\ 5)$$

(2) で求めた弦の長さは，円の直径であるから，円の半径は

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

したがって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-5)^2 = 2}$$

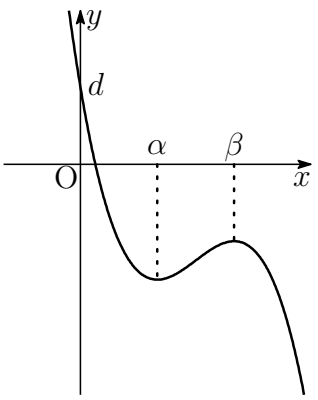
4. (1) ア，イおよび $f(x)$ の最高次の項の係数により，$f'(x)$ は

$$f'(x) = 3a(x-\alpha)(x-\beta)$$

ゆえに，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘

さらに，ウ，エ，オにより，グラフは右の図のようになる．



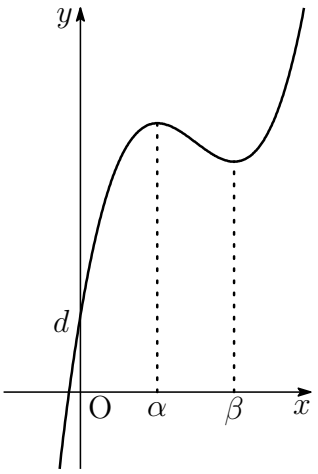
(2) 関数 $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = d$ に関して対称なグラフは

$$2d - y = f(x)$$

ゆえに　$y = -f(x) + 2d$

すなわち　$y = -ax^3 - bx^2 - cx + d$

よって，$y = g(x)$ は右の図のようになる．



5. $f(x) = x^2$ とおくと　$f'(x) = 2x$

接点 A を $(a,\ a^2)$ とすると，接線の傾きは　$f'(a) = 2a$

したがって，接線の方程式は

$$y - a^2 = 2a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 \quad \cdots ①$$

直線 ① と放物線 $y = -x^2 + 10x - 25 \cdots ②$ から y を消去すると

$$2ax - a^2 = -x^2 + 10x - 25 \quad \text{すなわち} \quad x^2 + 2(a-5)x - a^2 + 25 = 0$$

① と ② は接するので，上の 2 次方程式について $D/4 = 0$ であるから

$$(a-5)^2 - 1\cdot(-a^2+25) = 0$$

整理すると　$2a^2 - 10a = 0$

ゆえに　$a = 0,\ 5$

よって，点 A の座標は

$a = 0$ のとき　**(0, 0)**

$a = 5$ のとき　**(5, 25)**

6. $y' = 3x^2 - 3a = 3(x^2 - a)$

［1］$a > 0$ のとき

$$y' = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$$

$y' = 0$ を解くと　$x = \pm\sqrt{a}$

よって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $2a\sqrt{a}$	↘	極小 $-2a\sqrt{a}$	↗

［2］$a = 0$ のとき

$$y' = 3x^2$$

$y' = 0$ を解くと　$x = 0$

よって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

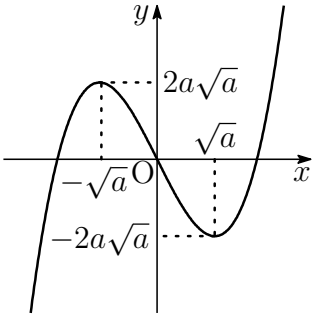
［3］$a < 0$ のとき

$$y' = 3(x^2 - a) > 0$$

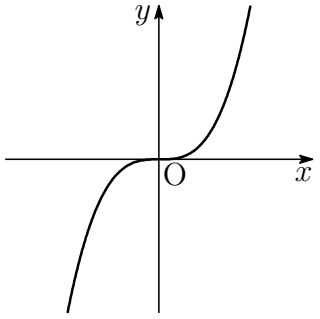
よって，単調増加の関数である．

したがって，関数のグラフは a の値により，次のようになる．

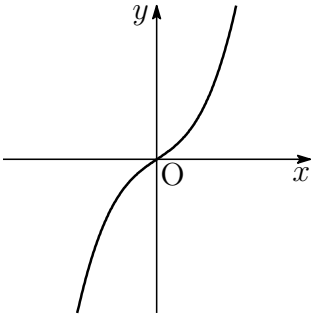
［1］$a > 0$ のとき



［2］$a = 0$ のとき



［3］$a < 0$ のとき



補足 3 次関数が極値をもつ $\Longleftrightarrow$ $y' = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつ

7. (1) $\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}}$

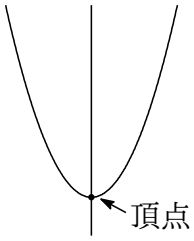
   (2) (1) の定義式により

$$
\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^5 - a^5}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(a^5 + 5a^4h + 10a^3h^2 + 10a^2h^3 + 5ah^4 + h^5) - a^5}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(5a^4 + 10a^3h + 10a^2h^2 + 5ah^3 + h^4)}{h} \\
&= \boldsymbol{5a^4}
\end{aligned}
$$

3.17 平成 15 年度編入学試験 (90 分)

1. 空欄に適当な語句，数，式を入れよ．

(1) 下図の縦線 (直線) を放物線の［　　］という．

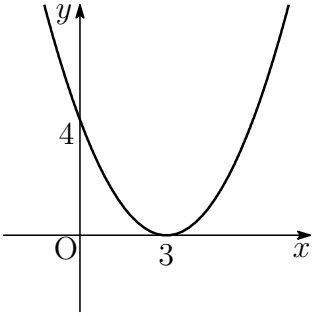


(2) 2 次式 a^2-4a+3 において，3 を［　　］という．

(3) $(2a-5)^3$ を展開したときの a^2 の係数は，［　　］になる．

(4) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{60}-\sqrt{12})=$［　　］

(5) 下図の放物線の方程式は，$y=$［　　］



(6) 白い玉 10 個と黒い玉 2 個がある．○○●○○○○○●○○○
これを一列に並べる方法は［　　］通りある．

(7) 方程式 $x+y+z=10$ を満たす 0 以上の整数 x，y，z の組 (x,y,z) は，
全部で［　　］組ある．

2. 点 $(-1,-3)$ を通る直線 l と放物線 $y=x^2$ がある．次の小問に答えよ．
※途中計算もきちっと書いて，個別に答えを示しなさい

(1) 直線 l の傾きを m とするとき，直線 l が放物線と 2 点で交わるような m の範囲を求めよ．

(2) (1) のように 2 点で交わるとき，2 交点間の距離を m を使って表せ．

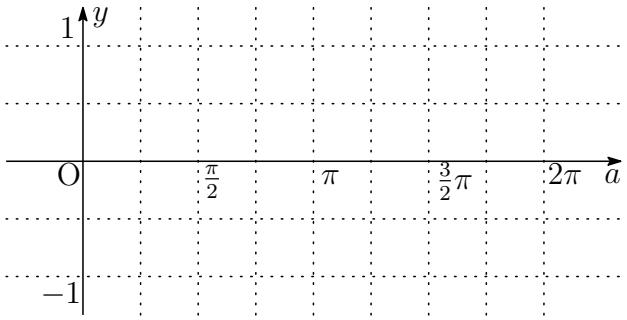
3. 関数 $y = \sin x$ の区間 $a \leqq x \leqq a + \dfrac{\pi}{2}$ における最大値を M とすると，M は a の関数になる．これを $M(a)$ で表すことにする．このとき，次の小問に答えよ．

(1) $M\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) =$ □

(2) $0 \leqq a \leqq 2\pi$ の範囲で，$M(a)$ を a の式で表せ．

$$M(a) = \begin{cases} \square \end{cases}$$

(3) $0 \leqq a \leqq 2\pi$ の範囲で，$M(a)$ のグラフを描け．



4. 不等式 $4\sin\cos x + 2\sin x + 2\cos x + 1 > 0$ を $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で解け．

※途中計算もきちっと書いて，最後に答えを示しなさい

5. 関数 $y = (x-1)^2(x+2)^2$ の導関数 y' を求めよ．　$y' =$ □

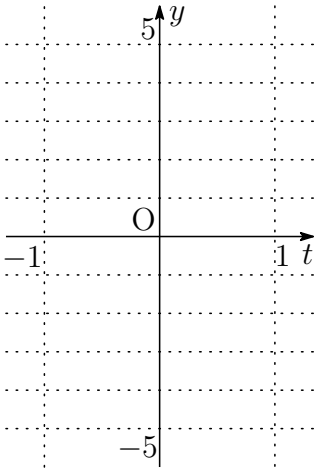
6. $0° \leqq \theta < 360°$ のとき，関数 $y = 2\sin^3\theta + 3\cos^2\theta - 3$ について，次の小問に答えよ．

(1) $\sin\theta = t$ とおいて，y を t の式で表せ．　$y =$ □

(2) 右の増減表を完成せよ．

t	-1		$+1$
y'			
y			

(3) グラフを描け.



(4) y の最大値，最小値を求めよ.

$\theta =$ □°，□° のとき，最大値□，

$\theta =$ □° のとき，最小値□

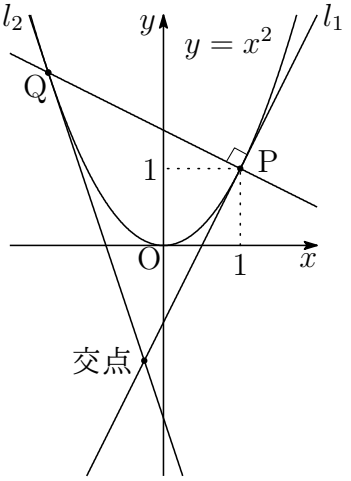
7. 次の指数・対数についての小問に答えよ.

(1) $\left\{\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}} \times \left(\dfrac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}} =$□

(2) $(\log_2 3 + \log_{16} 9)(\log_3 4 + \log_9 16) =$□

(3) 方程式 $\log_5(2x-1) + \log_5(x-2) = 1$ を解け. $x =$□

8. 放物線 $y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(1,1)$ における接線を l_1 とする．点 P における放物線の法線 (点 P を通り，点における接線に垂直な直線) が，再びこの放物線と交わる点を Q とし，点 Q における接線を l_2 とする．このとき，次の小問に答えよ.



(1) 接線 l_1 の方程式を求めよ. $y =$□

(2) 点 P における法線の方程式を求めよ.

$y =$□

(3) 点 Q の座標を求めよ. 点 Q(□, □)

(4) 接線 l_2 の方程式を求めよ. $y =$□

(5) l_1 と l_2 の交点の座標を求めよ.

交点 (□, □)

解答例

1. (1) **軸**

   (2) **定数項**

   (3) a の 2 次の項は　$-3(2a)^2 \cdot 5 = -60a^2$

   よって，その係数は　$\boldsymbol{-60}$

   (4) $(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{60}-\sqrt{12}) = (\sqrt{15}+\sqrt{3})(2\sqrt{15}-2\sqrt{3})$
   $= 2(\sqrt{15}+\sqrt{3})(\sqrt{15}-\sqrt{3})$
   $= 2(15-3) = \boldsymbol{24}$

   (5) 頂点の座標が $(3,\ 0)$ であるから，放物線の方程式は

   $$y = a(x-3)^2$$

   とおける．これが点 $(0,\ 4)$ を通るので

   $$4 = a(0-3)^2 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{4}{9}$$

   よって，求める放物線の方程式は　$\boldsymbol{y = \dfrac{4}{9}(x-3)^2}$

   (6) 12 個の場所から黒を置く 2 個の選び方であるから

   $$_{12}\mathrm{C}_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = \boldsymbol{66}\ (\text{通り})$$

   (7) (6) の白玉 10 個は黒玉 2 個によって 3 つに分けられる．2 つの黒玉の左にある白玉の個数を x，2 つの黒玉の間にある白玉の個数を y，2 つの黒玉の右にある白玉の個数を z とすればよい．(上の配置は $x=2$，$y=5$，$z=3$)
   したがって，求める (x, y, z) の組は　**66 組**

2. (1) 点 $(-1, -3)$ を通り傾き m の直線は

$$y + 3 = m(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad y = mx + m - 3$$

この直線の方程式と放物線 $y = x^2$ の方程式から y を消去すると

$$x^2 = mx + m - 3 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - mx - m + 3 = 0 \quad \cdots ①$$

直線と放物線が異なる 2 点で交わるので，2 次方程式 ① の判別式は，$D > 0$ であるから

$$(-m)^2 - 4 \cdot 1(-m + 3) > 0$$

整理すると $\quad m^2 + 4m - 12 > 0$

ゆえに $\quad (m + 6)(m - 2) > 0$

よって $\quad \boldsymbol{m < -6,\ 2 < m}$

(2) (1) で得られた m の範囲において，2 次方程式 ① は異なる 2 つの実数解をもつ．これらを α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = m,\ \alpha\beta = -m + 3 \quad \cdots ②$$

傾き m の直線上の 2 点の x 座標が α，β であるとき，その 2 点間の距離は

$$|\beta - \alpha|\sqrt{1 + m^2}$$

であるから，② より

$$\begin{aligned} |\beta - \alpha|\sqrt{1 + m^2} &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta}\sqrt{1 + m^2} \\ &= \sqrt{m^2 - 4(-m + 3)}\sqrt{1 + m^2} \\ &= \sqrt{(m^2 + 4m - 12)(m^2 + 1)} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{(m + 6)(m - 2)(m^2 + 1)}} \end{aligned}$$

3. (1) $\dfrac{3}{4}\pi \leqq x \leqq \dfrac{3}{4}\pi + \dfrac{\pi}{2}$ において $y = \sin x$ は $x = \dfrac{3}{4}\pi$ で最大値 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ をとる．

したがって　　$\boldsymbol{M\left(\dfrac{3}{4}\pi\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(2) $a \leqq x \leqq a + \dfrac{\pi}{2}$ における $y = \sin x$ の最大値は，次のようになる．

［1］ $0 \leqq a < \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$x = \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 1 をとる．

［2］ $\dfrac{\pi}{2} \leqq a < \dfrac{5}{4}\pi$ のとき

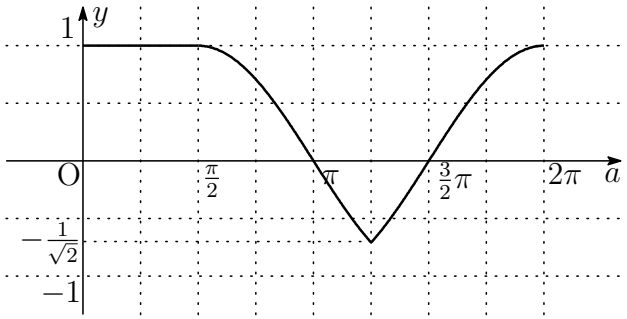
$x = a$ で最大値 $\sin a$ をとる．

［3］ $\dfrac{5}{4}\pi \leqq a \leqq 2\pi$ のとき

$x = a + \dfrac{\pi}{2}$ で最大値 $\sin\left(a + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos a$ をとる．

よって　　$\boldsymbol{M(a) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leqq a < \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin a & \left(\frac{\pi}{2} \leqq a < \frac{5}{4}\pi\right) \\ \cos a & \left(\frac{5}{4}\pi \leqq a \leqq 2\pi\right) \end{cases}}$

(3) (2) の結果から，$M(a)$ のグラフは次のようになる．



4. $(2\sin x + 1)(2\cos x + 1) > 0$ であるから

［1］ $\begin{cases} 2\sin x + 1 > 0 \\ 2\cos x + 1 > 0 \end{cases}$　すなわち　$\sin x > -\dfrac{1}{2}$，$\cos x > -\dfrac{1}{2}$

これを解いて　$0 < x < \dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

［2］ $\begin{cases} 2\sin x + 1 < 0 \\ 2\cos x + 1 < 0 \end{cases}$　すなわち　$\sin x < -\dfrac{1}{2}$，$\cos x < -\dfrac{1}{2}$

これを解いて　$\dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi$

よって　　$\boldsymbol{0 < x < \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi}$

5. $y=(x-1)^2(x+2)^2=\{(x-1)(x+2)\}^2$
$=(x^2+x-2)^2=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

したがって $\boldsymbol{y'=4x^3+6x^2-6x-4}$

6. (1) $y=2\sin^3\theta+3\cos^2\theta-3$
$=2\sin^3\theta+3(1-\sin^2\theta)-3$
$=2\sin^3\theta-3\sin^2\theta$

$t=\sin\theta$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ において $-1 \leqq t \leqq 1$

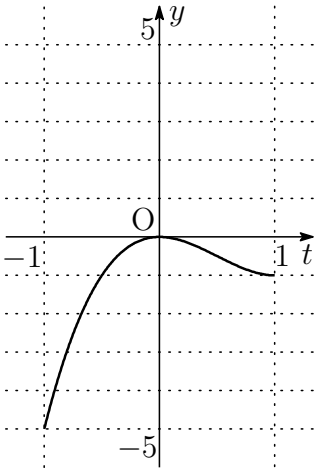
よって $\boldsymbol{y=2t^3-3t^2\ \ (-1 \leqq t \leqq 1)}$

(2) $y'=6t^2-6t=6t(t-1)$

したがって，y の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$+1$
y'		$+$	0	$-$	
y	-5	↗	極大 0	↘	-1

(3) (2) から，関数のグラフは次のようになる．



(4) (3) のグラフから

$t=0$ すなわち $\boldsymbol{\theta=0^\circ, 180^\circ}$ のとき **最大値 0**

$t=-1$ すなわち $\boldsymbol{\theta=270^\circ}$ のとき **最小値 −5**

7. (1) $\left\{\left(\dfrac{27}{125}\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{3}}\times\left(\dfrac{27}{5}\right)^{\frac{1}{2}}=\{(3^3\cdot5^{-3})^{-\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}}\times(3^3\cdot5^{-1})^{\frac{1}{2}}$
$=3^{-\frac{1}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{2}}\cdot5^{-\frac{1}{2}}$
$=3^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}\cdot5^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{3}$

(2) $(\log_2 3+\log_{16} 9)(\log_3 4+\log_9 16)=\left(\log_2 3+\dfrac{\log_2 9}{\log_2 16}\right)\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 16}{\log_2 9}\right)$

$=\left(\log_2 3+\dfrac{2\log_2 3}{4}\right)\left(\dfrac{2}{\log_2 3}+\dfrac{4}{2\log_2 3}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\log_2 3\times\dfrac{4}{\log_2 3}=\boldsymbol{6}$

(3) 真数は正であるから　$2x-1>0$　かつ　$x-2>0$

すなわち　　$x>2$　$\cdots$①

方程式から　$\log_5(2x-1)(x-2)=\log_5 5$

ゆえに　　$(2x-1)(x-2)=5$

整理すると　$2x^2-5x-3=0$

したがって　$(x-3)(2x+1)=0$

① より　　$\boldsymbol{x=3}$

8. (1) $y'=2x$ より，$x=1$ のとき $y'=2$

よって，l_1 は点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y-1=2(x-1)\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=2x-1}$$

(2) P における法線の傾きを m とすると　$2m=-1$　ゆえに　$m=-\dfrac{1}{2}$

よって，法線は点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}$$

(3) $y=x^2$ と (2) で求めた法線の方程式から，y を消去すると

$$x^2=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\quad\text{ゆえに}\quad(x-1)(2x+3)=0$$

Q の x 座標は，$x\neq 1$ であるから　$x=-\dfrac{3}{2}$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)}$

(4) Q における接線の傾きは　$y'=2\times\left(-\dfrac{3}{2}\right)=-3$

l_2 の方程式は　$y-\dfrac{9}{4}=-3\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$　すなわち　$\boldsymbol{y=-3x-\dfrac{9}{4}}$

(5) (1),(4) の連立方程式を解いて　　**交点** $\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{4},-\dfrac{3}{2}\right)}$

第 4 章　熊本高等専門学校 (熊本)

4.1　平成 29 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{7}+2}$

   (2) $\sqrt{1+\pi-2\sqrt{\pi}}$

   (3) $\dfrac{x^2-10x+25}{x^2-3x+2} \div \dfrac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \times \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-2x-15}$

2. 次の方程式，不等式を解け.

   (1) $\sin x + \cos x = 1 \quad \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

   (2) $100^x - 12 \cdot 10^x + 20 = 0$

   (3) $\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2 - 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \geqq 2$

3. 2 次方程式 $2x^2+3x-3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の値を求めよ.

   $$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$$

4. 2 つの三角関数の積を和に直す公式

   $$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

   が成り立つことを加法定理を用いて証明せよ.

5. 関数 $f(x)=(x^2+2x)^2-4(x^2+2x)+5$ について，次の問いに答えよ.

   (1) $x^2+2x=t$ と置くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ.

   (2) $y=f(x)$ のグラフは，x 軸と交点をもたないことを示せ.

   (3) $f(x)$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ.

6. $x^2+y^2=4$ であるとき，関数 $z=y^2+4x^2-x^3$ について，次の問いに答えよ.

(1) z を x の式で表し，x で微分せよ．

(2) z の最大値および最小値と，そのときの x，y の値をそれぞれ求めよ．

7. k は定数とする．曲線 $y = x^3 - x^2 + kx - k + 2$ と，曲線上の点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 点 A での接線が原点を通るとき，k の値を求めよ．

(2) (1) で得られた k の場合，曲線と接線で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. (1) $$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{7}+2} = \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{7}}{(\sqrt{3}+2-\sqrt{7})(\sqrt{3}+2+\sqrt{7})}$$
$$= \frac{\sqrt{3}+2+\sqrt{7}}{4\sqrt{3}} = \frac{\boldsymbol{3+2\sqrt{3}+\sqrt{21}}}{\boldsymbol{12}}$$

(2) $\sqrt{1+\pi-2\sqrt{\pi}} = \sqrt{(\sqrt{\pi}-1)^2} = |\sqrt{\pi}-1| = \boldsymbol{\sqrt{\pi}-1}$

(3) $$\frac{x^2-10x+25}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} \times \frac{x^2-2x+1}{x^2-2x-15}$$
$$= \frac{(x-5)^2}{(x-1)(x-2)} \times \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+2)} \times \frac{(x-1)^2}{(x+3)(x-5)} = \frac{\boldsymbol{x-5}}{\boldsymbol{x+2}}$$

2. (1) 与えられた方程式から

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} \leqq \frac{3}{4}\pi\right)$$

ゆえに $x+\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi$ すなわち $\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{2}}$

(2) 与えられた方程式から

$$(10^x)^2 - 12\cdot 10^x + 20 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (10^x-2)(10^x-10) = 0$$

したがって $10^x = 2,\ 10$ よって $\boldsymbol{x = \log_{10} 2,\ 1}$

(3) 与えられた方程式から $(\log_{\frac{1}{3}} x - 1)(\log_{\frac{1}{3}} x - 2) = 0$

したがって $\log_{\frac{1}{3}} x = 1,\ 2$ よって $\boldsymbol{x = \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}}$

3. $2x^2+3x-3=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta = -\frac{3}{2}, \quad \alpha\beta = -\frac{3}{2}$$

よって
$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}$$
$$= \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{7}{3}}$$

4. 加法定理により

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$

よって　　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

5. (1) $t=x^2+2x=(x+1)^2-1$ より　　$\boldsymbol{t\geqq -1}$

(2) $x^2+2x=t$ より　$f(x)=t^2-4t+5=(t-2)^2+1$

$f(x)\geqq 1$ であるから，$y=f(x)$ は，x 軸と交点をもたない.

(3) $y=(t-2)^2+1$　$(t\geqq -1)$　より，

$t=2$　ゆえに　$x^2+2x=2$　すなわち　$\boldsymbol{x=-1\pm\sqrt{3}}$ のとき　最小値 $\mathbf{1}$

6. (1) $x^2+y^2=4$ より，$y^2=4-x^2$ $(-2\leqq x\leqq 2)$ であるから

$$z=y^2+4x^2-x^3=(4-x^2)+4x^2-x^3$$
$$=-x^3+3x^2+4$$

よって　　$\dfrac{dz}{dx}=-3x^2+6x=\boldsymbol{-3x(x-2)}$

(2) (1) の結果から z の増減表は

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$\frac{dz}{dx}$		$-$	0	$+$	
z	24	↘	4	↗	8

よって　$x=-2$　すなわち　$\boldsymbol{(x,\ y)=(-2,\ 0)}$ のとき　最大値 $\mathbf{24}$

$x=0$　すなわち　$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\pm 2)}$ のとき　最小値 $\mathbf{4}$

7. (1) $y = x^3 - x^2 + kx - k + 2$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 2x + k$

$x = 1$ のとき　$y' = k + 1$

したがって，曲線上の点 A(1, 2) における接線の方程式は

$$y - 2 = (k+1)(x-1) \quad \text{ゆえに} \quad y = (k+1)x + 1 - k$$

この接線が原点を通るから

$$1 - k = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = 1}$$

(2) (1) の結果から，曲線および接線は

$$y = x^3 - x^2 + x + 1, \quad y = 2x$$

ゆえに　$(x^3 - x^2 + x + 1) - 2x = (x+1)(x-1)^2$

よって，求める面積を S とすると

$$\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)^2\,dx = \frac{1}{12}\{1-(-1)\}^4 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

補足 $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$ より

$$S = \int_{-1}^{1} (x+1)(1-x)^2\,dx = \frac{1!2!}{4!}\{1-(-1)\}^4$$

4.2　平成 28 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) 次の式を簡単にせよ.

   $$\frac{x+5}{x-\frac{15}{x+2}}-\frac{\frac{x}{x-2}-\frac{2}{x^2-3x+2}}{1-\frac{2}{x-1}}$$

   (2) 次の式を簡単にせよ.

   $$\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

   (3) 次の等式を証明せよ.

   $$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+\sin 2\theta$$

2. 次の方程式，不等式を解け.

   (1) $\cos 2x=\cos x\ (-\pi<x\leqq\pi)$

   (2) $2\cdot 4^x-9\cdot 2^x+4<0$

   (3) $(\log_2(1-x))^2=\log_2(1-x)^2+3$

3. 3 次方程式 $x^3+(2a+1)x^2+3(2a-1)x+4a-3=0$ (a は定数) について，次の各問いに答えよ.

   (1) 与えられた方程式は $x=-1$ を解にもつことを確かめよ.

   (2) 与えられた方程式の異なる実数解が 2 つであるとき，定数 a の値を求めよ. また，そのときの解を求めよ.

4. 関数 $y=-(25^x+25^{-x})+6(5^x+5^{-x})-6$ について，次の各問いに答えよ.

   (1) $5^x+5^{-x}=t$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ.

   (2) y を t の式で表せ.

   (3) y の最大値を求めよ.

5. 関数 $f(x) = -x^3 + ax^2 + (6-a)x - 2$ (a は定数) について，次の各問いに答えよ．

   (1) $f'(x)$ を求めよ．

   (2) $f(x)$ が $x = 1$ で極値をもつとき，定数 a の値を求め，$f(x)$ の極小値とそのときの x の値を求めよ．

6. 次の等式を満たす $f(x)$ を求めよ．

$$f(x) = 3x^2 + \int_{-2}^{0} xf(t)\,dt$$

解答例

1. (1)

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \frac{(x+5)(x+2)}{x(x+2)-15} - \frac{x(x-1)-2}{(x-1)(x-2)-2(x-2)} \\ &= \frac{(x+5)(x+1)}{(x+5)(x-3)} - \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x-3)} \\ &= \frac{x+1}{x-3} - \frac{x+1}{x-3} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

   (2) $\sqrt{4-\sqrt{15}} = \dfrac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{10}-\sqrt{6}}}{\boldsymbol{2}}$

   (3) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + \sin 2\theta$

2. (1) 与えられた方程式から

$$2\cos^2 x - 1 = \cos x \quad \text{すなわち} \quad (\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$$

   $-\pi < x \leqq \pi$ より

   $\cos x = 1$ のとき $x = 0$, $\quad \cos x = -\dfrac{1}{2}$ のとき $x = -\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi$

   よって $\quad \boldsymbol{x = -\dfrac{2}{3}\pi,\ 0,\ \dfrac{2}{3}\pi}$

   (2) $t = 2^x$ とおくと $(t > 0)$，与えられた不等式から

$$2t^2 - 9t + 4 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t-4)(2t-1) < 0$$

   したがって $\quad \dfrac{1}{2} < t < 4 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{-1 < x < 2}$

(3) $t=\log_2(1-x)$ とおくと，与えられた方程式は　$t^2=2t+3$
ゆえに　$(t+1)(t-3)=0$　これを解くと　$t=-1,\ 3$
$t=-1$ のとき　$\log_2(1-x)=-1$　すなわち　$x=\dfrac{1}{2}$
$t=3$ のとき　$\log_2(1-x)=3$　すなわち　$x=-7$

よって　　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},-7}$

3. (1) $f(x)=x^3+(2a+1)x^2+3(2a-1)x+4a-3$ とおくと

$$f(-1)=-1+(2a+1)-3(2a-1)+4a-3=0$$

よって，与えられた方程式は $x=-1$ を解にもつ.

(2) (1) の結果から，$f(x)$ が $x+1$ を因数にもつことに注意して

$$f(x)=(x+1)(x^2+2ax+4a-3)$$

i) 方程式 $f(x)=0$ が -1 を 2 重解にもつとき，方程式 $x^2+2ax+4a-3=0$ は -1 を解にもつから

$$(-1)^2+2a\cdot(-1)+4a-3=0　\text{これを解いて}　a=1$$

このとき，$f(x)=(x+1)^3$ となり，不適.

ii) 方程式 $f(x)=0$ が -1 以外を 2 重解にもつとき，方程式 $x^2+2ax+4a-3=0$ 重解をもつから

$$D/4=a^2-1\cdot(4a-3)=(a-1)(a-3)=0$$

$a\neq 1$ であるから，$a=3$. このとき

$$f(x)=(x+1)(x+3)^2$$

よって，$\boldsymbol{a=3}$，解は　$\boldsymbol{x=-1,\ -3}$ **(2 重解)**

4. (1) $t = 5^x + 5^{-x} = (5^{\frac{x}{2}} - 5^{-\frac{x}{2}})^2 + 2$　よって　$\boldsymbol{t \geqq 2}$

(2) $25^x + 25^{-x} = (5^x + 5^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ であるから

$$y = -(t^2 - 2) + 6t - 6 = \boldsymbol{-t^2 + 6t - 4}$$

(3) (2) の結果から

$$y = -(t - 3)^2 + 5$$

上式および (1) の結果から，$t = 3$ のとき，y の最大値は　$\boldsymbol{5}$

5. (1) $f(x) = -x^3 + ax^2 + (6 - a)x - 2$ より

$$\boldsymbol{f'(x) = -3x^2 + 2ax + 6 - a}$$

(2) $f'(1) = 0$ であるから，(1) の結果より

$$-3 + 2a + 6 - a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = -3$$

ゆえに　$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$,

$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x + 3)(x - 1)$

よって，$\boldsymbol{x = -3}$ で極小値 $\boldsymbol{-29}$ をとる.

6. 与えられた等式から　$f(x) = 3x^3 + x\displaystyle\int_{-2}^{0} f(t)\,dt$

$k = \displaystyle\int_{-2}^{0} f(t)\,dt$ とおくと，$f(x) = 3x^3 + kx$ であるから

$$k = \int_{-2}^{0} (3x^3 + kx)\,dx = \left[\ \frac{3}{4}x^4 + \frac{k}{2}x^2\ \right]_{-2}^{0}$$
$$= -12 - 2k$$

これから　$k = -4$　よって　$\boldsymbol{f(x) = 3x^3 - 4x}$

4.3　平成 27 年度編入学試験 (80 分)

1. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ を因数分解せよ．

2. $-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{81}$ を計算せよ．

3. x についての二次方程式 $2x^2-x+5=0$ の 2 つの解を α，β とする．このとき α^2，β^2 を 2 つの解とする，整数係数の二次方程式を作れ．

4. k は定数とする．放物線 $y=-9x^2$ と直線 $y=kx+1$ の共有点が 1 個であるとき，k の値と共有点の個数を求めよ．

5. a，b は正の数とする．次の不等式を証明せよ．また，等号が成立するための条件を求めよ．

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 4$$

6. 次の方程式，不等式を解け．

(1) $|x-4|-2|x-3|\leqq -5$

(2) $x^3-x+6=0$

(3) $\log_3(2x+3)+2\log_{\frac{1}{3}}x=0$

(4) $\cos 2\theta+\sin\theta\leqq 0\quad(0\leqq\theta<2\pi)$

7. 関数 $f(x)=x^2-2x+3$ と，$a<b$ を満たす定数 a，b，c について，次の各問に答えよ．

(1) x が，a から b まで変化するときの，$f(x)$ の平均変化率を求めよ．

(2) $x=c$ での微分係数 $f'(c)$ が，(1) の平均変化率に等しい場合，a，b，c が満たす関係式を求めよ．

(3) $a<c<b$ であることを示せ．

8. 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ でそれぞれ接線を引く．この 2 つの接線と放物線で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

1. $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1 = x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$
$= (x^3+1)(x^2+x+1)$
$= \boldsymbol{(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)}$

2. $-\sqrt[3]{24}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{81} = -\sqrt[3]{8}\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{27}\sqrt[3]{3}$
$= -2\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3} = \boldsymbol{0}$

3. 解と係数の関係により　$\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

ゆえに　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=-\dfrac{19}{4}$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{25}{4}$

よって，α^2，β^2 を解とする 2 次方程式は

$x^2-\left(-\dfrac{19}{4}\right)x+\dfrac{25}{4}=0$　すなわち　$\boldsymbol{4x^2+19x+25=0}$

4. $y=-9x^2$ と $y=kx+1$ から y を消去すると　$9x^2+kx+1=0$　$\cdots(*)$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$D=k^2-4\cdot9\cdot1=(k+6)(k-6)$

このとき，$D=0$ であるから　$k=\pm6$

$(*)$ から，放物線と直線の接点の x 座標は　$x=\dfrac{k}{18}$

よって　$\boldsymbol{k=\pm6}$　接点の座標は　$\left(\pm\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}},\mathbf{-1}\right)$ **(複号同順)**

5. $(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+2$　$\cdots$①

$\dfrac{a}{b}>0$，$\dfrac{b}{a}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{b}{a}}=2$　$\cdots$②

①，② から　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$

上式において，等号が成立するのは

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{a}$　すなわち　$a=b$

のときである．

6. (1)　$|x-4|-2|x-3| \leqq -5 \quad \cdots(*)$

(i) $x<3$ のとき，$(*)$ は

$$-(x-4)+2(x-3) \leqq -5 \quad \text{すなわち} \quad x \leqq -3$$

(ii) $3 \leqq x<4$ のとき，$(*)$ は

$$-(x-4)-2(x-3) \leqq -5 \quad \text{すなわち} \quad x \geqq 5$$

これは，$3 \leqq x<4$ に反するので，不適.

(iii) $x \geqq 4$ のとき，$(*)$ は

$$(x-4)-2(x-3) \leqq -5 \quad \text{すなわち} \quad x \geqq 7$$

(i)〜(iii) より　　$\boldsymbol{x \leqq -3,\ 7 \leqq x}$

(2) $P(x)=x^3-x+6$ とおくと　$P(-2)=0$

$P(x)$ は $x+2$ を因数にもつから

$$P(x)=(x+2)(x^2-2x+3)$$

よって，$P(x)=0$ の解は　　$\boldsymbol{x=-2,\ 1\pm\sqrt{2}\,i}$

(3) $\log_3(2x+3)+2\log_{\frac{1}{3}}x=0$

真数は正であるから

$$2x+3>0 \quad \text{かつ} \quad x>0 \quad \text{すなわち} \quad x>0 \quad \cdots①$$

与えられた方程式から

$$\log_3(2x+3)-2\log_3 x=0 \quad \text{ゆえに} \quad \log_3(2x+3)=\log_3 x^2$$

したがって　$2x+3=x^2$　ゆえに　$(x+1)(x-3)=0$

① に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{x=3}$

(4) $\cos 2\theta+\sin\theta \leqq 0$ より　$1-2\sin^2\theta+\sin\theta \leqq 0$

ゆえに　$(\sin\theta-1)(2\sin\theta+1) \geqq 0$　すなわち　$\sin\theta \leqq -\dfrac{1}{2},\ 1 \leqq \sin\theta$

$0 \leqq \theta<2\pi$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi \leqq \theta \leqq \dfrac{11}{6}\pi}$

7. (1) x が a から b まで変化するとき，関数 $f(x) = x^2 - 2x + 3$ の平均変化率は

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{(b^2 - 2b + 3) - (a^2 - 2a + 3)}{b - a}$$
$$= \frac{(b - a)(b + a - 2)}{b - a} = \boldsymbol{a + b - 2}$$

(2) $f'(x) = 2x - 2$ であるから，$f'(c)$ が (1) で求めた平均変化率に等しいとき

$$2c - 2 = a + b - 2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{2c = a + b}$$

(3) (2) の結果から $\quad c = \dfrac{a + b}{2}$

$a < b$ であるから $\quad a < \dfrac{a + b}{2} < b \quad$ よって $\quad a < c < b$

8. 求める面積を S とすると，$y = x^2$ の x^2 の係数に注意して

$$S = \frac{1}{12}\{2 - (-1)\}^3 = \frac{\boldsymbol{9}}{\boldsymbol{4}}$$

4.4　平成 26 年度編入学試験 (80 分)

1. $3x^2 - 2y^2 + 5xy - 4x + 13y - 15$ を因数分解せよ．

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ の分母を有理化して，簡単にせよ．

3. x についての 2 次方程式 $2x^2-5x+7=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ．

4. 中心の座標が $(0,\ 1)$，半径が $\sqrt{5}$ の円と直線 $y = 2x + k$ が共有点をもつような定数 k の値の範囲を求めよ．

5. $x + y + z = 0$ のとき，$x^2 - xy + xz = 2y^2 + 2yz$ が成り立つことを証明せよ．

6. 次の方程式，不等式を解け．

   (1) $9(2x - 3)^2 = 25x^2$

   (2) $\sin 2\theta - \sin\theta + 2\sqrt{2}\cos\theta = \sqrt{2}\ \ (0 \leqq \theta < 2\pi)$

   (3) $3^{2x+1} + 8\cdot 3^x - 3 = 0$

   (4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x - 1) \geqq \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)$

7. 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ に点 $\mathrm{A}(1, -1)$ から引いた接線の方程式および接点の座標を求めよ．

8. 曲線 $y = |x(x - 3)|$ と直線 $y = x$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. x について整理すると

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= 3x^2+(5y-4)x-(2y^2-13y+15)\\ &= 3x^2+(5y-4)x-(2y-3)(y-5)\\ &= \{3x-(y-5)\}\{x+(2y-3)\}\\ &= \boldsymbol{(3x-y+5)(x+2y-3)}\end{aligned}$$

2. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$\dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}$

したがって　$(\text{与式}) = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}} = \boldsymbol{1}$

3. 解と係数の関係により　$\alpha+\beta = \dfrac{5}{2}$，$\alpha\beta = \dfrac{7}{2}$

ゆえに　$\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta = \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 - 2\cdot\dfrac{7}{2} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{4}}$

4. 円 : $x^2+(y-1)^2 = 5\cdots$①，直線 : $y = 2x+k\cdots$②

② を ① に代入すると　$x^2+(2x+k-1)^2 = 5$

整理すると　$5x^2+4(k-1)x+k^2-2k-4 = 0$

$D/4 \geqq 0$ であればよいから

$\{2(k-1)\}^2-5(k^2-2k-4) \geqq 0$ 整理すると　$(k-6)(k+4) \leqq 0$

よって　$\boldsymbol{-4 \leqq k \leqq 6}$

別解 直線 $2x-y+k=0$ と円の中心 $(0,\ 1)$ との距離を d とすると

$$d = \frac{|-1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^1}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{5}}$$

このとき，$d \leqq \sqrt{5}$ であるから

$\dfrac{|k-1|}{\sqrt{5}} \leqq \sqrt{5}$　これを解いて　$\boldsymbol{-4 \leqq k \leqq 6}$

5. $x^2-xy+xz-2y^2-2yz=0\cdots$① を示す.

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= z(x-2y)+x^2-xy-2y^2\\ &= z(x-2y)+(x-2y)(x+y)\\ &= (x-2y)(x+y+z)\end{aligned}$$

ここで，$x+y+z=0$ であるから　(左辺) $=0$

よって，① が成立するから，$x^2-xy+xz=2y^2+2yz$ も成立する.

6. (1) $9(2x-3)^2=25x^2$ より　$\{3(2x-3)\}^2-(5x)^2=0$

ゆえに　$\{3(2x-3)+5x\}\{3(2x-3)-5x\}=0$

したがって　$(11x-9)(x-9)=0$　よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{9}{11},\ 9}$

(2) $\sin 2\theta-\sin\theta+2\sqrt{2}\cos\theta=\sqrt{2}$　$(0\leqq\theta<2\pi)$　より

$$\begin{aligned}2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta+2\sqrt{2}\cos\theta-\sqrt{2}&=0\\ \sin\theta(2\cos\theta-1)+\sqrt{2}(2\cos\theta-1)&=0\\ (2\cos\theta-1)(\sin\theta+\sqrt{2})&=0\end{aligned}$$

$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より　$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$　$0\leqq\theta<2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(3) $3^{2x+1}+8\cdot 3^x-3=0$ より　$3\cdot(3^x)^2+8\cdot 3^x-3=0$

$t=3^x$ とおくと $(t>0)$

$$3t^2+8t-3=0\quad\text{ゆえに}\quad(3t-1)(t+3)=0$$

$t>0$ より　$t=\dfrac{1}{3}$　ゆえに　$3^x=\dfrac{1}{3}$　これを解いて　$\boldsymbol{x=-1}$

(4) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)\geqq\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$$0<2x-1\leqq x+1\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{\frac{1}{2}<x\leqq 2}$$

7. $y = x^3 - 3x^2 + 2x - 3$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 6x + 2$

曲線上の点 $(t,\ t^3 - 3t^2 + 2t - 3)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - 2t^2 + 2t - 3) = (3t^2 - 6t + 2)(x - t)$$

整理すると　　$y = (3t^2 - 6t + 2)x - 2t^3 + 3t^2 - 3$　$\cdots$①

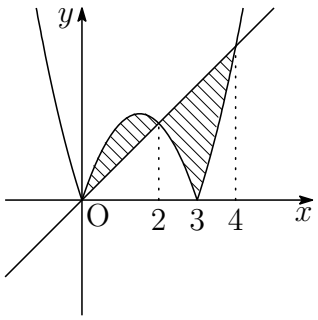
これが点 $\mathrm{A}(1, -1)$ を通るから

$$-1 = (3t^2 - 6t + 2)\cdot 1 - 2t^3 + 3t^2 - 3 \quad \text{整理すると} \quad t(t^2 - 3t + 3) = 0$$

$t^2 - 3t + 3 \neq 0$ であるから　$t = 0$

① より，接線の方程式 $\boldsymbol{y = 2x - 3}$，接点 $\boldsymbol{(0, -3)}$

8. $y = |x(x-3)|$ と $y = x$ の交点の x 座標は



(i) $x \leqq 0,\ 3 \leqq x$ のとき

$$x(x-3) = x \quad \text{ゆえに} \quad x(x-4) = 0$$

これを解いて　$x = 0,\ 4$

(ii) $0 < x < 3$ のとき

$$-x(x-3) = x \quad \text{ゆえに} \quad x(x-2) = 0$$

これを解いて　$x = 2$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{-x(x-3) - x\}\,dx + \int_2^3 \{x + x(x-3)\}\,dx + \int_3^4 \{x - x(x-3)\}\,dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 2x)\,dx + \int_2^3 (x^2 - 2x)dx + \int_3^4 (-x^2 + 4x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2\right]_2^3 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_3^4 \\ &= \boldsymbol{\frac{13}{3}} \end{aligned}$$

4.5　平成 25 年度編入学試験 (80 分)

1. $x^2+xy-2y^2+2x+7y-3$ を因数分解せよ．(6 点)

2. $\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8$ の値を求めよ．(6 点)

3. 等式 $\dfrac{3x-7}{(x+3)(x-1)}=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x-1}$ が恒等式になるように，定数 a，b の値を定めよ．(12 点)

4. 2 次方程式 $x^2+2kx-k^2+4=0$ が 2 重解をもつように定数 k の値を定め，そのときの 2 重解を求めよ．(12 点)

5. 次の方程式，不等式を解け．(32 点)

   (1) $x^3-3x^2+x+1=0$

   (2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-1}<\dfrac{1}{4}$

   (3) $2\log_3(x+2)=\log_3(10-x)$

   (4) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=-1\quad(0\leqq x<2\pi)$

6. $x^2+2y^2=1$ のとき，$2x+3y^2$ の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x，y の値を求めよ．(16 点)

7. 関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x (t^2-2t)\,dt$ の増減，極値を調べて，グラフをかけ．(16 点)

解答例

1. (x 着目して因数分解する)

$$\begin{aligned}&x^2+xy-2y^2+2x+7y-3\\=&x^2+(y+2)x-(y-3)(2y-1)\\=&\{x-(y-3)\}\{x+(2y-1)\}\\=&\boldsymbol{(x-y+3)(x+2y-1)}\end{aligned}$$

2. (底の変換公式を利用する)

$$\begin{aligned}\log_2 3\cdot\log_3 5\cdot\log_5 8&=\log_2 3\times\frac{\log_2 5}{\log_2 3}\times\frac{\log_2 8}{\log_2 5}\\&=\log_2 8=\log_2 2^3=\boldsymbol{3}\end{aligned}$$

3. 等式の両辺に $(x+3)(x-1)$ をかけると

$$3x-7=a(x-1)+b(x+3)$$

右辺を整理すると

$$3x-7=(a+b)x+(-a+3b)$$

同じ次数の係数は等しいから

$$3=a+b,\quad -7=-a+3b$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=4,\ b=-1}$

4. 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D/4=k^2-1\cdot(-k^2+4)=2(k^2-2)$$

2 重解をもつのは，$D=0$ のときであるから，上式より

$$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{2}}$$

2 重解は，2 次方程式の係数から　　$x=-\dfrac{2k}{2\cdot1}=-k$

よって　　$\boldsymbol{k=\pm\sqrt{2}}$**のとき　2 重解** $\boldsymbol{x=\mp\sqrt{2}}$　　**(複号同順)**

5. (1) $P(x)=x^3-3x^2+x+1$ とすると

$$P(1)=1^3-3\cdot1^2+1+1=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x)=(x-1)(x^2-2x-1)$$

$P(x)=0$ から

$$x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2-2x-1=0$$

よって　　$\boldsymbol{x=1,\ 1\pm\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{r} x^2\ -2x\ -1 \\ \hline x-1\,)\,x^3-3x^2\ +x+1 \\ \quad x^3\ -x^2 \\ \hline \quad -2x^2\ +x \\ \quad -2x^2+2x \\ \hline \quad\quad -x+1 \\ \quad\quad -x+1 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

(2) 不等式を変形すると　　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x-1}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2}$

したがって　$3x-1>2$　これを解いて　$\boldsymbol{x>1}$

(3) 真数は正であるから

$$x+2>0 \quad \text{かつ} \quad 10-x>0 \quad \text{すなわち} \quad -2<x<10 \quad \cdots①$$

方程式を変形すると　$\log_3(x+2)^2=\log_3(10-x)$

したがって　　$(x+2)^2=10-x$

ゆえに　　$(x+6)(x-1)=0$

① に注意して　　$\boldsymbol{x=1}$

(4) 方程式を変形すると

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2} \quad \cdots①$$

$0\leqq x<2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{6}\leqq x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{13}{6}\pi$

このとき，方程式 ① の解は

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$

6. $x^2+2y^2=1$ より　$y^2=\dfrac{1}{2}(1-x^2)$　$\cdots$①

$y^2 \geqq 0$ であるから，① より

$1-x^2 \geqq 0$　これを解いて　$-1 \leqq x \leqq 1$　$\cdots$②

また，① より

$$\begin{aligned} 2x+3y^2 &= 2x+3\times\frac{1}{2}(1-x^2) \\ &= -\frac{3}{2}\left(x^2-\frac{4}{3}x\right)+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\left\{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}\right\}+\frac{3}{2} \\ &= -\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{13}{6} \end{aligned}$$

したがって，$x=\dfrac{2}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{6}$，$x=-1$ のとき最小値 -2

ここで ① より　$x=\dfrac{2}{3}$ のとき　$y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}$，　$x=-1$ のとき　$y=0$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3},\ y=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{6}}$**のとき最大値** $\boldsymbol{\dfrac{13}{6}}$**,**

$\boldsymbol{x=-1,\ y=0}$ **のとき最小値** $\boldsymbol{-2}$

7. 右辺を計算するとすると

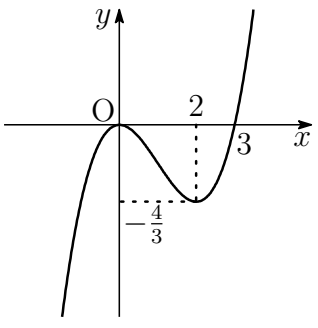
$$f(x)=\int_0^x (t^2-2t)\,dt=\left[\ \frac{t^3}{3}-t^2\ \right]_0^x=\frac{x^3}{3}-x^2$$

これを微分すると　$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0,\ 2$

したがって，増減表およびグラフは次のとおり

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{4}{3}$	↗



4.6　平成 24 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問いに答えよ．　(10 × 5 = 50 点)

   (1) $2x^2 + xy - 5x + y + 2$ を因数分解せよ．

   (2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$ の分母を有理化して，簡単にせよ．

   (3) 長さ 40cm の針金を曲げて長方形を作るとき，面積を最大にするにはどうすればよいか．

   (4) 不等式 $4^x - 5\cdot 2^x + 4 < 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

   (5) 2 乗すると i になるような複素数 $z = x + yi$ ($x,\ y$ は実数) はちょうど 2 つ存在する．この z を求めよ．

2. 次の問いに答えよ．　(10 × 2 = 20 点)

   (1) 等式 $\tan^2\theta - \sin^2\theta = \sin^2\theta\tan^2\theta$ を証明せよ．

   (2) $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$ の値を求めよ．

3. 次の問いに答えよ．　(10 × 2 = 20 点)

   (1) 曲線 $y = x^3 - 2x + 1$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ。

   (2) 不等式 $x^4 + 27 \geqq 4x^3$ を証明せよ．また等号が成り立つ条件を求めよ．

4. 2 つの曲線 $y = 2x^2 + 3x + 1$，$y = -x^2 - 2x + 3$ で囲まれた図形の面積を求めよ．　(10 点)

解答例

1. (1) $2x^2+xy-y^2-5x+y+2$
$=2x^2+(y-5)x-(y+1)(y-2)$
$=\{x+(y-2)\}\{2x-(y+1)\}$
$=\boldsymbol{(x+y-2)(2x-y-1)}$

1	$y-2$ ⟶	$2y-4$
2	$-(y+1)$ ⟶	$-y-1$
2	$-(y+1)(y-2)$	$y-5$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}$
$=\dfrac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}+\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$
$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})$
$=\mathbf{1}$

(3) 長方形の縦の長さを x cm とすると，横の長さは $(20-x)$ cm であるから

$$x>0 \quad \text{かつ} \quad 20-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 0<x<20 \quad \cdots ①$$

長方形の面積を y とすると

$$\begin{aligned} y &= x(20-x) \\ &= -x^2+20x \\ &= -(x-10)^2+100 \end{aligned}$$

① より，$x=10$ で y は最大値 100 をとる．
よって，長方形の面積を最大にするには，縦と横の長さをともに 10cm にすればよい．

(4) $2^x=t$ とおくと　　$t>0 \quad \cdots ①$
不等式は　$t^2-5t+4<0$　すなわち　$(t-1)(t-4)<0$
① に注意して，この不等式を解くと　$1<t<4$
ゆえに　　$1<2^x<4$　すなわち　$2^0<2^x<2^2$
よって　　$\boldsymbol{0<x<2}$

(5) $z^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$ であるから，$z^2=i$ であるとき

$$x^2-y^2=0 \quad \cdots ①, \quad 2xy=1 \quad \cdots ②$$

① から　$y^2=x^2$　すなわち　$y=\pm x$

i) $y=x$ のとき，これを ② に代入して

$$2x^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ii) $y=-x$ のとき，これを ② に代入して

$$-2x^2=1 \quad \text{これを満たす実数 } x \text{ は存在しない}$$

i)，ii) より　　$\boldsymbol{z=\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}}$

2. (1) 左辺 $=\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}-\sin^2\theta=\left(\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1\right)\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

よって　　$\tan^2\theta-\sin^2\theta=\tan^2\theta\sin^2\theta$

(2) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(45^\circ-30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ+30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を加えて

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ+\cos 75^\circ &= 2\cos 45^\circ\cos 30^\circ\\ &= 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\end{aligned}$$

3. (1) $y=x^3-2x+1$ より　$y'=3x^2-2$

$x=1$ のとき　$y'=3\cdot 1^2-2=1$

ゆえに，この曲線の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y-0=1(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=x-1}$$

(2) $f(x) = (x^4 + 27) - 4x^3$ とおくと

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	27	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

したがって，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$(x^4 + 27) - 4x^3 \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad x^4 + 27 \geqq 4x^3$$

また等号が成り立つのは，$x = 3$ のときである

4. 2 曲線 $y = 2x^2 + 3x + 1$，$y = -x^2 - 2x + 3$ の共有点の x 座標は

$$2x^2 + 3x + 1 = -x^2 - 2x + 3 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + 5x - 2 = 0$$

これを解いて　$x = -3,\ \dfrac{1}{2}$

$-3 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ において　$-x^2 - 2x + 3 \geqq 2x^2 + 3x + 1$

したがって，求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{\frac{1}{2}} \{(-x^2 - 2x + 3) - (2x^2 + 3x + 1)\} dx \\ &= -2 \int_{-3}^{\frac{1}{2}} (x + 3)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx \\ &= -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \left\{\frac{1}{2} - (-3)\right\}^3 \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{343}{24}} \end{aligned}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta) dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3}$$

4.7　平成 23 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問いに答えよ．　　$(10 \times 5 = 50$ 点$)$

(1) $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$，$y = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ のとき，$\dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{y^3}$ の値を求めよ．

(2) $\dfrac{a+c}{b^2+ac-ab-bc} + \dfrac{a+b}{c^2+ab-ac-bc} + \dfrac{b+c}{a^2+bc-ac-ab}$ を計算せよ．

(3) x，y は実数で，$y \neq 0$ とする．このとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$x^2 + y^2 > xy$$

(4) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか．なお，$\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として計算してよい．

(5) 不等式 $\sin 2x < \cos x$ を，$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で解け．

2. 関数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ について，次の問いに答えよ．　　$(7 + 6 + 7 = 20$ 点$)$

(1) $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ を $r\sin(x+\alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r > 0$，$-\pi < \alpha < \pi$ とする．

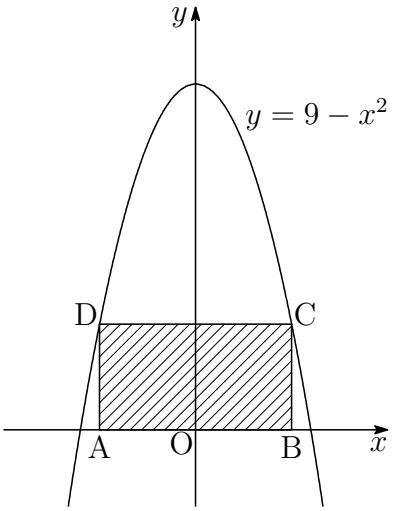
(2) 方程式 $\sin x = \sqrt{3}\cos x$ を，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲で解け．

(3) 関数 $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ のグラフを，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲でかけ．

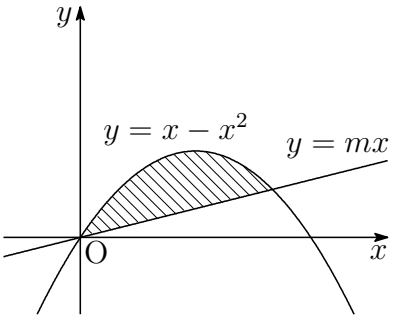
3. 下図のように，曲線 $y = 9 - x^2$ と x 軸で囲まれた領域に，長方形 ABCD が，辺 AB を x 軸上に置き内接している．この長方形の面積を S，また，B$(t,\ 0)$ として，次の問いに答えよ． $(5 + 10 = 15$ 点$)$

(1) 面積 S を t を使って表せ．

(2) 面積 S が最大となるときの t の値を求めよ．



4. 曲線 $y = x - x^2$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を，直線 $y = mx$ で二等分したい．このときの m の値を求めよ． (15 点)



解答例

1. (1)　$x+y=(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})=2\sqrt{5}$

$xy=(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=5-3=2$

したがって

$$\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}=\frac{x^3+y^3}{x^3y^3}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{(xy)^3}$$
$$=\frac{(2\sqrt{5})^3-3\cdot 2\cdot 2\sqrt{5}}{2^3}=\frac{\mathbf{7\sqrt{5}}}{\mathbf{2}}$$

(2)　$\dfrac{a+c}{b^2+ac-ab-bc}+\dfrac{a+b}{c^2+ab-ac-bc}+\dfrac{b+c}{a^2+bc-ac-ab}$

$=\dfrac{a+c}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}+\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}$

$=-\dfrac{c+a}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}-\dfrac{(b+c)}{(c-a)(a-b)}$

$=-\dfrac{(c+a)(c-a)+(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=-\dfrac{(c^2-a^2)+(a^2-b^2)+(b^2-c^2)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=\mathbf{0}$

(3)　$y\neq 0$ により，次式が成り立つ．

$$(x^2+y^2)-xy=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2>0$$

よって　　$x^2+y^2>xy$

(4)　　$\log_{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}=-10(\log_{10}2+\log_{10}3)=-10(0.301+0.477)=-7.78$

$-8<\log_{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}<-7$ であるから　$10^{-8}<\left(\dfrac{1}{6}\right)^{10}<10^{-7}$

よって，**小数第 8 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

(5) $\sin 2x < \cos x$ を変形すると

$$2\sin x\cos x < \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \cos x(2\sin x - 1) < 0$$

したがって

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ 2\sin x - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} \cos x < 0 \\ 2\sin x - 1 > 0 \end{cases}$$

第 1 式を解いて $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

第 2 式を解いて $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{6}\pi$

よって $\boldsymbol{0 \leqq x < \dfrac{\pi}{6},\quad \dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{5}{6}\pi,\quad \dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi}$

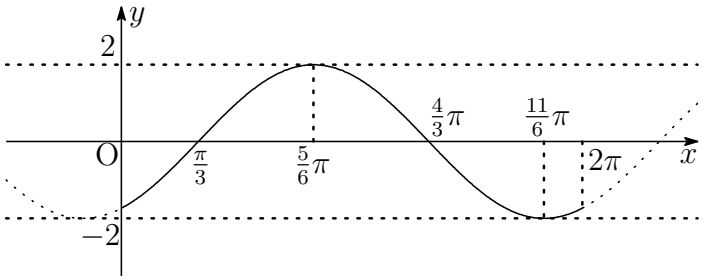
2. (1) $\boldsymbol{\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)}$

(2) (1) の結果から，方程式

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

の解であるから，これを解いて $\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4}{3}\pi}$

(3) (1)，(2) の結果から



3. (1) $y = 9 - x^2$ の x 軸との共有点の x 座標は ± 3 であるから，
B の x 座標について　$0 < t < 3$
また，AB $= 2t$，BC $= 9 - t^2$ であるから，面積 S は

$$S = 2t(9 - t^2) \quad (0 < t < 3)$$

(2) (1) より，$S = -2t^3 + 18t$ を微分すると

$$S' = -6t^2 + 18 = -6(t^2 - 3) = -(t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3})$$

$0 < t < 3$ において，$S' = 0$ を解くと　$t = \sqrt{3}$
したがって，増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	極大 $12\sqrt{3}$	↘	

よって，S が最大となるとき　$\boldsymbol{t = \sqrt{3}}$

4. 曲線 $y = x - x^2$ と x 軸との共有点の x 座標は　$x = 0,\ 1$
曲線と x 軸で囲まれた図形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 (x - x^2)dx = -\int_0^1 x(x-1)dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

曲線 $y = x - x^2$ と直線 $y = mx$ との共有点の x 座標は　$x = 0,\ 1 - m$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{1-m} \{(x - x^2) - mx\}dx = -\int_0^{1-m} x\{x - (1-m)\}dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(1-m)^3 = \frac{1}{6}(1-m)^3 \end{aligned}$$

このとき，$S_2 = \dfrac{1}{2}S_1$ であるから

$$\frac{1}{6}(1-m)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \quad \text{ゆえに} \quad (1-m)^3 = \frac{1}{2}$$

したがって　$1 - m = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$　よって　$\boldsymbol{m = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

4.8 平成 22 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の方程式，不等式を解け.

   (1) $x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$

   (2) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x^2 - y^2 = 3y - 2 \end{cases}$

   (3) $4^x - 2^x - 2 < 0$

   (4) $\log_9(2x - 1) = \log_3 x$

   (5) $\tan x = \sqrt{2}\sin x$ (ただし $0 \leqq x < 2\pi$)

2. 次の問いに答えよ.

   (1) x についての 2 次方程式 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0$ について各問いに答えよ.

   (i) 実数解を持つときの定数 a の条件を求めよ.

   (ii) 実数解がすべて正の数であるための a の条件を求めよ.

   (2) 次の等式を証明せよ.

   $$\frac{1 - \cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \tan\theta$$

   (3) △ABC において

   $$a\cos A + b\cos B = c\cos C$$

   が成り立つとき，どのような三角形か答えよ.

3. 定義に従って，$f(x) = x^2$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ.

4. $-1 \leqq x \leqq 2$ のとき，関数 $y = x^3 - 3x + 4$ の最大値と最小値を求めよ.

5. 関数 $y = -2x^3 + 6x + k$ が x 軸と接するような定数 k の値を求めよ．またこのとき x 軸とこの関数のグラフで囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $P(x)=x^3-x^2-3x-1$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3-(-1)^2-3(-1)-1=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$P(x)=(x+1)(x^2-2x-1)$$

$P(x)=0$ から

$x+1=0$　または　$x^2-2x-1=0$

よって　　$\boldsymbol{x=-1,\ 1\pm\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{r} x^2\ -2x\ -1 \\ \hline x+1\,)\,x^3\ -x^2-3x-1 \\ \quad x^3\ +x^2 \\ \hline \quad -2x^2-3x \\ \quad -2x^2-2x \\ \hline \quad\quad -x-1 \\ \quad\quad -x-1 \\ \hline \quad\quad\quad 0 \end{array}$$

(2) 第 1 式から　$y=3-2x$　$\cdots$①

これを第 2 式に代入すると

$$2x^2-(3-2x)^2=3(3-2x)-2$$

整理すると　　$x^2-9x+8=0$

ゆえに　　$(x-1)(x-8)=0$

よって　　$x=1,\ 8$

① より　　$x=1$ のとき $y=1$,　　$x=8$ のとき $y=-13$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(1,\ 1),\ (8,-13)}$

(3) $2^x=t$ とおくと　$t>0$　$\cdots$①

不等式は　　$t^2-t-2<0$

ゆえに　　$(t+1)(t-2)<0$

① より　　$0<t<2$

したがって　$0<2^x<2$　これを解いて　$\boldsymbol{x<1}$

(4) 真数は正であるから　$2x-1>0$　$x>0$

すなわち　　$x>\dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

方程式は　$\dfrac{\log_3(2x-1)}{\log_3 9}=\log_3 x$

ゆえに　　$\log_3(2x-1)=\log_3 x^2$

$2x-1=x^2$

$(x-1)^2=0$

① に注意して　　$\boldsymbol{x=1}$

(5) 方程式から

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{2}\sin x = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\left(\frac{1}{\cos x} - \sqrt{2}\right) = 0$$

したがって　　$\sin x = 0$　または　$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq x < 2\pi$ において

$\sin x = 0$ を解いて　　$x = 0,\ \pi$

$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を解いて　$x = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{7}{4}\pi$

よって　　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{\pi}{4},\ \pi,\ \dfrac{7}{4}\pi}$

2. (1) 2 次方程式 $x^2 - ax + a^2 - 4 = 0 \cdots (*)$ の判別式 D は

$$D = (-a)^2 - 4\cdot 1\cdot(a^2 - 4) = -3a^2 + 16$$

(i) 実数解をもつとき，$D \geqq 0$ であるから

$$-3a^2 + 16 \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-\frac{4}{3}\sqrt{3} \leqq a \leqq \frac{4}{3}\sqrt{3}}$$

(ii) $(*)$ の解を α，β とすると，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ であるための条件は

$$D \geqq 0, \quad \alpha + \beta > 0, \quad \alpha\beta > 0$$

である．第 1 式は (i) の結果から　$-\dfrac{4}{3}\sqrt{3} \leqq a \leqq \dfrac{4}{3}\sqrt{3}$　$\cdots$①

解と係数の関係により，$\alpha + \beta = a$，$\alpha\beta = a^2 - 4$ であるから

第 2 式から　$a > 0 \cdots$②

第 3 式から　$a^2 - 4 > 0$　ゆえに　$a < -2,\ 2 < a$　$\cdots$③

よって，①，②，③ の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{2 < a \leqq \dfrac{4}{3}\sqrt{3}}$

補足 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の判別式を D，解を α，β とするとき

1. α，β がともに正　$\Longleftrightarrow$　$D \geqq 0,\ \alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta > 0$
2. α，β がともに負　$\Longleftrightarrow$　$D \geqq 0,\ \alpha + \beta < 0,\ \alpha\beta > 0$
3. α，β が異符号　$\Longleftrightarrow$　$\alpha\beta < 0$

$D = b^2 - 4ac = b^2 - 4a^2 \times \dfrac{c}{a} = b^2 - 4a^2 \times \alpha\beta$ より

$$\alpha\beta < 0 \implies D > 0$$

ゆえに，3 では $\alpha\beta < 0$ だけでよい．

(2) $\dfrac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta} = \dfrac{1-(1-2\sin^2\theta)}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

(3) 余弦定理により，与式は

$$a \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + b \times \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = c \times \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

両辺に $2abc$ をかけて

$$\begin{aligned} a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2) &= c^2(a^2+b^2-c^2) \\ a^2(b^2-a^2)+b^2(a^2-b^2) &= -c^4 \\ a^2(a^2-b^2)-b^2(a^2-b^2) &= c^4 \\ (a^2-b^2)^2-c^4 &= 0 \\ (a^2-b^2+c^2)(a^2-b^2-c^2) &= 0 \end{aligned}$$

したがって　　$a^2 = b^2+c^2$　または　$b^2 = c^2+a^2$

よって　$\boldsymbol{A = 90^\circ}$ の直角三角形　または　$\boldsymbol{B = 90^\circ}$ の直角三角形

3. $$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h} = 2 \end{aligned}$$

4. $y' = 3x^2-3 = 3(x+1)(x-1)$

したがって，増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	6	↘	極小 2	↗	6

よって，$\boldsymbol{x = -1, 2}$ で最大値 **6**，$\boldsymbol{x = 1}$ で最小値 **2** をとる．

5. $y' = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$

したがって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	極小 $k-4$	$\nearrow$	極大 $k+4$	$\searrow$

グラフが x 軸で接するのは，増減表から $x = \pm 1$ のときである．

$x = -1$ で接するとき　$k - 4 = 0$　すなわち　$k = 4$
$x = 1$ で接するとき　　$k + 4 = 0$　すなわち　$k = -4$

よって　　$\boldsymbol{k = \pm 4}$

x 軸とこのグラフで囲まれた部分の面積は，次の場合に分けて求める．

［1］$k = 4$ のとき，$-2x^3 + 6x + 4$ が $(x+1)^2$ を因数にもつことに注意して

$$y = -2x^3 + 6x + 4 = -2(x^3 - 3x - 2) = -2(x+1)^2(x-2)$$

求める面積 S_1 は

$$S_1 = \int_{-1}^{2} (-2x^3 + 6x + 4)\, dx = \left[-\frac{x^4}{2} + 3x^2 + 4x \right]_{-1}^{2} = \boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

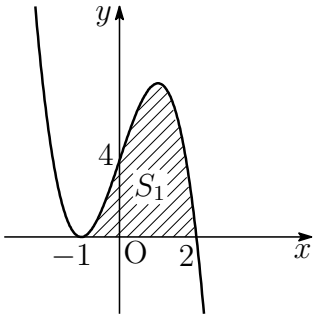
［2］$k = -4$ のとき，$-2x^3 + 6x - 4$ が $(x-1)^2$ を因数にもつことに注意して

$$y = -2x^3 + 6x - 4 = -2(x^3 - 3x + 2) = -2(x-1)^2(x+2)$$

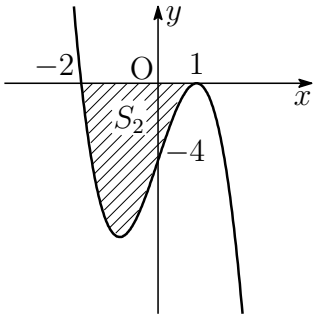
求める面積 S_2 は

$$S_2 = \int_{-2}^{1} \{-(-2x^3 + 6x - 4)\}\, dx = \left[\frac{x^4}{2} - 3x^2 + 4x \right]_{-2}^{1} = \boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

$k = 4$ のとき



$k = -4$ のとき



補足　［1］は点 $(0,\ 4)$ に関して，［2］は点 $(0, -4)$ に関して対称であり，
［1］は［2］を y 軸方向に 8 だけ平行移動したものであるから，$S_1 = S_2$.

4.9　平成 21 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問に答えよ.

   (1) x についての 2 次方程式 $x^2-(a+3)x+2a+3=0$ が虚数解を持つような定数 a の値の範囲を求めよ.

   (2) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ のとき，$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ.

   (3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\sin 2\theta = \sin\theta$ を解け.

   (4) 不等式 $9^x-4\cdot 3^x+3<0$ を解け.

2. $\triangle$ABC において $a=13$，$b=8$，$c=7$ とする.

   (1) 角 A の大きさを求めよ.

   (2) $\triangle$ABC の外接円の半径 R を求めよ.

   (3) $\triangle$ABC の面積 S を求めよ.

3. -2，$\log_{\frac{1}{2}} 5$，$\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{24}$ を値の小さい順に並べよ.

4. 不等式 $(x-2y+2)(x^2+y^2-4) \leqq 0$ の表す領域を図示せよ.

5. 次の問いに答えよ.

   (1) 関数 $y=x^3-3x$ の増減を調べて，グラフをかけ.

   (2) 3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ の異なる実数解の個数は，定数 a の値によって，どのように変わるか調べよ.

6. 2 つの曲線 $y=x^2-x+1$，$y=2x^2-3x+1$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) 虚数解をもつので，$D<0$ より

$$\{-(a+3)\}^2-4\cdot1\cdot(2a+3)<0$$

整理すると $\quad a^2-2a-3<0$

ゆえに $\quad (a+1)(a-3)<0$

よって $\quad \boldsymbol{-1<a<3}$

(2) $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}=k$ とおくと，$x=ak$，$y=bk$，$z=ck$ であるから

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=(a^2+b^2+c^2)\{(ak)^2+(bk)^2+(ck)^2\}\\&=(a^2+b^2+c^2)^2k^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\text{右辺})&=(a\cdot ak+b\cdot bk+c\cdot ck)^2\\&=(a^2+b^2+c^2)^2k^2\end{aligned}$$

よって $\quad (\text{左辺})=(\text{右辺})$

(3) 方程式から $\quad 2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$

ゆえに $\quad \sin\theta(2\cos\theta-1)=0$

したがって $\quad \sin\theta=0 \quad$ または $\quad \cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ において

$\sin\theta=0$ を解いて $\quad \theta=0,\ \pi$

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ を解いて $\quad \theta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって $\quad \boldsymbol{\theta=0,\ \pi,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(4) $3^x=t$ とおくと $\quad t>0$

不等式は $\quad t^2-4t+3<0$

ゆえに $\quad (t-1)(t-3)<0$

① に注意して $\quad 1<t<3$

したがって $\quad 1<3^x<3 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{0<x<1}$

2. (1) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot8\cdot7}=\frac{-56}{2\cdot8\cdot7}=-\frac{1}{2}$$

これを満たす角 A は $\quad \boldsymbol{A=120^\circ}$

(2) 正弦定理により $\quad \dfrac{a}{\sin A}=2R$

よって $\quad R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{13}{2\sin120^\circ}=\dfrac{13}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{13}{\sqrt{3}}=\boldsymbol{\dfrac{13\sqrt{3}}{3}}$

(3) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\sin 120^\circ = 28 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{14\sqrt{3}}$

3. $\quad -2 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = \log_{\frac{1}{2}} 4$

$5 > \sqrt{24} > 4$ であり，底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$$\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{24} < \log_{\frac{1}{2}} 4$$

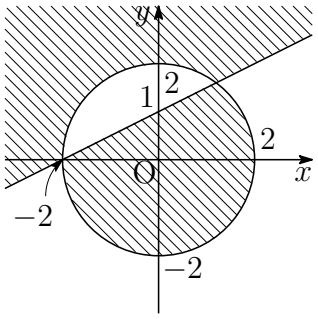
よって　　$\mathbf{\log_{\frac{1}{2}} 5 < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{24} < -2}$

4. 不等式 $(x-2y+2)(x^2+y^2-4) \leqq 0$ の表す領域は

$$\begin{cases} x-2y+2 \geqq 0 \\ x^2+y^2-4 \leqq 0 \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} x-2y+2 \leqq 0 \\ x^2+y^2-4 \geqq 0 \end{cases}$$



が成り立つことと同じである．よって，求める領域は右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．

5. (1) $y' = 3x^2 - 3$
$= 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると

$$x = -1,\ 1$$

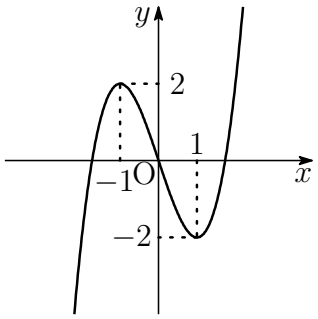
y の増減表は右のようになる．
したがって，この関数は

$x = -1$ で極大値 2

$x = 1$ で極小値 -2

をとる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

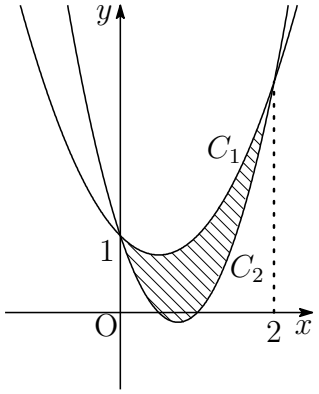


(2) 3 次方程式 $x^3 - 3x - a = 0$ の異なる実数解の個数は，$y = x^3 - 3x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数に等しい．よって，(1) の結果から

$\boldsymbol{-2 < a < 2}$ のとき	**3 個**
$\boldsymbol{a = \pm 2}$ のとき	**2 個**
$\boldsymbol{a < -2,\ 2 < a}$ のとき	**1 個**

6. $C_1 : y = x^2 - x + 1$，$C_2 : y = 2x^2 - 3x + 1$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - x + 1 = 2x^2 - 3x + 1$$



したがって　　$x = 0,\ 2$

$0 \leqq x \leqq 2$ において　$x^2 - x + 1 \geqq 2x^2 - 3x + 1$

よって，求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(x^2 - x + 1) - (2x^2 - 3x + 1)\}\, dx \\ &= -\int_0^2 x(x-2)\, dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

4.10　平成 20 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問に答えよ．

   (1) 2 次不等式 $kx^2+(k-1)x+k-1<0$ がすべての実数 x に対して成り立つように，実数 k の値の範囲を求めよ．

   (2) 等式 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=2x^2-x-2$ が x についての恒等式になるように，定数 a，b，c の値を求めよ．

   (3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta - 3\cos\theta + 2 = 0$ を解け．

   (4) 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(4-x)$ を解け．

2. 次の問に答えよ．

   (1) $\sin 75^\circ$ の値を求めよ．

   (2) △ABC において，$A=75^\circ$，$C=60^\circ$，$b=2$ のとき，a の値，△ABC の面積 S を求めよ．

3. 次の問に答えよ．

   (1) 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 0)$ とするとき，条件 $\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=2:1$ であるような点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡はアポロニウスの円とよばれる．この円の方程式を求めよ．

   (2) 次の連立不等式が表す領域を図示せよ．

   $$\begin{cases} x+y-1<0 \\ x^2+y^2<9 \end{cases}$$

4. 次の問に答えよ．

   (1) 次の関数の増減を調べて，グラフをかき，区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ．

   $$y=-x^3+3x-1$$

   (2) 曲線 $y=x^3-5x$ と点 $(1,-4)$ における接線で囲まれた部分の面積を求めよ．

   (3) 関数 $y=2\cos x-\sqrt{3}\sin x$ の最大値，最小値を求めよ．そのときの x の値は求める必要はない．

解答例

1. (1) 2 次不等式の判別式を D とすると

$$D = (k-1)^2 - 4\cdot k\cdot(k-1) = -3k^2 + 2k + 1$$

2 次不等式 $kx^2 + (k-1)x + k - 1 < 0$ がすべての実数 x に対して成り立つとき，x^2 の係数および判別式 D の符号について次が成り立つ.

$$\begin{cases} k < 0 & \cdots ① \\ -3k^2 + 2k + 1 < 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② から　$3k^2 - 2k - 1 > 0$　これを解いて　$k < -\dfrac{1}{3},\ 1 < k$　$\cdots ②'$

よって，①，②′ の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{k < -\dfrac{1}{3}}$

(2) 等式の左辺を x について整理すると

$$ax^2 + (-2a + b)x + (a - b + c) = 2x^2 - x - 2$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$a = 2, \quad -2a + b = -1, \quad a - b + c = -2$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 3,\ c = -1}$

(3) 方程式を変形すると

$$(2\cos^2\theta - 1) - 3\cos\theta + 2 = 0$$

ゆえに　　$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

よって　　$\cos\theta = 1,\ \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ において

$\cos\theta = 1$ を解いて　$\theta = 0$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ を解いて　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi$

よって　　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(4) 真数は正であり，底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$0 < x - 2 < 4 - x$　これを解いて　$\boldsymbol{2 < x < 3}$

2. (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(2) $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

ゆえに　$a \sin 45^\circ = 2 \sin 75^\circ$

$$a \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

よって　$\boldsymbol{a = \sqrt{3} + 1}$

また　$S = \dfrac{1}{2}ab \sin C = \dfrac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot 2 \sin 60^\circ$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{3}+1) \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{2}}$$

3. (1) 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．条件 PA : PB = 2 : 1 から　$4\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PA}^2$

$$\mathrm{PA}^2 = (x+3)^2 + y^2, \quad \mathrm{PB}^2 = (x-3)^2 + y^2$$

を代入すると　$4\{(x-3)^2 + y^2\} = (x+3)^2 + y^2$

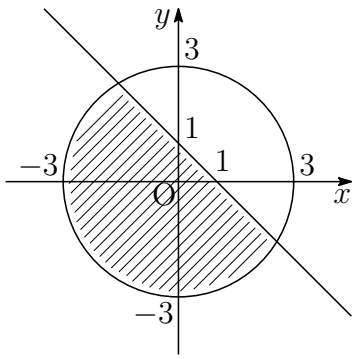
整理すると　$x^2 - 10x + y^2 + 9 = 0$

よって　$\boldsymbol{(x-5)^2 + y^2 = 16}$

(2) この領域は

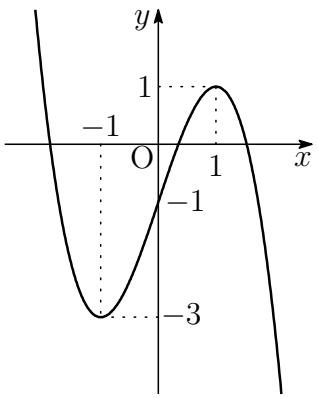
直線 $x + y - 1 = 0$ 下側の部分と
円 $x^2 + y^2 = 9$ の内部

に共通する部分である．すなわち，右の図の斜線部分である．ただし，境界線を含まない．



4. (1) $y' = -3x^2 + 3$
$= -3(x+1)(x-1)$
$y' = 0$ とすると
$x = -1,\ 1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -3	↗	極大 1	↘



y の増減表は右のようになる.
したがって，この関数は

$x = -1$ で極小値 -3
$x = 1$ で極大値 1

をとる.
よって，$-2 \leqq x \leqq 3$ において

$x = -2,\ 1$ で最大値 1
$x = 3$ で最小値 -19

をとる.

(2) $y = x^3 - 5x \cdots$① を微分すると，$y' = 3x^2 - 5$
$x = 1$ のとき　$y' = 3\cdot 1^2 - 5 = -2$
ゆえに点 $(1, -4)$ における接線の方程式は

$$y + 4 = -2(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x - 2 \quad \cdots ②$$

①，② から y を消去すると

$$x^3 - 5x = -2x - 2 \quad \text{すなわち} \quad (x-1)^2(x+2) = 0$$

したがって，①，② の共有点の x 座標は　$x = -2,\ 1$
$-2 \leqq x \leqq 1$ において

$$(x^3 - 5x) - (-2x - 2) = (x-1)^2(x+2) \geqq 0$$

曲線 ① と接線 ② で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \int_{-2}^{1} \{(x^3 - 5x) - (-2x - 2)\}\, dx$$
$$= \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \mathbf{\frac{27}{4}}$$

(3) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$ とすると　　$y = \sqrt{7}\sin(x + \alpha)$
よって，**最大値 $\sqrt{7}$，最小値 $-\sqrt{7}$**

4.11　平成 19 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の方程式を解け.

   (1) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

   (2) $2\cos\theta - 1 \geqq 0$　(ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$)

   (3) $\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x \right) < 2$

   (4) $2 \cdot 4^x - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

   (5) $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 13 \end{cases}$

2. 次の問いに答えよ.

   (1) グラフが次の条件を満たす 2 次関数をそれぞれ求めよ.

   (i) 放物線 $y = -3x^2 + 4x + 7$ を平行移動したもので，2 点 $(1,\ 1),\ (2, -8)$ を通る.

   (ii) x 軸に点 $(2,\ 0)$ で接し，点 $(1, -3)$ を通る.

   (2) $\tan\theta = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする.

   (3) △ABC において，次のものが与えられているとき，残りの辺と角を求めよ.

   $a = 2$，$c = 1 + \sqrt{3}$，$B = 60^\circ$

3. 2 定点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 0)$ に対して，$\mathrm{AP} : \mathrm{BP} = 3 : 2$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を表す方程式を求めよ.

4. 次の問に答えよ.

   (1) 次の等式が成り立つように定数 a，b の値を求めよ.

   $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + ax + b}{x - 2} = 3$$

   (2) 次の関数の増減を調べて，グラフをかけ.

   $$y = x^3 + 3x^2 - 4$$

   (3) 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ と直線 $y = x + 1$ とで囲まれた図形のうち，y 軸よりも右の部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) 与えられた方程式を変形すると

$$(x^2-4)(x^2-9)=0$$
$$(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)=0$$

よって　　$\boldsymbol{x=\pm 2,\ \pm 3}$

(2) 与えられた不等式を変形すると　$\cos\theta \geqq \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ でこれを解くと　$\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 60^\circ}$

(3) 与えられた不等式から　$\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}} x\right) < \log_2 4$

真数は正であり，底 2 は 1 より大きいので

$$0 < \log_{\frac{1}{2}} x < 4$$

ゆえに　　$\log_{\frac{1}{2}} 1 < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{16}$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{16} < x < 1}$

(4) $2^x = t$ とおくと　$t>0$　$\cdots$①

方程式は　　$2t^2-9t+4=0$

ゆえに　　$(t-4)(2t-1)=0$

① に注意して　　$t=4,\ \dfrac{1}{2}$

したがって

$2^x=4$ を解いて　$x=2$

$2^x=\dfrac{1}{2}$ を解いて　$x=-1$

よって　　$\boldsymbol{x=2,-1}$

(5) x，y は，2 次方程式

$$t^2-(x+y)t+xy=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2-10t+13=0$$

の解である．これを解いて　$t=5\pm 2\sqrt{3}$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y)=(5\pm 2\sqrt{3},\ 5\mp 2\sqrt{3})}$ (複号同順)

2. (1)　(i) 求める 2 次関数は，$y=-3x^2+4x+7$ を平行移動したものであるから

$$y=-3x^2+bx+c$$

とおける．これが

点 $(1,\ 1)$ を通るから　$1=-3\cdot1^2+b\cdot1+c$

点 $(2,-8)$ を通るから　$-8=-3\cdot2^2+b\cdot2+c$

整理すると　$b+c=4$，$2b+c=4$

これを解いて　$b=0$，$c=4$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-3x^2+4}$

(ii) 頂点が $(2,\ 0)$ であるから

$$y=a(x-2)^2$$

とおける．これが点 $(1,-3)$ を通るので

$$-3=a(1-2)^2 \quad \text{これを解いて} \quad a=-3$$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-3(x-2)^2}$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$1+\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta=\frac{3}{7}$$

$\tan\theta<0$ であるから，$90^\circ<\theta<180^\circ$ により　$\cos\theta<0$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{7}}}$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned}b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\&=(1+\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot2\cos60^\circ=6\end{aligned}$$

$b>0$ であるから　$\boldsymbol{b=\sqrt{6}}$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

ゆえに　$2\sin60^\circ=\sqrt{6}\sin A$

$$2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{6}\sin A$$

よって　$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots$①

$a<b$ より $A<B$ であるから　$A<60^\circ$

したがって，① を満たす A は　$\boldsymbol{A=45^\circ}$

また　$C=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=\boldsymbol{75^\circ}$

3. 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする.

P に関する条件 AP : BP = 3 : 2 から　$2\mathrm{AP} = 3\mathrm{BP}$

すなわち　　$4\mathrm{AP}^2 = 9\mathrm{BP}^2$

$\mathrm{AP}^2 = (x+2)^2 + y^2$, $\mathrm{BP}^2 = (x-3)^2 + y^2$ を代入すると

$$4\{(x+2)^2 + y^2\} = 9\{(x-3)^2 + y^2\}$$

整理すると　　$x^2 + y^2 - 14x + 13 = 0$

よって　　$\boldsymbol{(x-7)^2 + y^2 = 6^2}$

4. (1) 与えられた等式により

$$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b) = \lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^2+ax+b}{x-2}\times(x-2)\right\}$$

$$2^2 + a\cdot 2 + b = 3\times 0$$

ゆえに　　$b = -2a - 4$　　$\cdots$①

このとき
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+a+2) = a+4$$

$a+4=3$ から　$\boldsymbol{a=-1}$　　① から　$\boldsymbol{b=-2}$

(2) $y' = 3x^2 + 6x$
$= 3x(x+2)$

$y' = 0$ とすると

$x = -2,\ 0$

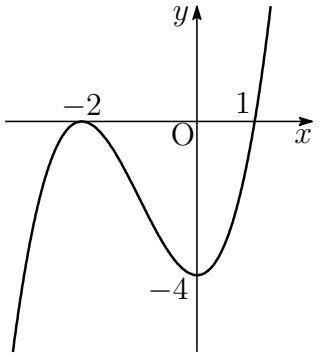
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

y の増減表は右のようになる.
したがって，この関数は

$x = -2$ で極大値 0

$x = 0$ で極小値 -4

をとる.
グラフは，右の図のようになる.

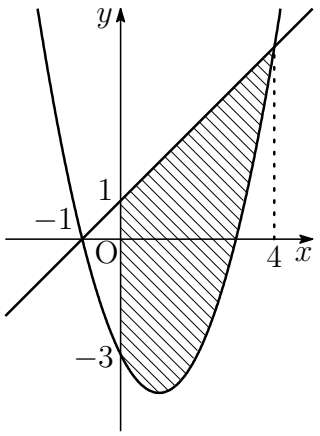


(3) 放物線と直線の共有点の x 座標は，方程式

$$x^2 - 2x - 3 = x + 1$$

を解いて　$x = -1,\ 4$

右の図から求める図形の面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \{(x+1) - (x^2 - 2x - 3)\}\, dx \\ &= \int_0^4 (-x^2 + 3x + 4)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_0^4 = \mathbf{\frac{56}{3}} \end{aligned}$$

4.12 平成 18 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問いの答えよ.

   (1) $\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ とおく．このとき，$\log_{10} 12$，$\log_{10} 5$ を a，b を使って表せ.

   (2) x に関する方程式 $x^2 - 6x + k = 0$ の解が，$0 < x < 4$ の範囲に 1 つ，$x > 4$ の範囲にもう 1 つあるように，定数 k の値の範囲を定めよ.

   (3) a，b，x，y を実数とする．このとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ.

   $$|ax + by| \leqq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

   (4) 2 つの数があり，和が 4，積が 5 であるという．これに該当する 2 数を求めよ.

   (5) △ABC において，$a = 6$，$b = 5$，$c = 4$ とする．このとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ.

   (6) $\sin 15^\circ$ の値を求めよ.

2. 2 定点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(5,\ 0)$ をとる．このとき，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 2 : 3$ となる点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡が円になることを示せ.

3. 次の問いに答えよ.

   (1) 関数 $y = x(3 - x)^2$ の極値を求め，さらに，この関数のグラフをかけ.

   (2) 曲線 $y = x(3 - x)^2$ と直線 $y = x$ とで囲まれた部分の面積を求めよ.

4. 関数 (x) は $x = 0$ における微分係数 $f'(0)$ が定まっているとする．このとき，次の極限値を $f'(0)$ などを使って表せ.

   (1) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h}$

   (2) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h}$

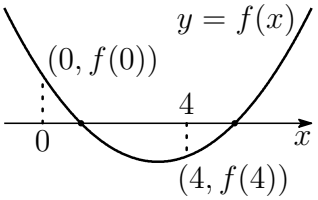
解答例

1. (1) $\log_{10} 12 = \log_{10} 2^2 \cdot 3 = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \boldsymbol{2a + b}$

$\log_{10} 5 = \log_{10} \dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = \boldsymbol{1 - a}$

(2) $f(x) = x^2 - 6x + k$ とおく．$f(x) = 0$ が，$0 < x < 4$ の範囲に 1 つ，$x > 4$ の範囲にもう 1 つ解をもつための条件は

$$f(0) > 0 \quad \text{かつ} \quad f(4) < 0$$



したがって

$$k > 0 \quad \text{かつ} \quad 4^2 - 6\cdot 4 + k < 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{0 < k < 8}$

(3) $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - |ax + by|^2 = b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2$
$= (bx - ay)^2 \geqq 0$

よって　　$|ax + by|^2 \leqq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$

$|ax + by| > 0$，$\sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2} > 0$ であるから

$$|ax + by| \leqq \sqrt{a^2 + b^2}\sqrt{x^2 + y^2}$$

(4) 和が 4，積が 5 である 2 数を x，y とすると，これを解とする 2 次方程式は

$$t^2 - (x + y)t + xy = 0 \quad \text{すなわち} \quad t^2 - 4t + 5 = 0$$

これを解いて　$t = 2 \pm i$

したがって　　$x = 2 \pm i,\ y = 2 \mp i$　(複号同順)

よって，求める 2 数は　　$\boldsymbol{2 + i,\ 2 - i}$

(5) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2\cdot 5\cdot 4} = \frac{5}{40} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

△ABC において，$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$$

(6) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

2. 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする.

P に関する条件は　　$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 2 : 3$

これより　　$3\mathrm{AP} = 2\mathrm{PB}$

すなわち　　$9\mathrm{AP}^2 = 4\mathrm{PB}^2$

$\mathrm{AP}^2 = x^2 + y^2$, $\mathrm{PB}^2 = (x-5)^2 + y^2$ を代入すると

$$9(x^2+y^2) = 4\{(x-5)^2 + y^2\}$$

整理すると　　$x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$

すなわち　　$(x+4)^2 + y^2 = 6^2$

したがって，求める軌跡は，**点 $(-4,\ 0)$ を中心とする半径 6 の円である.**

3. (1) $y = x(3-x)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$ より

$$\begin{aligned}y' &= 3x^2 - 12x + 9\\ &= 3(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると

$$x = 1,\ 3$$

y の増減表は右のようになる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

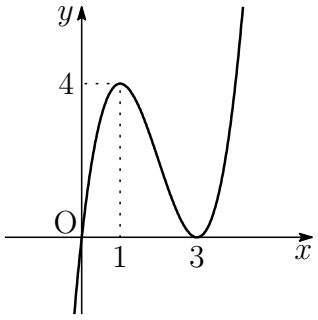
したがって，この関数は

$x = 1$ で極大値 4

$x = 3$ で極小値 0

をとる.

グラフは，右の図のようになる.



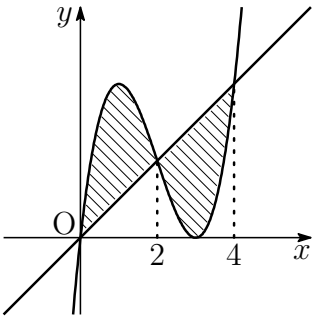
(2) 曲線 $y = x(3-x)^2$ と直線 $y = x$ の共有点の x 座標は

$$x(3-x)^2 = x$$

整理すると　$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

すなわち　$x(x-2)(x-4) = 0$

よって　$x = 0,\ 2,\ 4$



求める部分の面積 S は，右の図から

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \{(x^3 - 6x^2 + 9x) - x\}\,dx + \int_2^4 \{x - (x^3 - 6x^2 + 9x)\}\,dx \\
&= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x)\,dx + \int_2^4 (-x^3 + 6x^2 - 8x)\,dx \\
&= \left[\ \frac{x^4}{4} - 2x^3 + 4x^2\ \right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + 2x^3 - 4x^2\ \right]_2^4 \\
&= \mathbf{8}
\end{aligned}$$

4. (1) $2h = k$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left\{ 2 \times \frac{f(2h) - f(0)}{2h} \right\} \\
&= \lim_{k\to 0} \left\{ 2 \times \frac{f(k) - f(0)}{k} \right\} \\
&= \boldsymbol{2f'(0)}
\end{aligned}$$

(2) $-h = k$ とおくと，$h \to 0$ のとき $k \to 0$ であるから

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} = \lim_{k\to 0} \frac{f(k) - f(0)}{k} = f'(0)$$

したがって

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0) - \{f(-h) - f(0)\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{f(-h) - f(0)}{-h} \right\} \\
&= f'(0) + f'(0) \\
&= \boldsymbol{2f'(0)}
\end{aligned}$$

4.13 平成 17 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) $\dfrac{6}{\sqrt{7}-1}$, $\sqrt{14}$ の大小関係を調べよ.

   (2) $\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=2$ のとき, $\alpha^3+\beta^3$ を求めよ.

   (3) 2 次関数 $y=x^2+2(a-1)x+2-a^2$ のグラフが x 軸と共有点を持たないように, 定数 a の値の範囲を定めよ.

   (4) △ABC において, $a=4$, $b=3$, $c=2$ とする. このとき, $\cos A$, $\sin A$ の値を求めよ.

   (5) $0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$ のとき, 不等式 $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta>1$ を解け.

   (6) $\log_{10}3=a$, $\log_{10}7=b$ とする. このとき, $\log_{21}\sqrt{63}$ を a, b を使って表せ.

2. 次の問に答えよ.

   (1) $y=x^3-12x$ の極値を求めよ.

   (2) x の方程式 $x^3-12x+k=0$ が異なる 2 つの負の数の解と正の数の解を 1 つ持つように, 定数 k の値の範囲を求めよ.

3. 白球 4 個, 黒球 3 個が入った箱から, 3 個を取り出し, 白球の場合 1 個につき 100 円, 黒球の場合 1 個につき 50 円がもらえるゲームがある. このゲームの賞金額を X とするとき, その期待値を求めよ.

4. 次の問に答えよ.

   (1) $F(t)=\displaystyle\int\sqrt{1+t^3}\,dt$ とする. このとき, $\displaystyle\int_0^x\sqrt{1+t^3}\,dt$ を関数 F を使って表せ.

   (2) $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h\sqrt{1+t^3}\,dt$ を計算せよ.

解答例

1. (1)　$\dfrac{6}{\sqrt{7}-1}=\dfrac{6(\sqrt{7}+1)}{(\sqrt{7}-1)(\sqrt{7}+1)}=\sqrt{7}+1$

$(\sqrt{14})^2-(\sqrt{7}+1)^2=14-(8+2\sqrt{7})=2(3-\sqrt{7})>0$

したがって　$\sqrt{14}>\sqrt{7}+1$　ゆえに　$\boldsymbol{\sqrt{14}>\dfrac{6}{\sqrt{7}-1}}$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=5^3-3\cdot2\cdot5=\boldsymbol{95}$

(3) 2 次関数の判別式 D は

$D/4=(a-1)^2-1\cdot(2-a^2)=2a^2-2a-1$

グラフが x 軸と共有点を持たないとき，$D<0$ であるから

$2a^2-2a-1<0$　これを解いて　$\boldsymbol{\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$

(4) 余弦定理により

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{3^2+2^2-4^2}{2\cdot3\cdot2}=-\dfrac{3}{12}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$

△ABC において，$\sin A>0$ であるから

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{15}}{4}}$

(5) 与えられた不等式を変形すると

$2\sin(\theta-60^\circ)>1$　すなわち　$\sin(\theta-60^\circ)>\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ より $-60^\circ\leqq\theta-60^\circ<300^\circ$ であるから，この範囲で上の不等式を解くと

$30^\circ<\theta-60^\circ<150^\circ$　ゆえに　$\boldsymbol{90^\circ<\theta<210^\circ}$

(6) $\log_{21}\sqrt{63}=\dfrac{1}{2}\log_{21}63=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\log_{10}63}{\log_{10}21}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\log_{10}3+\log_{10}7}{\log_{10}3+\log_{10}7}=\boldsymbol{\dfrac{2a+b}{2(a+b)}}$

2. (1) $y'=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

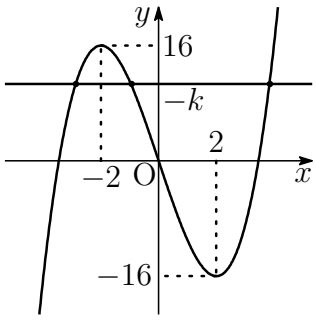
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

よって，$\boldsymbol{x=-2}$ で極大値 **16**，$\boldsymbol{x=2}$ で極小値 $\boldsymbol{-16}$ をとる．

(2) x の方程式 $x^3 - 12x + k = 0$ の解は，$y = x^3 - 12x$ のグラフと直線 $y = -k$ の共有点の x 座標である．したがって，これらの共有点の x 座標が 2 つの負の数と 1 つ正の数である条件は

$$0 < -k < 16$$

すなわち　$\boldsymbol{-16 < k < 0}$



3. この試行による事象の確率は次のとおりである．

白球 0 個の確率は　$\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{1}{35}$

白球 1 個の確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{12}{35}$

白球 2 個の確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{18}{35}$

白球 3 個の確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3} = \dfrac{4}{35}$

よって，受け取る金額を X 円について，右のような表ができる．したがって，求める期待値は

X	150	200	250	300	計
確率	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$150 \times \frac{1}{35} + 200 \times \frac{12}{35} + 250 \times \frac{18}{35} + 300 \times \frac{4}{35} = \frac{8250}{35} = \boldsymbol{\frac{1650}{7}} \ \text{(円)}$$

4. (1) $F(t) = \displaystyle\int \sqrt{1+t^3}\,dt \cdots ①$ より $F(t)$ は $\sqrt{1+t^3}$ の原始関数であるから

$$\int_0^x \sqrt{1+t^3}\,dt = \Big[\, F(t) \,\Big]_0^x = \boldsymbol{F(x) - F(0)}$$

(2) (1) の結果および微分係数の定義により

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \sqrt{1+t^3}\,dt = \lim_{h\to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = F'(0)$$

① から　$F'(t) = \sqrt{1+t^3}$　ゆえに　$F'(0) = 1$

よって，上の 2 式から　$\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h \sqrt{1+t^3}\,dt = \mathbf{1}$

4.14　平成 16 年度編入学試験 (80 分)

1. (1) 不等式 $2x^2 - 3x - 4 \geqq 0$ を解け.

   (2) 2^{32} は何桁の整数か．なお，必要であれば，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とせよ.

   (3) $\cos 75^\circ$ の値を求めよ.

   (4) △ABC において，$a = 4$，$b = 5$，$c = 6$ とする．この時，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ.

   (5) 方程式 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -1$ を，$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ の範囲で解け.

2. $y = x^2 + 2x + k^2 + k - 1$ に関して次の問いに答えよ.

   (1) 頂点の座標を求めよ.

   (2) この放物線のグラフが x 軸と接するように k の値を定めよ.

   (3) $x > 0$ の時，$y > 0$ となるように k の値の範囲を定めよ.

3. 3 次方程式 $x^3 - 3x + k = 0$ が 3 つの異なる実数解を持つように k の値の範囲を定めよ.

4. 2 つの曲線 $y = |x^2 - 1|$，$y = -2(x + 1)(x - 4)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) 2 次方程式 $2x^2-3x-4=0$ の解は $\quad x=\dfrac{3\pm\sqrt{41}}{4}$

したがって，2 次不等式 $2x^2-3x-4\geqq 0$ の解は

$$\boldsymbol{x\leqq\dfrac{3-\sqrt{41}}{4},\ \dfrac{3+\sqrt{41}}{4}\leqq x}$$

(2) $\log_{10}2^{32}=32\log_{10}2=32\times 0.3010=9.632$

$9<\log_{10}2^{32}<10$ であるから

$\log_{10}10^9<\log_{10}2^{32}<\log_{10}10^{10}$

よって $\quad 10^9<2^{32}<10^{10}$

したがって，2^{32} は **10 桁**の数である**.**

(3) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ&=\cos(45^\circ+30^\circ)\\&=\cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(4) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\cdot5\cdot6}=\frac{45}{60}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

△ABC において，$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

(5) 与えられた方程式を変形すると

$$2\sin(x+60^\circ)=1\quad\text{すなわち}\quad\sin(x+60^\circ)=\frac{1}{2}$$

$0^\circ\leqq x<360^\circ$ より $60^\circ\leqq x+60^\circ<420^\circ$ であるから，この範囲で上の方程式を解くと

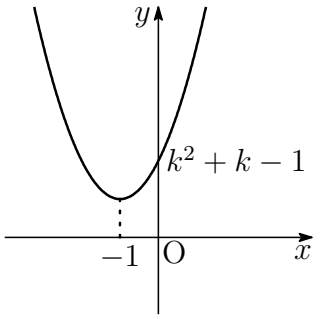
$$x+60^\circ=150^\circ,\ 390^\circ\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{x=90^\circ,\ 330^\circ}$$

2. (1) 右辺を変形すると　$y=(x+1)^2+k^2+k-2$
　　したがって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1,\ k^2+k-2)}$

　(2) グラフが x 軸と接するとき，頂点の y 座標は 0 であるから

$$k^2+k-2=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k=-2,\ 1}$$

　(3) $x>0$ において，$y>0$ となるための条件は



$$x=0 \text{ のとき} \quad y \geqq 0$$

ゆえに　　$k^2+k-1 \geqq 0$

よって　$\boldsymbol{k \leqq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq k}$

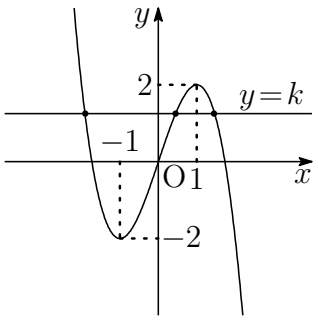
3. 3 次方程式 $x^3-3x+k=0$ の実数解の個数は，$y=-x^3+3x$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しい．

$y=-x^3+3x$ について

$$\begin{aligned} y' &= -3x^2+3 \\ &= -3(x+1)(x-1) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

y の増減表は，右のようになる．よって，$y=-x^3+3x$ のグラフは，右の図のようになる．求める k の値の範囲は，このグラフと直線 $y=k$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから



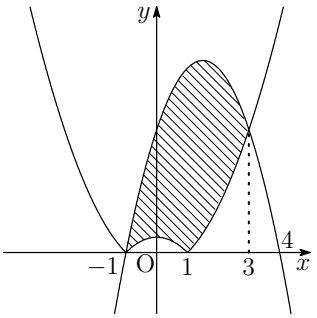
$$\boldsymbol{-2<k<2}$$

4. 2 つの曲線の共有点の x 座標は

$$|x^2-1| = -2(x+1)(x-4)$$

これを解いて　$x = -1,\ 3$

よって，求める部分の面積 S は，
右の図から



$$\begin{aligned}
S &= \int_{-1}^{3} \{-2(x+1)(x-4) - |x^2-1|\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \{-2(x+1)(x-4) - (-x^2+1)\}\,dx \\
&\qquad + \int_{1}^{3} \{-2(x+1)(x-4) - (x^2-1)\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{1} \{-2(x+1)(x-4) - (x^2-1)\} + 2\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx \\
&\qquad + \int_{1}^{3} \{-2(x+1)(x-4) - (x^2-1)\}\,dx \\
&= \int_{-1}^{3} \{-2(x+1)(x-4) - (x^2-1)\}\,dx + 2\int_{-1}^{1} (x^2-1)\,dx \\
&= -3\int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)\,dx + 2\int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)\,dx \\
&= -3\left(-\frac{1}{6}\right)\{3-(-1)\}^3 + 2\left(-\frac{1}{6}\right)\{1-(-1)\}^3 \\
&= 32 - \frac{8}{3} = \boldsymbol{\frac{88}{3}}
\end{aligned}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

4.15　平成 15 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) k を定数とする．2 次方程式 $x^2-(k+1)x+2k=0$ が異なる 2 つの (実数の) 解を持つように，k の値を求めよ.

   (2) $(x+y)^{10}$ の展開式における x^3y^7 の係数は，x を 3 個，y を 7 個並べる時の並べ方の総数に等しい．このことから，x^3y^7 の係数を求めよ.

   (3) $\sin 15^\circ$ の値を求めよ.

   (4) $y=\cos^2 x-\sin x$ $(0^\circ \leqq x<360^\circ)$ の最大・最小値及びその時の x の値を求めよ.

   (5) $\log_{10} 2=0.3010$ として，$\dfrac{1}{2^{30}}$ は，小数第何位に初めて 0 でない数字が現れるか調べよ.

2. 座標平面上に，O$(0,0)$，A(a_1,a_2)，B(b_1,b_2) をとる．ただし，3 点 O，A，B は一直線にはないものとする．この時，線分 OA，OB で出来る平行四辺形の面積 S を求める公式を次のようにして導け.

   (1) 線分 OA，OB のなす角を θ とおく $(0^\circ<\theta<180^\circ)$．この時，$\cos\theta=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}$ を導け.

   (2) $\sin^2\theta$ を a_1，a_2，b_1，b_2 を使って表せ.

   (3) $S=|a_1b_2-a_2b_1|$ が成り立つことを示せ.

3. (1) k を定数とする．$y=x^3-6x^2-3x+k$ の極値 (極大か極小かの判定もすること) 及びその時の x の値を求めよ．なお，必要であれば，等式 $x^3-6x^2-3x+k=(x^2-4x-1)(x-2)-10x+k-2$ を利用してよい.

   (2) 方程式 $x^3-6x^2-3x+k=0$ が異なる 3 つの実数解をもつように k の値の範囲を定めよ.

4. (1) 曲線 $y=x(1-x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

   (2) (1) の部分の面積を，直線 $y=mx$ が 2 等分するように m の値を定めよ.

解答例

1. (1) 異なる 2 つの実数解をもつとき，$D > 0$ であるから

$$\{-(k+1)\}^2 - 4\cdot1\cdot2k > 0$$

ゆえに $\quad k^2 - 6k + 1 > 0$

よって $\quad \boldsymbol{k < 3 - 2\sqrt{2},\ 3 + 2\sqrt{2} < k}$

(2) ${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = \mathbf{120}$

(3) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(4) $y = \cos^2 x - \sin x = (1 - \sin^2 x) - \sin x$

$\sin x = t$ とおくと，$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ より $\quad -1 \leqq t \leqq 1$

ゆえに $\quad y = -t^2 - t + 1 = -\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{4}\ \ (-1 \leqq t \leqq 1)$

よって

$t = -\dfrac{1}{2}$ すなわち $\boldsymbol{x = 210^\circ,\ 330^\circ}$ のとき 最大値 $\boldsymbol{\frac{5}{4}}$

$t = 1$ すなわち $\boldsymbol{x = 90^\circ}$ のとき 最小値 $\boldsymbol{-1}$

(5) $\log_{10} \dfrac{1}{2^{30}} = -30 \log_{10} 2 = -30 \times 0.3010 = -9.030$

$-10 < \log_{10} \dfrac{1}{2^{30}} < -9$ であるから

$$\log_{10} 10^{-10} < \log_{10} \frac{1}{2^{32}} < \log_{10} 10^{-9}$$

よって $\quad 10^{-10} < \dfrac{1}{2^{32}} < 10^{-9}$

したがって，$\dfrac{1}{2^{30}}$ は，**小数第 10 位**に初めて 0 でない数字が現れる．

2. (1) 余弦定理により

$$2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta = \mathrm{OA}^2 + \mathrm{OB}^2 - \mathrm{AB}^2$$

これに

$$\mathrm{OA}^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2, \quad \mathrm{OB}^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2, \quad \mathrm{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2$$

を代入すると

$$2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cos\theta = 2(a_1b_1 + a_2b_2)$$

したがって　　$\boldsymbol{\cos\theta = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}}$

(2) (1) の結果を $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ に代入すると

$$\boldsymbol{\sin^2\theta = \dfrac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2}{({a_1}^2 + {a_2}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2)}}$$

(3) (2) の結果から

$$\sin\theta = \frac{|a_1b_2 - a_2b_1|}{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}$$

したがって

$$S = \mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta = \boldsymbol{|a_1b_2 - a_2b_1|}$$

3. (1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 3x + k$ とすると

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 3 = 3(x^2 - 4x - 1)$$

$f'(x) = 0$ の解は　$x = 2 \pm \sqrt{5}$

$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	$2-\sqrt{5}$	$\cdots$	$2+\sqrt{5}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

このとき，$f(x) = \dfrac{1}{3}f'(x)(x-2) - 10x + k - 2$ であるから

$$\begin{aligned} f(2 \pm \sqrt{5}) &= -10(2 \pm \sqrt{5}) + k - 2 \\ &= k - 22 \mp 10\sqrt{5} \quad \text{(複号同順)} \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{x = 2 - \sqrt{5}}$ のとき　極大値 $\boldsymbol{k - 22 + 10\sqrt{5}}$
　　$\boldsymbol{x = 2 + \sqrt{5}}$ のとき　極小値 $\boldsymbol{k - 22 - 10\sqrt{5}}$

(2) $f(x)=0$ が異なる 3 つの実数解をもつための条件は

$$f(2+\sqrt{5})<0<f(2-\sqrt{5})$$

ゆえに $\quad k-22-10\sqrt{5}<0<k-22+10\sqrt{5}$

よって $\quad \boldsymbol{22-10\sqrt{5}<k<22+10\sqrt{5}}$

4. (1) 曲線 $y=x(1-x)$ と x 軸の共有点 x 座標は $\quad x=0,\ 1$

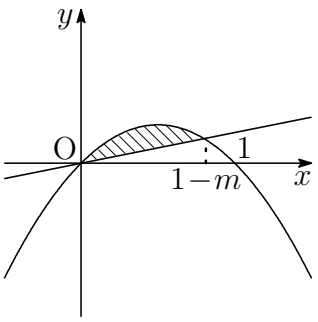
$0 \leqq x \leqq 1$ において $y \geqq 0$ であるから，求める面積 S は

$$S=\int_0^1 x(1-x)\,dx=-\int_0^1 x(x-1)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(2) 曲線 $y=x(1-x)$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標は

$$x(1-x)=mx$$

ゆえに $\quad x=0,\ 1-m$



よって，これらによって囲まれた図形の面積は，(1) の結果から

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$$

よって

$$\int_0^{1-m}\{x(1-x)-mx\}\,dx=\frac{1}{12}$$
$$-\int_0^{1-m}x\{x-(1-m)\}\,dx=\frac{1}{12}$$
$$-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-m)^3=\frac{1}{12}$$
$$(1-m)^3=\frac{1}{2}$$

ゆえに $\quad 1-m=\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\quad$ よって $\quad \boldsymbol{m=1-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

第 5 章　熊本高等専門学校 (八代)

5.1　平成 31 年度編入学試験 (40 分)

1. 次の計算をせよ.

   (1) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

   (2) $\dfrac{2}{1+i}+3+2i$

   (3) $2^6 \times 3^4 \div 6^5$

   (4) $\log_2 3 \times \log_3 7 \div \log_8 7$

2. 次の方程式・不等式を解け.

   (1) $x^2+2x-5=0$

   (2) $9^x = 3^{x-6}$

   (3) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) = -2$

   (4) $2x^2+5x-3<0$

   (5) $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{1}{2}$　(ただし, $0 \leqq x < 2\pi$とする.)

3. 次の問いに答えよ.

   (1) 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$ の値を求めよ.

   (2) △ABC において，$a=2$，$b=3$，$C=60^\circ$ のとき，c の値を求めよ.

   (3) 2 点 A(0, 2)，B(4, 0) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ.

   (4) 点 $(-1,\ 3)$ を中心とし，点 $(2,\ 5)$ を通る円の方程式を求めよ.

4. 次の問いに答えよ.

   (1) 2 次関数 $y=x^2+2ax+3a$ の最小値が 2 であるとき，定数 a の値を定めよ.

   (2) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax-1$ が接するように，定数 a の値を定めよ.

(3) 等式 $\dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{a}{x-1} + \dfrac{b}{x+1}$ が x についての恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ．

5. 次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，関数 $y = x(x-1)^2$ の最大値を求めよ．

(2) 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) $\dfrac{3\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)(3\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \boldsymbol{7+4\sqrt{2}}$

   (2) $\dfrac{2}{1+i} + 3 + 2i = \dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} + 3 + 2i = (1-i) + 3 + 2i = \boldsymbol{4+i}$

   (3) $2^6 \times 3^4 \div 6^5 = 2^6 \times 3^4 \div (2^5 \cdot 3^5) = 2^{6-5} \cdot 3^{4-5} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

   (4) $\log_2 3 \times \log_3 7 \div \log_8 7 = \log_2 3 \times \dfrac{\log_2 7}{\log_2 3} \times \dfrac{\log_2 8}{\log_2 7} = \log_2 8 = \boldsymbol{3}$

2. (1) $x^2 + 2x - 5 = 0$ を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \boldsymbol{-1 \pm \sqrt{6}}$$

   (2) $9^x = 3^{x-6}$ より，$3^{2x} = 3^{x-6}$ であるから

$$2x = x - 6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = -6}$$

   (3) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) = -2$ より

$$x + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = 2}$$

   (4) $2x^2 + 5x - 3 < 0$ より，$(x+3)(2x-1) < 0$ よって $\boldsymbol{-3 < x < \dfrac{1}{2}}$

   (5) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) < \dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\pi}{6} \leqq x + \dfrac{\pi}{6} < 2\pi + \dfrac{\pi}{6}$ より

$$\frac{\pi}{3} < x + \frac{\pi}{6} < \frac{5}{3}\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\pi}{6} < x < \frac{3}{2}\pi}$$

3. (1) 2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 $\alpha,\ \beta$ と係数の関係により

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=5\quad \text{よって}\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\boldsymbol{\frac{3}{5}}$$

(2) 余弦定理により

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos60^\circ=7$$

$c>0$ であるから　　$\boldsymbol{c=\sqrt{7}}$

(3) 2 点 A$(0,\ 2)$，B$(4,\ 0)$ の中点を M とすると　M$(2,\ 1)$

直線 AB の傾きは　　$\dfrac{0-2}{4-0}=-\dfrac{1}{2}$

求める直線は，点 M$(2,\ 1)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y-1=2(x-2)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=2x-3}$$

(4) 2 点 $(-1,\ 3)$，$(2,\ 5)$ 間の距離を r とすると

$$r^2=(2+1)^2+(5-3)^2=13$$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-3)^2=13}$

4. (1) 条件から，方程式 $x^2+2ax+3a=2$，すなわち，$x^2+2ax+3a-2=0$ が重解をもつから

$$(2a)^2-4\cdot(3a-2)=0\quad \text{ゆえに}\quad (a-1)(a-2)=0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=1,\ 2}$$

(2) $y=x^2$ と $y=ax-1$ から y を消去すると

$$x^2=ax-1\quad \text{ゆえに}\quad x^2-ax+1=0$$

この方程式が重解をもつから，係数について

$$(-a)^2-4\cdot1\cdot1=0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=\pm2}$$

(3) $\dfrac{x+3}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}$ より

$$x+3=a(x+1)+b(x-1)$$

上式にそれぞれ，$x=1,-1$ を代入すると

$$4=2a,\ \ 2=-2b\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a=2,\ b=-1}$$

5. (1) $y = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$ より　$y' = 3x^2 - 4x + 1 = (x-1)(3x-1)$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	0	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

(2) $y = x^2$ と $y = x + 2$ から y を消去すると

$$x^2 = x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = -1,\ 2$$

よって，求める面積 S は，x^2 の係数に注意して

$$S = \frac{1}{6}\{2 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

5.2　平成 30 年度編入学試験 (40 分)

1. 次の計算をせよ.

   (1) $\dfrac{x^2-4}{x+1} \div \dfrac{x^2-5x+6}{x^3+1}$

   (2) $\dfrac{2-i}{1+i} + \dfrac{1-2i}{1-i}$

   (3) $\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{16}$

   (4) $2\log_2 3 + \log_2 4 - 2\log_2 18$

2. 次の方程式・不等式を解け.

   (1) $3x^2 + 2x + 4 = 0$

   (2) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x = 2\sqrt{2}$

   (3) $\log_2(2x-1) = -3$

   (4) $x^2 - 5x - 6 \geqq 0$

   (5) $\begin{cases} 3x - 5 < x + 7 \\ x + 2 > 3 - 2x \end{cases}$

   (6) $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする．)

3. 次の問いに答えよ.

   (1) 2 つの数 $1+\sqrt{3}$ と $1-\sqrt{3}$ を解とする 2 次方程式を作れ.

   (2) 2 次関数 $y = 2x^2 - 4x + 5$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ.

   (3) 2 次関数 $y = kx^2 + x - 3$ のグラフが x 軸と接するときの定数 k の値を求めよ.

   (4) 2 次関数 $f(x) = 4x^2 - 3x$ の $x = -2$ から $x = 4$ までの平均変化率を求めよ.

   (5) 2 点 $(0,\ 2)$, $(-4,\ 6)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ.

   (6) △ABC について，$a = 5$，$A = 30°$，$B = 45°$ のとき，辺 b の値を求めよ.

4. 次の問いに答えよ.

   (1) 曲線 $y = 2x^2 - x + 3$ 上の点 $(2,\ 9)$ における接線の方程式を求めよ.

   (2) 関数 $y = -2x^3 + 6x^2 - 6$ の極小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ.

(3) 不定方程式 $\displaystyle\int (4x-3)^2\,dx$ を求めよ.

(4) 放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $\dfrac{x^2-4}{x+1} \div \dfrac{x^2-5x+6}{x^3+1} = \dfrac{(x+2)(x-2)}{x+1} \times \dfrac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x-2)(x-3)}$

$$= \boldsymbol{\dfrac{(x+2)(x^2-x+1)}{x-3}}$$

(2) $\dfrac{2-i}{1+i} + \dfrac{1-2i}{1-i} = \dfrac{(2-i)(1-i)+(1-2i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$$= \frac{3-4i-i^2}{1-i^2} = \frac{4-4i}{2} = \boldsymbol{2-2i}$$

(3) $\sqrt[3]{10} \times \sqrt[3]{25} \div \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{10 \times 25 \div 16} = \sqrt[3]{\dfrac{125}{8}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

(4) $2\log_2 3 + \log_2 4 - 2\log_2 18 = 2(\log_2 3 + \log_2 2 - \log_2 18)$

$$= 2\log_2 \frac{2\cdot 3}{18} = \boldsymbol{-2\log_2 3}$$

2. (1) $3x^2+2x+4=0$ を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 3\cdot 4}}{2\cdot 3} = \frac{-2 \pm \sqrt{44}i}{6} = \boldsymbol{\frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{3}}$$

(2) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^x = 2\sqrt{2}$ より　$(2^{-3})^x = 2\cdot 2^{\frac{1}{2}}$　すなわち　$2^{-3x} = 2^{\frac{3}{2}}$

したがって　$-3x = \dfrac{3}{2}$　よって　$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$

(3) $\log_2(2x-1) = -3$ より

$2x-1 = 2^{-3}$　これを解いて　$\boldsymbol{x = \dfrac{9}{16}}$

(4) $x^2-5x-6 \geqq 0$ より　$(x+1)(x-6) \geqq 0$

よって　$\boldsymbol{x \leqq -1,\ 6 \leqq x}$

(5) $3x-5 < x+7$ より　$x < 6$　$\cdots$①

$x+2 > 3-2x$ より　$x > \dfrac{1}{3}$　$\cdots$②

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3} < x < 6}$

(6) $\cos x < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqq x < 2\pi)$　これを解いて　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{11}{6}\pi}$

3. (1) $\alpha = 1+\sqrt{3},\ \beta = 1-\sqrt{3}$ とおくと　$\alpha+\beta = 2,\quad \alpha\beta = -2$

よって　　$\boldsymbol{x^2 - 2x - 2 = 0}$

(2) $y = 2x^2 - 4x + 5 = 2(x-1)^2 + 3$

よって　$\boldsymbol{x = 1}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{3}$ をとる．

(3) $y = kx^2 + x - 3$ が x 軸に接するから，係数について

$$1^2 - 4\cdot k\cdot(-3) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k = -\frac{1}{12}}$$

(4) $f(x) = 4x^2 - 3x$ より，$f(-2) = 22$，$f(4) = 52$

よって　$\dfrac{f(4)-f(-2)}{4-(-2)} = \dfrac{52-22}{6} = \boldsymbol{5}$

(5) A$(0,\ 2)$，B$(-4,\ 6)$ とし，線分 AB の中点 C の座標は

$$\left(\frac{0-4}{2},\ \frac{2+6}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (-2,\ 4)$$

ゆえに　$\mathrm{AC} = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8}$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{(x+2)^2 + (y-4)^2 = 8}$

(6) △ABC に正弦定理を適用すると

$$\frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{5\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \boldsymbol{5\sqrt{2}}$$

4. (1) $y = 2x^2 - x + 3$ より，$y' = 4x - 1$ であるから，$x = 2$ のとき $y' = 7$

求める接線は，点 $(2,\ 9)$ を通り，傾き 7 の直線であるから

$$y - 9 = 7(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 7x - 5}$$

(2) $y = -2x^3 + 6x^2 - 6$ より，$y' = -6x^2 + 12x = -6x(x-2)$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	-6	↗	2	↘

よって，$\boldsymbol{x = 0}$ のとき，極小値 $\boldsymbol{-6}$

(3) $(4x-2)^2 = 16x^2 - 16x + 4$ より

$$\int (4x-2)^2\,dx = \boldsymbol{\frac{16}{3}x^3 - 8x^2 + 4x + C} \quad (\boldsymbol{C} \text{ は積分定数})$$

(4) $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$ より，x 軸との共有点の x 座標は　$x = -3,\ 1$

求める面積を S とすると，x^2 の係数に注意して　$S = \dfrac{1}{6}\{1-(-3)\}^3 = \boldsymbol{\frac{32}{3}}$

5.3　平成 28 年度編入学試験 (60 分)

1. 関数 $y = x^2 - 3x + a \cdots ①$ の最小値を b とする．ただし，a は定数である．次の問いに答えよ．

   (1) $b = \dfrac{5}{4}$ のとき a の値を求めよ．

   (2) $b > 0$ となる a の値の範囲を求めよ．

   (3) ① のグラフを原点に関して対称移動してできる関数の最大値が $-\dfrac{1}{4}$ となった．a の値を求めよ．

   (4) ① のグラフを x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動したら，x 軸との共有点が $(-1,\ 0)$，$(6,\ 0)$ となる．a の値を求めよ．

2. △ABC において，$b = 1$，$C = 60°$ のとき，次の問いに答えよ．ただし，3 辺 BC，CA，AB の長さをそれぞれ a，b，c とする．

   (1) c^2 を a を用いて表せ．

   (2) 角 A が鈍角となる a の値の範囲を求めよ．

   (3) 角 $A = 75°$ のとき c の値を求めよ．

   (4) △ABC の面積が 1 のとき a の値を求めよ．

3. 直線 $y = -\dfrac{1}{2}x + 1 \cdots ①$ と，① に垂直で点 A$(6,\ 3)$ を通る直線との交点を B とする．次の問いに答えよ．

   (1) 点 B の座標を求めよ．

   (2) 2 点 A，B との点 C$(0,\ 1)$ を通る円の方程式を求めよ．

4. 次の方程式を解け．

   (1) $8^{x+1} = 32$

   (2) $\log_2(x-4) + \log_2 x - 6 = 3$

   (3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \quad (0 \leqq x < 2\pi)$

5. 関数 $f(x) = x(x^2 - 3)$ について，次の問いに答えよ．

   (1) $f(x)$ の極値を求めよ．

   (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. (1) $y = x^2 - 3x + a = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + a - \dfrac{9}{4} \quad \cdots(*)$

   最小値が $\dfrac{5}{4}$ であるから　$a - \dfrac{9}{4} = \dfrac{5}{4}$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{7}{2}}$

   (2) $(*)$ より，$b > 0$ となるのは　$a - \dfrac{9}{4} > 0$　よって　$\boldsymbol{a > \dfrac{9}{4}}$

   (3) $(*)$ の最小値が $\dfrac{1}{4}$ であるから　$a - \dfrac{9}{4} = \dfrac{1}{4}$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{5}{2}}$

   (4) ① を x 軸方向に 1，y 軸方向に 2 だけ平行移動すると

   $$y - 2 = (x-1)^2 - 3(x-1) + a \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 5x + a + 6$$

   これが $y = (x+1)(x-6)$ に一致するから，定数項を比較して　$\boldsymbol{a = -12}$

2. (1) 余弦定理により　$c^2 = a^2 + 1^2 - 2a \cdot 1 \cos 60^\circ = \boldsymbol{a^2 - a + 1}$

   (2) 角 A が鈍角となるとき　$a^2 > b^2 + c^2$

   $b = 1$ および (1) の結果を代入すると

   $$a^2 > 1^2 + a^2 - a + 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a > 2}$$

   (3) $A = 75^\circ$，$C = 60^\circ$ より，$B = 45^\circ$ であるから，正弦定理により

   $$\frac{1}{\sin 45^\circ} = \frac{c}{\sin 60^\circ} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c = \frac{\sqrt{6}}{2}}$$

   (4) $\dfrac{1}{2}ab\sin C = 1$ であるから　$\dfrac{1}{2}a \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 1$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{4}{\sqrt{3}}}$

3. (1) ① に垂直で点 A(6, 3) を通る直線の方程式は

   $$y - 3 = 2(x - 6) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - 9$$

   これと ① を連立して解くと　$\mathrm{B}\boldsymbol{(4, -1)}$

   (2) A(6, 3)，B(4, −1)，C(0, 1) を通る円の方程式を

   $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

   とおくと

   $$6a + 3b + c = -45, \quad 4a - b + c = -17, \quad b + c = -1$$

   これを解いて　$a = -6$，$b = -4$，$c = 3$

   よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x - 4y + 3 = 0}$

4. (1) $8^x = 32$ より　$2^{3x} = 2^5$

したがって　$3x = 5$　よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{3}}$

(2) $\log_2(x-4) + \log_2(x-6) = 3$

真数は正であるから

$$x - 4 > 0 \quad \text{かつ} \quad x - 6 > 0 \quad \text{すなわち } x > 6 \quad \cdots ①$$

方程式から　$\log_2(x-4)(x-6) = \log_2 8$

ゆえに　$(x-4)(x-6) = 8$　ゆえに　$(x-2)(x-8) = 0$

① に注意してこれを解くと　　$\boldsymbol{x = 8}$

(3) 与えられた方程式から　　$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ より　$\dfrac{\pi}{3} \leqq x + \dfrac{\pi}{3} < 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$ であるから

$$x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi,\ 2\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2},\ \frac{11}{6}\pi}$$

5. (1) $f(x) = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

よって，$x = -1$ で極大値 **2**，$x = 1$ で極小値 **−2** をとる．

(2) $y = f(x)$ は原点に関して対称であるから，求める面積を S とすると

$$\frac{S}{2} = -\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\,dx = \left[\frac{x^4}{3} - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2}$$

よって，求める面積は　$S = \boldsymbol{9}$

5.4 平成 27 年度編入学試験 (60 分)

1. 頂点が $(1, -3)$ で，点 $(-1,\ 5)$ を通る放物線を，直線 $x = 2$ に関して対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ．

2. a を定数とするとき，放物線 $y = 3x^2 + 2x - 1$ と直線 $y = ax - 4$ との共有点の個数を求めよ．

3. 四角形 ABCD において，$\angle \mathrm{A} = 120°$，$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = 6$，$\mathrm{CD} = 7$，$\mathrm{DA} = 3$ とする．次の問いに答えよ．

   (1) 対角線 BD の長さを求めよ．

   (2) 四角形 ABCD の面積を求めよ．

4. 点 $\mathrm{A}(1,\ 5)$ と放物線 $y = x^2$ 上を動く点 Q とを結ぶ線分 AQ の中点 P の軌跡を表す方程式を求めよ．

5. 2 直線 $x - 2y + 1 = 0$，$3x + y - 5 = 0$ の交点と点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を通る直線の方程式を求めよ．

6. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < \dfrac{1}{10^5}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

7. $1 \leqq x \leqq 8$ のとき，$y = (\log_2 x)^2 - \log_2 x^4$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

8. 関数 $f(x) = ax^3 + 3ax^2 + b$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値が 8，最小値が 4 であるとき，定数 a，b の値を求めよ．ただし，$a < 0$ とする．

9. 放物線 $y = (x - 1)(x - 3)$ と x 軸および y 軸によって囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. 頂点が $(1, -3)$ の放物線の方程式を

$$y = a(x-1)^2 - 3$$

とおくと，これが点 $(-1,\ 5)$ を通るから

$$5 = a(-1-1)^2 - 3 \quad \text{ゆえに} \quad a = 2$$

したがって，$y = 2(x-1)^2 - 3$ を，直線 $x = 2$ に関して対称移動して得られる放物線の方程式は

$$y = 2\{(2\cdot 2 - x) - 1\}^2 - 3 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2(x-3)^2 - 3}$$

2. $y = 3x^2 + 2x - 1$ と $y = ax - 4$ から y を消去すると

$$3x^2 + 2x - 1 = ax - 4 \quad \text{すなわち} \quad 3x^2 + (2-a) + 3 = 0$$

上の第 2 式の判別式を D とすると

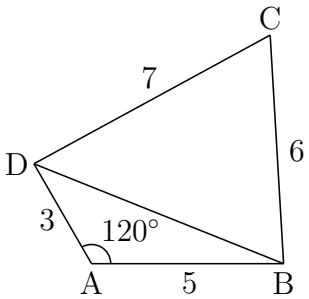
$$\begin{aligned} D &= (2-a)^2 - 4\cdot 3\cdot 3 \\ &= a^2 - 4a - 32 \\ &= (a+4)(a-8) \end{aligned}$$

上式から
$$\begin{cases} \boldsymbol{a < -4,\ 8 < a} \text{ のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a = -4,\ 8} \text{ のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{-4 < a < 8} \text{ のとき} & \textbf{0 個} \end{cases}$$

3. (1) △ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}^2 &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 + 15 = 49 \end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathrm{BD} = 7$



(2) (1) の結果から，△BCD は，$\mathrm{BD} = \mathrm{CD}$ の二等辺三角形であるから，辺 BC の中点を M とすると

$$\mathrm{DM} = \sqrt{\mathrm{CD}^2 - \mathrm{MD}^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$\triangle\mathrm{ABD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle\mathrm{BCD} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{DM} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 2\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$$

よって，求める面積は　$\boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{10}}$

4. $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ とおくと，P は線分 AQ の中点であるから

$$x = \frac{1+t}{2}, \quad y = \frac{5+t^2}{2}$$

第 1 式から　$t = 2x - 1$　これを第 2 式に代入すると

$$y = \frac{5 + (2x-1)^2}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y = 2x^2 - 2x + 3}$$

5. 2 直線 $x - 2y + 1 = 0$，$3x + y - 5 = 0$ の交点は　$\left(\dfrac{9}{7},\ \dfrac{8}{7}\right)$

この交点と点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を通る直線の方程式は

$$y - 3 = \frac{\frac{8}{7} - 3}{\frac{9}{7} - 1}(x - 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\frac{13}{2}x + \frac{19}{2}}$$

別解 2 直線 $x - 2y + 1 = 0$，$3x + y - 5 = 0$ の交点を通る直線は，定数 k を用いて

$$x - 2y + 1 + k(3x + y - 5) = 0 \quad \cdots ①$$

とおける．これが，点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$ を通るから

$$1 - 2\cdot 3 + 1 + k(3\cdot 1 + 3 - 5) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad k = 4$$

$k = 4$ を ① に代入すると

$$x - 2y + 1 + 4(3x + y - 5) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{13x + 2y - 19 = 0}$$

6. 不等式 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n < \dfrac{1}{10^5}$ の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \log_{10}\frac{1}{10^5} \quad \text{ゆえに} \quad -n\log_{10}3 < -5$$

したがって　$n > \dfrac{5}{\log_{10}3} = \dfrac{5}{0.4771} = 10.4\cdots$

よって，上式を満たす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{11}$

7. $t = \log_2 x$ とおくと，$1 \leqq x \leqq 8$ より

$$\begin{aligned} y &= t^2 - 4t && (0 \leqq t \leqq 3) \\ &= (t-2)^2 - 4 \end{aligned}$$

よって　$t = 0$　すなわち　$\boldsymbol{x = 1}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{0}$
　　$t = 2$　すなわち　$\boldsymbol{x = 4}$ のとき　最大値 $\boldsymbol{-4}$

8. $f(x) = ax^3 + 3ax^2 + b$ を微分すると

$$f'(x) = 3ax^2 + 6ax = 3ax(x+2)$$

$a < 0$ より，$-1 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の増減表は

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$2a+b$	↗	b	↘	$4a+b$

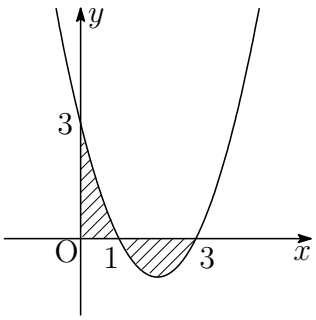
最大値が 8，最小値が 4 であるから

$$b = 8, \quad 4a + b = 4 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = -1,\ b = 8}$$

9. $(x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$$

とする．求める面積を S とすると



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x-1)(x-3)\,dx \\ &\qquad - \int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= \Big[\ F(x)\ \Big]_0^1 - \Big[\ F(x)\ \Big]_1^3 \\ &= 2F(1) - F(0) - F(4) \end{aligned}$$

ここで　　$F(1) = \dfrac{4}{3}$，$F(0) = 0$，$F(4) = \dfrac{4}{3}$

よって　　$S = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

5.5 平成 26 年度編入学試験 (60 分)

1. 2 次方程式 $x^2 + 2ax + 2 - a = 0$ が正の解と負の解をもつように定数 a の値の範囲を求めよ.

2. 放物線 $y = 2x^2 - 8x + 3$ は，どのように平行移動すると放物線 $y = 2x^2 + 4x + 5$ に重なるか答えよ.

3. $0° < \theta < 90°$ とする．θ が $\tan\theta = 2$ を満たすとき，次の問いに答えよ.

   (1) $\cos\theta$ の値を求めよ.

   (2) $\dfrac{1}{1-\sin\theta} - \dfrac{1}{1+\sin\theta}$ の値を求めよ.

4. 直線 $y = 2x - 1$ に関して，点 $\mathrm{A}(3,\ 1)$ と対称な点 B の座標を求めよ.

5. 点 $(5,\ 12)$ を中心とし，円 $x^2 + y^2 = 4$ と 1 点のみを共有する円の方程式をすべて求めよ.

6. 次の問いに答えよ.

   (1) $0 \leqq x < 2\pi$ において，不等式 $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) > 1$ を解け.

   (2) $2^p - 2^{-p} = 3$ のとき，$2^p + 2^{-p}$ の値を求めよ．ただし，p は実数とする.

   (3) $(\log_2 9 - \log_8 3)(\log_3 2 + \log_{27} 4)$ の値を求めよ.

7. 関数 $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ の極値を求めよ.

8. 定積分 $\displaystyle\int_0^2 |x^2 + x - 2|\,dx$ の値を求めよ.

解答例

1. $f(x)=x^2+2ax+2-a$ とすると，正の解と負の解をもつ条件は $f(0)<0$ より

$$2-a<0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a>2}$$

2. $y=2x^2-8x+3=2(x-2)^2-5\cdots①$　頂点 $(2,-5)$

$y=2x^2+4x+5=2(x+1)^2+3\cdots②$　頂点 $(-1,\ 3)$

① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると ② に重なるとすると

$$2+p=-1,\quad -5+q=3 \quad \text{ゆえに} \quad p=-3,\ q=8$$

よって，① を x 軸方向に $\boldsymbol{-3}$，y 軸方向に $\boldsymbol{8}$ だけ平行移動すると ② に重なる．

3. (1) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に $\tan\theta=2$ を代入すると

$$1+2^2=\frac{1}{\cos^2\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$ であるから　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

(2) $\dfrac{1}{1-\sin\theta}-\dfrac{1}{1+\sin\theta}=\dfrac{1(1+\sin\theta)-1(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$$=\frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\cos\theta}$$

$\tan\theta=2$ および (1) の結果を上式に代入すると

$$(\text{与式})=2\times2\div\frac{1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$$

4. 点 $\mathrm{B}(a,\ b)$ とすると，AB の中点 $\left(\dfrac{3+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$ は直線 $y=2x-1$ 上にあるから

$$\frac{1+b}{2}=2\times\frac{3+a}{2}-1 \quad \text{整理すると} \quad 2a-b=-3 \quad \cdots①$$

また直線 AB は直線 $y=2x-1$ に垂直に交わるので

$$\frac{b-1}{a-3}=-\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a+2b=5 \quad \cdots②$$

①，② を解いて　$a=-\dfrac{1}{5},\ b=\dfrac{13}{5}$　よって　$\mathbf{B}\left(\boldsymbol{-\dfrac{1}{5},\ \dfrac{13}{5}}\right)$

5. $x^2+y^2=4$ は中心は原点，半径 2 の円

2 円の中心間の距離は $\sqrt{5^2+12^2}=13$

求める円の半径を r とすると，このとき

$$r \pm 2 = 13 \quad \text{よって} \quad r = 11,\ 15$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-12)^2=121}, \quad \boldsymbol{(x-5)^2+(y-12)^2=225}$$

6. (1) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，与えられた不等式は

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2}$$

$0 \leqq x < 2\pi$ より，$\dfrac{\pi}{4} \leqq x+\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{9}{4}\pi$ であるから

$$\frac{\pi}{4} \leqq x+\frac{\pi}{4} < \frac{5}{6}\pi, \quad \frac{13}{6}\pi \leqq x+\frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi$$

よって $\quad \boldsymbol{0 \leqq x < \dfrac{7}{12}\pi, \ \dfrac{23}{12}\pi < x < 2\pi}$

(2) $(2^p+2^{-p})^2=(2^p-2^{-p})^2+4=3^2+4=13$

$2^p+2^{-p}>0$ より $\quad 2^p+2^{-p}=\sqrt{13}$

(3) $$\begin{aligned}(\text{与式}) &= \left(2\log_2 3-\frac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\log_3 2+\frac{\log_3 4}{\log_3 27}\right)\\ &= \left(2\log_2 3-\frac{1}{3}\log_2 3\right)\left(\log_3 2+\frac{2}{3}\log_3 2\right)\\ &= \frac{5}{3}\log_2 3\times\frac{5}{3}\log_3 2=\boldsymbol{\frac{25}{9}}\end{aligned}$$

7. $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = (x+1)(3x-1)$$

$f'(x) = 0$ のとき　$x = -1,\ \dfrac{1}{3}$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	$\frac{22}{27}$	↗

よって　極大値 **2** $(x = -1)$，極小値 $\dfrac{\mathbf{22}}{\mathbf{27}}$ $\left(x = \dfrac{1}{3}\right)$

8. $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ より

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^2 + x - 2|\,dx &= \int_0^1 \{-(x^2 + x - 2)\}\,dx + \int_1^2 (x^2 + x - 2)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x\right]_1^2 \\ &= 3\end{aligned}$$

5.6 平成 25 年度編入学試験 (60 分)

1. 放物線 $y = x^2 + kx + 2$ と直線 $y = -x + k$ が 2 点で交わるような，定数 k の値の範囲を求めよ．

2. 2 次関数 $y = -2x^2 + 2x + 1$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ．

3. △ABC において，$a = 3$，$B = 45°$，$C = 15°$ のとき，次の値を求めよ．

   (1) b

   (2) c

4. 2 点 $(-1,\ 1)$，$(2,\ 4)$ を 2 : 5 に外分する点 P を通り，直線 $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ に垂直な直線の方程式を求めよ．

5. 点 $(4,\ 2)$ から円 $x^2 + y^2 = 4$ へ引いた接線の方程式を求めよ．

6. 次の方程式・不等式を解け．ただし，(3) は $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で解を求めよ。

   (1) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

   (2) $2\log_{\frac{1}{2}}(2 - x) \geqq \log_{\frac{1}{2}} x$

   (3) $\cos 2x = 3\sin x - 1$

7. 方程式 $x^3 - 6x^2 + 9x = a$ が異なる 3 個の実数解をもつような定数 a の値を求めよ．

8. 放物線 $y = x(x - a)$ と x 軸で囲まれた図形の面積が $\dfrac{9}{2}$ となるような a の値を求めよ．ただし，a は正の実数とする．

解答例

1. 2 式から y を消去すると

$$x^2+kx+2=-x+k \quad \text{すなわち} \quad x^2+(k+1)x+2-k=0$$

上の第 2 式の判別式 D は

$$\begin{aligned} D&=(k+1)^2-4\cdot1\cdot(2-k)\\ &=k^2+6k-7\\ &=(k+7)(k-1)\end{aligned}$$

このとき，$D>0$ であるから

$$(k+7)(k-1)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k<-7,\ 1<k}$$

2. $y=-2x^2+2x+1$ を変形すると　$y=-2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

$x=-1,\ 2$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-3}$

3. (1) $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(45^\circ+15^\circ)=120^\circ$

正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$　ゆえに　$\dfrac{3}{\sin 120^\circ}=\dfrac{b}{\sin 45^\circ}$

よって　$b=\dfrac{3\sin 45^\circ}{\sin 120^\circ}=4\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}\div\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{6}}{3}}$

(2) 第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} c&=a\cos B+b\cos A\\ &=3\cos 45^\circ+\frac{4\sqrt{6}}{3}\cos 120^\circ\\ &=3\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{4\sqrt{6}}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{9\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{6}}\end{aligned}$$

4. P の座標は

$$\left(\frac{-5\cdot(-1)+2\cdot2}{2-5},\ \frac{-5\cdot1+2\cdot4}{2-5}\right) \quad \text{すなわち} \quad (-3,-1)$$

直線 $y=\dfrac{1}{2}+1$ に垂直な直線の傾きは -2

よって，求める直線の方程式は

$$y-(-1)=2\{x-(-3)\} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=2x+5}$$

5. 接点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，P は円上にあるから

$$a^2+b^2=4 \quad \cdots①$$

また，P における円の接線の方程式は

$$ax+by=4$$

で，この直線が点 $(4,\ 2)$ を通るから

$$a\cdot4+b\cdot2=4 \quad \text{ゆえに} \quad b=2-2a \quad \cdots②$$

② を ① に代入すると

$$a^2+(2-2a)^2=4 \quad \text{整理すると} \quad 5a^2-8a=0$$

これを解くと $\quad a=0,\ \dfrac{8}{5}$

② に代入して

$$a=0 \text{ のとき} \quad b=2, \qquad a=\frac{8}{5} \text{ のとき} \quad b=-\frac{6}{5}$$

よって，求める接線の方程式は

$(a,\ b)=(0,\ 2)$ のとき $\quad 0x+2y=4 \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{y=2}$

$(a,\ b)=\left(\dfrac{8}{5},-\dfrac{6}{5}\right)$ のとき $\quad \dfrac{8}{5}x-\dfrac{6}{5}y=4 \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{4x-3y=10}$

6. (1) $2^x = t$ とおくと　$4^x = 2^2 x = t^2$

方程式は　$t^2 - 6t + 8 = 0$

これを解いて　$t = 2,\ 4$

したがって　　$2^x = 2$ より　$x = 1$

$2^x = 4$ より　$x = 2$

よって　　$\boldsymbol{x = 1,\ 2}$

(2) 真数は正であるから

$$2 - x > 0 \text{ かつ } x > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < 2 \quad \cdots ①$$

方程式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(2-x)^2 \geqq \log_{\frac{1}{2}} x$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$$(2-x)^2 \leqq x \quad \text{すなわち} \quad (x-1)(x-4) \leqq 0$$

① に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{1 \leqq x < 2}$

(3) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ より方程式は

$$1 - 2\sin^2 x = 3\sin x - 1$$

すなわち　$(\sin x + 2)(2\sin x - 1) = 0$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ であるから　$\sin x = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ の範囲でこれを解いて　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

7. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ より

$y' = 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x-1)(x-3)$

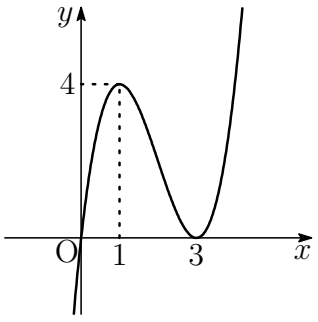
$y' = 0$ とすると

$$x = 1,\ 3$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

グラフは，右の図のようになる．



求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{0 < a < 4}$$

8. 放物線と x 軸で囲まれ部分は，x 軸の下側であり，x 軸との共有点の x 座標は，$x = 0,\ a$ であるから，その面積 S は

$$S = -\int_0^a x(x-a)dx = \frac{1}{6}a^3$$

このとき，$\dfrac{1}{6}a^3 = \dfrac{9}{2}$ を解いて　$\boldsymbol{a = 3}$

5.7　平成 24 年度編入学試験 (60 分)

1. 3 点 $(2,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0,\ 3)$ を通る 2 次関数 $y = f(x)$ の最小値を求めよ．

2. 実数 k の値に関係なく，2 つの 2 次関数 $y = x^2 + (2k+1)x + k + 1 \cdots ①$ と $y = -x^2 + (k-2)x + 1 \cdots ②$ のグラフは異なる 2 点で交わることを示せ．

3. 関数 $y = \sin^2 x + \cos x + 2 \ \ (0 < x < \pi)$ の最大値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

4. △ABC において，等式 $\dfrac{\sin A}{\sin B \sin C} = \dfrac{a^2}{2S}$ が成り立つことを示せ．ただし，S は △ABC の面積とする．

5. 点 $(0,\ 4)$ から円 $x^2 + y^2 = 2$ へ引いた接線の方程式を求めよ．

6. 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(4, -3)$ に対して，$|\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2| = 5$ を満たす点 P の軌跡を求めよ．

7. 次の問いに答えよ．

   (1) 2 次方程式 $3x^2 - \sqrt{15}x + 1 = 0$ の 2 つの解を $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ とするとき，$\sin 2\alpha$ の値を求めよ．

   (2) $2^x + 2^{-x} = 4$ のとき，$8^x + 8^{-x}$ の値を求めよ．

   (3) $2^{\log_4 81}$ の値を求めよ．

8. 曲線 $y = x^3 - 4x \cdots ①$ について，次の問いに答えよ．

   (1) ① 上の点 $(-1,\ 3)$ における接線の方程式を求めよ．

   (2) (1) で求めた接線と曲線 ① で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

解答例

1. 2 次関数のグラフが，x 軸と 2 点 $(2,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通るから，軸の方程式は

$$x = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \quad \cdots ①$$

また，この 2 次関数は定数 a を用いて

$$y = a(x-1)(x-2)$$

とおける．これが点 $(0,\ 3)$ を通るから

$$3 = a(0-1)(0-2) \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{3}{2}$$

したがって $\qquad f(x) = \dfrac{3}{2}(x-2)(x-3)$

① より，求める 2 次関数の最小値は

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-2\right) = \boldsymbol{-\frac{3}{8}}$$

2. ①，② から y を消去すると

$$x^2+(2k+1)x+k+1 = -x^2+(k-2)x+1 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2+(k+3)x+k = 0$$

この 2 次方程式の判別式は

$$D = (k+3)^2 - 4\cdot 2\cdot k = k^2 - 2k + 9 = (k-1)^2 + 8$$

k の値に関係なく，$D > 0$ となるので，2 次関数 ①，② は異なる 2 点で交わる．

3. $t = \cos x\ (0 < x < \pi)$ とおくと $\quad -1 < t < 1$

また $\qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2$

したがって

$$\begin{aligned} y &= (1-t^2) + t + 2 = -t^2 + t + 3 \\ &= -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{13}{4} \end{aligned}$$

よって $\quad t = \dfrac{1}{2} \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3}}$ のとき $\quad$ **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{13}{4}}$

4. $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A$ より　　$\dfrac{a^2}{2S} = \dfrac{a^2}{bc\sin A}$　$\cdots$①

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ により

$$a = 2R\sin A, \quad b = 2R\sin B, \quad c = 2R\sin C$$

これらを ① の右辺に代入すると

$$\frac{a^2}{bc\sin A} = \frac{(2R\sin A)^2}{2R\sin B\cdot 2R\sin C\cdot \sin A} = \frac{\sin A}{\sin B\sin C} \quad \cdots ②$$

したがって，①，② より，与えられた等式は成り立つ．

5. 点 $(0,\ 4)$ から円 $x^2 + y^2 = 2 \cdots$① に引いた接線は y 軸に平行ではないので

$$y = mx + 4 \cdots ②$$

とおける．② を ① に代入すると

$$x^2 + (mx+4)^2 = 2 \quad \text{すなわち} \quad (m^2+1)x^2 + 8mx + 14 = 0$$

この 2 次方程式の判別式を計算すると

$$D/4 = (4m)^2 - (m^2+1)\cdot 14 = 2(m^2 - 7)$$

円 ① と直線 ② は接するとき，$D = 0$ であるから

$$m^2 - 7 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad m = \pm\sqrt{7}$$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y = \pm\sqrt{7}\,x + 4}$

6. 点 P の座標を $(x,\ y)$ とすると

$$\mathrm{AP}^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2, \quad \mathrm{BP}^2 = (x-4)^2 + (y+3)^2$$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2 &= \{(x-1)^2 + (y-2)^2\} - \{(x-4)^2 + (y+3)^2\} \\ &= 6x - 10y - 20\end{aligned}$$

$|\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2| = 5$，すなわち $\mathrm{AP}^2 - \mathrm{BP}^2 = \pm 5$ により

$$6x - 10y - 20 = \pm 5$$

よって，求める点 P の軌跡は

$$\textbf{2 直線} \quad \boldsymbol{6x - 10y - 25 = 0,\ \ 6x - 10y - 15 = 0}$$

7. (1) 解と係数の関係により $\qquad \sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$

よって $\qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \dfrac{1}{3} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) $[a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$ を利用する$]$

$$\begin{aligned}8^x + 8^{-x} &= (2^x)^3 + (2^{-x})^3 \\ &= (2^x + 2^{-x})^3 - 3{\cdot}2^x{\cdot}2^{-x}(2^x + 2^{-x}) \\ &= (2^x + 2^{-x})^3 - 3(2^x + 2^{-x})\end{aligned}$$

$2^x + 2^{-x} = 4$ であるから

$$8^x + 8^{-x} = 4^3 - 3{\cdot}4 = \boldsymbol{52}$$

(3) $\qquad \log_4 81 = \dfrac{\log_2 81}{\log_2 4} = \dfrac{\log_2 9^2}{\log_2 2^2} = \dfrac{2\log_2 9}{2} = \log_2 9$

よって $\quad 2^{\log_4 81} = 2^{\log_2 9} = 9$

$$M = a^p \iff \log_a M = p \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{M = a^{\log_a M}}$$

8. (1) $y = x^3 - 4x \cdots$① より，$y' = 3x^2 - 4$ であるから

$$x = -1 \text{ のとき} \quad y' = 3(-1)^2 - 4 = -1$$

したがって，曲線上の点 $(-1,\ 3)$ における接線の方程式は

$$y - 3 = -1(x + 1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = -x + 2} \quad \cdots ②$$

(2) 曲線 ① と直線 ② の共有点の x 座標は

$$x^3 - 4x = -x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)^2(x - 2) = 0$$

これを解いて　$x = -1,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において

$$(x^3 - 4x) - (-x + 2) = (x + 1)^2(x - 2) \leqq 0$$

すなわち　　$-x + 2 \geqq x^3 - 4x$

よって，求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(-x + 2) - (x^3 - 4x)\} dx \\ &= \int_{-1}^{2} (-x^3 + 3x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^{2} = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

5.8 平成 23 年度編入学試験 (60 分)

1. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + a - 1$ が共有点をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ．

2. 2 次関数 $y = x^2 - 3x + 4$ の $0 \leqq x \leqq 2$ における最小値を求めよ．

3. 次の等式を証明せよ．

$$\frac{\cos x}{1 + \sin x} + \tan x = \frac{1}{\cos x}$$

4. △ABC において，辺 BC の中点を M，AB = AC = 1，$\angle \mathrm{BAC} = \theta$，$\cos\theta = a$ とする．△ABC の面積 S および BC と AM の長さを，a を用いて表せ．

5. 次の問いに答えよ．

   (1) 点 $(2,\ 3)$ を通り，直線 $y = 2x - 1$ に垂直な直線を求めよ．

   (2) 直線 $y = 2x - 1$ が円 $x^2 + y^2 = 2$ によって切り取られる線分の長さ ℓ を求めよ．

6. $x > 0$，$y > 0$，$x + y = 4$ のとき，次の問いに答えよ．

   (1) xy の最大値とそのときの x，y の値を求めよ．

   (2) $\log_2 x + \log_2 y$ の最大値を求めよ．

7. 次の連立方程式を求めよ．

$$\begin{cases} 4^x = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+2y-1} \\ 5^x = 5^{-y+1} \end{cases}$$

8. 次の問いに答えよ．

   (1) 増減を調べて，曲線 $y = x^4 - 2x^2 + 1$ のグラフをかけ．

   (2) 曲線 $y = x^4 - 2x^2 + 1$ と x 軸とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

解答例

1. 2 式から y を消去すると

$$x^2 = ax + a - 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - ax - a + 1 = 0$$

共有点をもつから，$D \geqq 0$ より

$$(-a)^2 - 4\cdot 1(-a+1) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 4a - 4 \geqq 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a \leqq -2-2\sqrt{2},\quad -2+2\sqrt{2} \leqq a}$

2. $y = x^2 - 3x + 4$ を変形すると　$y = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$

よって，$0 \leqq x \leqq 2$ における最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{7}{4}} \quad \left(\boldsymbol{x = \dfrac{3}{2}}\right)$

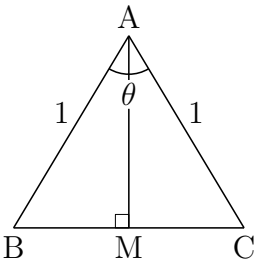
3. 左辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1+\sin x} + \tan x &= \frac{\cos x}{1+\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin x(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x}{\cos x(1+\sin x)} \\ &= \frac{1+\sin x}{\cos x(1+\sin x)} = \frac{1}{\cos x}\end{aligned}$$

4. $\sin\theta > 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-a^2}$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\theta = \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}}$$



余弦定理により

$$\mathrm{BC}^2 = 1^2 + 1^2 - 2\cdot 1\cdot 1\cos\theta = 2(1-a)$$

ゆえに　$\boldsymbol{\mathrm{BC} = \sqrt{2(1-a)}}$

AM は，A から BC に下ろした垂線の長さであるから

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AM} \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}\sqrt{1-a^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2(1-a)}\cdot\mathrm{AM}$$

よって　$\mathrm{AM} = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{2(1-a)}} = \sqrt{\dfrac{(1+a)(1-a)}{2(1-a)}} = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{1+a}{2}}}$

5. (1) 直線 $y = 2x - 1$ に垂直な直線の傾きを m とすると

$$2 \cdot m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = -\frac{1}{2}$$

よって，求める直線は，点 $(2,\ 3)$ を通り $-\dfrac{1}{2}$ を通る直線であるから

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + 4}$$

(2) 円の中心 (原点) から，直線 $y = 2x - 1$ $(2x - y - 1 = 0)$ までの距離 d は

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

円の半径 r は $\sqrt{2}$ であるから，上の結果より

$$\ell = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2 - \frac{1}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{6\sqrt{5}}{5}}$$

6. (1) $x > 0$，$y > 0$ より，相加平均および相乗平均の関係により

$$\frac{x + y}{2} \geqq \sqrt{xy} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{4}{2} \geqq \sqrt{xy} \quad \text{よって} \quad xy \leqq 4$$

したがって，xy の最大値は　　$\boldsymbol{4}$

最大となるとき　$x = y$　すなわち　$\boldsymbol{x = y = 2}$

(2)　　$\log_2 x + \log_2 y = \log_2 xy$

底 2 は 1 より大きいので，① の結果により

$$\log_2 xy \leqq \log_2 4 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 x + \log_2 y \leqq 2$$

よって，求める最大値は　　$\boldsymbol{2}$

7. 第 1 式より　　$2^{2x} = 2^{-3(x+2y-1)}$

ゆえに　$2x = -3(x + 2y - 1)$　整理すると　$5x + 6y = 3$　$\cdots$①

第 2 式より　　$x = -y + 1$　$\cdots$②

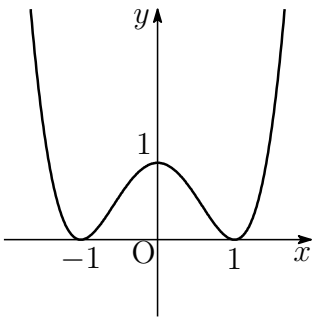
①，② を解いて　　$\boldsymbol{x = 3,\ y = -2}$

8. (1) $y = x^4 - 2x^2 + 1$ を微分すると

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 0,\ 1$

よって，増減およびグラフは次のようになる．



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗	極大 1	↘	極小 0	↗

(2) (1) のグラフから，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1} (x^4 - 2x^2 + 1)\,dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{1} = \mathbf{\frac{16}{15}} \end{aligned}$$

5.9 平成 22 年度編入学試験 (60 分)

1. 頂点が $(1,\ 1)$ で，点 $(2,\ 3)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ．

2. 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + a$ のグラフと x 軸が共有点をもたないように定数 a の値の範囲を定めよ．

3. △ABC において，$a = 7$，$b = 8$，$c = 10$ のとき，次の問いに答えよ．

   (1) $\cos A$ の値を求めよ．

   (2) △ABC の面積 S を求めよ．

4. 2 点 $\mathrm{A}(1, -3)$，$\mathrm{B}(-2,\ 3)$ からの距離の比が $2 : 1$ である点 P の軌跡を求めよ．

5. 次の方程式を解け．

   (1) $4^x - 2^x - 12 = 0$

   (2) $(\log_2 x)^2 + \log_2 x^3 + \log_2 4 = 0$

6. 2 つの放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ と $y = -x^2 - 2x + 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

7. 等式 $f(x) = 3x^2 - \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

解答例

1. 頂点が点 $(1,\ 1)$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x-1)^2 + 1$$

の形に表される．グラフが点 $(2,\ 3)$ を通るから

$$3 = a(2-1)^2 + 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y = 2(x-1)^2 + 1}$

2. 2 次関数の判別式 D は

$$D/4 = (-a)^2 - 1\cdot a = a(a-1)$$

2 次関数のグラフが x 軸と共有点をもたないので，$D < 0$ より

$$a(a-1) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0 < a < 1}$$

3. (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 10^2 - 7^2}{2\cdot 8\cdot 10} = \boldsymbol{\frac{23}{32}}$$

△ABC において，$\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{23}{32}\right)^2} = \frac{3\sqrt{55}}{32}$$

よって，求める △ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 10\cdot \frac{3\sqrt{55}}{32} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{55}}{4}}$$

4. 点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．PA : PB = 2 : 1 であるから　$4\mathrm{PB}^2 = \mathrm{PA}^2$

$$\mathrm{PA}^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2, \quad \mathrm{PB}^2 = (x+2)^2 + (y-3)^2$$

を代入すると　　$4\{(x+2)^2 + (y-3)^2\} = (x-1)^2 + (y+3)^2$
整理すると　　$x^2 + y^2 + 6x - 10y + 14 = 0$
したがって　　$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 20$

よって，点 P の軌跡は，**点 $\boldsymbol{(-3,\ 5)}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$ の円**である．

5. (1) $2^x = t$ とおくと　$t > 0$　$\cdots$①

方程式は　　$t^2 - t - 12 = 0$

$(t+3)(t-4) = 0$

① に注意して　　$t = 4$

したがって　$2^x = 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 2}$

(2) 方程式を変形すると

$(\log_2 x)^2 + 3\log_2 x + 2 = 0$

すなわち　$(\log_2 x + 1)(\log_2 x + 2) = 0$

ゆえに　　$\log_2 x = -1, -2$

よって　　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}}$

6. 2 つの放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ と $y = -x^2 - 2x + 1$ の共有点の x 座標は

$$x^2 + 2x + 1 = -x^2 - 2x + 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = -2,\ 0$$

$-2 \leqq x \leqq 0$ の範囲において　$-x^2 - 2x + 1 \geqq x^2 + 2x + 1$

よって，求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} \{(-x^2 - 2x + 1) - (x^2 + 2x + 1)\}\, dx \\ &= -2\int_{-2}^{0} x(x+2)\, dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)\{0 - (-2)\}^3 = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

7. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt = k$ とおくと

$$f(x) = 3x^2 - k$$

よって　　$\displaystyle k = \int_0^1 f(t)\, dt = \int_0^1 (3t^2 - k)\, dt = \left[\, t^3 - kt \,\right]_0^1$

$= 1 - k$

これを解いて　$\displaystyle k = \frac{1}{2}$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{2}}$

5.10　平成 21 年度編入学試験 (60 分)

1. △ABC において，$B = 30^\circ$，$a = 2\sqrt{3}$，$c = 1$ のとき，次の問いに答えよ．

   (1) △ABC の面積 S を求めよ．

   (2) b の値を求めよ．

   (3) $\sin C$ の値を求めよ．

2. 2 次関数 $f(x) = ax^2 + 2ax - b$ について答えよ．

   (1) 放物線 $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ．

   (2) $a > 0$ のとき，区間 $-2 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値が 5，最小値が -1 となるように定数 a，b の値を定めよ．

3. 次の方程式を解け．

   (1) $4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

   (2) $\log_2(x+1) + \log_2(x-2) = 2$

   (3) $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$　ただし，$0 \leqq x < 2\pi$ とする．

4. 次の問いに答えよ．

   (1) 直線 $y = x + a$ と放物線 $y = x^2$ が接するように定数 a の値を定めよ．

   (2) 放物線 $y = x^2$ と円 $x^2 + (y-3)^2 = 15$ の共有点の座標を求めよ．

   (3) 直線 $y = x + a$ と放物線 $y = x^2$ の共有点がすべて円 $x^2 + (y-3)^2 = 15$ の内部にあるように定数 a の値の範囲を求めよ．

5. 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = 1$ で極値をとり，曲線上の点 $(2,\ 3)$ における接線の傾きが 3 であるとき，定数 a，b，c の値を定めよ．

6. 2 つの放物線 $y = x^2 - 4x + 1$，$y = -x^2 + 4x - 5$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) $S = \dfrac{1}{2}ca\sin B = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

   (2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ &= 1^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2\cdot 1\cdot 2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 7 \end{aligned}$$

   $b > 0$ であるから　$\boldsymbol{b = \sqrt{7}}$

   (3) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

   したがって　$\sqrt{7}\sin C = 1\cdot\sin 30^\circ$

   よって　$\boldsymbol{\sin C = \dfrac{1}{2\sqrt{7}}}$

2. (1) $f(x) = ax^2 + 2ax - b$ を変形すると　$f(x) = a(x+1)^2 - a - b$

   したがって，$y = f(x)$ の頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1, -a-b)}$

   (2) $a > 0$ で頂点は定義域 $-2 \leqq x \leqq 3$ 内にあるので $x = -1$ で最小値 -1 をとり，$x = 3$ で最大値 5 をとる．

   したがって　$f(-1) = -1,\quad f(3) = 5$

   ゆえに　$-a - b = -1,\quad 15a - b = 5$

   これを解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{8},\ b = \dfrac{5}{8}}$

3. (1) $2^x = t$ とおくと　$t > 0$

方程式は　$t^2 - 3t - 4 = 0$

ゆえに　$(t+1)(t-4) = 0$

$t > 0$ より　$t = 4$

したがって　$2^x = 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 2}$

(2) 真数は正であるから　$x + 1 > 0$　かつ　$x - 2 > 0$

すなわち　$x > 2$　$\cdots$①

方程式を変形すると

$$\log_2(x+1)(x-2) = \log_2 4$$

ゆえに　$(x+1)(x-2) = 4$

整理すると　$x^2 - x - 6 = 0$

$(x+2)(x-3) = 0$

① に注意して　$\boldsymbol{x = 3}$

(3) 方程式を変形すると

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$

整理すると　$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

よって　$\sin x = -1,\ \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ において　$\sin x = -1$ を解くと　$x = \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x = \dfrac{1}{2}$ を解くと　$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi}$

4. (1) 2 式から y を消去すると　$x^2 - x - a = 0$

このとき，この 2 次方程式の判別式について，$D = 0$ であるから

$$(-1)^2 - 4\cdot 1(-a) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{4}}$$

(2) $\begin{cases} y = x^2 & \cdots ① \\ x^2 + (y-3)^2 = 15 & \cdots ② \end{cases}$

①，② から，x を消去すると

$$y^2 - 5y - 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (y+1)(y-6) = 0$$

① から $y \geqq 0$ であることに注意して　$y = 6$

これを ① に代入して　$x = \pm\sqrt{6}$

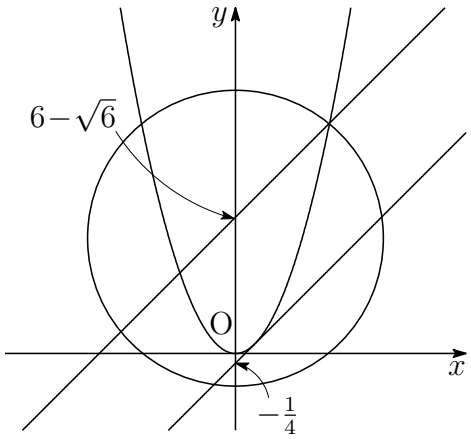
よって，求める共有点の座標は　$\boldsymbol{(\pm\sqrt{6},\ 6)}$

(3) (2) で求めた放物線と円の共有点の 1 つ $(\sqrt{6},\ 6)$ を直線 $y = x + a$ が通るとき

$$6 = \sqrt{6} + a \quad \text{すなわち} \quad a = 6 - \sqrt{6}$$

したがって，条件を満たす a の値は

$$\boldsymbol{-\frac{1}{4} \leqq a < 6 - \sqrt{6}}$$



5. 曲線 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ は点 $(2,\ 3)$ を通るので

$$2^3 + a\cdot 2^2 + b\cdot 2 + c = 3 \quad \text{すなわち} \quad 4a + 2b + c = -5 \quad \cdots ①$$

$y' = 3x^2 + 2ax + b$ について，$x = 1$ のとき $y' = 0$，$x = 2$ のとき $y' = 3$ であるから

$$3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0, \qquad 3\cdot 2^2 + 2a\cdot 2 + b = 3$$

整理して　$2a + b = -3 \quad \cdots ②$,　$4a + b = -9 \quad \cdots ③$

①, ②, ③ を解いて　$\boldsymbol{a = -3,\ b = 3,\ c = 1}$

6. 2 つの放物線 $y = x^2 - 4x + 1$，$y = -x^2 + 4x - 5$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 4x - 5 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1,\ 3$$

$1 \leqq x \leqq 3$ において　$-x^2 + 4x - 5 \geqq x^2 - 4x + 1$

したがって，求める S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(-x^2 + 4x - 5) - (x^2 - 4x + 1)\}\, dx \\ &= -2 \int_1^3 (x - 1)(x - 3)\, dx \\ &= -2 \left(-\frac{1}{6}\right) (3 - 1)^3 = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

5.11 平成 20 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，等式 $\sqrt{3}\tan\theta = 1$ を満たす θ を求めよ.

   (2) 不等式 $\log_5(x-1) + \log_5(x+3) \leqq 1$ を解け.

2. a は定数とする．2 次不等式 $x^2 - (a+2)x + 2a < 0$ の解を次の各場合について，求めよ.

   (1) $a = 2$ のとき

   (2) $a \neq 2$ のとき

3. △ABC において，$A = 45^\circ$，$b = \sqrt{6}$，$c = 1 + \sqrt{3}$ のとき，次の問いに答えよ.

   (1) a を求めよ.

   (2) △ABC の面積 S を求めよ.

4. 直線 $y = \dfrac{3}{2}x + 1$ に関して，原点と対称な点の座標を求めよ.

5. x，y が 2 つの不等式 $y \geqq x^2 - x$，$y \leqq -2x + 2$ を満たすとき，$y - x$ の最大値を求めよ.

6. 2 直線 $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x + 1 \cdots ①$，$y = -\dfrac{\sqrt{3}}{5}x + 2 \cdots ②$ について，答えよ.

   (1) x 軸の正の向きと直線 ① のなす角を α とするとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ.

   (2) 2 直線 ①，② のなす角 θ を求めよ．ただし，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする.

7. 関数 $f(x) = 3x^2 + 2x + \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ について，次の問に答えよ.

   (1) $f(x)$ を求めよ.

   (2) $y = f(x)$ の接線のうち，直線 $y = -4x$ に平行なものを求めよ.

   (3) $y = f(x)$ と直線 $y = -4x - 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) 与式から　$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ において，これを解くと　$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$

(2) 真数は正であるから　　$x-1>0$　かつ　$x+3>0$

すなわち　　$x>1 \quad \cdots ①$

不等式を変形すると　　$\log_5(x-1)(x+3) \leqq \log_5 5$

底 5 は 1 より大きいので　　$(x-1)(x+3) \leqq 5$

整理して　　$x^2+2x-8 \leqq 0$

ゆえに　　$(x+4)(x-2) \leqq 0$

① に注意して　　$\boldsymbol{1 < x \leqq 2}$

2. (1) このとき不等式は

$$x^2-4x+4<0 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2<0$$

よって　**解なし**

(2) 与えられた不等式から　$(x-2)(x-a)<0$

よって，解は　$\boldsymbol{a<2}$ のとき　$\boldsymbol{a<x<2}$

$\boldsymbol{a>2}$ のとき　$\boldsymbol{2<x<a}$

3. (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= (\sqrt{6})^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot\sqrt{6}\cdot(1+\sqrt{3})\cos 45^\circ \\ &= 6+(4+2\sqrt{3})-2\sqrt{6}(1+\sqrt{3})\times\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$a>0$ であるから　　$\boldsymbol{a=2}$

(2) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot(1+\sqrt{3})\sin 45^\circ$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{6}(1+\sqrt{3})\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}}$

4. 原点を O，直線 $y=\dfrac{3}{2}x+1$ を l とし，l に関して O と対称な点を A$(p,\ q)$ とする．

［1］l の傾きは $\dfrac{3}{2}$，直線 OA の傾きは $\dfrac{q}{p}$ である．$l\perp$AB であるから

$$\frac{3}{2}\times\frac{q}{p}=-1 \quad \text{すなわち} \quad 2p+3q=0 \quad \cdots①$$

［2］線分 OA の中点 $\left(\dfrac{p}{2},\ \dfrac{q}{2}\right)$ が l 上にあるから

$$\frac{q}{2}=\frac{3}{2}\times\frac{p}{2}+1 \quad \text{すなわち} \quad -3p+2q=4 \quad \cdots②$$

①，② を解いて $p=-\dfrac{12}{13}$，$q=\dfrac{8}{13}$ よって $\left(\boldsymbol{-\dfrac{12}{13},\ \dfrac{8}{13}}\right)$

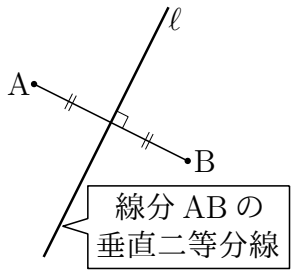
直線に関して対称な点

2 点 A，B が直線 ℓ に関して対称であるのは，次の［1］,［2］が成り立つときである．

［1］直線 AB は ℓ に垂直である．

［2］線分 AB の中点は ℓ 上にある．

補足 直線 ℓ は線分 AB の垂直二等分線である．

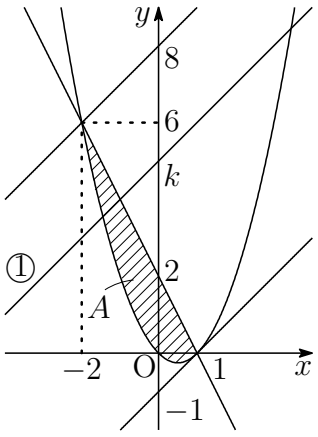


5. 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．A の表す領域は，放物線 $y=x^2-x$ の上側と直線 $y=-2x+2$ の下側の共通部分で，境界線を含む．

$$y-x=k \quad \cdots①$$

とおくと，これは傾きが 1，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値を求めればよい．図から，直線 ① が

$(-2,\ 6)$ を通るとき k は最大で $k=8$



である．したがって，$y-x$ は，$\boldsymbol{x=-2,\ y=6}$ のとき**最大値 8** をとる．

補足 なお，$y-x$ は $x=1$，$y=0$ のとき最小値 -1 をとる．直線 $y-x=-1$ は放物線 $y=x^2-x$ 上の点 $(1,\ 0)$ における接線である．

6. (1) $\tan\alpha$ は直線 ① の傾きから　$\boldsymbol{\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) 直線 ② の x 軸の正の向きとなす角を β とすると　$\tan\beta = -\dfrac{\sqrt{3}}{5}$

加法定理により

$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{5}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\tan\alpha > 0$，$\tan\beta <$ より　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$

したがって　$0 < \beta - \alpha < \pi$　ゆえに　$\beta - \alpha = \dfrac{2}{3}\pi$

このとき，求める角 θ $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2})$ は $\beta-\alpha$ の外角であるから

$$\theta = \pi - (\beta-\alpha) = \pi - \frac{2}{3}\pi = \boldsymbol{\frac{\pi}{3}}$$

7. (1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ は定数であるから，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = k$ とおくと

$$f(x) = 3x^2 + 2x + k$$

よって　$\displaystyle k = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{1} (3t^2+2t+k)\,dt = \left[\, t^3 + t^2 + kt \,\right]_{-1}^{1}$

$$= 2 + 2k$$

これを解いて　$k = -2$

よって　$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 2x - 2}$

(2) $f'(x) = 6x + 2$ であるから，接線の傾きが -4 になる点の x 座標は

$6x + 2 = -4$　これを解いて　$x = -1$

ゆえに，接点の座標は　$(-1, -1)$

よって，求める接線の方程式は

$y - (-1) = -4(x+1)$　すなわち　$\boldsymbol{y = -4x - 5}$

(3) 放物線 $y = 3x^2 + 2x - 2$ と直線 $y = -4x - 2$ の共有点の x 座標は

$$3x^2 + 2x - 2 = -4x - 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = -2,\ 0$$

下に凸の放物線であるから，直線と放物線で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{0} (-4x - 2) - (3x^2 + 2x - 2)\, dx \\ &= -3 \int_{-2}^{0} x(x + 2)\, dx \\ &= -3 \cdot \left(-\frac{1}{6} \right) \{0 - (-2)\}^3 = \mathbf{4} \end{aligned}$$

5.12　平成 19 年度編入学試験 (60 分)

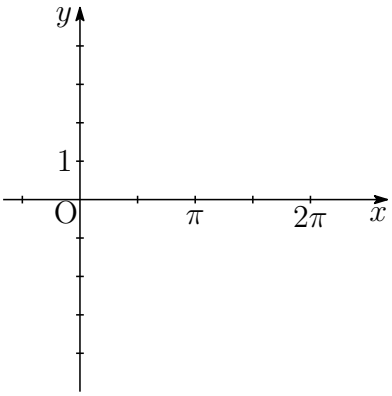
1. 次の問いに答えよ.

   (1) 次の値を求めよ.

   $6^{\log_6 3} \times 6^{\log_6 2}$

   (2) 方程式 $\log_x 2 = \dfrac{1}{2}$ を解け.

   (3) 関数 $y = \sin 2x + 1$ のグラフをかけ.



2. $0 \leqq x \leqq 3$ における 2 次関数 $y = -x^2 + 2mx + 2$ について，次の問いに答えよ．ただし，m は定数とする.

   (1) m が次の値のとき $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値とそのときの x の値を求めよ.

   (ア) $m = 2$ のとき

   (イ) $m = -1$ のとき

   (2) 関数 $y = -x^2 + 2mx + 2$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値とそのときの値を求めよ.

3. △ABC において $a = 5$，$b = 7$，$c = 8$ のとき，次の問いに答えよ.

   (1) ∠B の値を求めよ.

   (2) △ABC の面積 S を求めよ.

   (3) △ABC の外接円の半径 R を求めよ.

4. 円 $x^2+y^2=4\cdots$① について，次の問いに答えよ．

   (1) ① と直線 $x+y=2\cdots$② の共有点の個数を求めよ．

   (2) $x+y=k\cdots$③ とおく．点 $(x,\ y)$ が不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ の表す領域を動くとき，k の最大値と最小値を求めよ．

5. 次の問いに答えよ．

   (1) 3 次方程式 $x^3-x+a=0$ が異なる 3 個の実数解をもつとき，定数 a のとり得る値の範囲を求めよ．

   (2) 関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t(t-1)\,dt$ の極値を求めよ．

解答例

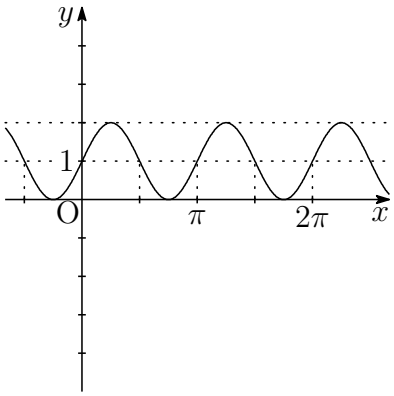
1. (1) $6^{\log_6 3} \times 6^{\log_6 2} = 3 \times 2 = \mathbf{6}$

   補足 $\log_a M = p$ のとき，$M = a^p$ であるから　$M = a^{\log_a M}$

   (2) $\log_x 2 = \dfrac{1}{2}$ より　$x^{\frac{1}{2}} = 2$

   よって　　$\boldsymbol{x = 4}$

   (3) $y = \sin 2x + 1$ は $y = \sin 2x$ を y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである.



2. (1)(ア) $m = 2$ のとき　$y = -x^2 + 4x + 2 = -(x-2)^2 + 6$

   したがって，$\boldsymbol{x = 2}$ で**最大値 6** をとる.

   (イ) $m = -1$ のとき　$y = -x^2 - 2x + 2 = -(x+1)^2 + 3$

   したがって，$\boldsymbol{x = 0}$ で**最大値 2** をとる.

   (2) $y = -x^2 + 2mx + 2 = -(x-m)^2 + m^2 + 2$ であるから

   $\boldsymbol{m < 0}$ **のとき**　　$\boldsymbol{x = 0}$ **で最大値 2**

   $\boldsymbol{0 \leqq m \leqq 3}$ **のとき**　$\boldsymbol{x = m}$ **で最大値** $\boldsymbol{m^2 + 2}$

   $\boldsymbol{3 < m}$ **のとき**　　$\boldsymbol{x = 3}$ **で最大値** $\boldsymbol{6m - 7}$

3. (1) 余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

   よって　$\boldsymbol{\angle B = 60^\circ}$

   (2) (1) の結果を用いて

$$S = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{10\sqrt{3}}$$

   (3) 正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$

   よって　　$R = \dfrac{7}{2 \sin 60^\circ} = \dfrac{7}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{7\sqrt{3}}{3}}$

4. (1) ② から　$y = 2 - x$　$\cdots$②′

これを ① に代入して整理すると

$$x^2 + (2-x)^2 = 4 \quad \text{すなわち} \quad x(x-2) = 0$$

これを解いて　$x = 0,\ 2$

したがって ②′ より，共有点は $(0,\ 2)$，$(2,\ 0)$ の **2 個**

(2) ③ から　$y = k - x$　$\cdots$③′

③′ を $x^2 + y^2 \leqq 4$ に代入して整理すると

$$x^2 + (k-x)^2 \leqq 4 \quad \text{すなわち} \quad 2x^2 - 2kx + k^2 - 4 \leqq 0 \quad \cdots (*)$$

2 次不等式 $(*)$ は実数解をもつので，係数について $D/4 \geqq 0$ であるから

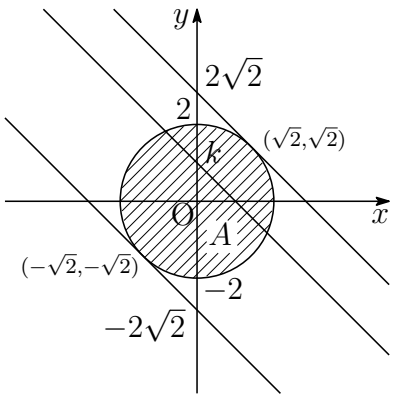
$$(-k)^2 - 2\cdot(k^2-4) \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad -2\sqrt{2} \leqq k \leqq 2\sqrt{2}$$

よって，k は**最大値 $2\sqrt{2}$，最小値 $-2\sqrt{2}$** をとる．

補足 不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$ の表す領域を A とする．領域 A の表す領域は，円 $x^2+y^2=4$ の内部と周である．

$$x + y = k \quad \cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す．この直線 ① が領域 A と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．図から，直線 ① が



$(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ を通るとき k は最大で　$k = 2\sqrt{2}$

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ を通るとき k は最小で　$k = -2\sqrt{2}$

である．したがって，k は

$\boldsymbol{x = \sqrt{2},\ y = \sqrt{2}}$ のとき**最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$**

$\boldsymbol{x = -\sqrt{2},\ y = -\sqrt{2}}$ のとき**最小値 $\boldsymbol{-2\sqrt{2}}$**

をとる．

5. (1) 3 次方程式 $x^3 - x + a = 0$ の実数解の個数は，$y = -x^3 + x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数に等しい．

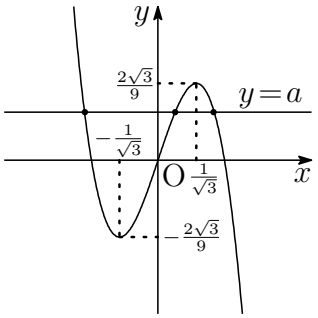
$y = -x^3 + x$ より　$y' = -3x^2 + 1$

$$y' = 0 \text{ を解くと}\quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

y の増減表は，右のようになる．よって，$y = -x^3 + x$ のグラフは，右の図のようになる．求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{3}}{9} < a < \frac{2\sqrt{3}}{9}}$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 $-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↗	極大 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘



(2) $f'(x) = x(x-1)$ であるから，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $f(0)$	↘	極小 $f(1)$	↗

また　$f(0) = \displaystyle\int_0^0 t(t-1)\,dt = 0$

$$f(1) = \int_0^1 t(t-1)\,dt = -\frac{1}{6}(1-0)^3 = -\frac{1}{6}$$

よって，$f(x)$ は

$\boldsymbol{x = 0}$ で**極大値 0**

$\boldsymbol{x = 1}$ で**極小値** $\boldsymbol{-\frac{1}{6}}$

をとる．

5.13 平成 18 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) 方程式 $4^x + 2^x - 6 = 0$ を解け.

   (2) 不等式 $2\log_{\frac{1}{2}}(x-4) < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$ を解け.

   (3) △ABC において，$a = \sqrt{3}+1$，$b = 2$，$C = 30^\circ$ のとき，辺 c の値を求めよ.

2. 2 次関数 $y = x^2 - 2x - 3$ について，次の問いに答えよ.

   (1) $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフをかけ.

   (2) $a \leqq x \leqq a+1$ における $y = x^2 - 2x - 3$ の最小値 m を求めよ.

3. 次の問いに答えよ.

   (1) 円 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ と直線 $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ の交点の座標を求めよ.

   (2) 不等式 $(x-2)^2 + y^2 \leqq 4$，$y \geqq \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ で表される領域 D 上の点 $(x,\ y)$ に対して $y - x$ の値の最大値および最小値を求めよ.

4. $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ について，次の問いに答えよ.

   (1) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ を合成し，$y = r\sin(x+\alpha)$ $(r > 0,\ 0 \leqq \alpha < 2\pi)$ の形で表せ.

   (2) $0 \leqq x < 2\pi$ の範囲で，方程式 $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 0$ を解け.

   (3) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ のグラフをかけ.

5. (1) 増減・極値を調べて，曲線 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ.

   (2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ と直線 $y = x - 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

解答例

1. (1) $2^x = t$ とすると　$t > 0$

方程式は　　$t^2 + t - 6 = 0$
ゆえに　　$(t-2)(t+3) = 0$
$t > 0$ より　　$t = 2$
したがって　$2^x = 2$　よって　$\boldsymbol{x = 1}$

(2) 真数は正であるから　$x - 4 > 0$　かつ　$x - 2 > 0$
すなわち　　$x > 4$　$\cdots$①
与えられた不等式から

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-4)^2 < \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$$

底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$$(x-4)^2 > x - 2 \quad \text{これを解いて} \quad x < 3,\ 6 < x \quad \cdots ②$$

したがって，①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x > 6}$

(3) 余弦定理により

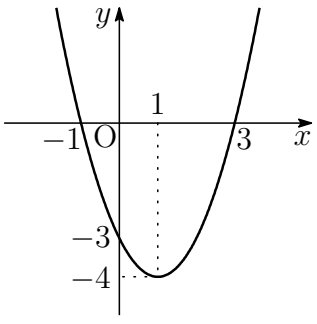
$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\ &= (\sqrt{3}+1)^2 + 2^2 - 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2\cos 30^\circ \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 4 - 2\cdot(\sqrt{3}+1)\cdot 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$c > 0$ であるから　$\boldsymbol{c = \sqrt{2}}$

2. (1) 2 次関数を変形すると

$$y = (x-1)^2 - 4$$

ゆえに，頂点の座標は　$(1, -4)$
x 軸との共有点の x 座標は $y = 0$ を代入して　　$x = -1,\ 3$
また，y 軸との交点は　$(0, -3)$
よって，グラフは右の図のようになる．



(2) $f(x)=(x-1)^2-4$ とおく.

［1］$a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

$$m=f(a+1)=a^2-4$$

［2］$a\leqq 1\leqq a+1$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

$$m=f(1)=-4$$

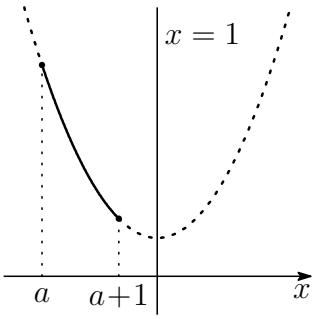
［3］$1<a$ のとき $m=f(a)=a^2-2a-3$

よって $\boldsymbol{a<0}$ のとき $\boldsymbol{m=a^2-4}$

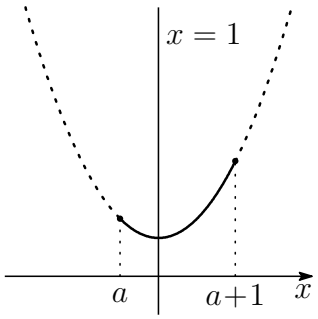
$\boldsymbol{0\leqq a\leqq 1}$ のとき $\boldsymbol{m=-4}$

$\boldsymbol{1<a}$ のとき $\boldsymbol{m=a^2-2a-3}$

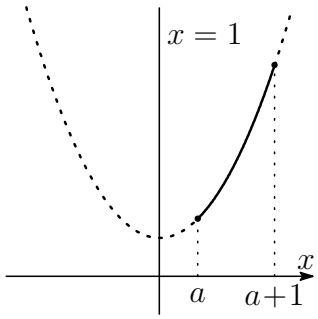
［1］$a+1<1$ のとき



［2］$a\leqq 1\leqq a+1$ のとき



［3］$1<a$ のとき



3. (1) $(x-2)^2+y^2=4\cdots$①，$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}\cdots$② とおく．② を ① に代入すると

$$(x-2)^2+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=4$$

整理すると　　$x^2-3x=0$

よって　　$x=0,\ 3$

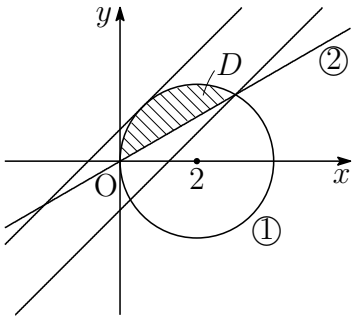
② より　$x=0$ のとき $y=0$，　$x=3$ のとき $y=\sqrt{3}$

したがって，交点の座標は　$\boldsymbol{(0,\ 0),\ (3,\ \sqrt{3})}$

(2)　D の表す領域は円 ① の内部と直線 ② の上側の共通部分で，境界線を含む．

$$y-x=k\quad\cdots③$$

とおくと，これは傾きが 1，y 切片が k である直線を表す．この直線 ③ が領域 D と共有点をもつときの k の値の最大値，最小値を求めればよい．



k が最大となるのは，右の図のように直線 ③ が円に接するときである．このとき円の中心 $(2,\ 0)$ と直線 $(x-y+k=0)$ の距離は 2 であるから

$$\frac{|2+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\quad\text{これを解いて}\quad k=-2\pm2\sqrt{2}$$

このとき，円と接線の位置関係に注意して　$k=-2+2\sqrt{2}$

k が最小となるのは，点 $(3,\ \sqrt{3})$ を通るとき　$k=\sqrt{3}-3$

したがって，k は D において，**最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}-2}$，最小値 $\boldsymbol{\sqrt{3}-3}$** をとる．

4. (1) $\boldsymbol{y=2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$

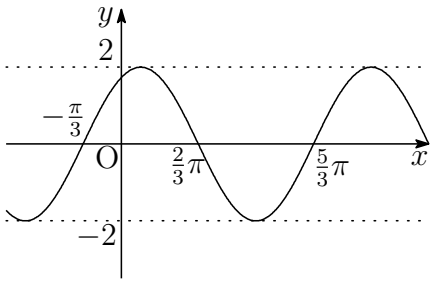
(2) (1) の結果から，方程式は

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0\quad\text{すなわち}\quad\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$0\leqq x<2\pi$ より $\dfrac{\pi}{3}\leqq x+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{7}{3}\pi$ において，方程式を解くと

$$x+\frac{\pi}{3}=\pi,\ 2\pi\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{x=\frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi}$$

(3) (1) の結果から



5. (1) $y = x^3 - x^2$ より

$$y' = 3x^2 - 2x$$
$$= x(3x - 2)$$

$y' = 0$ とすると

$$x = 0,\ \frac{2}{3}$$

y の増減表は右のようになる.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	極大 0	↘	極小 $-\frac{4}{27}$	↗

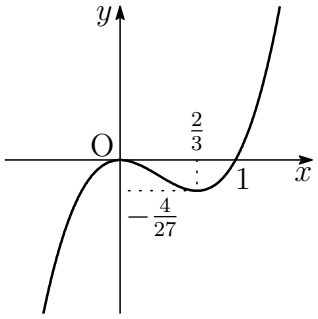
したがって，この関数は

$x = 0$ で極大値 0

$x = \frac{2}{3}$ で極小値 $-\frac{4}{27}$

をとる.

グラフは，右の図のようになる.



(2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ と直線 $y = x - 1$ の共有点の x 座標は

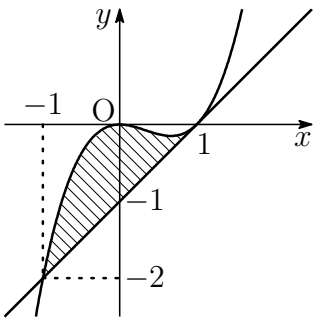
$$x^3 - x^2 = x - 1$$

ゆえに $(x-1)^2(x+1) = 0$

よって $x = -1,\ 1$

$-1 \leqq x \leqq 1$ において

$$x^3 - x^2 \geqq x - 1$$



である．よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-1}^{1} \{(x^3 - x^2) - (x - 1)\}$$
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^{1} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

5.14　平成 17 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) $a^2 \div \sqrt{a} \times a^{\frac{3}{2}}$ を簡単にせよ.

   (2) $\sin 75^\circ$ の値を求めよ.

   (3) 平面において，2 点 A$(3,\ 3)$，B$(4, -2)$ を $2 : 1$ に内分する点 C の座標を求めよ.

2. 2 次関数 $y = x^2 - 2x + a$ のグラフについて，次の問いに答えよ.

   (1) x 軸と異なる 2 点で交わるような a の値を求めよ.

   (2) (1) において，交点の x 座標が同符号となる a の値の範囲を求めよ.

3. △ABC において，$a = 13$，$b = 8$，$c = 7$ のとき，次の問いに答えよ.

   (1) 角 A を求めよ.

   (2) 面積 S を求めよ.

4. 次の方程式を解け.

   (1) $4^x - 2^x - 12 = 0$

   (2) $\log_{10} x + \log_{10}(x + 3) = 1$

5. 円 $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 - m = 0$ と直線 $x + y = 0$ が接するように m の値を定めよ.

6. $y = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 1$ について，次の問いに答えよ.

   (1) この関数の増減を調べて極値を求め，そのときの x の値も求めよ.

   (2) この関数のグラフをかけ.

   (3) この関数と直線 $y = x - 1$ とで囲まれる部分で，$x \geqq 0$ における面積を求めよ.

解答例

1. (1) $a^2 \div \sqrt{a} \times a^{\frac{3}{2}} = a^2 \div a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{3}{2}} = a^{2-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \boldsymbol{a^3}$

   (2) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

   (3) 2 点 A$(3,\ 3)$，B$(4, -2)$ を $2:1$ に内分する点 C の座標は

$$\left(\frac{1\cdot 3 + 2\cdot 4}{2+1},\ \frac{1\cdot 3 + 2\cdot(-2)}{2+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)}$$

2. (1) x 軸と異なる 2 点で交わるとき，係数について $D/4 > 0$ であるから

$$(-1)^2 - 1\cdot a > 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a < 1}$$

   (2) 2 次関数のグラフの x 軸との共有点 x 座標は，2 次方程式

$$x^2 - 2x + a = 0$$

   の解である．これを α，β とすると，条件および解と係数の関係により

$$\alpha\beta = a > 0$$

   これと (1) の結果の共通範囲を求めて $\boldsymbol{0 < a < 1}$

3. (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2\cdot 8\cdot 7} = \frac{-56}{2\cdot 8\cdot 7} = -\frac{1}{2}$$

   これを満たす角 A は $\boldsymbol{A = 120^\circ}$

   (2) (1) の結果を用いて

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{14\sqrt{3}}$$

4. (1) $2^x = t$ とおくと　$t > 0$

方程式は　$t^2 - t - 12 = 0$
ゆえに　$(t+3)(t-4) = 0$
$t > 0$ より　$t = 4$
したがって　$2^x = 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 2}$

(2) 真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$x + 3 > 0$
すなわち　$x > 0$　$\cdots$①
方程式を変形すると

$$\log_{10} x(x+3) = \log_{10} 10$$

ゆえに　$x(x+3) = 10$
整理すると　$x^2 + 3x - 10 = 0$
すなわち　$(x+5)(x-2) = 0$
① に注意して　$\boldsymbol{x = 2}$

5. $x + y = 0$ より　$y = -x$

これを $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5 - m = 0$ に代入すると

$$x^2 + (-x)^2 - 4x - 2(-x) + 5 - m = 0$$

整理すると　$2x^2 - 2x + 5 - m = 0$

円と直線が接するのは，$D/4 = 0$ のときであるから

$$(-1)^2 - 2\cdot(5 - m) = 0$$　これを解いて　$\boldsymbol{m = \dfrac{9}{2}}$

別解 円の方程式を変形すると　$(x-2)^2 + (y-1)^2 = m$
よって，中心 $(2,\ 1)$，半径 $\sqrt{m}$ の円である．
このとき，中心から直線 $x + y = 0$ までの距離が $\sqrt{m}$ であるから

$$\frac{|2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{m}$$　よって　$\boldsymbol{m = \dfrac{9}{2}}$

6. (1) $y' = 12x^2 + 6x - 6 = 6(x+1)(2x-1)$

関数の増減表は，次のようになる．

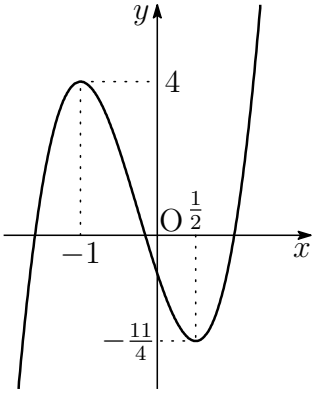
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 $-\frac{11}{4}$	$\nearrow$

したがって，この関数は

$$\boldsymbol{x = -1} \text{ のとき極大値 } \boldsymbol{4},$$
$$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}} \text{ のとき極小値 } \boldsymbol{-\frac{11}{4}}$$

をとる．

(2) (1) の結果から，関数のグラフは次のようなる．

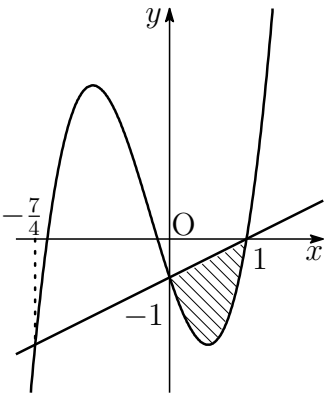


(3) 関数のグラフと直線の共有点の x 座標は

$$4x^3 + 3x^2 - 6x - 1 = x - 1$$

すなわち $\quad x(x-1)(4x+7) = 0$

よって $\quad x = -\dfrac{7}{4},\ 0,\ 1$



このとき，求める部分は右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$S = \int_0^1 \{(x-1) - (4x^3 + 3x^2 - 6x - 1)\}\,dx$$
$$= \int_0^1 (-4x^3 - 3x^2 + 7x)\,dx$$
$$= \left[-x^4 - x^3 + \frac{7}{2}x^2\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{3}{2}}$$

5.15　平成 16 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の各問に答えよ．

   (1) $4\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ の値を求めよ．

   (2) $\sin 15^\circ\cos 75^\circ$ の値を求めよ．

   (3) $\sin 55^\circ = a$ のとき，$\cos 125^\circ$ を a を用いて表せ．

   (4) 点 $\mathrm{A}(2,3)$，$\mathrm{B}(5,9)$ のとき，線分 AB を $2:1$ に内分する点の座標を求めよ．

2. 2 次関数 $y=-x^2+2x+a$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 3 であるとき，定数 a の値を求めよ．また，このときの 2 次関数のグラフをかけ．ただし，x 軸との交点も求めよ．

3. △ABC において $\dfrac{\sin A}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sin B}{2}=\dfrac{\sin C}{1+\sqrt{3}}$ であるとき，この三角形の ∠A の大きさ A を求めよ．

4. 次の各問に答えよ．

   (1) 方程式 $9^x-4\cdot 3^{x+1}+27=0$ を解け．

   (2) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$，$\sin x+\cos x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ とき，$\cos^2 x-\sin^2 x$ の値を求めよ．

5. 直線 $y=3x+a$ と円 $x^2+y^2=1$ について，次の問に答えよ．

   (1) 原点から直線 $y=3x+a$ までの距離 l を求めよ．

   (2) 直線 $y=3x+a$ と円 $x^2+y^2=1$ が接する場合の定数 a の値を求めよ．

6. 関数 $f(x)=x^3-6x^2+ax$ について，次の問に答えよ．

   (1) $f'(1)=0$ となるように定数 a の値を求めよ．

   (2) (1) で求めた a に対して，関数 $f(x)$ の増減，極値を調べてグラフをかけ．

   (3) (2) のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

1. (1) $4\log_3\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\log_3 2+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$=\log_3 9-\log_3\sqrt{2}+\log_3\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$=\log_3\left(9\div\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$=\log_3 3=\mathbf{1}$

(2) $\sin 15^\circ=\cos 75^\circ=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ であるから

$$\sin 15^\circ\cos 75^\circ=\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

(3) $\cos 125^\circ=-\cos 55^\circ$

$=-\sqrt{1-\sin^2 55^\circ}=\boldsymbol{-\sqrt{1-a^2}}$

(4) 2 点 A$(2,3)$，B$(5,9)$ を結ぶ線分 AB を $2:1$ に内分する点は

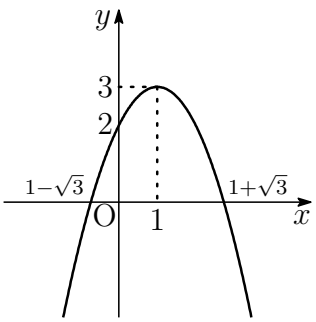
$$\left(\frac{1\cdot 2+2\cdot 5}{2+1},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot 9}{2+1}\right)\quad \text{すなわち}\quad \mathbf{(4,\ 7)}$$

2. 関数の式を変形すると

$$y=-(x-1)^2+a+1\ (0\leqq x\leqq 3)$$

$x=1$ で最大値 $a+1$ をとる．この最大値が 3 であるから

$$a+1=3\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=2}$$



関数 $y=-x^2+2x+2$ の x 軸との共有点の x 座標は，$y=0$ を代入して

$$-x^2+2x+2=0\quad \text{これを解いて}\quad x=1\pm\sqrt{3}$$

また，y 軸との交点の y 座標は，$x=0$ を代入して　$y=2$

よって，グラフは右の図のようになる．

3. 与式から　　$\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{6} : 2 : (1+\sqrt{3})$
正弦定理により　$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$

ゆえに　　$a : b : c = \sqrt{6} : 2 : (1+\sqrt{3})$

よって，定数 k を用いて

$$a = \sqrt{6}k, \quad b = 2k, \quad c = (1+\sqrt{3})k$$

とおける．したがって，余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ &= \frac{(2k)^2+\{(1+\sqrt{3})k\}^2-(\sqrt{6}k)^2}{2\cdot 2k\cdot(1+\sqrt{3})k} \\ &= \frac{2(1+\sqrt{3})k^2}{4(1+\sqrt{3})k^2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって，これを満たす角 A は　　$\boldsymbol{A = 60^\circ}$

4. (1) $3^x = t$ とおくと　$t > 0$

$$t^2 - 12t + 27 = 0$$

ゆえに　$(t-3)(t-9) = 0$

$t > 0$ に注意して　　$t = 3,\ 9$

よって　　$3^x = 3$ を解いて　$x = 1$
$3^x = 9$ を解いて　$x = 2$

したがって　　$\boldsymbol{x = 1,\ 2}$

(2) $\sin x + \cos x = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$ の両辺を平方すると

$$1 + 2\sin x \cos x = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$$

$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$ より，$0 < 2x < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$2x = \dfrac{\pi}{6}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ であるから

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \cos\frac{\pi}{6} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

5. (1) 原点から直線 $y = 3x + a$ $(3x - y + a = 0)$ までの距離 l は

$$l = \frac{|\,a\,|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\boldsymbol{|\,a\,|}}{\boldsymbol{\sqrt{10}}}$$

(2) 円の中心は原点で，半径が 1 である．したがって，(1) で求めた l は円の中心である原点から直線までの距離である．直線と円が接するとき，l は円の半径に等しいから

$$\frac{|\,a\,|}{\sqrt{10}} = 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \pm\sqrt{10}}$$

6. (1) $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$ であるから，$f'(1) = 0$ より

$$3{\cdot}1^2 - 12{\cdot}1 + a = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 9}$$

(2) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ より

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると

$$x = 1,\ 3$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗

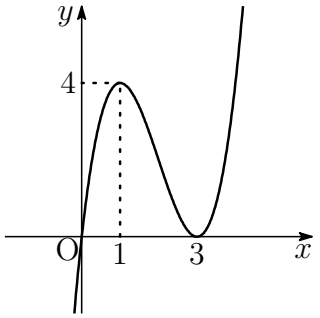
したがって，この関数は

$x = 1$ で極大値 4

$x = 3$ で極小値 0

をとる．

グラフは，右の図のようになる．



(3) 求める面積を S とすると，(2) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x)\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2\ \right]_0^3 = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

5.16　平成 15 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の値を求めよ．

   (1) $\cos 150^\circ$

   (2) $\tan 105^\circ$

   (3) $\log_3 6 - \log_3 \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

   (4) $81^{-\frac{3}{4}} \times 8^{\frac{2}{3}}$

2. 2 次関数 $y = 3x^2 - 6ax + 3a + 2$ について，次の問いに答えよ．

   (1) $a = 1$ のとき y の最小値を求めよ．

   (2) y の最小値 m を a を用いて表せ．

   (3) m の最大値とそのときの a の値を求めよ．

3. 次の問いに答えよ．

   (1) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ となる θ を求めよ．

   (2) 等式 $b\cos A = a\cos B$ が成り立つとき，△ABC はどんな形の三角形か．

   (3) 方程式 $\log_2(x-5) + \log_2(x-4) = 1$ を解け．

4. 次の各問いに答えよ．

   (1) 方程式 $2x^3 - 3x^2 - 12x - a = 0$ が 3 つの異なる実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

   (2) 曲線 $y = -x^2 + 3x$ と直線 $y = mx$ とで囲まれる図形の面積 S を求めよ．ただし，$0 < m < 3$ とする．

5. 平面上に 3 点 A$(0,\ 6)$，B$(-2,\ 0)$，C$(3,\ 0)$ がある．点 B を通り直線 CA に垂直な直線を l_1，点 C を通り直線 AB に垂直な直線を l_2 とする．この 2 直線 l_1，l_2 の交点を求めよ．

6. 不等式 $x^2 + y^2 - 2x - 4y \leqq 0$ が表す領域を図示せよ．

解答例

1. (1) $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

   (2) $\tan 105^\circ = -\tan 75^\circ$

   加法定理により

$$\begin{aligned}\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

   よって　　$\boldsymbol{\tan 105^\circ = -2-\sqrt{3}}$

   (3) $\log_3 6 - \log_3 \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \log_3 \left(6 \div \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right) = \log_3 3\sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

   (4) $81^{-\frac{3}{4}} \times 8^{\frac{2}{3}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = 3^{-3} \times 2^2 = \dfrac{1}{27} \times 4 = \boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

2. (1) $a = 1$ のとき　$y = 3x^2 - 6x + 5 = 3(x-1)^2 + 2$

   よって　$\boldsymbol{x = 1}$ で**最小値 2**

   (2)
$$\begin{aligned}y &= 3x^2 - 6ax + 3a + 2 \\ &= 3(x-a)^2 - 3a^2 + 3a + 2\end{aligned}$$

   よって，y の最小値 m は　　$\boldsymbol{m = -3a^2 + 3a + 2}$

   (3) (2) より　$m = -3a^2 + 3a + 2 = -3\left(a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4}$

   よって，m は $\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$ のとき**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{11}{4}}$ をとる.

3. (1) $\boldsymbol{\theta = 30^\circ, 150^\circ}$

   (2) $b\cos A = a\cos B$ に余弦定理を適用すると

$$b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

   ゆえに　　$b^2 + c^2 - a^2 = c^2 + a^2 - b^2$

   整理すると　　$b^2 = a^2$

   $a > 0$，$b > 0$ より　$a = b$

   したがって　$\boldsymbol{a = b}$ **の二等辺三角形**

(3) 真数は正であるから　$x-5>0$　かつ　$x-4>0$

すなわち　　$x>5$　$\cdots$①

方程式は　　$\log_2(x-5)(x-4)=\log_2 2$

ゆえに　　$(x-5)(x-4)=2$

整理すると　　$x^2-9x+18=0$

よって　　$(x-3)(x-6)=0$

したがって，① より　$\boldsymbol{x=6}$

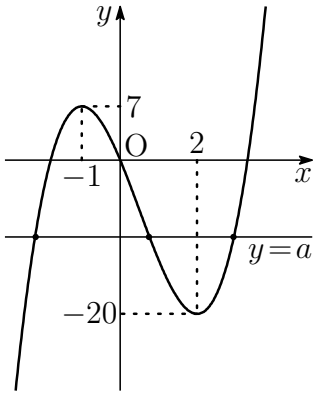
4. (1) 3 次方程式 $2x^3-3x^2-12x-a=0$ の実数解の個数は，$y=2x^3-3x^2-12x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数に等しい．

$y=2x^3-3x^2-12x$ について

$$y'=6x^2-6x-12$$
$$=6(x+1)(x-2)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 7	↘	極小 -20	↗

y の増減表は，右のようになる．よって，$y=2x^3-3x^2-12x$ のグラフは，右の図のようになる．求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y=a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから



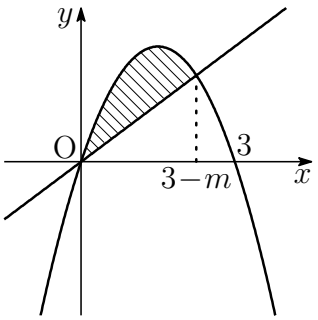
$$\boldsymbol{-20<a<7}$$

(2) 曲線 $y=-x^2+3x$ と直線 $y=mx$ の共有点の x 座標は

$$-x^2+3x=mx$$

ゆえに　　$x=0,\ 3-m$

したがって，これらによって囲まれた図形の面積 S は，$0<m<3$ より $0<3-m<3$ に注意して



$$S=\int_0^{3-m}\{(-x^2+3x)-mx\}\,dx$$
$$=-\int_0^{3-m}x\{x-(3-m)\}\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(3-m)^3=\boldsymbol{\frac{1}{6}(3-m)^3}$$

5. 2 点 C(3, 0)，A(0, 6) を通る直線の傾きは $\dfrac{6-0}{0-3}=-2$

直線 CA に垂直な直線 l_1 の傾き m_1 は

$$-2m_1=-1 \quad \text{ゆえに} \quad m_1=\frac{1}{2}$$

直線 l_1 の方程式は

$$y-0=\frac{1}{2}(x+2) \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{1}{2}x+1 \quad \cdots ①$$

2 点 A(0, 6)，B(-2, 0) を通る直線の傾きは $\dfrac{0-6}{-2-0}=3$

直線 AB に垂直な直線 l_2 の傾き m_2 は

$$3m_2=-1 \quad \text{ゆえに} \quad m_2=-\frac{1}{3}$$

直線 l_2 の方程式は

$$y-0=-\frac{1}{3}(x-3) \quad \text{ゆえに} \quad y=-\frac{1}{3}x+1 \quad \cdots ②$$

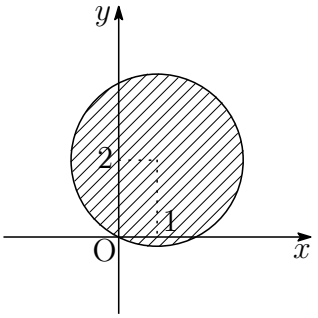
連立方程式 ①，② を解くと $x=0$，$y=1$

よって，求める交点の座標は **(0, 1)**

6. 与えられた不等式を変形すると $(x-1)^2+(y-2)^2 \leqq 5$

この不等式の表す領域は，中心 (1, 2)，半径 $\sqrt{5}$ の円の内部である．

すなわち，下の図の斜線部分である．ただし，境界線を含む．



第 6 章　大分工業高等専門学校

6.1　平成 31 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 15 \leqq 0 \end{cases}$$

2. 整式 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$ を整式 A で割ると，商が $x^2 + 1$，余りが $3x - 2$ であった．整式 A を求めよ.

3. 2 次方程式 $2x^2 - 7x + 4 = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^3 + \beta^3$ の値を求めよ.

4. $2\cos\theta + 3\sin\theta = 2$，$\sin\theta \neq 0$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ.

5. 曲線 $C : y = x^3 - 6x + 3$ 上の点 $(-2,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ.

6. 定積分 $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 2x|\, dx$ の値を求めよ.

7. 関数 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ の区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよ.

8. 初項 -5，公差 3 の等差数列について，次の各問いに答えよ，

   (1) 94 は第何項か.

   (2) 第 11 項から第 34 項までの和を求めよ.

   (3) はじめて 200 より大きくなるのは第何項か.

9. $\vec{a} = (1,\ 2)$，$\vec{b} = (3,\ 1)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ.

10. $a_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{n+1}{n} a_n + (n+1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

解答例

1. 第 1 式より　$(x-1)(x-3)>0$　ゆえに　$x<1,\ 3<x$

   第 2 式より　$(x+3)(x-5)\leqq 0$　ゆえに　$-3\leqq x\leqq 5$

   よって　　$\boldsymbol{-3\leqq x<1,\ 3<x\leqq 5}$

2. 題意から　$x^4-3x^3+2x^2-1=A(x^2+1)+3x-2$

   ゆえに　　$A(x^2+1)=x^4-3x^3+2x^2-3x+1$

   よって　$A=(x^4-3x^3+2x^2-3x+1)\div(x^2+1)=\boldsymbol{x^2-3x+1}$

3. $2x^2-7x+4=0$ の解 $\alpha,\ \beta$ と係数の関係により　$\alpha+\beta=\dfrac{7}{2},\quad \alpha\beta=2$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(\frac{7}{2}\right)^3-3\cdot 2\cdot\frac{7}{2}=\boldsymbol{\frac{175}{8}}$$

4. $2\cos\theta+3\sin\theta=2$ より，$2+3\tan\theta=\dfrac{2}{\cos\theta}$ であるから

$$(2+3\tan\theta)^2=\left(\frac{2}{\cos\theta}\right)^2=4(1+\tan^2\theta)$$

   整理すると　$\tan\theta(5\tan\theta+12)=0$　　$\sin\theta\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{\tan\theta=-\dfrac{12}{5}}$

5. $C:y=x^3-6x+3$ より，$y'=3x^2-6$ であるから，$x=-2$ のとき　$y'=6$

   曲線 C の点 $(-2,\ 7)$ における接線の方程式は

$$y-7=6(x+2)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=6x+19}$$

6. $|x^2-2x|=\begin{cases} -x^2+2x & (0\leqq x\leqq 2) \\ x^2-2x & (2\leqq x\leqq 3) \end{cases}$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^3|x^2-2x|\,dx&=\int_0^2 x(2-x)\,dx+\int_2^3(x^2-2x)\,dx\\&=\frac{1}{6}\cdot 2^3+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3=\boldsymbol{\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

7. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ より，$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$-$	0	$+$	
y	20	$\searrow$	-7	$\nearrow$	4

$x = -2$ で最大値 **20**，$x = 1$ で最小値 **-7**

8. (1) 一般項 a_n は　$a_n = -5 + (n-1)\cdot 3 = 3n - 8$

$3n - 8 = 94$ を解くと　$\boldsymbol{n = 34}$

(2) $a_{11} = 3\cdot 11 - 8 = 25$，$a_{34} = 94$，項数 $34 - 11 + 1 = 24$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 24(25 + 94) = \mathbf{1428}$$

(3) $3n - 8 > 200$ より　$n > \dfrac{208}{3}$

$\dfrac{208}{3} = 69.3\cdots$ であるから　**第 70 項**

9. $\vec{a} = (1,\ 2)$，$\vec{b} = (3,\ 1)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta = 45^\circ}$$

10. 与えられた漸化式から　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1} = \dfrac{a_n}{n} + 1$

数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ は，初項 2，公差 1 の等差数列であるから

$$\frac{a_n}{n} = 2 + (n-1)\cdot 1 = n + 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_n = n(n+1)}$$

6.2　平成 30 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式を展開せよ．

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

2. $\sqrt{3}$ の小数部分を a とする．このとき，$a-\dfrac{2}{a}$ の値を求めよ．

3. 関数 $y=2x^2-4x-1$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値，最小値を求めよ．

4. 不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leqq 2$ を解け．

5. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の等式を満たす θ の値を求めよ．

$$2\cos^2\theta+11\sin\theta-7=0$$

6. △OAB において，辺 OA を 2 : 1 に内分する点を P，辺 OB を 3 : 2 に内分する点を Q，AQ と BP の交点を R とする．次の問いに答えよ．

   (1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ を使って表せ．

   (2) 線分 OR の延長と辺 AB との交点を D とするとき，AD : DB を求めよ．

7. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，関係式 $S_n=2a_n+1$ が成り立っている．次の問いに答えよ．

   (1) 初項 a_1 を求めよ．

   (2) 一般項 a_n を求めよ．

8. $l : y=x^3-x$ がある．次の問いに答えよ．

   (1) 曲線 ℓ 上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線の方程式を求めよ．

   (2) 点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ から l へ 3 本の接線が引けるように定数 a の値の範囲を求めよ．

解答例

1. $(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = \boldsymbol{x^5-1}$

2. $\sqrt{3} = 1+(\sqrt{3}-1)$ より　$a = \sqrt{3}-1$

$$\begin{aligned} a-\frac{2}{a} &= \sqrt{3}-1-\frac{2}{\sqrt{3}-1} \\ &= \sqrt{3}-1-\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} \\ &= \sqrt{3}-1-(\sqrt{3}+1) = \boldsymbol{-2} \end{aligned}$$

3. $y = 2x^2-4x-1 = 2(x-1)^2-3$ $(-1 \leqq x \leqq 2)$

よって　$x=-1$ のとき最大値 **5**，$x=1$ のとき最小値 $\boldsymbol{-3}$

4. $\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leqq 2$ より　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) \leqq \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{9}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1 \geqq \frac{1}{9}$　よって　$\boldsymbol{x \geqq \dfrac{10}{9}}$

5. $2\cos^2\theta+11\sin\theta-7=0$ より　$2(1-\sin^2\theta)+11\sin\theta-7=0$

整理すると　$2\sin^2\theta-11\sin\theta+5=0$　ゆえに　$(\sin\theta-5)(2\sin\theta-1)=0$

$-1 \leqq \theta\sin\theta \leqq 1$ であるから　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

6. (1) $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = x\vec{a}+y\vec{b}$ とおく．$\vec{a} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\vec{b} = \dfrac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{3}y\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{3}{2}x\overrightarrow{\mathrm{OP}}+y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

R は AQ および BP 上の点であるから

$$x+\frac{5}{3}y = \frac{3}{2}x+y = 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{4}{9},\ y = \frac{1}{3}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{4}{9}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{9} = \dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7} = \dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$

したがって　$\boldsymbol{\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = 3 : 4}$

7. (1) $S_1 = a_1$ であるから，$S_n = 2a_n + 1$ より

$$a_1 = 2a_1 + 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a_1 = -1}$$

(2) $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n + 1 - (2a_{n-1} + 1)$　ゆえに　$a_n = 2a_{n-1}$　$(n \geqq 2)$

$\{a_n\}$ は初項が -1，公比が 2 の等比数列であるから

$$a_n = -1 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{-2^{n-1}}$$

8. (1) $y = x^3 - x$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 1$

l 上の点 $(t,\ t^3 - t)$ における接線の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = (3t^2 - 1)x - 2t^3}$$

(2) (1) で求めた接線が点 $\mathrm{P}(1,\ a)$ を通るとき

$$a = (3t^2 - 1) \cdot 1 - 2t^3 \quad \text{ゆえに} \quad a = -2t^3 + 3t^2 - 1$$

$f(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$ とおくと

$$f'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t - 1)$$

したがって，$f(t)$ の増減表は

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	-1	↗	0	↘

$f(t) = a$ が異なる 3 つの実数解をもつ a の値の範囲であるから

$$\boldsymbol{-1 < a < 0}$$

6.3 平成 29 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式の分母を有理化せよ．

$$\frac{4}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

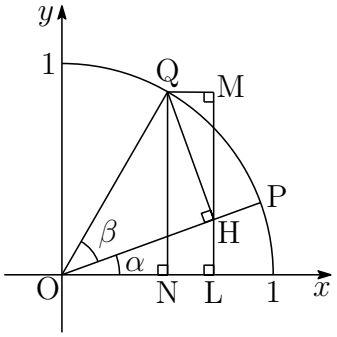
2. 次の式を因数分解せよ．

$$x^3+3x^2-4x-12$$

3. $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式をみたす θ の範囲を求めよ．

$$\sin\theta \geqq \frac{1}{2}$$

4. 次の図の線分 OL および線分 NL の長さを求めよ．



5. 第 7 項が 162，公比が 3 の等比数列がある．次の問いに答えよ．

(1) 初項を求めよ．

(2) 第 3 項から第 10 項までの和を求めよ．

6. 中心が直線 $y=\frac{1}{2}x$ 上にあり，点 $(6,\ 2)$ を通る円が x 軸に接している．この円の中心の x 座標が 5 より大きいとき，円の半径を求めよ．

7. 2 つのベクトル $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,-2,\ 1)$ について次の各問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ．

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ．

8. 関数 $y = 3\sin x + 4\cos x$ の最大値を求めよ．また，そのときの $\sin x$ の値を求めよ．

9. 直線 $y = 3x + k$ が曲線 $y = x^2 - x$ に接するように定数 k の値を定めよ．また，接点の座標を求めよ．

10. 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3$ の増減表をかけ．また，極大値・極小値を求めよ．

11. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ および定数 a の値を求めよ．

$$\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1$$

12. 2 つの放物線 $y = x^2 - 2x + 2$，$y = -x^2 + 4x - 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. $$\begin{aligned}\frac{4}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{4(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}\\ &= \frac{4(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})}{-2\sqrt{2}}\\ &= -\sqrt{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \boldsymbol{-\sqrt{2}+2+\sqrt{6}}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}x^3+3x^2-4x-12 &= x^2(x+3)-4(x+3)\\ &= (x+3)(x^2-4)\\ &= \boldsymbol{(x+3)(x+2)(x-2)}\end{aligned}$$

3. $\boldsymbol{30^\circ \leqq \theta \leqq 150^\circ}$

4. $\mathrm{OH} = \cos\beta$，$\mathrm{QH} = \sin\beta$，$\angle\mathrm{QHM} = \alpha$ であるから

$$\mathrm{OL} = \mathrm{OH}\cos\alpha = \boldsymbol{\cos\beta\cos\alpha}$$
$$\mathrm{NL} = \mathrm{QM} = \mathrm{QH}\sin\alpha = \boldsymbol{\sin\beta\sin\alpha}$$

5. (1) 初項を a とすると，第 7 項が 162 であるから

$$a\cdot 3^6 = 162 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{2}{9}}$$

(2) (1) の結果から，第 3 項 a_3 および第 10 項 a_{10} は

$$a_3 = \frac{2}{9}\cdot 3^2 = 2, \quad a_{10} = \frac{2}{9}\cdot 3^9 = 2\cdot 3^7$$

よって，求める数列の和は

$$\frac{r\cdot a_{10}-a_3}{r-1} = \frac{3\cdot 2\cdot 3^7-2}{3-1} = \boldsymbol{3^8-1}$$

6. 中心が直線 $y=\dfrac{1}{2}$ 上にある円が x 軸に接し，点 $(6,\ 2)$ を通るから，中心は x 軸の上側にある．この円の半径を r とすると，中心は $(2r,\ r)$ であるから

$$(x-2r)^2+(y-r)^2 = r^2 \quad \text{ただし} \quad 2r>5$$

この円が点 $(6,\ 2)$ を通るから

$$(6-2r)^2+(2-r)^2 = r^2 \quad \text{整理すると} \quad r^2-7r+10=0$$

$r>\dfrac{5}{2}$ に注意して，これを解くと $\quad \boldsymbol{r=5}$

7. (1) $\vec{a}=(2,\ 1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,-2,\ 1)$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3+1\cdot(-2)+3\cdot1=7$$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+3^2}=\sqrt{14}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{14}$

これと (1) の結果から，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}}=\frac{1}{2}$$

よって　　$\theta=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$

8. $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$ とおくと

$$\begin{aligned}y&=3\sin x+4\cos x=5(\sin x\cos\theta+\cos x\sin\theta)\\&=5\sin(x+\theta)\end{aligned}$$

よって，y の最大値は　$\boldsymbol{5}$

このとき，$x+\theta=\dfrac{\pi}{2}+2n\pi$ (n は整数) であるから

$$\begin{aligned}\sin x&=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+2n\pi\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\&=\cos\theta=\boldsymbol{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

9. $y=3x+k$ と $y=x^2-x$ から y を消去すると

$$3x+k=x^2-x\quad\text{すなわち}\quad x^2-4x-k=0\quad\cdots(*)$$

この方程式は重解をもつから

$$D/4=(-2)^2-1\cdot(-k)=0\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{k=-4}$$

$(*)$ から，接点の x 座標は　$x=2$

これを $y=x^2-x$ に代入すると　$y=2$

よって，求める接点の座標は　$\boldsymbol{(2,\ 2)}$

10. $y = x^3 - 3x^2 + 3$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

したがって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 3	$\searrow$	極小 -1	$\nearrow$

よって，$x = 0$ で極大値 $\mathbf{3}$，$x = 2$ で極小値 $\mathbf{-1}$ をとる．

11. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = x^2 - 2x + 1 \quad \cdots (*)$

$(*)$ の両辺を x で微分すると　$\boldsymbol{f(x) = 2x - 2}$

$(*)$ に $x = a$ を代入すると

$$0 = a^2 - 2a + 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 1}$$

12. $-x^2 + 4x - 2 - (x^2 - 2x + 2) = -2x^2 + 6x - 4 = -2(x-1)(x-2)$

よって，求める図形の面積を S とすると

$$S = -2\int_1^2 (x-1)(x-2)\,dx = -2 \times \left(-\frac{1}{6}\right)(2-1)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

6.4　平成 28 年度編入学試験 (60 分)

1. (1) 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$ の値を求めよ．

   (2) 3 次方程式 $x^3-ax^2-9x-2=0$ の 1 つの解が -2 であるという．このとき，a の値を求めよ．また，他の 2 つの解も求めよ．

   (3) $2x-y=5$ $(1 \leqq y \leqq 3)$ のとき，x^2+y の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値も求めよ．

   (4) 円 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ と直線 $y=kx+2$ が異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲を求めよ．

2. $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

   (1) $b_n=\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$ とおくと，数列 $\{b_n\}$ は等比数列になることを示せ．また，数列 $\{b_n\}$ の初項 b_1 と項比 r を求めよ．

   (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

3. ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ とする．次の問いに答えよ．

   (1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

   (2) $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直になるように実数 t の値を定めよ．

4. (1) 関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=-1$ で極大値 17，$x=2$ で極小値 -10 をとるとき，a，b，c，d の値を求めよ．

   (2) 曲線 $y=x^3+3x^2$ の接線の中で，傾きが最小になるものの方程式を求めよ．

5. a，b を正の定数とする．直線 $y=2ax$ と放物線 $y=x(x-b)$ とで囲まれた図形が，x 軸によって面積の等しい 2 つの部分に分けられるとする．このとき，次の問いに答えよ．

   (1) 直線 $y=2ax$ と放物線 $y=x(x-b)$ の交点の x 座標を a，b を用いて表せ．

   (2) 直線 $y=2ax$ と放物線 $y=x(x-b)$ で囲まれる図形の面積を a，b を用いて表せ．

   (3) $a:b$ を求めよ．

解答例

1. (1) 2 次方程式 $x^2-3x+4=0$ の 2 つの解 α，β の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=4$$

したがって

$$\frac{\beta}{\alpha-1}+\frac{\alpha}{\beta-1}=\frac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=\frac{3^2-2\cdot4-3}{4-3+1}=\boldsymbol{-1}$$

(2) $x^3-ax^2-9x-2=0$ の解が -2 であるから

$$-8-4a+18-2=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=2}$$

$x^3-2x^2-9x-2=0$　すなわち　$(x+2)(x^2-4x-1)=0$
他の解は，$x^2-4x-1=0$ を解いて　$\boldsymbol{x=2\pm\sqrt{5}}$

(3) $2x-y=5$ $(1\leqq y\leqq 3)$ より　$3\leqq x\leqq 4$
$y=2x-5$ であるから

$$x^2+y=x^2+2x-5$$
$$=(x+1)^2-6$$

よって，$x=\mathbf{4}$ のとき最大値 **19**，$x=\mathbf{3}$ のとき最小値 **10**

(4) $x^2+y^2-6x-4y+9=0$ に $y=kx+2$ を代入して，整理すると

$$(1+k^2)x^2-6x+5=0$$

この方程式の判別式を D とすると

$$D/4=(-3)^2-(1+k^2)\cdot5=4-5k^2$$

このとき，$D>0$ であるから

$$4-5k^2>0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{-\frac{2}{\sqrt{5}}<k<\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

2. (1) $a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$ より

$$a_{n+1}+1=\frac{4(a_n+1)}{a_n+2},\quad a_{n+1}-2=\frac{a_n-2}{a_n+2}$$

ゆえに　$\dfrac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+1}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{a_n-2}{a_n+1}$　すなわち　$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}b_n$

よって　$\boldsymbol{r=\dfrac{1}{4}}$，$b_1=\dfrac{a_1-2}{a_1+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(2) (1) の結果から　$b_n=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=-\dfrac{1}{2^{2n-1}}$

したがって　$\dfrac{a_n-2}{a_n+1}=-\dfrac{1}{2^{2n-1}}$　よって　$\boldsymbol{a_n=\dfrac{2^{2n}-1}{2^{2n-1}+1}}$

3. (1) $|\vec{a}-2\vec{b}|=4$ より　$|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=16$

これに $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$ を代入すると

$$9-4\vec{a}\cdot\vec{b}+16=16\quad\text{ゆえに}\quad\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{9}{4}\quad\cdots①$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{3}{8}$

(2) $\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が垂直であるから

$$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$
$$|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$$

これに $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，① を代入すると

$$9+(t-1)\cdot\frac{9}{4}-t\cdot4=0\quad\text{よって}\quad\boldsymbol{t=\frac{27}{7}}$$

4. (1) $f'(x)=0$ の解は，$x=-1$ 2 であるから，$f'(x)$ の 2 次の係数に注意して

$$f'(x)=3a(x+1)(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2-6ax+d$$

$f(-1)=17$，$f(2)=-10$ であるから

$$\frac{7}{2}a+d=17, \quad -10a+d=-10$$

これを解いて　$a=2$，$d=10$

ゆえに　　$f(x)=2x^3-3x^2-12x+10$

よって　　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3,\ c=-12,\ d=10}$

(2) $y=x^3+3x^2$ を微分すると　$y'=3x^2+6x=3(x+1)^2-3$

ゆえに，傾きが最小になるのは，$x=-1$ のときである．

求める接線は，点 $(-1,\ 2)$ を通り，傾き -3 の直線であるから

$$y-2=-3(x+1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-3x-1}$$

5. (1) $y=2ax$，$y=x(x-b)$ から y を消去すると

$$2ax=x(x-b) \quad \text{ゆえに} \quad x(x-2a-b)=0$$

よって　　$x=0,\ 2a+b$

(2) (1) の結果から，求める面積は　$\boldsymbol{\frac{1}{6}(2a+b)^3}$

(3) 放物線 $y=x(x-b)$ と x 軸で囲まれた図形の面積は　$\frac{1}{6}b^3$

条件より，これと (2) の結果から

$$\frac{1}{6}(2a+b)^3=2\times\frac{1}{6}b^3 \quad \text{ゆえに} \quad 2a+b=\sqrt[3]{2}b$$

したがって　$a=\dfrac{\sqrt[3]{2}-1}{2}b$　よって　$\boldsymbol{a:b=\sqrt[3]{2}-1:2}$

6.5　平成 27 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の各問いに答えよ．

   (1) 2 次方程式 $x^2+2x+3=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^4+\beta^4$ の値を求めよ．

   (2) $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，$\sqrt{6}\sin x - \sqrt{2}\cos x$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ．

   (3) $a>0$ のとき，$a+\dfrac{4}{a}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

   (4) 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $3x+4y+5=0$ との交点を A，B とするとき，線分 AB の長さを求めよ．

2. 数列 $\{a_n\}$ は

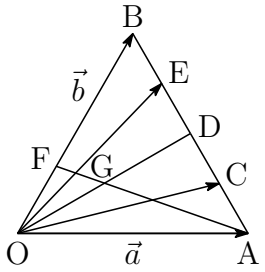
$$a_1=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+2n+4$$

   を満たしている．次の各問いに答えよ．

   (1) $\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

   (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

3. 1 辺の長さが 4 の正三角形 OAB において，辺 AB を 4 等分する点を A に近い方から C，D，E とする．また，辺 OB を 3 等分する点で，O に近い方を F とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の各問いに答えよ．



   (1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表し，その内積 $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を求めよ．

   (2) OD と AF との交点を G とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ．

   (3) △OAG の面積を求めよ．

4. 関数 $f(x)=3x^2-12x+9$ に対し，$g(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ とおくとき，次の各問いに答えよ．

   (1) $g(1)$，$g(3)$ の値を求めよ．

   (2) 関数 $g(x)$ の極値を求めよ．

5. 曲線 $y = x^2$ を C，曲線 $y = ax$ を l とする．ただし，$0 < a < 2$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) C と l で囲まれた図形の面積を S_1，C と l および直線 $x = 2$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする．$S_1 + S_2 = S$ とするとき，S を a の式で表せ．

(2) S の最小値とそのときの a の値を求めよ．

解答

1. (1) 解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-2$，$\alpha\beta=3$

ゆえに　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-2)^2-2\cdot3=-2$

よって　$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2(\alpha\beta)^2=(-2)^2-2\cdot3^2=\boldsymbol{-14}$

(2) $\sqrt{6}\sin x-\sqrt{2}\cos x=\sqrt{2}(\sqrt{3}\sin x-\cos x)$

$=2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$

$0\leqq x\leqq\pi$ より　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq x-\dfrac{\pi}{6}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって　$x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ のとき　　最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{2}}$

$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　　すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}\pi}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(3) $a>0$，$\dfrac{4}{a}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

$$a+\frac{4}{a}\geqq2\sqrt{a\cdot\frac{4}{a}}=4$$

上式で等号が成立するのは

$$a=\frac{4}{a}\quad\text{すなわち}\quad a=2$$

よって，$\boldsymbol{a=2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{4}$

(4) 円の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $3x+4y+5=0$ までの距離を d とすると

$$d=\frac{|\,5\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$$

ゆえに　$\dfrac{\mathrm{AB}}{2}=\sqrt{2^2-1^2}$　よって　$\mathbf{AB=2\sqrt{3}}$

2. (1) $b_1 = 6$，$b_{n+1} - b_n = 2n + 4$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}(2k+4)\\ b_n - b_1 &= 2\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + 4(n-1)\\ b_n &= n(n-1) + 4(n-1) + 6\\ &= n^2 + 3n + 2\end{aligned}$$

上式は，$n = 1$ のときも成立するから，求める数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = n^2 + 3n + 2 = \boldsymbol{(n+1)(n+2)}$$

(2) (1) の結果より，$a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ であるから

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2(n+2)}}\end{aligned}$$

3. (1) $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{3\vec{a} + \vec{b}}{4}}$，$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{\vec{a} + 3\vec{b}}{4}}$

ここで　$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ = 4\cdot 4\cdot\dfrac{1}{2} = 8$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= \frac{1}{16}(3|\vec{a}|^2 + 10\vec{a}\cdot\vec{b} + 3|\vec{b}|^2)\\ &= \frac{1}{16}(3\cdot 4^2 + 10\cdot 8 + 3\cdot 4^2) = \boldsymbol{11}\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{2} = 2\times\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{4}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{4} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{4}}$

(3) (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OG}}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{OAG} = \dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OAD}$，$\triangle\mathrm{OAD} = \dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OAB}$

よって　$\triangle\mathrm{OAG} = \dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sin 60^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

4. (1) $g(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)\,dt = \mathbf{0}$

$$g(3) = \int_1^3 (3x^2 - 12x + 9)\,dx$$
$$= 3\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx = 3\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \mathbf{-4}$$

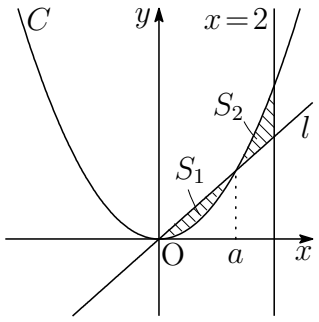
(2) $g'(x) = f(x) = 3(x-1)(x-3)$ であるから，(1) の結果より

極大値 $\boldsymbol{f(1) = 0}$，極小値 $f(3) = -4$

5. (1) $x^2 - ax$ の原始関数の 1 つを

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2$$

とおくと，求める面積 S は



$$S = -\Big[\ F(x)\ \Big]_0^a + \Big[\ F(x)\ \Big]_a^2$$
$$= F(0) + F(2) - 2F(a)$$
$$= 0 + \left(\frac{8}{3} - 2a\right) - 2\left(-\frac{1}{6}a^3\right)$$
$$= \frac{1}{3}a^3 - 2a + \frac{8}{3}$$

(2) (1) の結果から　$S' = a^2 - 2$

$0 < a < 2$ における S の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	(2)
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	極小	↗	

よって，$\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\mathbf{8 - 4\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$ をとる．

6.6 平成 26 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 2 次方程式 $x^2+4x-(2k+1)(2k-3)=0$ の解がともに 5 より小さくなるように，定数 k の値の範囲を求めよ.

   (2) 次の対数不等式を解け.

   $$\log_5(5-2x) < 2-\log_5(x+5)$$

   (3) 次の関数の最大値と最小値を求めよ.

   $$y = 5\sin x + 2\cos x$$

   (4) 点 $(x,\ y)$ が曲線 $x^2+y^2=4$ 上を動くとき，$2x+y$ の最大値と最小値を求めよ.

2. 自然数の列を次のように群に分ける．ただし，第 n 群には $2n$ 個の自然数が入るものとする.

   $$1,2 \mid 3,4,5,6 \mid 7,8,9,10,11,12 \mid 13,\cdots$$

   (1) 第 n 群の初項を求めよ.

   (2) 231 は第何群の何番目かを求めよ.

3. △OAB に辺 OA を 2 : 1 に内分する点を L，辺 OB を 3 : 1 に内分する点を M とする．また，線分 AM と線分 BL の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

4. 関数 $y=2x^3-3(2a+1)x^2+6(a^2+a)x$ について，次の各問いに答えよ．ただし，a は実数とする.

   (1) y の極大値を a を用いて表せ.

   (2) y の極大値が 1 のとき，a の値を求めよ.

5. 次の定積分の値を求めよ.

   $$\int_0^2 |x^2-3x+2|\,dx$$

解答例

1. (1) $x^2+4x-(2k+1)(2k-3)=0$ の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= 4+(2k+1)(2k-3) \\ &= 4k^2-4k+1=(2k-1)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

よって，この 2 次方程式は実数解をもつ．解を α，β とおくと，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-4\cdots①,\quad \alpha\beta=-(2k+1)(2k-3)\cdots②$$

条件を満たすには，$\alpha<5$ かつ $\beta<5$ なので

$$\begin{cases} (\alpha-5)+(\beta-5)<0 & \cdots③ \\ (\alpha-5)(\beta-5)>0 & \cdots④ \end{cases}$$

③ は ① より成立している．

$$\begin{aligned} (\alpha-5)(\beta-5) &= \alpha\beta-5(\alpha+\beta)+25 \\ &= -(2k+1)(2k-3)+20+25 \\ &= -4k^2+4k+48 \\ &= -4(k+3)(k-4) \end{aligned}$$

④ より　$\boldsymbol{-3<k<4}$

(2) 真数条件より

$$5-2x>0 \text{ かつ } x+5>0 \quad \text{すなわち} \quad -5<x<\frac{5}{2} \quad \cdots①$$

不等式から

$$\begin{aligned} &\log_5(5-2x)+\log_5(x+5)<2 \\ &\qquad \log_5(5-2x)(x+5)<\log_5 5^2 \end{aligned}$$

底 $5>1$ より

$$(5-2x)(x+5)<25 \quad \text{整理すると} \quad x(2x+5)>0$$

これを解いて　　$x<-\dfrac{5}{2},\ 0<x \quad \cdots②$

①，② より　$\boldsymbol{-5<x<-\dfrac{5}{2},\ 0<x<\dfrac{5}{2}}$

(3) $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{29}}$ となる α をとると $y = \sqrt{29}\sin(x+\alpha)$

$-1 \leqq \sin(x+\alpha) \leqq 1$ より $-\sqrt{29} \leqq y \leqq \sqrt{29}$

よって 最大値 $\boldsymbol{\sqrt{29}}$, 最小値 $\boldsymbol{-\sqrt{29}}$

(4) $(2x+y)^2 + (x-2y)^2 = (2^2+1^2)(x^2+y^2)$ であるから, $x^2+y^2=4$ より

$$(2x+y)^2 \leqq 20 \quad \text{ゆえに} \quad -2\sqrt{5} \leqq 2x+y \leqq 2\sqrt{5}$$

よって, 最大値 $\boldsymbol{2\sqrt{5}}$, 最小値 $\boldsymbol{-2\sqrt{5}}$

2. (1) 第 1 群から第 $n-1$ 群までの項数の和は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2k = n(n-1)$$

よって, 第 n 群の初項は, $n(n-1)+1$ 番目の数.
自然数の列なので, 第 n 群の初項は

$$n(n-1)+1 = \boldsymbol{n^2 - n + 1}$$

(2) (1) より第 n 群の末項は $n(n+1)$
231 が第 n 群の項であるとすると

$$n(n-1) < 231 \leqq n(n+1) \quad \cdots ①$$

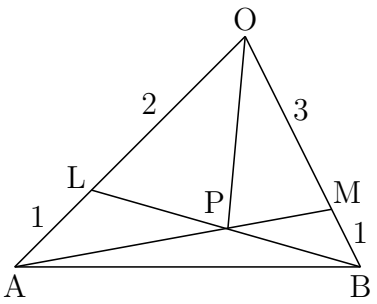
ここで, $14 \times 15 = 210$, $15 \times 16 = 240$ より
① を満たす自然数 n は $n = 15$
したがって, 231 は第 15 群の項
第 14 群の末項は, $14 \times 15 = 210$ なので

$$231 - 210 = 21$$

よって, 231 は**第 15 群の 21 番目**.

3. AP : PM $= s : 1-s$,
BP : PL $= t : 1-t$ とおく.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s)\vec{a} + \frac{3}{4}s\vec{b}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{2}{3}t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$$



$\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$ であるから，上の 2 式より

$$1-s = \frac{2}{3}t, \quad \frac{3}{4}s = 1-t$$

これを解いて　$s = \dfrac{2}{3}$, $t = \dfrac{1}{2}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}}$

4. (1) $y = 2x^3 - 3(2a+1)x^2 + 6(a^2+a)x$ を微分すると

$$\begin{aligned} y &= 6x^2 - 6(2a+1)x + 6(a^2+a) \\ &= 6\{x^2 - (2a+1)x + a(a+1)\} \\ &= 6(x-a)(x-a-1) \end{aligned}$$

$y' = 0$ のとき　$x = a,\ a+1$

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+1$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

よって，$x = a$ のとき，極大値 $\boldsymbol{2a^3 + 3a^2}$

(2) (1) の結果から　$2a^3 + 3a^2 = 1$　ゆえに　$2a^3 + 3a^2 - 1 = 0$
$P(a) = 2a^3 + 3a^2 - 1$ とおく.
$P(-1) = 0$ より，$P(a)$ は $a+1$ を因数にもつから

$$\begin{aligned} P(a) &= (a+1)(2a^2 + a - 1) \\ &= (a+1)^2(2a-1) \end{aligned}$$

$P(a) = 0$ より　　$\boldsymbol{a = -1,\ \frac{1}{2}}$

5. $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$
$x \leqq 1,\ 2 \leqq x$ のとき　$x^2 - 3x + 2 \geqq 0$
$1 < x < 2$ のとき　　$x^2 - 3x + 2 < 0$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^2-3x+2|\,dx &= \int_0^1 (x^2-3x+2)\,dx + \int_1^2 \{-(x^2-3x+2)\}\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2 \\ &= \mathbf{1}\end{aligned}$$

6.7 平成 25 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，$2\sin^2 x + \cos x - 2 = 0$ を解け.

   (2) 不等式 $9^x - 3^{x+1} > 54$ を解け.

   (3) ある整式を $(x+1)(x-3)$ で割ると余りが $3x+1$ であるという．この整式を $x-3$ で割ったときの余りを求めよ.

   (4) 次の数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ.

   $$1\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 5\cdot 7, \cdots$$

2. $x=1$ で極大値 6 をとり，$x=2$ で極小値 5 をとる 3 次関数 $f(x)$ を求めよ.

3. $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = \sqrt{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 3$ とする.

   (1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角 θ を求めよ.

   (2) 2 点 P，Q 間の距離 PQ を求めよ.

   (3) $\triangle$OPQ の面積 S を求めよ.

4. 次の各問いに答えよ.

   (1) 曲線 $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ に対して，この曲線上の点 $(0,-1)$ における接線の方程式を求めよ.

   (2) 曲線と (1) で求めた接線とで囲まれる部分の面積 S を求めよ.

5. 次の各問いに答えよ.

   (1) 3 倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を証明せよ.

   (2) $\theta = 18^\circ$ のとき $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ が成り立つことを証明し，$\sin 18^\circ$ の値を求めよ.

解答例

1. (1) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ であるから，方程式は

$$2(1-\cos^2 x) + \cos x - 2 = 0$$

整理すると　$\cos x(2\cos x - 1) = 0$

ゆえに　$\cos x = 0,\ \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(2) $t = 3^x$ とおくと　$t > 0$　$\cdots$①

$9^x = 3^{2x} = t^2$，$3^{x+1} = 3 \cdot 3^x = 3t$ であるから，不等式は

$$t^2 - 3t > 54 \quad \text{ゆえに} \quad (t+6)(t-9) > 0$$

① に注意して，これを解くと　$t > 9$

したがって　$3^x > 9$　よって　$\boldsymbol{x > 2}$

(3) 整式 $P(x)$ を $(x+1)(x-3)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x+1)(x-3)Q(x) + 3x + 1$$

$P(x)$ を $x-3$ で割った余りは $\mathrm{P}(3)$ であるから，上式より

$$P(3) = \mathbf{10}$$

(4) 第 n 項は $(2n-1)(2n+1)$ であるから

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{2}(2k-1)(2k+1) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(4k^2-1) \\ &= 4 \times \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - n \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{3}(4n^2+6n-1)} \end{aligned}$$

2. $f(x)$ は 3 次関数であるから，$f'(x)$ は 2 次関数.

$f'(x) = 0$ は $x = 1,\ 2$ を解にもつので，$f'(x)$ は

$$f'(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2)$$

したがって　$f(x) = a\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{2}x^2 + 2x\right) + d$

$f(1) = 6$，$f(2) = 5$ であるから

$$\frac{5}{6}a + d = 6, \quad \frac{2}{3}a + d = 5$$

これを解いて　$a = 6$，$d = 1$

よって，求める 3 次関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 6\left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right) + 1 \\ &= \boldsymbol{2x^3 - 9x^2 + 12x + 1} \end{aligned}$$

3. (1) $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|} = \dfrac{3}{2\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2\cdot 3 + 2^2 = 1 \end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| > 0$ であるから　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 1}$

(3) $S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{3}\sin 30^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

4. (1) $y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 6x + 3$

$x = 0$ のとき　　$y' = 3$

よって，点 $(0, -1)$ における接線の方程式は

$$y - (-1) = 3(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 3x - 1}$$

(2) (1) で求めた接線と曲線の共有点の x 座標は

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 3x - 1 \quad \text{すなわち} \quad x^2(x - 3) = 0$$

これを解いて　　$x = 0,\ 3$

$0 \leqq x \leqq 3$ において

$$(3x - 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = -x^2(x - 3) \geqq 0$$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{(3x - 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)\}\, dx \\ &= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\, dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + x^3 \right]_0^3 = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

5. (1) 左辺 $=\cos(2\theta+\theta)$

$$\begin{aligned}&=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta\\&=(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\theta\\&=2\cos^3\theta-\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\&=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\text{右辺}\end{aligned}$$

(2) $\theta=18^\circ$ のとき　$5\theta=90^\circ$ より

$$\sin 2\theta=\sin(90^\circ-3\theta)=\cos 3\theta$$

よって　　$\boldsymbol{\sin 2\theta=\cos 3\theta}$

$\sin\theta=2\sin\theta\cos\theta$ および (1) の結果を上式に代入して

$$2\sin\theta\cos\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

このとき，$\cos\theta\neq 0$ であるから

$$2\sin\theta=4\cos^2\theta-3\quad\text{ゆえに}\quad 4\sin^2\theta+2\sin\theta-1=0$$

$\sin\theta>0$ であるこのことに注意して　$\sin\theta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

よって　　$\boldsymbol{\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$

6.8　平成 24 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ．

   (1) 方程式 $|x^2-4|=k$ (k : 定数) の実数解の個数を調べよ．

   (2) 方程式 $\log_2 x+\log_2(x-2)=3$ を解け．

   (3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．いま，

   $$a_1=1,\quad S_n=\frac{2n}{n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

   が成り立っているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

   (4) △ABC において，AB $=4$，BC $=5$，$\angle$A $=60^\circ$ とするとき，AC の長さを求めよ．

2. $0\leqq x\leqq \pi$ のとき，関数

   $$f(x)=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)+(\sin x-\cos x)^2$$

   について，次の各問いに答えよ．

   (1) $\sin x+\cos x=t$ とおくとき，$f(x)$ を t の式で表せ．また，t のとりうる値の範囲を求めよ．

   (2) $f(x)$ の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ．

3. a，b は定数で，$a>0$ とする．関数

   $$y=x^3-ax+b$$

   について，次の問いに答えよ．

   (1) 極大値 4，極小値 0 をとるように定数 a，b の値を定めよ．

   (2) (1) で定めた定数 a，b の値のとき，この関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

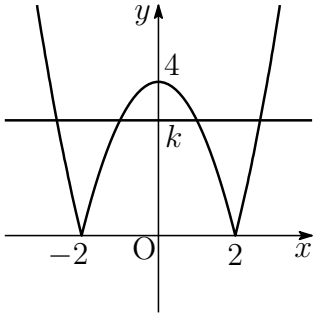
4. △ABC について，次の各問いに答えよ．

   (1) 辺 BC を 1 : 2 の比に内分する点を D，辺 AC の中点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

   (2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$ の交点を P とする．AP : PD $=s:(1-s)$ $(0<s<1)$，BP : PE $=t:(1-t)$ $(0<t<1)$ とするとき，s，t の値を求めよ．

解答例

1. (1) 方程式 $|x^2-4|=k$ の実数解の個数は,



$$y=|x^2-4| \text{ および } y=k$$

の共有点の個数である.
したがって，右のグラフから

$\boldsymbol{k<0}$ のとき	**0 個**
$\boldsymbol{k=0,\ 4<k}$ のとき	**2 個**
$\boldsymbol{k=4}$ のとき	**3 個**
$\boldsymbol{0<k<4}$ のとき	**4 個**

(2) 真数は正であるから

$$x>0 \quad \text{かつ} \quad x-2>0 \quad \text{ゆえに} \quad x>2 \quad \cdots ①$$

方程式を変形すると

$$\log_2 x(x-2)=3 \qquad \text{ゆえに} \qquad x(x-2)=2^3$$

したがって $\quad x^2-2x-8=0$

$$(x+2)(x-4)=0$$

① に注意して，これを解くと $\quad \boldsymbol{x=4}$

(3) $n \geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{(n-1)+1}=\frac{2n}{n+1}-\frac{2(n-1)}{n}$$
$$=\frac{2n^2-2(n+1)(n-1)}{n(n+1)}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$a_1=1$ であるから，上式は $n=1$ のときも成り立つ.

したがって，一般項は $\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{2}{n(n+1)}}$

(4) $a=5$，$c=4$，$A=60^\circ$ を余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ に適用すると

$$5^2=b^2+4^2-2b\cdot 4\cos 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad b^2-4b-9=0$$

$b>0$ であることに注意して　　$\boldsymbol{AC=2+\sqrt{13}}$

2. (1) 等式

$$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$$

により，$\sin x+\cos x=t$ とおくと　$(\sin x-\cos x)^2=2-t^2$

したがって　　$f(x)=\sqrt{2}\,t+(2-t^2)=\boldsymbol{-t^2+\sqrt{2}\,t+2}$

また　　$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) \quad (0\leqq x\leqq\pi) \quad \cdots ①$

よって　　$\boldsymbol{-1\leqq t\leqq\sqrt{2}}$

(2) (1) の結果から

$$f(x)=-\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{5}{2} \quad (-1\leqq t\leqq\sqrt{2})$$

$f(x)$ は　$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ で　最大値 $\dfrac{5}{2}$ をとり，

$t=-1$ で　最小値 $1-\sqrt{2}$ をとる．

① より　$t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき　$x=\dfrac{7}{12}\pi$

$t=-1$ のとき　$x=\pi$

よって，$f(x)$ は　$\boldsymbol{x=\dfrac{7}{12}\pi}$ で　最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ をとり，

$\boldsymbol{x=\pi}$ で　　最小値 $\boldsymbol{1-\sqrt{2}}$ をとる．

3. (1) $a>0$ であるから，ここで $k>0$，$a=3k^2\cdots$① とおくと

$$y=x^3-3k^2x+b$$

したがって　　$y'=3x^2-3k^2=3(x+k)(x-k)$

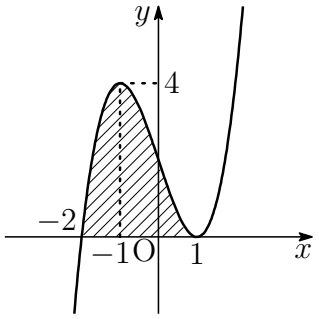
ゆえに，$x=-k$ で極大値 $2k^3+b$ をとり，$x=k$ で極小値 $-2k^3+b$ をとる．

このとき　　$2k^3+b=4,\quad -2k^3+b=0$

したがって　　$k=1$，$b=2$　　① より　　$\boldsymbol{a=3,\ b=2}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} y&=x^3-3x+2\\ &=(x+2)(x-1)^2 \end{aligned}$$

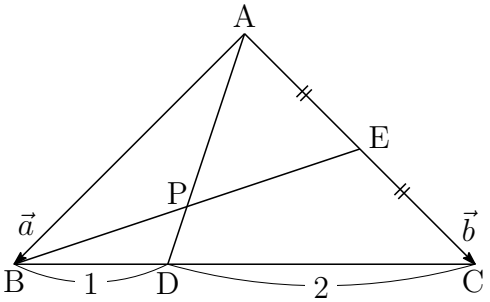


よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S&=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx\\ &=\left[\ \frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\ \right]_{-2}^{1}=\boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

4. (1) 右の図から

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AD}}&=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{1+2}=\boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}\\ \overrightarrow{\mathrm{BE}}&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}} \end{aligned}$$



(2) $\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=s:(1-s)$ $(0<s<1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AD}}=s\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)=\frac{2}{3}s\vec{a}+\frac{1}{3}s\vec{b}\quad\cdots①$$

$\mathrm{BP}:\mathrm{PE}=t:(1-t)$ $(0<t<1)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\vec{a}+t\left(\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}\right)=(1-t)\,\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}\quad\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は平行でないから，①，② より

$$\frac{2}{3}s=1-t,\quad \frac{1}{3}s=\frac{1}{2}t\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{s=\frac{3}{4},\ t=\frac{1}{2}}$$

6.9　平成 23 年度編入学試験 (60 分)

1. 整式 $P(x)$ を $x-1$ で割ると割り切れ，$x+2$ で割ると余りが 6 であった．$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ．

2. 2 次方程式 $2x^2-7x+4=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^3+\beta^3$ の値を求めよ．

3. 初項 -5，公差 3 の等差数列について，次の各問いに答えよ．

   (1) 94 は第何項か．

   (2) 第 11 項から第 34 項までの和を求めよ．

   (3) はじめて 200 より大きくなるのは第何項か．

4. 中心が直線 $y=x$ 上にあり，2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ．

5. $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(3,\ 1)$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を求めよ．

6. $2\cos\theta+3\sin\theta=2$，$\sin\theta\neq 0$ のとき，$\tan\theta$ の値を求めよ．

7. 関数 $y=2x^3+3x^2-12x$ の区間 $-3\leqq x\leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ．

8. 2 つの放物線 $y=2x^2-3x+2$，$y=x^2+x-1$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. $P(x)$ は $x-1$ で割り切れるから　$P(1)=0$　$\cdots$①

   $P(x)$ を $x+2$ で割った余りは 6 であるから　$P(-2)=6$　$\cdots$②

   $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

   $$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

   したがって　$P(1)=a+b$，$P(-2)=-2a+b$

   上式および ①，② から　$a+b=0,\quad -2a+b=6$

   これを解いて　$a=-2,\ b=2$

   よって，求める余りは　$\boldsymbol{-2x+2}$

2. 解と係数の関係により

   $$\alpha+\beta=-\frac{-7}{2}=\frac{7}{2},\quad \alpha\beta=\frac{4}{2}=2$$

   したがって　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

   $$=\left(\frac{7}{2}\right)^3-3\times 2\times\frac{7}{2}=\boldsymbol{\frac{175}{8}}$$

3. (1) この数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=-5+(n-1)\cdot 3=3n-8$

   ゆえに　$3n-8=94$　これを解いて　$n=34$

   よって，94 は　**第 34 項**

   (2) $a_{11}=3\cdot 11-8=25$，$a_{34}=94$，項数は　$34-11+1=24$

   よって，求める数列の和は

   $$\frac{1}{2}\times 24\times(25+94)=\boldsymbol{1428}$$

   (3) $3n-8>200$　これを解いて　$n>67\dfrac{1}{3}$

   よって，上式をみたす最小の整数 n であるから　**第 68 項**

4. 2 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$ をそれぞれ O，A とする．

   中心が直線 $y=x$ 上にあるから中心を $\mathrm{C}(c,\ c)$，半径を r とおく．

   このとき，$r=\mathrm{OC}=\mathrm{AC}$，ゆえに，$r^2=\mathrm{OC}^2=\mathrm{AC}^2$ であるから

   $$r^2=c^2+c^2=(c-1)^2+(c-2)^2\quad \text{すなわち}\quad c=\frac{5}{6},\quad r^2=\frac{25}{18}$$

   よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{25}{18}}$

5. $\vec{a} = (1,\ 2)$，$\vec{b} = (3,\ 1)$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2}\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　　$\theta = \mathbf{45^\circ}$

6. $2\cos\theta + 3\sin\theta = 2$ の両辺を平方し，$\cos^2\theta$ で割ると

$$4\cos^2\theta + 12\cos\theta\sin\theta + 9\sin^2\theta = 4$$

$$4 + 12\tan\theta + 9\tan^2\theta = \frac{4}{\cos^2\theta}$$

$\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta$ であるから，これを右辺に代入して整理すると

$$12\tan\theta + 5\tan^2\theta = 0$$

$\sin\theta \neq 0$ より，$\tan\theta \neq 0$ であるから　　$\boldsymbol{\tan\theta = -\dfrac{12}{5}}$

7. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ を微分すると

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$$

$y' = 0$ とすると，$x = -2,\ 1$ であるから，$-3 \leqq x \leqq 3$ において増減を調べると

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	9	↗	極大 20	↘	極小 -7	↗	45

よって，$x = 3$ で**最大値 45**，$x = 1$ で**最小値 −7** をとる．

8. 2 つの放物線の共有点の x 座標は

$$2x^2 - 3x + 2 = x^2 + x - 1 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1,\ 3$$

$1 \leqq x \leqq 3$ において　$x^2 + x - 1 \geqq 2x^2 - 3x + 2$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(x^2 + x - 1) - (2x^2 - 3x + 2)\}\,dx \\ &= -\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \mathbf{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

6.10 平成 22 年度編入学試験 (60 分)

1. $x = \dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$，$y = \dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ のとき，次の式の値を求めよ．

   (1) $x+y$

   (2) xy

   (3) x^2+y^2

   (4) x^3+y^3

2. $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y=4$ のとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ．またそのときの x，y の値も求めよ．

3. $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$，$\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，次の式の値を求めよ．

   (1) $\sin 2\theta$

   (2) $\cos 2\theta$

   (3) $\cos\dfrac{\theta}{2}$

4. 座標空間の 3 点 A$(3,\ 4,-2)$，B$(6,\ 6,-3)$，C$(1,\ 5,\ 1)$ について，$\angle \mathrm{BAC} = \theta$ とするとき，次の各問いに答えよ．

   (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積を求めよ．

   (2) 角 θ を求めよ．

   (3) 三角形 ABC の面積を求めよ．

5. 次の各問いに答えよ．

   (1) 関数 $f(x) = x^3+ax^2+bx-12$ が $x=-1$ で極大値をとり，$x=3$ で極小値をとるような定数 a，b の値を求めよ．

   (2) 次の 2 つの放物線で囲まれた部分の面積を求めよ．

   $$y = 2x^2+x-1,\ y = -x^2+4x+5$$

解答例

1. (1) $x+y=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{7}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{7}+\sqrt{3})(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$
$=\dfrac{(10-2\sqrt{21})+(10+2\sqrt{21})}{7-3}=\mathbf{5}$

   (2) $xy=\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\mathbf{1}$

   (3) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=5^2-2\cdot1=\mathbf{23}$

   (4) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=5^3-3\cdot1\cdot5=\mathbf{110}$

2. $2x+y=4$ より　$y=4-2x$　$\cdots$①

   $y\geqq0$ であるから，① より　$4-2x\geqq0$

   $x\geqq0$ に注意してこれを解くと　$0\leqq x\leqq2$　$\cdots$②

   ① より

$$\begin{aligned}x^2+y^2&=x^2+(4-2x)^2\\&=5x^2-16x+16\\&=5\left(x-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{16}{5}\end{aligned}$$

   したがって，② の範囲において，x^2+y^2 は

   $x=0$ のとき最大値 16，$x=\dfrac{8}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{16}{5}$

   をとる．

   ① より，x^2+y^2 は

   $\boldsymbol{x=0,\ y=4}$ のとき**最大値 16**，
   $\boldsymbol{x=\dfrac{8}{5},\ y=\dfrac{4}{5}}$ のとき**最小値 $\dfrac{16}{5}$**

   をとる．

3. (1) $\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より $\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

よって $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{24}{25}}$

(2) $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\times\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = \boldsymbol{-\dfrac{7}{25}}$

(3) $\cos^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1+\cos\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{1+\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right\} = \dfrac{1}{5}$

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ より $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\theta}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから $\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$

したがって $\boldsymbol{\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

4. (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6-3,\ 6-4,\ -3-(-2)) = (3,\ 2, -1)$
$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1-3,\ 5-4,\ 1-(-2)) = (-2,\ 1,\ 3)$

ゆえに $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\cdot(-2)+2\cdot 1+(-1)\cdot 3 = \boldsymbol{-7}$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \sqrt{(-2)^2+1^2+3^2} = \sqrt{14}$$

よって $\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \dfrac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから $\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$

(3) (2) の結果から

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{14}\sqrt{14}\sin 120^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{14}\sqrt{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{7}{2}\sqrt{3}}$$

5. (1) $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(x) = 0$ の解が $-1,\ 3$ であるから，解と係数の関係により

$$-1 + 3 = -\frac{2a}{3}, \quad -1 \cdot 3 = \frac{b}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{a = -3,\ b = -9}$

(2) 2 つの放物線の共有点の x 座標は

$$2x^2 + x - 1 = -x^2 + 4x + 5 \quad \text{これを解いて} \quad x = -1,\ 2$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において　$-x^2 + 4x + 5 \geqq 2x^2 + x - 1$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(-x^2 + 4x + 5) - (2x^2 + x - 1)\}\, dx \\ &= -3 \int_{-1}^{2} (x + 1)(x - 2)\, dx \\ &= -3 \left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{27}{2}} \end{aligned}$$

6.11 平成 21 年度編入学試験 (60 分)

1. $3^{2x+2} + 26 \times 3^x - 3 = 0$ において $3^x = t$ とおくことによりこの方程式を解け.

2. 真数条件や対数の底に注意して次の不等式を解け.
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+9) > \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x - 3)$$

3. $0 \leqq x < 2\pi$ のとき $y = -\sin^2 x + 2\cos x$ の最大値と最小値，またそのときの x の値を求めよ.

4. 2 直線 ℓ_1，ℓ_2 が直交するように m を定め，またこのとき 2 直線の交点の座標を求めよ．ただし t は媒介変数とする.
$$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}, \quad \ell_2 : y = mx + 3$$

5. (1) 関数 $y = x(3 - x^2)$ の極値を求め，またそのグラフの概形をかけ.

   (2) (1) の関数の極小になる点 A と極大になる点 B を結ぶ直線 AB の傾きを求めよ．また直線 AB に平行な接線を引くことができるこの曲線上の点の座標を求めよ.

解答例

1. $3^x = t$ とおくと　$t > 0$

   方程式は　　$9t^2 + 26t - 3 = 0$

   すなわち　　$(t+3)(9t-1) = 0$

   $t > 0$ より　　$t = \dfrac{1}{9}$

   したがって　$3^x = \dfrac{1}{9}$　これを解いて　$\boldsymbol{x = -2}$

2. 真数は正であり，底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいので

   $$0 < 2x + 9 < x^2 - 2x - 3$$

   ゆえに　$\begin{cases} 0 < 2x + 9 \\ 2x + 9 < x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

   第 1 式から　　$x > -\dfrac{9}{2}$　　$\cdots$①

   第 2 式から　　$x < -2,\ 6 < x$　$\cdots$②

   ①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\dfrac{9}{2} < x < -2,\ 6 < x}$

3. $y = -\sin^2 x + 2\cos x = -(1 - \cos^2 x) + 2\cos x$

   $\cos x = t$ とすると，$0 \leqq x < 2\pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$

   関数は　　$y = t^2 + 2t - 1 = (t+1)^2 - 2 \quad (-1 \leqq t \leqq 1)$

   よって

   $t = 1$　　すなわち　$\boldsymbol{x = 0}$ で**最大値 2**，

   $t = -1$　すなわち　$\boldsymbol{x = \pi}$ で**最小値 −2**

   をとる．

4. l_1 について，第 1 式から　$t = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}$

これを第 2 式に代入して　$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$

l_2 は l_1 と垂直であるから，l_2 の傾き m は

$$\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{m = -2}$$

連立方程式 $\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2} \\ y = -2x + 3 \end{cases}$ を解くと　$x = \dfrac{3}{5}$，$y = \dfrac{9}{5}$

したがって，l_1，l_2 の交点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{3}{5}},\ \boldsymbol{\dfrac{9}{5}}\right)$

5. (1) $y = x(3 - x^2) = -x^3 + 3x$ より

$$y' = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

$y' = 0$ とすると

$$x = -1,\ 1$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

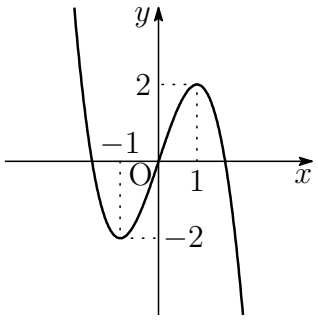
したがって，この関数は

$x = -1$ で極小値 -2

$x = 1$ で極大値 2

をとる．

グラフは，右の図のようになる．



(2) (1) の結果から　A$(-1, -2)$，B$(1,\ 2)$

したがって，直線 AB の傾きは　$\dfrac{2-(-2)}{1-(-1)} = \boldsymbol{2}$

接線の傾きが 2 である接点の x 座標は

$$-3x^2 + 3 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

したがって，求める接点の座標は

$$\left(\pm\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}},\ \pm\frac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{3\sqrt{3}}}\right) \text{ (複号同順)}$$

6.12　平成 20 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の各問に答えよ．

   (1) 整式 $6a^3+8a^2+a+1$ を整式 $2a^2+2a-1$ で割ったときの商と余りを求めよ．

   (2) $a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき，$6a^3+8a^2+a+1$ の値を求めよ．

2. $\sqrt{5}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，$a+\dfrac{1}{b}$ の値を求めよ．

3. △ABC において，AB $=3$，AC $=4$，∠A $=60°$，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，次の各問に答えよ．

   (1) △ABC の面積を求めよ．

   (2) AD の長さを求めよ．

   (3) BD の長さを求めよ．

4. 関数 $y=x^2-2x+2$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値と最小値を求めよ．ただし，a は正の定数とする．

5. $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{n+1}{n}a_n+n(n+1)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を，$b_n=\dfrac{a_n}{n}$ とおくことによって求めよ．

6. 曲線 $C: y=x^3-6x+3$ について，次の各問に答えよ．

   (1) 曲線 C 上の点 $(-2,\ 7)$ における接線の方程式を求めよ．

   (2) (1) で求めた接線と曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

1. (1)
$$\begin{array}{r} 3a\quad +1 \\ 2a^2+2a-1\,)\overline{6a^3+8a^2\ \ +a+1} \\ \underline{6a^3+6a^2-3a} \\ 2a^2+4a+1 \\ \underline{2a^2+2a-1} \\ 2a+2 \end{array}$$

よって　**商 $3a+1$，余り $2a+2$**

(2) (1) の結果から

$$6a^3+8a^2+a+1=(2a^2+2a-1)(3a+1)+2a+2$$

$a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ のとき

$$2a^2+2a-1=2\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+2\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-1=0$$

以上のことから

$$\begin{aligned} 6a^3+8a^2+a+1&=0\times(3a+1)+2\times\frac{-1+\sqrt{3}}{2}+2 \\ &=\boldsymbol{\sqrt{3}+1} \end{aligned}$$

2. $2<\sqrt{5}<3$ より　$a=2$

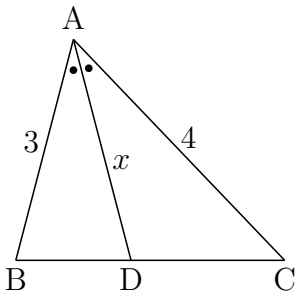
$a+b=\sqrt{5}$ であるから　$b=\sqrt{5}-2$

よって

$$a+\frac{1}{b}=2+\frac{1}{\sqrt{5}-2}=2+\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\boldsymbol{\sqrt{5}+4}$$

3. (1) $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

(2) $\mathrm{AD} = x$ とすると，$\triangle \mathrm{ABD} + \triangle \mathrm{ACD} = \triangle \mathrm{ABC}$ より



$$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\sin 30^\circ = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{3}{4}x + x = 3\sqrt{3}$$

$$x = \frac{12}{7}\sqrt{3}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AD} = \dfrac{12}{7}\sqrt{3}}$

(3) BC の長さ a は，$b = 4$，$c = 3$，$A = 60^\circ$ を余弦定理に適用して

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 60^\circ \\ &= 16 + 9 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2} \\ &= 13 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　$a = \sqrt{13}$

AD は $\angle$A の二等分線であるから　$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$

ゆえに，点 D は線分 BC を 3 : 4 に内分する点である．

よって　$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \dfrac{3}{3+4} = \sqrt{13} \times \dfrac{3}{7} = \boldsymbol{\dfrac{3}{7}\sqrt{13}}$

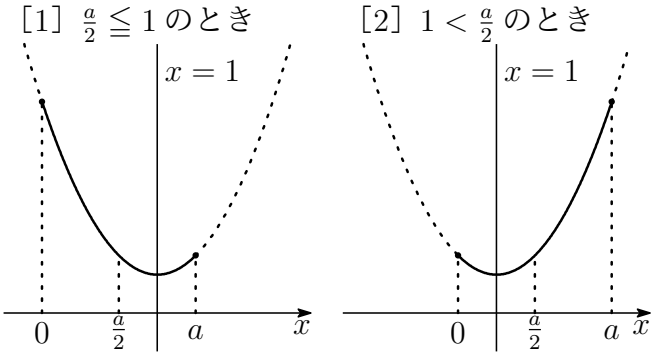
4. $f(x)=x^2-2x+2$ とおくと，$f(x)=(x-1)^2+1$ であるから，与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は $x=1$ である．定義域 $0 \leqq x \leqq a$ の中央が $\frac{a}{2}$ であるから，最大値は，次の 2 つの場合に分けて求める．

［1］$\frac{a}{2} \leqq 1$　すなわち　$0<a \leqq 2$ のとき

$x=0$ で最大となり，最大値は　$f(0)=2$

［2］$1<\frac{a}{2}$　すなわち　$2<a$ のとき

$x=a$ で最大となり，最大値は　$f(a)=a^2-2a+2$



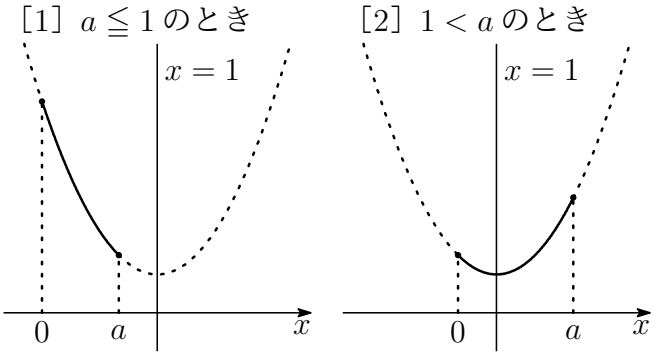
最小値は，次の 2 つの場合に分けて求める．

［1］$a \leqq 1$　すなわち　$0<a \leqq 1$ のとき

$x=a$ で最小となり，最小値は　$f(a)=a^2-2a+2$

［2］$1<a$ のとき

$x=1$ で最小となり，最小値は　$f(1)=1$



よって
$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a \leqq 2} \text{ のとき最大値 } \boldsymbol{2} \\ \boldsymbol{2<a} \text{ のとき最大値 } \boldsymbol{a^2-2a+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a \leqq 1} \text{ のとき最小値 } \boldsymbol{a^2-2a+2} \\ \boldsymbol{1<a} \text{ のとき最小値 } \boldsymbol{1} \end{cases}$$

5. 漸化式より　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+n$　ゆえに　$b_{n+1}-b_n=n$

数列 $\{b_n\}$ は初項が $b_1=\dfrac{a_1}{1}=2$，階差数列の第 n 項が n であるから

$n \geqq 2$ のとき　　$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k$

$$=2+\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{2}(n^2-n+4)$$

初項は $b_1=2$ なので，上の b_n は $n=1$ のときにも成り立つ．

したがって　　$b_n=\dfrac{1}{2}(n^2-n+4)$

$a_n=n\cdot b_n$ であるから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{2}n(n^2-n+4)}$$

6. (1) $f(x)=x^3-6x+3$ とおくと　$f'(x)=3x^2-6$

C 上の点 $(-2,\ 7)$ における接線の傾きは　$f'(-2)=3\cdot(-2)^2-6=6$

よって，この点における接線の方程式は

$$y-7=6(x+2)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=6x+19}$$

(2) 曲線 C と (1) で求めた接線の共有点の x 座標は

$$x^3-6x+3=6x+19\quad \text{すなわち}\quad (x+2)^2(x-4)=0$$

これを解いて　$x=-2,\ 4$

$-2 \leqq x \leqq 4$ において

$$(x^3-6x+3)-(6x+19)=(x+2)^2(x-4) \leqq 0$$

ゆえに　　$6x+19 \geqq x^3-6x+3$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\int_{-2}^{4}\{(6x+19)-(x^3-6x+3)\}\,dx\\&=\int_{-2}^{4}(-x^3+12x+16)\,dx\\&=\left[-\frac{1}{4}x^4+6x^2+16x\right]_{-2}^{4}=\boldsymbol{108}\end{aligned}$$

6.13 平成 19 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の連立不等式を解け.
$$\begin{cases} x^2 - 4x - 3 > 0 \\ x^2 - 2x - 15 \leqq 0 \end{cases}$$

2. 2 次関数 $y = kx^2 - 4x + 1$ のグラフが x 軸と接するように，定数 k の値を定め，接点の座標を求めよ.

3. 整式 $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$ を整式 A で割ると，商が $x^2 + 1$，余りが $3x - 2$ であった．整式 A を求めよ.

4. 2 点 $\mathrm{A}(2, -1)$，$\mathrm{B}(4,\ 5)$ を結ぶ線分 AB の垂直 2 等分線の方程式を求めよ.

5. 三角形 ABC において，線分 BC，CA，AB の長さを順に，2，3，4 とする．次の値を求めよ.

   (1) $\cos A$

   (2) $\sin A$

   (3) 三角形 ABC の面積

6. 定積分 $\displaystyle\int_0^3 |x^2 - 2x|\, dx$ を求めよ.

7. 3 次関数 $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ の極値を求めよ.

8. 三角形 ABC において，線分 BC を 2 : 3 の比に内分する点を P，線分 AC の中点を Q とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の 2 つのベクトルで表せ.

解答例

1. 第 1 式から　$x < 2-\sqrt{7},\ 2+\sqrt{7} < x$　$\cdots$①
   第 2 式から　　$-3 \leqq x \leqq 5$　　$\cdots$②

   ①，② の共通範囲を求めて

   $$\boldsymbol{-3 \leqq x < 2-\sqrt{7},\ \ 2+\sqrt{7} < x \leqq 5}$$

2. グラフが x 軸に接するとき，係数について $D/4 = 0$ であるから

   $(-2)^2 - k\cdot 1 = 0$　これを解いて　$\boldsymbol{k = 4}$

   x 軸との接点の x 座標は　$x = -\dfrac{-4}{2k} = -\dfrac{-4}{2\cdot 4} = \dfrac{1}{2}$

   よって，接点の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{2},\ 0}\right)$

3. この割り算について，次の等式が成り立つ．

   $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = A(x^2+1) + 3x - 2$

   整理すると

   $x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = A(x^2+1)$

   よって，$x^4-3x^3+2x^2-3x+1$ は x^2+1 で割り切れて，その商が A である．
   右の計算により

   $\boldsymbol{A = x^2 - 3x + 1}$

   $$\begin{array}{r} x^2\ -3x\ \ +1 \\ \hline x^2\ \ +1\,)\,x^4-3x^3+2x^2-3x+1 \\ \underline{\ x^4\ \ \ \ \ +x^2\ \ \ \ \ } \\ -3x^3\ +x^2-3x \\ \underline{-3x^3\ \ \ \ \ -3x\ \ } \\ x^2\ \ +1 \\ \underline{\ x^2\ \ +1\ } \\ 0 \end{array}$$

4. 線分 AB の中点を M とすると，その座標は

   $\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{-1+5}{2}\right)$　すなわち　$(3,\ 2)$

   線分 AB の傾きは　$\dfrac{5-(-1)}{4-2} = 3$

   線分 AB に垂直な直線の傾き m は

   $3m = -1$　ゆえに　$m = -\dfrac{1}{3}$

   よって，求める直線は，点 M を通り傾き $-\dfrac{1}{3}$ の直線であるから

   $y - 2 = -\dfrac{1}{3}(x-3)$　すなわち　$\boldsymbol{x + 3y - 9 = 0}$

5. (1) $a=2$，$b=3$，$c=4$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+4^2-2^2}{2\cdot3\cdot4}=\frac{21}{24}=\boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

(2) △ABC において，$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{8}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\times\dfrac{\sqrt{15}}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{4}\sqrt{15}}$

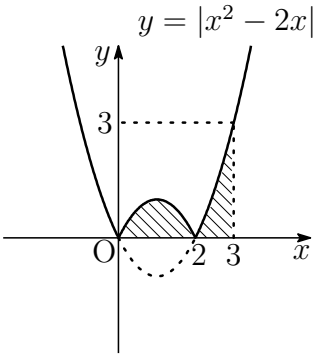
6. $0\leqq x\leqq2$ のとき

$$|x^2-2x|=-x^2+2x$$

$2\leqq x\leqq3$ のとき

$$|x^2-2x|=x^2-2x$$

であるから



$$\begin{aligned}\int_0^3|x^2-2x|\,dx&=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx+\int_2^3(x^2-2x)\,dx\\&=-\int_0^2x(x-2)\,dx+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3\\&=-\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3+\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

7. $y'=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 28	↘	極小 -4	↗

よって，$\boldsymbol{x=-3}$ で**極大値 28**，$\boldsymbol{x=1}$ で**極小値 -4** をとる．

8. P は線分 BC を 2 : 3 に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

Q は線分 AC の中点であるから　　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}} &= \overrightarrow{\mathrm{AQ}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \left(\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{10}\overrightarrow{\mathrm{AC}}}\end{aligned}$$

6.14 平成 18 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の問いに答えよ.

   (1) 3 次方程式 $x^3 - 5x + 2 = 0$ を解け.

   (2) 2 次方程式 $x^2 - (m+2)x + 4 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつように定数 m の値の範囲を定めよ.

2. α が第 2 象限の角，β が第 3 象限の角で，$\sin\alpha = \dfrac{1}{5}$，$\cos\beta = -\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos(\alpha+\beta)$ の値を求めよ.

3. $\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 9$ のとき，$y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^3$ について次の問いに答えよ.

   (1) $X = \log_3 x$ とおくとき，X のとり得る値の範囲を求めよ.

   (2) 関数 y の最大値，最小値を求めよ．また，そのときの x の値も求めよ.

4. 関数 $y = \log(x + \sqrt{x^2+4})$ を微分せよ.

5. 半径 3 の球に内接する直円柱がある．その高さを x とするとき，次の問いに答えよ.

   (1) 直円柱の体積 V を x の式で表せ．また，x のとり得る値の範囲も示せ.

   (2) V の最大値を求めよ．またそのときの x の値も求めよ.

6. 曲線 $y = x^3 - x^2 - 2x - 2$ について，次の問いに答えよ.

   (1) この曲線上の点 $(-1, -2)$ における接線の方程式を求めよ.

   (2) この曲線と接線とで囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $P(x)=x^3-5x+2$ とすると

$$P(2)=2^3-5\cdot 2+2=0$$

よって，$P(x)$ は $x-2$ を因数にもち

$$P(x)=(x-2)(x^2+2x-1)$$

$P(x)=0$ から

$$x-2=0 \quad \text{または} \quad x^2+2x-1=0$$

したがって　　$\boldsymbol{x=2,\ -1\pm\sqrt{2}}$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+2x-1 \\ \hline x-2 & x^3\qquad -5x+2 \\ & x^3-2x^2 \\ \hline & \quad 2x^2-5x \\ & \quad 2x^2-4x \\ \hline & \qquad -x+2 \\ & \qquad -x+2 \\ \hline & \qquad\quad 0 \end{array}$$

(2) 異なる 2 つの実数解をもつとき，係数について $D>0$ であるから

$$\{-(m+2)\}^2-4\cdot 1\cdot 4>0$$

整理すると　　$m^2+4m-12>0$

すなわち　　$(m+6)(m-2)>0$

よって　　$\boldsymbol{m<-6,\ 2<m}$

2. α の動径が第 2 象限にあるから　　$\cos\alpha<0$

β の動径が第 3 象限にあるから　　$\sin\beta<0$

よって

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって，加法定理により

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=-\frac{2\sqrt{6}}{5}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{5}\times\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\\&=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{15}}\end{aligned}$$

3. (1) 底 3 は 1 より大きいので，$\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 9$ のとき

$$\log_3 \frac{1}{3} \leqq \log_3 x \leqq \log_3 9 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-1 \leqq X \leqq 2}$$

(2) $y = (\log_3 x)^2 - \log_3 x^3 = (\log_3 x)^2 - 3\log_3 x$ であるから

$$\begin{aligned} y &= X^2 - 3X \qquad (-1 \leqq X \leqq 2) \\ &= \left(X - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

よって

$X = -1$ すなわち $x = \dfrac{1}{3}$ のとき最大値 4,

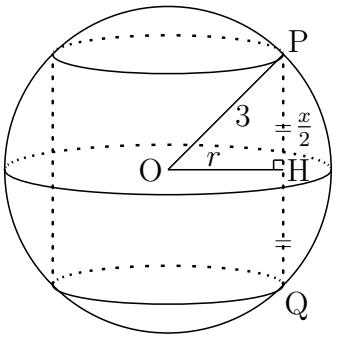
$X = \dfrac{3}{2}$ すなわち $x = 3\sqrt{3}$ のとき最小値 $-\dfrac{9}{4}$

をとる.

4. $y = \log(x + \sqrt{x^2+4})$ を微分すると

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\,x + \sqrt{x^2+4}\,)'}{x + \sqrt{x^2+4}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\right) \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+4} + x}{\sqrt{x^2+4}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+4}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}} \end{aligned}$$

5. (1) 右の図において PH $= \frac{x}{2}$ であるから直円柱の半径 r は，直角三角形 OPH において，三平方の定理より



$$r^2 = 3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

直円柱の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi r^2 \times x \\ &= \pi\left\{3^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2\right\} \times x \\ &= \pi x\left(9 - \frac{x^2}{4}\right) \quad (0 < x < 6) \end{aligned}$$

(2)　　$V' = -\dfrac{3}{4}\pi(x^2 - 12)$

$0 < x < 6$ において $V' = 0$ となるのは　$x = 2\sqrt{3}$

V の増減表は

x	0	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$	6
V'		$+$	0	$-$	
V		↗	極大 $12\sqrt{3}\pi$	↘	

したがって，$\boldsymbol{x = 2\sqrt{3}}$ のとき V は最大となり，最大値 $\boldsymbol{12\sqrt{3}\pi}$ をとる．

6. (1) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x - 2$ とおくと　$f'(x) = 3x^2 - 2x - 2$
曲線上の点 $(-1, -2)$ における接線の傾きは

$$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 - 2\cdot(-1) - 2 = 3$$

よって，この点における接線の方程式は

$$y + 2 = 3(x + 1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 3x + 1}$$

(2) 曲線と (1) で求めた接線の共有点の x 座標は

$$x^3 - x^2 - 2x - 2 = 3x + 1 \quad \text{すなわち} \quad (x + 1)^2(x - 3) = 0$$

これを解いて　$x = -1,\ 3$
$-1 \leqq x \leqq 3$ において

$$(x^3 - x^2 - 2x - 2) - (3x + 1) = (x + 1)^2(x - 3) \leqq 0$$

ゆえに　　$3x + 1 \geqq x^3 - x^2 - 2x - 2$
よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \{(3x + 1) - (x^3 - x^2 - 2x - 2)\}\, dx \\ &= \int_{-1}^{3} (-x^3 + x^2 + 5x + 3)\, dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^{3} = \boldsymbol{\frac{64}{3}} \end{aligned}$$

6.15　平成 17 年度編入学試験 (60 分)

1. 1 から 10 までの自然数の中から 3 個を選ぶとき，次の問いに答えよ．

   (1) 組合せの総数を求めよ．

   (2) 3 個の自然数の積が 3 で割り切れない場合の確率を求めよ．

2. 指数方程式 $(25)^x - 26\cdot 5^x + 25 = 0$ を解け．

3. $\log_a b + \log_b a = \dfrac{5}{2}$ のとき，$\dfrac{a^4 + b}{a^2 + b^2}$ の値を求めよ．ただし $b > a > 1$ とする．

4. 関数 $f(x) = \sin^2 x - \cos x$ の最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ．ただし $0 \leqq x < 2\pi$ とする．

5. x の 3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ について，次の問いに答えよ．

   (1) y は $x = 1$ のとき極小値をとり，$x = -2$ のとき極大値をとるという．a，b の値を求めよ．

   (2) その場合，極大値が 3 ならば極小値はいくらか．

6. 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(x,\ y)$ における接線の傾きが $2x - 3$ であって $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \frac{9}{2}$ を満たすような $f(x)$ を求めよ．

解答例

1. (1) ${}_{10}\mathrm{C}_3 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = \mathbf{120}$

   (2) 1 から 10 までの自然数の中から 3，6，9 を除く 7 個の中から 3 個選ぶ確率であるから

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{35}{120} = \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{24}}$$

2. $5^x = t$ とおくと　$t > 0$

   方程式は　$t^2 - 26t + 25 = 0$
   すなわち　$(t-1)(t-25) = 0$

   $t > 0$ に注意して　　$t = 1,\ 25$

   よって　　$5^x = 1$ を解いて　$x = 0$
   　　$5^x = 25$ を解いて　$x = 2$

   したがって　　$\boldsymbol{x = 0,\ 2}$

3. $\log_a b = t$ とおくと，$b > a > 1$ より　$t = \log_a b > \log_a a = 1$

   したがって　　$t > 1$

   与式から　　$\log_a b + \dfrac{1}{\log_a b} = \dfrac{5}{2}$

   ゆえに　　$t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2}$

   整理すると　　$2t^2 - 5t + 2 = 0$
   　　$(t-2)(2t-1) = 0$

   $t > 1$ より　　$t = 2$

   よって　　$\log_a b = 2$　ゆえに　$b = a^2$

   したがって　　$\dfrac{a^4 + b}{a^2 + b^2} = \dfrac{a^4 + a^2}{a^2 + (a^2)^2} = \mathbf{1}$

4. $\sin^2 x - \cos x = (1 - \cos^2 x) - \cos x = -\cos^2 x - \cos x + 1$

   $\cos x = t$ とおくと，$0 \leqq x < 2\pi$ より　$-1 \leqq t \leqq 1$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= -t^2 - t + 1 \quad (-1 \leqq t \leqq 1) \\ &= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

   よって　　$t = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$x = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{5}{4}$

   　　$t = 1$　　すなわち　$x = 0$ のとき，最小値 -1

   したがって，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi} \text{ のとき最大値 } \boldsymbol{\frac{5}{4}}$$
$$\boldsymbol{x = 0} \text{ のとき最小値 } \boldsymbol{-1}$$

   をとる．

5. (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ とすると　$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

   $f'(x) = 0$ の解が $1, -2$ であるから，解と係数の関係により

$$1 + (-2) = -\frac{2a}{3}, \qquad 1 \cdot (-2) = \frac{b}{3}$$

   したがって　　$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{2},\ b = -6}$

   (2) (1) の結果より　$f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + c$

   極大値が 3 より，$f(-2) = 3$ であるから

$$(-2)^3 + \frac{3}{2} \cdot (-2)^2 - 6 \cdot (-2) + c = 3 \quad \text{ゆえに} \quad c = -7$$

   したがって　　$f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x - 7$

   極小値は　　$f(1) = 1^3 + \dfrac{3}{2} \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 7 = \boldsymbol{-\dfrac{21}{2}}$

6. $f'(x) = 2x - 3$ であるから，$f(x) = x^2 - 3x + c$ とすると

$$\int_{-2}^{1} (x^2 - 3x + c)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + cx \right]_{-2}^{1}$$
$$= 3c + \frac{15}{2}$$

$\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)\, dx = \frac{9}{2}$ より

$$3c + \frac{15}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{これを解いて} \quad c = -1$$

したがって　　$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 3x - 1}$

6.16　平成 16 年度編入学試験 (60 分)

1. 5 個の数字 0，1，2，3，4 から異なる 4 個の数字を使って 4 けたの整数を作るとき，その整数が 3200 より大きくなる確率を求めよ．

2. 中心が $\mathrm{C}(1,2)$ で半径が 5 の円周上の点 $\mathrm{P}(4,-2)$ における接線の方程式を求めたい．

   (1) 2 点 C，P を通る直線の方程式を求めよ．

   (2) 求めたい接線は，(1) で求めた直線に垂直であることを利用して接線の方程式を求めよ．

3. 次の各問に答えよ．

   (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$ の値を求めよ．

   (2) $a^{2x}=3$ のとき，$\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{3x}+a^{-3x}}$ の値を求めよ．

   (3) $a=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$ のとき，$\log_4(a^2+b^2)$ の値を求めよ．

4. 次の各問に答えよ．

   (1) 関数 $y=x^3-3x^2-9x$ の極値を求めよ．

   (2) 3 次方程式 $x^3-3x^2-9x=k$ の実数解の個数は，定数 k の値によってどのように変化するか．

5. 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸とで囲まれた図形を F とする．

   (1) 図形 F の面積を求めよ．

   (2) 直線 $y=mx$ が図形 F を 2 つの部分に分けるとき，放物線 $y=-x^2+4x$ と直線 $y=mx$ で囲まれる部分の面積と図形 F の部分の面積の比が $1:8$ となるように定数 m の値を定めよ．

解答例

1. 千の位は 0 以外の 4 通り．百，十，一の位は残りの 4 個の数字から 3 個を並べる ${}_4\mathrm{P}_3$ 通り．よって 4 桁の整数の総数は，積の法則により，$4 \times {}_4\mathrm{P}_3$ 通り．

   このうち，3200 より大きい整数は，千の位が 3 と 4 の場合がある

   ［1］千の位が 3 の場合 (32□□，34□□)
   いずれも □□ には残りの 3 個の数字から 2 個並べる ${}_3\mathrm{P}_2$ 通り．ゆえに積の法則により，$2 \times {}_3\mathrm{P}_2$ 通り．

   ［2］千の位が 4 の場合 (4□□□)
   □□□ には残りの 4 個の数字から 3 個並べる ${}_4\mathrm{P}_3$ 通り．

   したがって，求める確率は

   $$\frac{2 \times {}_3\mathrm{P}_2 + {}_4\mathrm{P}_3}{4 \times {}_4\mathrm{P}_3} = \frac{2 \times 3{\cdot}2 + 4{\cdot}3{\cdot}2}{4 \times 4{\cdot}3{\cdot}2} = \frac{36}{96} = \boldsymbol{\frac{3}{8}}$$

2. (1) 2 点 C(1, 2)，P(4, −2) を通る直線の方程式は

   $$y - 2 = \frac{-2-2}{4-1}(x-1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = -\frac{4}{3}x + \frac{10}{3}}$$

   (2) 接線の傾きを m とすると，接線は直線 CP に垂直であるから

   $$-\frac{4}{3}m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = \frac{3}{4}$$

   よって，接線の方程式は

   $$y - (-2) = \frac{3}{4}(x-4) \quad \text{ゆえに} \quad y = \frac{3}{4}x - 5$$

3. (1) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}$ の両辺を平方すると

   $$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{9} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\theta\cos\theta = -\frac{4}{9}$$

   したがって
   $$\begin{aligned}\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} &= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\ &= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} \\ &= 1 \div \left(-\frac{4}{9}\right) = \boldsymbol{-\frac{9}{4}}\end{aligned}$$

(2) $\dfrac{a^{3x}-a^{-3x}}{a^{3x}+a^{-3x}}=\dfrac{a^{6x}-1}{a^{6x}+1}=\dfrac{(a^{2x})^3-1}{(a^{2x})^3+1}=\dfrac{3^3-1}{3^3+1}=\dfrac{26}{28}=\boldsymbol{\dfrac{13}{14}}$

(3) $a+b=\sqrt{3},\ ab=\dfrac{1}{2}$

ゆえに　　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(\sqrt{3})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=2$

よって　　$\log_4(a^2+b^2)=\log_4 2=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

4. (1) $y'=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 5	↘	極小 -27	↗

よって，$\boldsymbol{x=-1}$ で**極大値 5**，$\boldsymbol{x=3}$ で**極小値 −27** をとる．

(2) 3 次方程式 $x^3-3x^2-9x=k$ の異なる実数解の個数は，$y=x^3-3x^2-9x$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に等しい．よって，(1) の結果から

$\boldsymbol{-27<k<5}$ のとき　　**3 個**
$\boldsymbol{k=-27,\ 5}$ のとき　　**2 個**
$\boldsymbol{k<-27,\ 5<k}$ のとき　**1 個**

5. (1) 曲線 $y=-x^2+4x$ と x 軸の共有点 x 座標は　$x=0,\ 4$

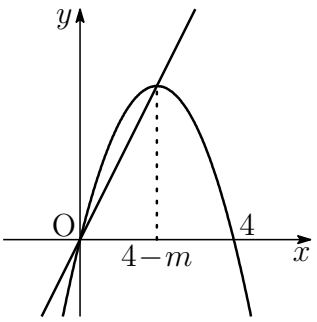
$0\leqq x\leqq 4$ において $y\geqq 0$ であるから，F の面積 S は

$$S=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx=-\int_0^4 x(x-4)\,dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3=\boldsymbol{\frac{32}{3}}$$

(2) 曲線 $y = -x^2 + 4x$ と直線 $y = mx$ の共有点の x 座標は

$$-x^2 + 4x = mx$$

ゆえに $\quad x = 0,\ 4 - m$



よって，これらによって囲まれた図形の面積は，(1) の結果から

$$\frac{1}{8}S = \frac{1}{8} \times \frac{32}{3} = \frac{4}{3}$$

よって

$$\int_0^{4-m} \{(-x^2 + 4x) - mx\}\, dx = \frac{4}{3}$$

$$-\int_0^{4-m} x\{x - (4 - m)\}\, dx = \frac{4}{3}$$

$$-\left(-\frac{1}{6}\right)(4 - m)^3 = \frac{4}{3}$$

$$(4 - m)^3 = 8$$

ゆえに $\quad 4 - m = 2 \quad$ よって $\quad \boldsymbol{m = 2}$

6.17　平成 15 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式を計算せよ．

   (1) $(x^2+2x-3)(2x-1)$

   (2) $\dfrac{x+y}{\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}}$

   (3) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)^2\,dx$

   (4) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$

2. 第 2 項が 4，第 5 項が 13 である等差数列の，第 3 項から第 34 項までの和を求めよ．

3. 立方体を，与えられた 6 つの異なる色で，面を塗り分ける方法は何通りあるか答えよ．またその理由を説明せよ．

4. 関数 $y=2x^3-9x^2+12x$ の極値を求め，グラフの概形を描け．

5. 縦 5cm，横 8cm の長方形の鉄板がある．この鉄板の 4 すみから同じ大きさの正方形を切り取り，残りでふたのない長方形の容器を作る．容積が最大となるのは，切り取る正方形の一辺の長さが何 cm のときか答えよ．

6. 2 曲線 $y=\sin x$，$y=\cos x$ と直線 $x=0$，$x=\pi$ で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. (1) $(x^2+2x-3)(2x-1) = \boldsymbol{2x^3+3x^2-8x+3}$

   (2) $\dfrac{x+y}{\dfrac{y^2}{x}+\dfrac{x^2}{y}} = \dfrac{xy(x+y)}{x^3+y^3} = \dfrac{xy(x+y)}{(x+y)(x^2-xy+y^2)} = \boldsymbol{\dfrac{xy}{x^2-xy+y^2}}$

   (3) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x+1)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}(x+1)^3\ \right]_{-1}^{2} = \boldsymbol{9}$

   (4) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \int_0^{\pi} x(-\cos x)'\,dx$

   $\displaystyle = \Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1\cdot(-\cos x)\,dx$

   $\displaystyle = \pi + \Big[\sin x\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\pi}$

2. 数列 $\{a_n\}$ の初項を a，公差を d とすると　$a_n = a+(n-1)d$

   第 2 項が 4 であるから　　$a+d=4$　　$\cdots$①
   第 5 項が 13 であるから　　$a+4d=13$　$\cdots$②

   ①，② を解くと　　$a=1$，$d=3$

   一般項は　　$a_n = 1+(n-1)\cdot 3 = 3n-2$

   したがって　　第 3 項は　$a_3 = 3\cdot 3-2 = 7$
   　　第 34 項は　$a_{34} = 3\cdot 34-2 = 100$

   よって，第 3 項から第 34 項までの項数は 32 であるから，その和は

   $$\frac{1}{2}\cdot 32\cdot(7+100) = \boldsymbol{1712}$$

3. 特定の 1 色に着目し，その色を下面に固定する．このとき，上の面の塗り方は，残り 5 色のどれかになり，側面はその残り 4 色の円順列になる．

   したがって，6 色による立方体の色塗りの総数は

   $$5\times(4-1)! = 5\times 3\cdot 2\cdot 1 = \boldsymbol{30}\ (\text{通り})$$

4. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ より

$$y' = 6x^2 - 18x + 12$$
$$= 6(x-1)(x-2)$$

$y' = 0$ とすると

$$x = 1,\ 2$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 5	↘	極小 4	↗

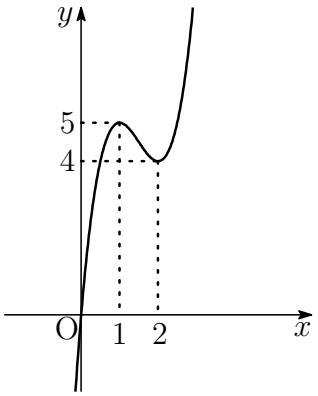
したがって，この関数は

$x = 1$ で極大値 5

$x = 2$ で極小値 4

をとる．

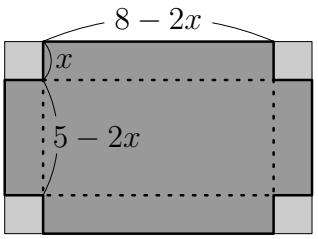
グラフは，右の図のようになる．



5. 切り取る正方形の 1 辺の長さを x cm，箱の容積を y cm^3 とする．

$x > 0$，$5 - 2x > 0$，$8 - 2x > 0$ であるから

$$0 < x < \frac{5}{2} \qquad \cdots ①$$



このとき

$$y = x(5-2x)(8-2x) = 2(2x^3 - 13x^2 + 20x)$$
$$y' = 4(3x^2 - 13x + 10) = 4(x-1)(3x-10)$$

① の範囲において，y の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{2}$
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大	↘	

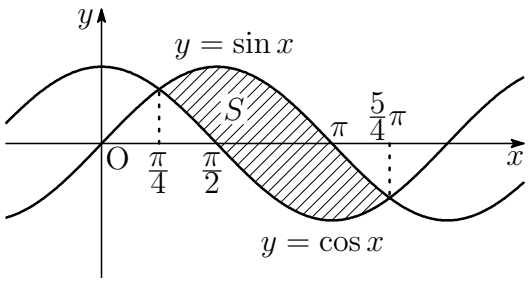
したがって，y は $x = 1$ で最大になる．　　(答) **1cm**

6. 求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} |\sin x - \cos x|\, dx \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| dx \\
&= -\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \\
&= -\sqrt{2}\left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \sqrt{2}\left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \\
&= -\sqrt{2}\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + 1\right) \\
&= \mathbf{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

補足 $\left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|$ は周期関数で，周期が π であるから，次の計算ができる．

$$\begin{aligned}
S &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| dx \\
&= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \left|\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right| dx \\
&= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \\
&= \sqrt{2}\left[-\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{4}\pi} = \mathbf{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$



第 7 章　都城工業高等専門学校

7.1　平成 31 年度編入学試験 (60 分)

1. $x^6 - 9x^3 + 8$ を因数分解せよ.

2. 次の各式を簡単にせよ.

   (1) $|2\sqrt{3} - 3| - |5 - 4\sqrt{3}|$

   (2) $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

3. 次の分数式を簡単にせよ.

$$\frac{x+3}{x^2+x-2} - \frac{x+1}{x^2-x-6}$$

4. 方程式 $x^3 - 3x^2 - 18x + 40 = 0$ を解け.

5. 以下の問に答えよ.

   (1) 2 次方程式 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ を解け.

   (2) a が負の定数のとき，2 次不等式 $x^2 - ax - 2a^2 > 0$ を解け.

   (3) 次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 4x - 2y + z = -6 \\ 9x + 3y + z = 9 \end{cases}$$

6. 放物線 $y = 2x^2 + 3x - 1$ を平行移動したものが，2 点 $(2,\ 0)$，$(1, -12)$ を通るとき，移動後の放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ.

7. 2 次不等式 $x^2 + 2mx - m + 2 > 0$ の解がすべての実数となるとき，定数 m の値の範囲を求めよ.

8. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ とする．このとき，次の値を求めよ.

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta$

9. $x\leqq 1$ のとき，関数 $y=3^{2x}-2\cdot 3^x$ の最大値と最小値を求めよ．

10. 関数 $f(x)=\log_2(8-x)-2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ の定義域を求めよ．

(2) 関数 $y=f(x)$ と x 軸との交点の座標を求めよ．

(3) 不等式 $f(x)\leqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

11. 関数 $y=2x^3+3x^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) 増減表をかけ．

(2) 極値とそれを与える x の値を求めよ．

(3) 前問 (1),(2) および x 軸との共有点に注意してグラフの概形をかけ．

12. 放物線 $y=4-(x+1)^2$ について，以下の問いに答えよ．

(1) この放物線の y 軸との交点における接線の方程式を求めよ．

(2) この放物線と前問 (1) の接線および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. $x^6 - 9x^3 + 8 = (x^3 - 1)(x^3 - 8)$
$= \boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)(x-2)(x^2+2x+4)}$

2. (1) $2\sqrt{3} - 3 = \sqrt{12} - \sqrt{9} > 0$，$5 - 4\sqrt{3} = \sqrt{25} - \sqrt{48} < 0$ より
$|2\sqrt{3} - 3| - |5 - 4\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} - 3 - (-5 + 4\sqrt{3}) = \boldsymbol{2 - 2\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{2}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \dfrac{2(2+\sqrt{2})}{4-2} + \dfrac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2-5}$
$= (2+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}+\sqrt{5}) = \boldsymbol{2 - \sqrt{5}}$

3. $\dfrac{x+3}{x^2+x-2} - \dfrac{x+1}{x^2-x-6} = \dfrac{x+3}{(x-1)(x+2)} - \dfrac{x+1}{(x+2)(x-3)}$
$= \dfrac{(x+3)(x-3) - (x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$
$= -\dfrac{\boldsymbol{8}}{\boldsymbol{(x-1)(x+2)(x-3)}}$

4. $P(x) = x^3 - 3x^2 - 18x + 40$ とおくと　$P(2) = 0$
$P(x)$ は $x - 2$ を因数にもつから
$$P(x) = (x-2)(x^2 - x - 20) = (x-2)(x+4)(x-5)$$
方程式 $P(x) = 0$ の解は　$\boldsymbol{x = 2, -4, 5}$

5. (1) 2 次方程式 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$ より　$(x - \sqrt{2})^2 = 0$
これを解いて　$\boldsymbol{x = \sqrt{2}}$

(2) 与えられた不等式から　$(x+a)(x-2a) > 0$
$a < 0$ であるから，求める不等式の解は　$\boldsymbol{x < 2a,\ -a < x}$

(3) $\begin{cases} x - y + z = 1 & \cdots ① \\ 4x - 2y + z = -6 & \cdots ② \\ 9x + 3y + z = 9 & \cdots ③ \end{cases}$
① − ② より　$-3x + y = 7$　$\cdots ④$
② − ③ より　$-5x - 5y = -15$　ゆえに　$x + y = 3$　$\cdots ⑤$
④，⑤ より　$\boldsymbol{x = -1,\ y = 4}$　これを ① に代入して　$\boldsymbol{z = 6}$

6. $y = 2x^2 + 3x - 1$ を平行移動したものであるから，$y = 2x^2 + bx + c$ とおく．
これが，2 点 $(2,\ 0)$，$(1, -12)$ を通るから
$$8 + 2b + c = 0, \quad 2 + b + c = -12 \quad \text{これを解いて} \quad b = 6,\ c = -20$$
よって　$\boldsymbol{y = 2x^2 + 6x - 20}$

7. $x^2+2mx-m+2>0$ の解がすべての実数であるとき，係数について

$$(2m)^2-4\cdot1(-m+2)<0 \quad \text{ゆえに} \quad (m+2)(m-1)<0$$

よって　　$\boldsymbol{-2<m<1}$

8. (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}}$$

(2) (1) の結果を利用して

$$\begin{aligned}\sin^3\theta+\cos^3\theta&=(\sin\theta+\cos)^3-3\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)\\&=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{11}{16}}\end{aligned}$$

9. $y=3^{2x}-2\cdot3^x$ $(x\leqq1)$ において，$t=3^x$ とおくと $(0<t\leqq3)$

$$y=t^2-2t=(t-1)^2-1$$

$t=3$，すなわち，$x=1$ のとき，最大値 $\boldsymbol{3}$

$t=1$，すなわち，$x=0$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-1}$

10. $f(x)=\log_2(8-x)-2$

(1) 真数は正であるから　$8-x>0$　よって　$\boldsymbol{x<8}$

(2) $f(x)=0$ とすると

$$\log_2(8-x)=2 \quad \text{ゆえに} \quad 8-x=2^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x=4}$$

(3) $f(x)\leqq0$ のとき

$$\log_2(8-x)-2\leqq0 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2(8-x)\leqq\log_2 4$$

したがって　$0<8-x\leqq4$　よって　$\boldsymbol{4\leqq x<8}$

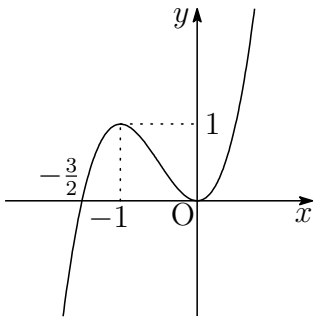
11. (1) $y = 2x^3 + 3x^2$ より　$y' = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	1	↘	0	↗

(2) (1) の結果から

$$x = -1 \text{ のとき極大値 } \mathbf{1}, \quad x = 0 \text{ のとき極小値 } \mathbf{0}$$

(3) (1)，(2) の結果から，グラフの概形は次のようになる．



12. (1) $y = 4 - (x+1)^2 = -x^2 - 2x + 3$ より，$y' = -2x - 2$ であるから，$x = 0$ のとき　$y' = -2$
放物線の y 軸との交点は　$(0,\ 3)$
放物線上の点 $(0,\ 3)$ における接線の方程式は　$\boldsymbol{y = -2x + 3}$

(2) 直線 $y = -2x + 3$ の x 切片は $\dfrac{3}{2}$，y 切片は 3
放物線 $y = 4 - (x+1)^2$ の x 軸との共有点の x 座標は

$$4 - (x+1)^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = -3,\ 1$$

よって，求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 - \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3)\,dx \\ &= \frac{9}{4} - \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{7}{12}} \end{aligned}$$

7.2　平成 29 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式を展開せよ．

$$(a + 2b - c)(a - 2b + c)$$

2. 次の各式を簡単にせよ．

(1) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2}$

(2) $\dfrac{2x^2+x}{x^2-4} \div \dfrac{x^2}{x^2-x-2} \times \dfrac{x^2+2x}{2x^2+3x+1}$

3. 整式 $P(x)$ を $x-3$ で割ると余りが 5，$x+2$ で割ると余りが -5 であるとき，次の各問いに答えよ．

(1) $P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの余りを求めよ．

(2) $P(x)$ が 2 次式で $P(0)=5$ であるとき $P(x)$ を求めよ．

4. 次の連立方程式，連立不等式を解け．

(1) $\begin{cases} x^2+4xy+2y^2=12 \\ x+y=2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ x^2-x-12<0 \end{cases}$

5. 2 次方程式 $x^2+px+p-1=0$ の解を α，β とおくとき，以下の問いに答えよ．ただし，p は実数とする．

(1) $\alpha^2+\beta^2$ を p を用いて表せ．

(2) $\alpha^2+\beta^2$ の最小値とそのときの p の値を求めよ．

6. 2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ は異なる 2 つの解を持ち，それらの解は 4 次方程式

$$x^4+(a+1)x^3+(a+1)x^2+ax+a^2+2a-3=0$$

の解でもある．このとき，定数 a の値と，この 4 次方程式の解をすべて求めよ．

7. $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ のとき，$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ とする．このとき，次の値を求めよ．

(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\sin\theta-\cos\theta$

8. 不等式 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1} > \left(\dfrac{1}{81}\right)^{x}$ を解け．

9. 方程式 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x+2)=-1$ を解け．

10. 6^{20} は何桁の整数か答えよ．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4471$ とする．

11. 関数 $f(x) = x^3 - x$ について，以下の問いに答えよ．ただし，a は定数とする．

    (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

    (2) 曲線 $y = x^3 - x$ の $x = t$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．

    (3) (2) で求めた接線 ℓ が点 $\mathrm{A}(1,\ a)$ を通るとき，t と a の満たす関係式を求めよ．

    (4) 点 $\mathrm{A}(1,\ a)$ から曲線 $y = x^3 - x$ に対して相異なる 2 本の接線を引くことができるとき，a の値を求めよ．

12. 次の等式を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．

$$\int_{-2}^{x} f(t)\,dt = x^3 - 5x^2 + 3ax + 2a$$

解答例

1. $(a+2b-c)(a-2b+c) = \{a+(2b-c)\}\{a-(2b-c)\}$
$= a^2-(2b-c)^2 = \boldsymbol{a^2-4b^2+4bc-c^2}$

2. (1) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}-2} = \dfrac{2\sqrt{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{6}-\sqrt{2})} - \dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}$
$= \dfrac{4\sqrt{3}-4}{4} - \dfrac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{-1+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}}$

(2) $\dfrac{2x^2+x}{x^2-4} \div \dfrac{x^2}{x^2-x-2} \times \dfrac{x^2+2x}{2x^2+3x+1}$
$= \dfrac{x(2x+1)}{(x+2)(x-2)} \times \dfrac{(x+1)(x-2)}{x^2} \times \dfrac{x(x+2)}{(x+1)(2x+1)} = \boldsymbol{1}$

3. (1) 剰余の定理により　$P(3)=5$，$P(-2)=-5$　$\cdots(*)$

$P(x)$ を x^2-x-6 で割ったときの商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とおくと

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-x-6)Q(x)+ax+b \\ &= (x-3)(x+2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

これに $x=3,-2$ をそれぞれ代入すると

$$3a+b=5, \quad -2a+b=-5$$

これを解いて　$a=2$，$b=-1$　よって，求める余りは　$\boldsymbol{2x-1}$

(2) 2 次式 $P(x)$ を $P(0)=5$ に注意し，$P(x)=px^2+qx+5$ とおくと，$(*)$ より

$$9p+3q+5=5, \quad 4p-2q+5=-5$$

これを解いて　　$\boldsymbol{P(x)=-x^2+3x+5}$

4. (1) 第 1 式から　$-x^2+2(x+y)^2=12$
これに $x+y=2$ を代入して整理すると　$x^2=-4$
したがって　$x=\pm 2i$　よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(\pm 2i,\ 2\mp 2i)}$ (複号同順)

(2) 第 1 式から　$(x+1)(x-2)>0$　ゆえに　$x<-1,\ 2<x$
第 2 式から　$(x+3)(x-4)<0$　ゆえに　$-3<x<4$
上の 2 式の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{-3<x<-1,\ 2<x<4}$

5. (1) 2 次方程式 $x^2+px+p-1=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-p,\quad \alpha\beta=p-1$$

よって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-p)^2-2(p-1)=\boldsymbol{p^2-2p+2}$

(2) (1) の結果から　$p^2-2p+2=(p-1)^2+1$

よって，$\boldsymbol{p=1}$ のとき最小値 $\mathbf{1}$ をとる．

6. $x^4+(a+1)x^3+(a+1)x^2+ax+a^2+2a-3$ を x^2+ax+1 で割った商は x^2+x，余りは $(a-1)x-(a-1)(a+3)$

2 次方程式 $x^2+ax+1=0$ の異なる 2 つの解は，4 次方程式

$$x^4+(a+1)x^3+(a+1)x^2+ax+a^2+2a-3=0$$

の解であるから

$$a-1=0,\ -(a-1)(a+3)=0\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=1}$$

このとき，4 次方程式は　$(x^2+x+1)(x^2+x)=0$

これを解いて　$\boldsymbol{x=0,-1,\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}}$

7. (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ の両辺を平方すると

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{18}}$$

(2) (1) の結果を利用して

$$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta$$
$$=1-2\times\left(-\frac{5}{18}\right)=\frac{14}{9}$$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<0$ より，$\sin\theta-\cos\theta<0$ であるから

$$\boldsymbol{\sin\theta-\cos\theta=-\frac{\sqrt{14}}{3}}$$

8. 与えられた不等式から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+1} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^{4x}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は，1 より小さいから

$$2x+1 > 4x \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x < \frac{1}{2}}$$

9. $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)(x+2) = -1$ から

$$(x+1)(x+2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \text{ゆえに} \quad x^2+3x=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{x = 0, -3}$

10. $\log_{10} 6^{20} = 20(\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = 15.562$ であるから

$$15 < \log_{10} 6^{20} < 16 \quad \text{ゆえに} \quad 10^{15} < 6^{20} < 10^{16}$$

よって，6^{20} は **16 桁**の整数.

11. (1)　$f(x) = x^3 - x$ より　$f'(x) = 3x^2 - 1$

(2)　$f'(t) = 3t^2 - 1$ であるから，求める接線 ℓ の方程式は

$$y - (t^3 - t) = (3t^2-1)(x-t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = (3t^2-1)x - 2t^3}$$

(3)　ℓ は点 $\mathrm{A}(1,\ a)$ を通るから

$$a = (3t^2-1)1 - 2t^3 = -2t^3 + 3t^2 - 1$$

(4)　$g(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$ とおくと，$y = g(t)$ と $y = a$ の共有点が 2 個となる a の値を求めればよい.

$$g'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↘	-1	↗	0	↘

よって，求める a の値は　$\boldsymbol{a = -1,\ 0}$

12. $\displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,dt = x^3 - 5x^2 + 3ax + 2a \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $x = -2$ を代入すると

$$0 = (-2)^3 - 5(-2)^2 + 3a(-2) + 2a \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -7}$$

$\displaystyle\int_{-2}^{x} f(t)\,dt = x^3 - 5x^2 + 3ax + 2a$ を微分すると

$$f(x) = 3x^2 - 10x + 3a = \boldsymbol{3x^2 - 10x - 21}$$

7.3　平成 28 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の各式を簡単にせよ.

   (1) $\dfrac{(-2x^2y^3)^3}{(3x^2y^4)^2}$

   (2) $|3-2\sqrt{2}|+|4-3\sqrt{2}|$

   (3) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{8}{\sqrt{5}-3}$

2. $a^2-4b^2-2bc+ac$ を因数分解せよ.

3. 次の分数式を簡単にせよ.

$$\frac{2x}{x^2-4}-\frac{2x+1}{x^2+x-6}$$

4. 整式 x^3-x^2+5x-4 を x についての整式 B で割ると，商が $x-1$，余りが $3x-2$ であるという．このとき整式 B を求めよ.

5. 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} |2x-3|<5 \\ x^2+x-6 \geqq 0 \end{cases}$$

6. 2 次方程式 $x^2-2px+p-1=0\cdots(*)$ に関して以下の問いに答えよ.

   (1) $(*)$ の 2 つの解を α，β とおくとき，$\alpha^2+\beta^2$ が最小となるように実数 p を定めよ.

   (2) $(*)$ が正の解と負の解をもつように，定数 p の値の範囲を求めよ.

7. 4 次方程式 $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ (a,b,c,d は実数) の解のうち 2 つが i と $1+2i$ であるという．このとき，定数 a，b，c，d を求めよ．ただし，i は虚数単位とする.

8. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $\sin\theta+\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\theta+\dfrac{7}{6}\pi\right)$

   (2) $(\log_2 9+\log_4 3)(\log_3 2+\log_9 4)$

9. $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\sin 2\theta>\sqrt{3}\sin\theta$ を解け.

10. 方程式 $9^{x+1}+3^{x+1}-2=0$ を解け.

11. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}} x \leqq -1$ を解け.

12. 関数 $f(x)=2x^2$ について，以下の問いに答えよ.

    (1) x が 1 から $1+h$ まで変化するとき $f(x)$ の平均変化率を求めよ.

    (2) $x=1$ における微分係数を求めよ.

13. 定積分 $\displaystyle\int_0^3 |x(x-2)|\,dx$ の値を求めよ.

14. 関数 $f(x)=x^3-3x+2$ について，以下の問いに答えよ.

    (1) $y=f(x)$ の x，y'，y の増減表をかけ.

    (2) $y=f(x)$ の極値を求めよ.

    (3) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け.

解答例

1. (1) $\dfrac{(-2x^2y^3)^3}{(3x^2y^4)^2} = \dfrac{-8x^6y^9}{9x^4y^8} = -\dfrac{\boldsymbol{8x^2y}}{\boldsymbol{9}}$

   (2) $3-2\sqrt{2} = \sqrt{9}-\sqrt{8} > 0$，$4-3\sqrt{2} = \sqrt{16}-\sqrt{18} < 0$ より

   $$|3-2\sqrt{2}| + |4-3\sqrt{2}| = 3-2\sqrt{2}-(4-3\sqrt{2}) = \boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$

   (3) $$\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{5}-3} = \frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2} + \frac{8(\sqrt{5}+3)}{5-9}$$
   $$= 2(\sqrt{5}+\sqrt{2}) - 2(\sqrt{5}+3) = \boldsymbol{2\sqrt{2}-6}$$

2. 最も次数の低い文字 c に着目する．

   $$\begin{aligned} a^2-4b^2-2bc+ac &= (a+2b)(a-2b)+c(a-2b) \\ &= (a-2b)\{(a+2b)+c\} \\ &= \boldsymbol{(a-2b)(a+2b+c)} \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2-4} - \frac{2x+1}{x^2+x-6} &= \frac{2x}{(x+2)(x-2)} - \frac{2x+1}{(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{2x(x+3)-(2x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)(x-2)} \\ &= \frac{x-2}{(x+2)(x+3)(x-2)} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(x+2)(x+3)}} \end{aligned}$$

4. $x^3-x^2+5x-4 = B(x-1)+3x-2$ であるから

   $$x^3-x^2+2x-2 = B(x-1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{B = x^2+2}$$

5. $|2x-3| < 5$ より

   $$-5 < 2x-3 < 5 \quad \text{ゆえに} \quad -1 < x < 4 \quad \cdots ①$$

   $x^2+x-6 \geqq 0$ より

   $$(x+3)(x-2) \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x < -3,\ 2 < x \quad \cdots ②$$

   ①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{2 < x < 4}$

6. (1) 2 次方程式 $x^2-2px+p-1=0$ の解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2p,\quad \alpha\beta=p-1$$

したがって

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2p)^2-2(p-1)\\&=4p^2-2p+2=4\left(p-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{4}\end{aligned}$$

$\alpha^2+\beta^2$ が最小となる実数 p の値は　　$\boldsymbol{p=\dfrac{1}{4}}$

(2) $\alpha\beta<0$ であるから

$$p-1<0\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{p<1}$$

7. 実係数の 4 次方程式が i と $1+2i$ をもつとき，$-i$ と $1-2i$ もこの方程式の解であるから，最高次の係数に注意して

$$\begin{aligned}x^4+ax^3+bx^2+cx+d&=(x^2+1)\{(x-1)^2+4\}\\&=(x^2+1)(x^2-2x+5)\\&=x^4-2x^3+6x^2-2x+5\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a=-2,\ b=6,\ c=-2,\ d=5}$

8. (1) $\cos\left(\theta+\dfrac{7}{6}\pi\right)=\cos\left\{\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)+\dfrac{\pi}{2}\right\}=-\sin\left(\theta+\dfrac{2}{3}\pi\right)$ であるから

$$\sin\theta+\sin\left(\theta+\frac{2}{3}\pi\right)+\cos\left(\theta+\frac{7}{6}\pi\right)=\boldsymbol{\sin\theta}$$

(2) $(\log_2 9+\log_4 3)(\log_3 2+\log_9 4)=\left(2\log_2 3+\dfrac{1}{2}\log_2 3\right)\left(\dfrac{1}{\log_2 3}+\dfrac{1}{\log_2 3}\right)$

$$=\frac{5}{2}\log_2 3\times\frac{2}{\log_2 3}=\boldsymbol{5}$$

9. $\sin 2\theta>\sqrt{3}\sin\theta$ より　$\sin\theta(2\cos\theta-\sqrt{3})>0$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから

$$(*)\begin{cases}\sin\theta>0\\ 2\cos\theta-\sqrt{3}>0\end{cases}\quad \text{または}\quad (**)\begin{cases}\sin\theta<0\\ 2\cos\theta-\sqrt{3}<0\end{cases}$$

$(*)$ を解いて　$0<\theta<\dfrac{\pi}{6}$,　　$(*)$ を解いて　$\pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi$

よって　　$\boldsymbol{0<\theta<\dfrac{\pi}{6},\quad \pi<\theta<\dfrac{11}{6}\pi}$

10. $t = 3^{x+1}$ とおくと $(t > 0)$，$9^{x+1} = t^2$ であるから，方程式は

$$t^2 + t - 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)(t-1) = 0$$

$t > 0$ に注意して　$t = 1$　ゆえに　$3^{x+1} = 3^0$　よって　$\boldsymbol{x = -1}$

11. $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + \log_{\frac{1}{2}} x \leqq -1$

真数は正であるから

$$x - 1 > 0 \ \text{かつ} \ x > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 1 \quad \cdots ①$$

方程式から

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)x \leqq \log_{\frac{1}{2}} 2$$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから

$$(x-1)x \geqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(x-2) \geqq 0$$

① に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{x \geqq 2}$

12. (1) $f(x) = 2x^2$ について，$x = 1$ から $x = 1 + h$ まで平均変化率は

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{2(1+h)^2 - 2 \cdot 1^2}{h} = \boldsymbol{4 + 2h}$$

(2) (1) の結果から

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0}(4 + 2h) = \boldsymbol{4}$$

13. $0 \leqq x \leqq 2$ のとき $x(x-2) \leqq 0$，$2 \leqq x \leqq 3$ のとき $x(x-2) \geqq 0$ であるから

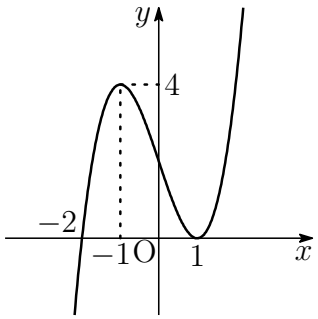
$$\begin{aligned}
\int_0^3 |x(x-2)|\,dx &= -\int_0^2 x(x-2)\,dx + \int_2^3 x(x-2)\,dx \\
&= -\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3 + \left[\,\frac{1}{3}x^3 - x^2\,\right]_2^3 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \boldsymbol{\frac{8}{3}}
\end{aligned}$$

14. (1) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ を微分すると　$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$
したがって，$y = f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	4	↘	0	↗

(2) (1) の結果から極大値 $\boldsymbol{f(-1) = 4}$，極小値 $\boldsymbol{f(1) = 0}$

(3) (1)，(2) の結果からグラフの概形は次のようになる．



7.4　平成 27 年度編入学試験 (60 分)

1. 以下の問いに答えよ.

   (1) $4a^2 - 4ab + b^2 - c^2$ を因数分解せよ.

   (2) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}} + \dfrac{3}{\sqrt{6}-3}$

2. 次の分数式を簡単にせよ.

$$\frac{2x+1}{(x+2)(x-1)} - \frac{2x-4}{(x-1)(x-3)}$$

3. 整式 $P(x)$ を $x-2$ で割ると余りが 4，$x+3$ で割ると余りが -11 であるとき，$P(x)$ を x^2+x-6 で割ったときの余りを求めよ.

4. 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} |2x-1| < 3 \\ x^2 + 2x - 3 \geqq 0 \end{cases}$$

5. 連続する 3 つの整数があり，それぞれの 2 乗の和が 29 になるという．これらの整数を求めよ.

6. 3 次方程式 $x^3 + 4x^2 + ax + b = 0$ (a, b は実数) の解のうち 2 つが -3 と 1 であるという．このとき，他の解を求めよ.

7. 2 次方程式 $3x^2 - 2(a+1)x + a^2 = 0$ の解がともに 0 より大きく 1 より小さい相異なる実数解をもつための a の取り得る値の範囲を求めよ.

8. $\log_2 0.25$ の値を求めよ.

9. $\tan^2\theta + (1 - \tan^4\theta)\cos^2\theta = 1$ を証明せよ.

10. $3^x + 3^{-x} = 7$ のとき，$3^x - 3^{-x}$ の値を求めよ.

11. $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき，不等式 $2\sin^2 x - \cos x - 1 \leqq 0$ を解け.

12. 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ について，以下の問いに答えよ.

    (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

    (2) $x \geqq 0$ の範囲で増減表を書け.

    (3) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 + 4 \geqq 3x^2$ が成り立つことを証明せよ.

13. 等式 $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 4x + 1$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ.

解答例

1. (1) $4a^2-4ab+b^2-c^2=(2a-b)^2-c^2$
$=\{(2a-b)+c\}\{(2a-b)-c\}$
$=\boldsymbol{(2a-b+c)(2a-b-c)}$

(2) $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{6}-3}=\dfrac{3(\sqrt{6}+\sqrt{3})}{(\sqrt{6}-\sqrt{3})(\sqrt{6}+\sqrt{3})}+\dfrac{3(\sqrt{6}+3)}{(\sqrt{6}-3)(\sqrt{6}+3)}$
$=(\sqrt{6}+\sqrt{3})-(\sqrt{6}+3)$
$=\boldsymbol{\sqrt{3}-3}$

2. $\dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)}-\dfrac{2x-4}{(x-1)(x-3)}=\dfrac{(2x+1)(x-3)-(2x-4)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$
$=\dfrac{-5(x-1)}{(x-1)(x+2)(x-3)}$
$=-\dfrac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{(x+2)(x-3)}}$

3. 剰余の定理により　　$P(2)=4$，$P(-3)=-11$

$P(x)$ を x^2+x-6 で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+x-6)Q(x)+ax+b\\&=(x-2)(x+3)Q(x)+ax+b\end{aligned}$$

ゆえに　$2a+b=4$，$-3a+b=-11$　これを解いて　$a=3$，$b=-2$

よって，求める余りは　$3x-2$

4. 第 1 式から　$-3<2x-1<3$　これを解いて　$-1<x<2$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+3)(x-1)\geqq 0$　これを解いて　$x\leqq -3,\ 1\leqq x$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{1\leqq x<2}$

5. 連続する 3 つの整数を $n-1,\ n,\ n+1$ とすると

$$(n-1)^2+n^2+(n+1)^2=29\qquad \text{ゆえに}\quad 3n^2+2=29$$

これを解いて　$n=\pm 3$　よって　$\boldsymbol{2,\ 3,\ 4}$　または　$\boldsymbol{-4,-3,-2}$

6. 他の解を γ とすると，解と係数の関係により

$$-3+1+\gamma=-4,\quad \text{これを解いて}\quad \gamma=-2$$

さらに　$-3\cdot 1+1\cdot(-2)+(-2)\cdot(-3)=a$，$-3\cdot 1\cdot(-2)=-b$

よって　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-6}$

7. $f(x) = 3x^2 - 2(a+1)x + a^2$ とすると

$$f(x) = 3\left(x - \frac{a+1}{3}\right)^2 + \frac{2a^2 - 2a - 1}{3}$$

2 次方程式 $f(x) = 0$ が 0 より大きく 1 より小さい相異なる実数解をもつとき

$$0 < \frac{a+1}{3} < 1, \quad 2a^2 - 2a - 1 < 0, \quad f(0) > 0, \quad f(1) > 0$$

第 1 式から　$-1 < a < 2$

第 2 式から　$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2} < a < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

第 3 式から　$a^2 > 0$　すなわち　$a \neq 0$

第 4 式から　$3 - 2(a+1) + a^2 > 0$　ゆえに　$(a-1)^2 > 0$　すなわち　$a \neq 1$

上の 4 式を同時にみたす範囲を求めて

$$\boldsymbol{\frac{1-\sqrt{3}}{2} < a < \frac{1+\sqrt{3}}{2},\ a \neq 0,\ 1}$$

8. $\log_2 0.25 = \log_2 2^{-2} = \boldsymbol{-2}$

9. $$\begin{aligned}\tan^2\theta + (1 - \tan^2\theta)\cos^2\theta &= \tan^2\theta + (1 - \tan^2\theta)(1 + \tan^2\theta)\cos^2\theta \\ &= \tan^2\theta + (1 - \tan^2\theta)\frac{1}{\cos^2\theta}\cos^2\theta \\ &= \tan^2\theta + (1 - \tan^2\theta) = 1\end{aligned}$$

10. $(3^x - 3^{-x})^2 = (3^x + 3^{-x})^2 - 4 = 7^2 - 4 = 45$

よって　　$3^x - 3^{-x} = \boldsymbol{\pm 3\sqrt{5}}$

11. $2\sin^2 x - \cos x - 1 \leqq 0$ より

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\cos x + 1)(2\cos x - 1) \geqq 0$$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ に注意して　$\cos x = -1,\ \dfrac{1}{2} \leqq \cos x \leqq 1$

よって　　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{3},\ x = \pi}$

12. (1) $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 6x}$

(2) (1) の結果から　$f'(x) = 3x(x-2)$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗

(3) (2) の増減表から，$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$ であるから

$$x^3 - 3x^2 + 4 \geqq 0 \quad \text{よって} \quad x^3 + 4 \geqq 3x^2$$

13. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 3x^2 - 4x + 1 \quad \cdots (*)$

$(*)$ に $x = a$ を代入すると

$$3a^2 - 4a + 1 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \frac{1}{3},\ 1}$$

$(*)$ の両辺を x について微分すると

$$\boldsymbol{f(x) = 6x - 8}$$

7.5　平成 26 年度編入学試験 (60 分)

1. 以下の問いに答えよ.

   (1) $(2a+b+c)(2a-b+c)$ を展開せよ.

   (2) $12x^2y-24xy+9y$ を因数分解せよ.

2. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $\sqrt{27}+\dfrac{6}{\sqrt{3}}-\sqrt{48}$

   (2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

3. $a=2+\sqrt{5}$ のとき次の式の値を求めよ.

   $$a^2-4a+1$$

4. 次の連立不等式を解け.

   $$\begin{cases} x^2-2x-15<0 \\ x^2-3x-4 \geqq 0 \\ 7(x-2)-6(x-2)<0 \end{cases}$$

5. 2 次方程式 $x^2-3x-(k+1)(k-2)=0$ の解がともに 5 より小さくなるように, 定数 k の範囲を求めよ.

6. 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+6=0$ (p, q は実数) の一つの解が $1-i$ であるとき, 残りの解を求めよ.

7. a が実数のとき，以下の問いに答えよ.

   (1) $a^2+1>a-a^2$ を証明せよ.

   (2) $x^2+ax+x-a^4-a^2+a^3+a<0$ を解け.

8. $\sin 105^\circ$ の値を求めよ.

9. $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ とする．このとき $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ の値を求めよ.

10. 方程式 $\left(\dfrac{1}{9}\right)^x+\dfrac{1}{3^x}-12=0$ を解け.

11. $\log_2 5=a$ のとき，$\log_{10}40$ を a を用いて表せ.

12. 関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 5$ について次の各問いに答えよ.

    (1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

    (2) 曲線 $y = f(x)$ の点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式を求めよ.

    (3) 点 $(1,\ 2)$ を通る曲線 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ.

13. 曲線 $y = 2x^2 - 2$ と直線 $y = 6$ で囲まれる図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $(2a+b+c)(2a-b+c) = (2a+c+b)(2a+c-b)$
$= (2a+c)^2 - b^2$
$= \boldsymbol{4a^2+4ca+c^2-b^2}$

(2) $12x^2y - 24xy + 9y = 3y(4x^2-8x+3)$
$= \boldsymbol{3y(2x-1)(2x-3)}$

2. (1) $\sqrt{27} + \dfrac{6}{\sqrt{3}} - \sqrt{48} = 3\sqrt{3} + \dfrac{6\sqrt{3}}{3}4\sqrt{3}$
$= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} - \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$
$= 2 - \sqrt{2} - (\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \boldsymbol{2-\sqrt{3}}$

3. $a = 2+\sqrt{5}$ より

$(a-2)^2 = (\sqrt{5})^2$　ゆえに　$a^2 - 4a = 1$

よって　$a^2 - 4a + 1 = (a^2-4a) + 1 = 1 + 1 = \boldsymbol{2}$

4. 第 1 式から　$(x+3)(x-5) < 0$　ゆえに　$-3 < x < 5$　$\cdots$①
第 2 式から　$(x+1)(x-4) \geqq 0$　ゆえに　$x \leqq -1,\ 4 \leqq x$　$\cdots$②
第 3 式から　$x - 2 < 0$　ゆえに　$x < 2$　$\cdots$③

①, ②, ③ より　　$\boldsymbol{-3 < x \leqq -1}$

5. $f(x) = x^2 - 3x - (k+1)(k-3)$ とすると

$$f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{(2k-1)^2}{4}$$

また　$f(5) >$ であればよいので

$5^2 - 3\cdot 5 - (k+1)(k-2) > 0$　ゆえに　$(k+3)(k-4) < 0$

よって　　$\boldsymbol{-3 < k < 4}$

6. 3 次方程式 $x^3 + px^2 + qx + 6 = 0$ (p, q は実数) が $1-i$ を解にもつから，$1+i$ を解にもつ．残りの解を α とする．解と係数の関係により

$(1-i)(1+i)\alpha = -6$　よって　$\boldsymbol{\alpha = -3}$

7. (1) $a^2+1-(a-a^2)=2a^2-a+1$

$$=2\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$$

よって　　$a^2+1>a-a^2$

(2) $x^2+ax+x-a^4-a^2+a^3+a<0$ より

$$x^2+(a+1)x+(a^2+1)(a-a^2)<0$$
$$\{x+(a^2+1)\}\{x+(a-a^2)\}<0$$

(1) の結果から，$-(a^2+1)<-(a-a^2)$ であることに注意して

$$\boldsymbol{-a^2-1<x<-a+a^2}$$

8. $\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$$

9. $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}\quad\text{ゆえに}\quad\sin\theta\cos\theta=\frac{3}{8}$$

したがって

$$\sin^3\theta-\cos^3\theta=(\sin\theta-\cos\theta)(\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{8}\right)=\frac{\boldsymbol{11}}{\boldsymbol{16}}$$

10. $t=\dfrac{1}{3^x}=3^{-x}$ とおくと $(t>0)$

$$t^2+t-12=0\quad\text{ゆえに}\quad(t+4)(t-3)=0$$

$t>0$ であるから　$t=3$

したがって　$3^{-x}=3$　ゆえに　$-x=1$　よって　$\boldsymbol{x=-1}$

11. $\log_{10} 40 = \dfrac{\log_2 40}{\log_2 10} = \dfrac{\log_2 5 + \log_2 2^3}{\log_2 5 + \log_2 2} = \boldsymbol{\dfrac{a+3}{a+1}}$

12. (1) $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$

(2) $f'(1) = -6$ より，求める接線の方程式は

$$y - 0 = -6(x-1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -6x - 6}$$

(3) $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y - (a^3 - 3a^2 - 3a + 5) = (3a^2 - 6a - 3)(x - a)$$

すなわち　　$y = (3a^2 - 6a - 3)x - 2a^3 + 3a^2 + 5 \quad \cdots ①$

これが点 $(1,\ 2)$ を通るとき

$$2 = (3a^2 - 6a - 3)\cdot 1 - 2a^3 + 3a^2 + 5$$

したがって　$a(a^2 - 3a + 3) = 0$　ゆえに　$a = 0$

これを ① に代入して　　$\boldsymbol{y = -3x + 5}$

13. $2x^2 - 2 = 6$ より　$x = \pm 2$

求める面積を S とすると

$$S = \int_{-2}^{2} \{6 - (2x^2 - 2)\}dx = \frac{|2|}{6}\{2 - (-2)\}^3 = \boldsymbol{\frac{64}{3}}$$

7.6 平成 25 年度編入学試験 (60 分)

1. 以下の分数式を簡単にせよ．(配点 4 点)

$$\frac{x^2-11x+24}{x^2-6x-16} \div \frac{x^2-6x+9}{x^2+2x}$$

2. 次の各式を因数分解せよ．(配点各 4 点)

(1) $x^4y - xy^4$

(2) $9x^2 - 21xy + 10y^2$

3. 3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ を解け．(配点 4 点)

4. 整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると余りが -2，$x-3$ で割ると余りが 10 であるとき，$P(x)$ を $x^2 - 2x - 3$ で割ったときの余りを求めよ．(配点 9 点)

5. 次の方程式，不等式を解け．(配点各 3 点)

(1) $x^2 + x + 1 = 0$

(2) $x^2 + 6x + 5 = 0$

(3) $x^2 - 2x + 2 > 0$

6. 2 次方程式 $x^2 - 7x + k = 0$ の解が α，3α であるとき，以下の問いに答えよ．(配点各 3 点)

(1) 定数 α の値を求めよ．

(2) 定数 k の値を求めよ．

7. 円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = 2x + k$ が接するよう k の値を求めよ．また，そのときの接点の座標を求めよ．(配点 10 点)

8. 角 θ の動径が第 3 象限にあり，$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$ のとき $\sin\theta$ の値を求めよ．

9. $\triangle$ABC において $\angle \mathrm{A} = 135°$，$\mathrm{AB} = \sqrt{2}$，$\mathrm{AC} = 3$ であるとき，辺 BC の長さと $\triangle$ABC の面積を求めよ．(配点 10 点)

10. 次の式を計算せよ．(配点 5 点)

$$\frac{\sqrt[3]{15} \times \sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{6}}$$

11. 方程式 $\log_2 x + \log_2(x-3) = 2$ を解け．(配点 5 点)

12. 関数 $y = x^3 - 3x$ について次の各問に答えよ．

    (1) 増減表を書け．(配点 6 点)

    (2) 極値とそれを与える x の値を求めよ．(配点 4 点)

    (3) この関数のグラフ上の $x = 2$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．(配点 5 点)

13. 曲線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた図形の面積を求めよ．(配点 10 点)

解答例

1. $\dfrac{x^2 - 11x + 24}{x^2 - 6x - 16} \div \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x} = \dfrac{(x-3)(x-8)}{(x+2)(x-8)} \times \dfrac{x(x+2)}{(x-3)^2} = \boldsymbol{\dfrac{x}{x-3}}$

2. (1) $x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3)$
   $= \boldsymbol{xy(x-y)(x^2+xy+y^2)}$

   (2) $9x^2 - 21xy + 10y^2 = \boldsymbol{(3x-2y)(3x-5y)}$

3. $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$ を因数分解すると

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 4x - 12 &= x^2(x+3) - 4(x+3) \\ &= (x+3)(x^2-4) \\ &= (x+3)(x+2)(x-2) \end{aligned}$$

   よって，3 次方程式 $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$ の解は　$\boldsymbol{x = -3, -2, 2}$

4. $P(x)$ を $x+1$ で割った余りが -2 であるから　$P(-1)=-2$　$\cdots$①

$P(x)$ を $x-3$ で割った余りが 10 であるから　$P(3)=10$　$\cdots$②

$P(x)$ を 2 次式 x^2-2x-3 で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2-2x-3)Q(x)+ax+b \\ &= (x+1)(x-3)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

これに $x=-1,\ 3$ をそれぞれ代入すると

$$P(-1)=-a+b, \qquad P(3)=3a+b$$

①，② を上式に代入して

$$-a+b=-2, \qquad 3a+b=10$$

これを解いて　　$a=3$，$b=1$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{3x+1}$

5. (1) 2 次方程式 $x^2+x+1=0$ に解の公式を適用して

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2} = \frac{\boldsymbol{-1\pm\sqrt{3}\,i}}{\boldsymbol{2}} \end{aligned}$$

(2) $(x+5)(x+1)>0$ を解いて　　$\boldsymbol{x<-5,\ -1<x}$

(3) $(x-1)^2+1>0$ より　　**すべての実数**

6. (1) 解と係数の関係により

$$\alpha+3\alpha=-\frac{-7}{1}\cdots①, \qquad \alpha\cdot3\alpha=\frac{k}{1}\cdots②$$

① から $\alpha=\dfrac{7}{4}$

(2) (1) の結果を ② に代入すると　$\boldsymbol{k=\dfrac{147}{16}}$

7. $x^2+y^2=5\cdots$①，$y=2x+k\cdots$② とおく．

② を ① に代入して　$x^2+(2x+k)^2=5$

整理すると　　$5x^2+4kx+k^2-5=0$　$\cdots$③

このとき，係数について

$$(4k)^2-4\cdot5\cdot(k^2-5)=0 \quad \text{整理すると} \quad k^2-25=0$$

これを解いて　　$k=\pm5$

③ の重解は　$x=-\dfrac{4k}{2\cdot5}=-\dfrac{2}{5}k$

これを ② に代入すると　$y=\dfrac{1}{5}k$

ゆえに，接点の座標は　$\left(-\dfrac{2}{5}k,\ \dfrac{1}{5}k\right)$

よって　　$\boldsymbol{k=5}$ のとき，接点 $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$

$\boldsymbol{k=-5}$ のとき，接点 $\boldsymbol{(2,-1)}$

8. θ は第 3 象限の角より $\sin\theta<0$ であるから

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

9. $A=135^\circ$，$b=3$，$c=\sqrt{2}$ を余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=3^2+(\sqrt{2})^2-2\cdot3\cdot\sqrt{2}\cos135^\circ\\&=9+2+6=17\end{aligned}$$

$a>0$ であるから　$\boldsymbol{BC=\sqrt{17}}$

△ABC の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}bc\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot3\cdot\sqrt{2}\sin135^\circ=\boldsymbol{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

10. $\dfrac{\sqrt[3]{15}\times\sqrt[3]{50}}{\sqrt[3]{6}}=\sqrt[3]{\dfrac{15\times50}{6}}=\sqrt[3]{125}=\boldsymbol{5}$

11. 真数は正であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad x - 3 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 3 \quad \cdots ①$$

方程式は $\log_2 x(x-3) = \log_2 2^2$ であるから

$$\begin{aligned} x(x-3) &= 2^2 \\ x^2 - 3x - 4 &= 0 \\ (x+1)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

① に注意して　　$\boldsymbol{x = 4}$

12. (1) $y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

(2) (1) の結果から

$x = -1$ のとき極大値 2，$x = 1$ のとき極小値 -2

(3) $x = 2$ のとき，$y = 2$，$y' = 9$ であるから

$$y - 2 = 9(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 9x - 16}$$

13. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = x + 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = -1,\ 2$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において　$x + 2 \geqq x^2$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(x+2) - x^2\}\, dx \\ &= -\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)\, dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{2 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

7.7　平成 24 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の各式を簡単にせよ．(配点 5 点)

   (1) $\dfrac{(x^2y^3)^2}{(-2xy^2)^3}$

   (2) $|3-\pi|+|4-\pi|$

2. 次の式を因数分解せよ．(配点 5 点)

   $$a^2-b^2+6bc-9c^2$$

3. 次の式が恒等式となるように，定数 a，b の値を定めよ．(配点 10 点)

   $$\frac{3x+1}{(x-1)(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

4. 次の方程式および不等式を解け．(配点 5 点)

   (1) $3x^2+4x-5=0$

   (2) $2x^2-x-6>0$

5. 次の 2 次関数の頂点の座標を求めよ．(配点 5 点)

   $$y=-x^2+2\sqrt{2}x-2$$

6. 次の 2 次方程式が重解をもつように定数 k の値を定めよ．(配点 10 点)

   $$x^2+(k-3)x-2k+3=0$$

7. 以下の問いに答えよ．

   (1) θ の動径が第 4 象限にあり，$\tan\theta = -2$ のとき，$\sin 2\theta$ の値を求めよ．(配点 6 点)

   (2) 三角方程式 $2\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ を $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲で解け．(配点 9 点)

8. 以下の問いに答えよ．(配点各 5 点)

   (1) $\sqrt[3]{2}$ を小数で表したとき，小数第 1 位の値を求めよ．

   (2) 2^{100} は何桁の数か．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ として計算せよ．

9. 3 次関数 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ について以下の問いに答えよ．

   (1) 増減表をかけ．(配点 6 点)

   (2) 極値とそれを与える x の値を求めよ．(配点 4 点)

   (3) グラフの概形をかけ．(配点 5 点)

10. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -x+6$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．(配点 10 点)

解答例

1. (1) $\dfrac{(x^2y^3)^2}{(-2xy^2)^3} = \dfrac{x^4y^6}{-8x^3y^6} = -\dfrac{x}{8}$

   (2) $3 - \pi < 0$ より $\quad |3-\pi| = -(3-\pi) = \pi - 3$

   $4 - \pi > 0$ より $\quad |4-\pi| = 4 - \pi$

   よって $\quad |3-\pi| + |4-\pi| = (\pi - 3) + (4 - \pi) = \mathbf{1}$

2. (平方差を利用する)

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 6bc - 9c^2 &= a^2 - (b-3c)^2 \\ &= \{a + (b-3c)\}\{a - (b-3c)\} \\ &= \boldsymbol{(a + b - 3c)(a - b + 3c)} \end{aligned}$$

3. 等式の両辺に $(x-1)(x+2)$ をかけると

$$3x+1=a(x+2)+b(x-1)$$

右辺を x について整理すると

$$3x+1=(a+b)x+(2a-b)$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$3=a+b,\quad 1=2a-b$$

よって　　$\boldsymbol{a=\dfrac{4}{3},\quad b=\dfrac{5}{3}}$

4. (1) $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-3\cdot(-5)}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{-2\pm\sqrt{19}}{3}}$

(2) 与えられた不等式から　　$(x-2)(2x+3)>0$

これを解いて　　$\boldsymbol{x<-\dfrac{3}{2},\quad 2<x}$

5. 　　$y=-x^2+2\sqrt{2}x-2=-(x-\sqrt{2})^2$

よって，頂点の座標は　　$\boldsymbol{(\sqrt{2},\ 0)}$

6. 2 次方程式 $x^2+(k-3)x-2k+3=0$ が重解をもつとき $D=0$ であるから

$$\begin{aligned}(k-3)^2-4\cdot1\cdot(-2k+3)&=0\\ k^2+2k-3&=0\\ (k+3)(k-1)&=0\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{k=-3,\ 1}$

7. (1) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より

$$1+(-2)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\quad\text{ゆえに}\quad\cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

θ は第 4 象限の角であるから，$\cos\theta>0$ より　　$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって　　$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{4}{5}}$

(2) 与えられた方程式から $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$ $\cdots$①

$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ より $-\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\pi-\dfrac{\pi}{6}$

この範囲で ① を解くと $\theta-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

よって $\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi}$

8. (1) $1.2^3=1.728$，$1.3^3=2.197$ であるから

$$1.2^3<2<1.3^3 \quad \text{ゆえに} \quad 1.2<\sqrt[3]{2}<1.3$$

よって，$\sqrt[3]{2}$ の小数第 1 位の数は **2**

(2) $\log_{10}2^{100}=100\log_{10}2=100\times0.3010=30.10$

$30<\log_{10}2^{100}<31$ であるから

$$10^{30}<2^{100}<10^{31}$$

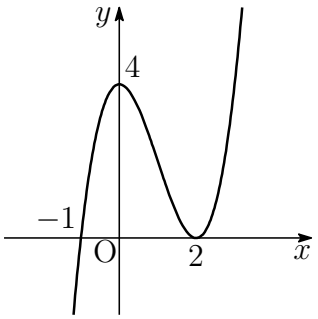
よって，2^{100} は **31 桁**の数である．

9. (1) $y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると $x=0,\ 2$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



(2) $x=0$ で**極大値 4**

$x=2$ で**極小値 0**

(3) (右図)

10. 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = -x + 6$ の共有点の x 座標は

$$x^2 = -x + 6 \quad \text{これを解いて} \quad x = -3,\ 2$$

$-3 \leqq x \leqq 2$ において　$-x + 6 \geqq x^2$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{2} \{(-x + 6) - x^2\}\, dx \\ &= -\int_{-3}^{2} (x + 3)(x - 2)\, dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right) \{2 - (-3)\}^3 = \boldsymbol{\frac{125}{6}} \end{aligned}$$

7.8 平成 23 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の式を簡単にせよ．(配点 10 点)

   (1) $(-xy^2z)^3(-3xz^2)^2$

   (2) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

2. 次の式を因数分解せよ．(配点 5 点)

   $$a^3-ab^2-b^2c+a^2c$$

3. 次の連立不等式を解け．(配点 5 点)

   $$\begin{cases} x^2-2x-8<0 \\ 6-2x \leqq 0 \end{cases}$$

4. 2 次関数 $y=-x^2+6x-4$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ について次の問いに答えよ．(配点 10 点)

   (1) 頂点を求め，定義域の範囲でグラフの概形をかけ．

   (2) 最大値，最小値を求めよ．またそのときの x の値も求めよ．

5. 2 次関数 $y=x^2+ax+2a-3$ のグラフが x 軸と接するときの a の値を求めよ．また，そのときのグラフと y 軸の共有点の座標を求めよ．(配点 10 点)

6. θ が第 3 象限の角で，$\tan\theta=\sqrt{5}$ のとき，$\cos\theta$，$\sin\theta$ の値を求めよ．(配点 8 点)

7. 関数 $f(x)=3\cos\dfrac{x}{2}$ の周期を求めよ．(配点 5 点)

8. 次の等式を証明せよ．(配点 7 点)

   $$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

9. 次の式を簡単にせよ．ただし，$a > 0$ とする．(配点 10 点)

   (1) $\sqrt[3]{a} \div \sqrt[4]{a^3}$

   (2) $\log_2(3+\sqrt{5}) + \log_2(3-\sqrt{5})$

10. 次の方程式および不等式を解け．(配点 10 点)

   (1) $9^{x+1} - 3^x - 8 = 0$

   (2) $1 < \log_{10}(1-10x) < 2$

11. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ に関して，以下の問いに答えなさい．(配点 10 点)

   (1) 増減表をかけ．

   (2) グラフの概形をかき，極値とそれを与える x の値を求めよ．

12. 次の 2 つの 2 次関数で囲まれる図形の面積を求めよ．(配点 10 点)

$$y = x^2 - 3x - 2, \quad y = -x^2 + x - 2$$

解答例

1. (1) $(-xy^2z)^3(-3xz^2)^2 = -x^3y^6z^3 \times 9x^2z^4$
$$= \boldsymbol{-9x^5y^6z^7}$$

(2) $\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$
$$= \frac{(8+2\sqrt{15})+(8-2\sqrt{15})}{5-3} = \mathbf{8}$$

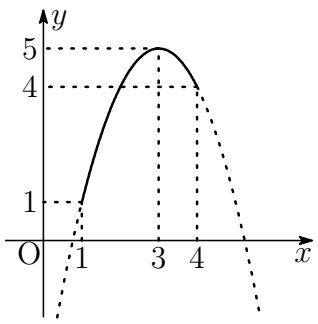
2. (最も次数の低い文字 c に着目する)
$$\begin{aligned} a^3-ab^2-b^2c+a^2c &= a(a^2-b^2)+c(a^2-b^2) \\ &= (a^2-b^2)(a+c) \\ &= \boldsymbol{(a+b)(a-b)(a+c)} \end{aligned}$$

3. 第 1 式より　$(x+2)(x-4) < 0$
ゆえに　$-2 < x < 4$　$\cdots$①
第 2 式より　$x \geqq 3$　$\cdots$②

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{3 \leqq x < 4}$

4. (1) $y = -x^2+6x-4$ を変形すると
$$y = -(x-3)^2+5$$
頂点の座標は　**(3, 5)**

(2) $x = 3$ で**最大値 5**
$x = 1$ で**最小値 1**



5. 2 次関数 $y = x^2+ax+2a-3$ について $D = 0$ であるから
$$a^2 - 4\cdot1(2a-3) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a^2-8a+12 = 0$$
これを解いて　$a = 2,\ 6$
y 軸との共有点の座標は $(0,\ 2a-3)$ であるから
$$\boldsymbol{a = 2 \text{ のとき } (0,\ 1), \quad a = 6 \text{ のとき } (0,\ 9)}$$

6. $\tan\theta=\sqrt{5}$ を $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+(\sqrt{5})^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\quad\text{ゆえに}\quad\cos^2\theta=\frac{1}{6}$$

θ は第 3 象限の角であるから，$\cos\theta<0$ より　$\boldsymbol{\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{6}}}$

また　　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=\sqrt{5}\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}}$

7. $\boldsymbol{4\pi}$

8. $$\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{1+2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$$
$$=\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}$$

9. (1) $\sqrt[3]{a}\div\sqrt[4]{a^3}=a^{\frac{1}{3}}\div a^{\frac{3}{4}}=a^{-\frac{5}{12}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt[12]{a^5}}}$

(2) $\log_2(3+\sqrt{5})+\log_2(3-\sqrt{5})=\log_2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})$
$=\log_2 4=\boldsymbol{2}$

10. (1) $3^x=t$ とおくと　　$t>0$
$9^{x+1}=9(3^x)^2$ であるから，方程式は

$$9t^2-t-8=0\quad\text{すなわち}\quad(t-1)(9t+8)=0$$

$t>0$ により　$t=1$　すなわち　$3^x=1$
これを解いて　　$\boldsymbol{x=0}$

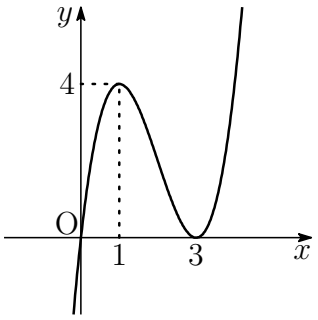
(2) 方程式は　　$\log_{10}10<\log_{10}(1-10x)<\log_{10}100$
底 10 は 1 より大きいので　$10<1-10x<100$
これを解いて　　$\boldsymbol{-\dfrac{99}{10}<x<-\dfrac{9}{10}}$

11. (1) $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると　$x = 1,\ 3$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 4	↘	極小 0	↗



(2) $x = 1$ で**極大値 4**

$x = 3$ で**極小値 0**

12. 2 つの 2 次関数のグラフの共有点の x 座標は

$$x^2 - 3x - 2 = -x^2 + x - 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0,\ 2$$

$0 \leqq x \leqq 2$ において　$-x^2 + x - 2 \geqq x^2 - 3x - 2$

よって，求める部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(-x^2 + x - 2) - (x^2 - 3x - 2)\}\, dx \\ &= -2\int_0^2 x(x-2)\, dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)(2-0)^3 = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

7.9　平成 22 年度編入学試験 (60 分)

1. 次の計算をせよ．(配点各 5 点)

   (1) $32x^3y^2 \times \left(\dfrac{1}{2}xy^3\right)^4$

   (2) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$

2. 次の式を因数分解せよ．(配点各 5 点)

   (1) $x^2+y^2-2xy-z^2$

   (2) $(a+b+c+1)(a+1)+bc$

3. 次の方程式および不等式を解け．(配点各 5 点)

   (1) $6x^2+x-1=0$

   (2) $x^2-3x+5>0$

4. 2 次方程式 $x^2+(2k+2)x+k^2-5=0$ が実数解を持つような k の値の範囲を求めよ．(配点 10 点)

5. $\sin\theta=\dfrac{2}{5}$ $(90^\circ<\theta<180^\circ)$ のとき $\cos\theta$ の値を求めよ．(配点 5 点)

6. $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき $\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ．(配点 5 点)

7. △ABC において $\angle\mathrm{A}=120^\circ$，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$ であるとき辺 BC の長さと △ABC の面積を求めよ．(配点 10 点)

8. 次の各式を計算せよ．(配点各 5 点)

   (1) $\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{12}$

   (2) $\sqrt[6]{a^7}\times\sqrt[3]{a^4}\div\sqrt{a}$

   (3) $2\log_6 3+\log_6 20-\log_6 5$

9. 方程式 $4^x-3\cdot 2^x-4=0$ を解け．(配点 5 点)

10. 関数 $y=x^3+3x^2$ について次の各問いに答えよ．

    (1) この関数のグラフ上の $x=1$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．(配点 5 点)

    (2) 極値を求めよ．(配点 7 点)

11. 曲線 $y=x^2-3$ と直線 $y=2x$ で囲まれた図形の面積を求めよ．(配点 8 点)

解答例

1. (1) $32x^3y^2 \times \left(\dfrac{1}{2}xy^3\right)^4 = 32x^3y^2 \times \dfrac{1}{16}x^4y^{12} = \boldsymbol{2x^7y^{14}}$

   (2) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{3}\cdot1$
   $= \boldsymbol{6+2\sqrt{2}+2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$

   公式 $\boldsymbol{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

2. (1) $x^2+y^2-2xy-z^2 = (x-y)^2-z^2$
   $= \{(x-y)+z\}\{(x-y)-z\}$
   $= \boldsymbol{(x-y+z)(x-y-z)}$

   (2) $a+1=x$ とおくと
   $(与式) = (x+b+c)x+bc$
   $= x^2+(b+c)x+bc$
   $= (x+b)(x+c)$
   $= \boldsymbol{(a+b+1)(a+c+1)}$

3. (1) $6x^2+x-1=0$
   すなわち $(2x+1)(3x-1)=0$
   よって $\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3}}$

   (2) $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4} > 0$ であるから　解は，**すべての実数**

4. 2 次方程式 $x^2+2(k+1)x+k^2-5=0$ が実数解をもつので，
   係数について，$D/4 \geqq 0$ であるから

   $(k+1)^2-1\cdot(k^2-5) \geqq 0$　これを解いて　$\boldsymbol{k \geqq -3}$

5. $90^\circ < \theta < 180^\circ$ のとき $\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{21}}{5}}$$

6. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{2}{3}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{4}{9} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = -\frac{5}{18}}$$

7. BC の長さ a は，余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 3^2 + 4^2 - 2\cdot3\cdot4\cos120^\circ \\ &= 9 + 16 - 2\cdot3\cdot4\times\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 37 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{BC = \sqrt{37}}$

また　$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\sin120^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

8. (1) $\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{2\cdot3^2}\sqrt[3]{2^2\cdot3} = (2\cdot3^2)^{\frac{1}{3}}(2^2\cdot3)^{\frac{1}{3}}$
$= 2^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{2}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}\cdot3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}\cdot3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2\cdot3 = \boldsymbol{6}$

別解　$\sqrt[3]{18}\sqrt[3]{12} = \sqrt[3]{2\cdot3^2}\sqrt[3]{2^2\cdot3} = \sqrt[3]{2\cdot3^2\times2^2\cdot3}$
$= \sqrt[3]{2^3\cdot3^3} = \sqrt[3]{2^3}\sqrt[3]{3^3} = 2\cdot3 = \boldsymbol{6}$

(2) $\sqrt[6]{a^7}\times\sqrt[3]{a^4}\div\sqrt{a} = a^{\frac{7}{6}}\times a^{\frac{4}{3}}\div a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}+\frac{4}{3}-\frac{1}{2}} = \boldsymbol{a^2}$

(3) $2\log_6 3 + \log_6 20 - \log_6 5 = \log_6 3^2 + \log_6 20 - \log_6 5$
$= \log_6\dfrac{3^2\cdot20}{5} = \log_6 6^2 = \boldsymbol{2}$

9. $2^x = t$ とすると　$t > 0$

方程式は　$t^2 - 3t - 4 = 0$
ゆえに　$(t+1)(t-4) = 0$
$t > 0$ より　$t = 4$

したがって　$2^x = 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 2}$

10. (1) $f(x) = x^3 + 3x^2$ とすると　$f'(x) = 3x^2 + 6x$

ゆえに　$f(1) = 1^3 + 3\cdot 1^2 = 4$,　　$f'(1) = 3\cdot 1^2 + 6\cdot 1 = 9$

よって，求める接線の方程式は

$$y - 4 = 9(x - 1) \qquad \text{すなわち} \qquad \boldsymbol{y = 9x - 5}$$

(2) $y' = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$

$y' = 0$ とすると　$x = -2,\ 0$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 4	$\searrow$	極小 0	$\nearrow$

よって，$\boldsymbol{x = -2}$ で**極大値 4**，$\boldsymbol{x = 3}$ で**極小値 0** をとる．

11. 曲線 $y = x^2 - 3$ と直線 $y = 2x$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - 3 = 2x \quad \text{これを解いて} \quad x = -1,\ 3$$

$-1 \leqq x \leqq 3$ の範囲において　$2x \geqq x^2 - 3$

よって，求める図形の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \{2x - (x^2 - 3)\}\, dx \\ &= -\int_{-1}^{3} (x + 1)(x - 3)\, dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{3 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

7.10　平成 21 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の式を展開しなさい．(配点 5 点)

$$(x-a+1)^2$$

2. 次の式を因数分解しなさい．(配点 10 点)

(1) $2ax^2-8a$

(2) x^3-1

3. 次の 2 次方程式を解きなさい．(配点 5 点)

$$2x^2-6x-3=0$$

4. 次の 2 次関数の頂点と軸を求めなさい．(配点 8 点)

$$y=-2x^2+4x+1$$

5. 2 次関数 $y=2x^2+2mx+1$ が x 軸と異なる 2 点を共有するための，定数 m の値の範囲を求めよ．(配点 12 点)

6. 次の方程式，不等式を解きなさい．(配点 20 点)

(1) $\log_2 x+\log_2(x-2)=3$

(2) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$

(3) $27^x=3^{2-x}$

(4) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}=\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x}$

7. 次の三角比の値を求めなさい．(配点 10 点)

(1) $\sin 0^\circ$

(2) $\sin 45^\circ$

(3) $\cos 60^\circ$

(4) $\tan 30^\circ$

(5) $\cos 135^\circ$

8. △ABC において，$b=\mathrm{AC}=3$，$c=\mathrm{AB}=5$，$\angle \mathrm{A}=120^\circ$ であるとき，辺 BC の長さを求めなさい．(配点 10 点)

9. 関数 $y = -2x^2 + 4x + 1$ のグラフ上の点 $(2,\ 1)$ における接線の方程式を求めなさい．(配点 5 点)

10. 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 3$ の増減を表を用いて表しなさい．(配点 5 点)

11. 次の不定積分と定積分の値を求めなさい．(配点 10 点)

    (1) $\displaystyle\int(-4x^2 + 8x - 3)dx$

    (2) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)(x-4)dx$

解答例

1. $(x - a + 1)^2 = \boldsymbol{x^2 + a^2 - 2ax + 2x - 2a + 1}$

2. (1) $2ax^2 - 8a = 2a(x^2 - 4)$
   $= \boldsymbol{2a(x+2)(x-2)}$

   (2) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1)(x^2 + x\cdot 1 + 1^2)$
   $= \boldsymbol{(x-1)(x^2+x+1)}$

3. $\boldsymbol{x = \dfrac{3 \pm \sqrt{15}}{2}}$

4. 右辺を変形すると　$y = -2(x-1)^2 + 3$
   よって　　**頂点 (1, 3)，軸 $x = 1$**

5. グラフが x 軸と異なる 2 点を共有するから，係数について $D/4 > 0$ より

   $m^2 - 2\cdot 1 > 0$　これを解いて　$\boldsymbol{m < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < m}$

6. (1) 真数は正であるから　$x > 0$　かつ　$x - 2 > 0$
   すなわち　　$x > 2$　$\cdots$①
   方程式は　　$\log_2 x(x-2) = \log_2 2^3$
   ゆえに　　$x(x-2) = 2^3$
   整理すると　　$x^2 - 2x - 8 = 0$
   すなわち　　$(x+2)(x-4) = 0$
   ① より　　$\boldsymbol{x = 4}$

(2) 与えられた不等式から　　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{4}$

真数はであり，底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいので

$$0 < x-1 < \frac{1}{4} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{1 < x < \frac{5}{4}}$$

(3) 与えられた方程式から　$3^{3x} = 3^{2-x}$

したがって　$3x = 2-x$　これを解いて　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{2}}$

(4) 与えられた方程式から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x}$

したがって　$x+1 = 2x$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 1}$

7. (1) $\boldsymbol{\sin 0^\circ = 0}$

(2) $\boldsymbol{\sin 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) $\boldsymbol{\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}}$

(4) $\boldsymbol{\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(5) $\boldsymbol{\cos 135^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

8. 余弦定理により，BC の長さ a は

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 3^2 + 5^2 - 2{\cdot}3{\cdot}5\cos 120^\circ \\ &= 9 + 25 - 2{\cdot}3{\cdot}5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 49 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{BC = 7}$

9. $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$ とすると　$f'(x) = -4x + 4$

ゆえに　　$f'(2) = -4{\cdot}2 + 4 = -4$

よって，求める接線の方程式は

$$y - 1 = -4(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = -4x + 9}$$

10. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

$y' = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

11. (1) $\displaystyle\int(-4x^2+8x-3)dx = \boldsymbol{-\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 3x + C}$

(2) $\displaystyle\int_2^4 (x-2)(x-4)dx = -\frac{1}{6}(4-2)^3 = \boldsymbol{-\frac{4}{3}}$

7.11　平成 20 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の式を展開しなさい.

   (1) $(x-y+z)(x-y-2z)$

   (2) $(x-2)(x+3)(x+2)(x^2-3x+9)$

2. 次の式を因数分解しなさい.

   (1) $4x^4+11x^2-3$

   (2) $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$

3. 2 次関数 $y=-x^2+6x-2$ について，次の問いに答えなさい.

   (1) 頂点の座標を求めよ.

   (2) グラフと直線 $y=-x+4$ の交点の座標を求めなさい.

4. 放物線 $y=ax^2+ax+a-1$ のグラフが x 軸より上にあるとき，定数 a の値の範囲を求めなさい.

5. α が第 2 象限の角で $\cos\alpha=-\dfrac{2}{3}$ のとき，$\sin\alpha$，$\sin 2\alpha$ の値を求めなさい.

6. $0^\circ \leqq \theta \leqq 360^\circ$ のとき，次の方程式・不等式を解きなさい.

   (1) $\dfrac{1}{2} \leqq \sin\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2) $\cos 2\theta+3\sin\theta-2=0$

7. 次の式を簡単にしなさい.

   (1) $(-2ab^{-2})^3(a\div b)^{-2}$　　(2) $3\log_3 7-4\log_3\sqrt{63}-\log_3 21$

8. 次の方程式・不等式を解きなさい.

   (1) $\log_{\sqrt{2}}(x-1) \leqq 4$　　(2) $9^x-6\cdot 3^x-27=0$

9. 関数 $y=-x^3+3x-1$ について，次の問いに答えなさい.

   (1) 増減表をつくり極値を求めよ.

   (2) グラフを書きなさい.

10. 放物線 $y=x^2$ とそのグラフ上の点 $(2,\ 4)$ における接線および x 軸とで囲まれた図形の面積を求めなさい.

解答例

1. (1) $x-y=A$ とすると

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (A+z)(A-2z)\\ &= A^2-zA-2z^2\\ &= (x-y)^2-z(x-y)-2z^2\\ &= \boldsymbol{x^2-2xy+y^2-zx+yz-2z^2}\end{aligned}$$

(2) $\quad(x-2)(x+3)(x+2)(x^2-3x+9)$
$=(x+2)(x-2)\times(x+3)(x^2-3x+9)$
$=(x^2-4)(x^3+27)$
$=\boldsymbol{x^5-4x^3+27x^2-108}$

2. (1) (複 2 次式の因数分解)

$$\begin{aligned}4x^4+11x^2-3 &= (4x^2-1)(x^2+3)\\ &= \boldsymbol{(2x+1)(2x-1)(x^2+3)}\end{aligned}$$

(2) (特定の文字に着目：ここでは a)

$$\begin{aligned}&ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)\\ =&a^2b-ab^2+bc(b-c)+c^2a-ca^2\\ =&a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)\\ =&a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)\\ =&(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\ =&\boldsymbol{(b-c)(a-b)(a-c)}\end{aligned}$$

3. (1) 右辺を変形すると $\quad y=-(x-3)^2+7$
よって $\quad$ 頂点の座標は $\quad\boldsymbol{(3,\ 7)}$

(2) 連立方程式

$$\begin{cases} y=-x^2+6x-2\\ y=-x+4\end{cases}$$

を解くと $\quad (x,\ y)=(1,\ 3),\ (6,-2)$
よって，2 次関数のグラフと直線 $y=-x+4$ の交点の座標は

$$\boldsymbol{(1,\ 3),\ (6,-2)}$$

4. 関数の係数について

$$D = a^2 - 4 \cdot a(a-1) = -a(3a-4)$$

とする．関数の x^2 の係数 a が正で，$D < 0$ であるから

$$\begin{cases} a > 0 & \cdots ① \\ -a(3a-4) < 0 & \cdots ② \end{cases}$$

② を解いて　　$a < 0,\ \dfrac{4}{3} < a \quad \cdots ②'$

よって，①，②′ の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{a > \dfrac{4}{3}}$

5. α は第 2 象限の角であるから　$\sin\alpha > 0$

ゆえに　　$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

また　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2 \times \dfrac{\sqrt{5}}{3} \times \left(-\dfrac{2}{3}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{4\sqrt{5}}{9}}$

6. (1) $\boldsymbol{30° \leqq \theta \leqq 60°,\ 120° \leqq \theta \leqq 150°}$

(2) $0° \leqq \theta \leqq 360°$ より　$-1 \leqq \sin\theta \leqq 1 \quad \cdots ①$

方程式を変形すると

$$(1 - 2\sin^2\theta) + 3\sin\theta - 2 = 0$$

整理すると　$2\sin^2\theta - 3\sin\theta + 1 = 0$

すなわち　　$(\sin\theta - 1)(2\sin\theta - 1) = 0$

① より　　$\sin\theta = 1,\ \dfrac{1}{2}$

$0° \leqq \theta \leqq 360°$ において

$\sin\theta = 1$ を解くと　$\theta = 90°$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ を解くと　$\theta = 30°,\ 150°$

よって　　$\boldsymbol{\theta = 30°,\ 90°,\ 150°}$

7. (1)
$$\begin{aligned}(-2ab^{-2})^3(a \div b)^{-2} &= (-2ab^{-2})^3(ab^{-1})^{-2} \\ &= (-2)^3a^3b^{-6} \times a^{-2}b^2 \\ &= -8ab^{-4} \\ &= \boldsymbol{-\frac{8a}{b^4}}\end{aligned}$$

(2) $3\log_3 7 - 4\log_3 \sqrt{63} - \log_3 21$

$= \log_3 7^3 - \log_3 (\sqrt{63})^4 - \log_3 21$

$= \log_3 \dfrac{7^3}{(3^2 \cdot 7)^2 \times 3 \cdot 7}$

$= \log_3 \dfrac{1}{3^5} = \boldsymbol{-5}$

8. (1) 方程式を変形すると　　$\log_{\sqrt{2}}(x-1) \leqq \log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^4$

真数は正であり，底 $\sqrt{2}$ は 1 より大きいので

$$0 < x - 1 \leqq (\sqrt{2})^4 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{1 < x \leqq 5}$$

(2) $3^x = t$ とすると　$t > 0$

方程式は　　$t^2 - 6t - 27 = 0$

ゆえに　　$(t+3)(t-9) = 0$

$t > 0$ より　　$t = 9$

したがって　$3^x = 9$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 2}$

9. (1) $y' = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$

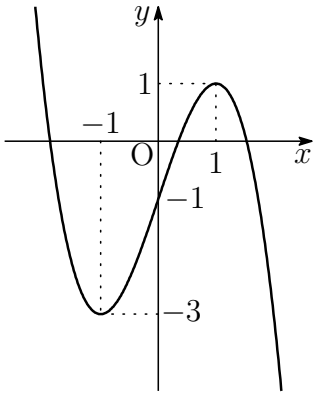
$y' = 0$ とすると　$x = -1,\ 1$

したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -3	↗	極大 1	↘

よって，$\boldsymbol{x = -1}$ で**極小値 $\boldsymbol{-3}$**，$\boldsymbol{x = 1}$ で**極大値 $\boldsymbol{1}$** をとる．

(2) (1) の結果から



10. $f(x) = x^2$ とすると　$f'(x) = 2x$

ゆえに　　$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4$

したがって，放物線 $y = x^2$ 上の点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式は

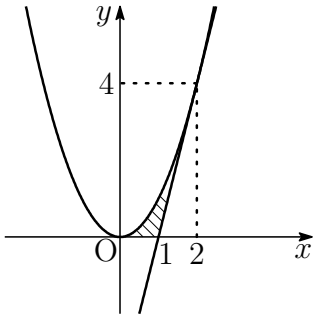
$$y - 4 = 4(x - 2) \quad \text{ゆえに} \quad y = 4x - 4$$

この直線と x 軸との共有点の x 座標は

$$4x - 4 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1$$

求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 \{x^2 - (4x - 4)\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}x^3\ \right] + \left[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$



7.12 平成 19 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の式を因数分解せよ.

   (1) $x^4 - 16$

   (2) $3x^2 - 4x - 4$

   (3) $x^2 + ax + a - 1$

   (4) $a^3 - a^2b - 4a + 4b$

2. 2 次関数 $y = x^2 - 2x + 4$ について次の各問に答えよ.

   (1) グラフの概形をかけ.

   (2) この関数のグラフが直線 $y = mx$ と接するときの m の値を求め，そのときの接点の座標を求めよ.

3. α が第 3 象限の角で $\sin\alpha = -\dfrac{1}{3}$ であるとき $\tan\alpha$ の値を求めよ.

4. △ABC において AB = 3，AC = 4，BC = $\sqrt{13}$ であるとき次の値を求めよ.

   (1) ∠A

   (2) △ABC の面積

   (3) △ABC の外接円の半径

5. 次の問に答えよ.

   (1) $(2^{-3} \times 3^2)^2 \times 4^2$ を簡単にせよ．(既約分数で表せ)

   (2) 方程式 $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ を解け.

   (3) 不等式 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x < 4$ を解け.

   (4) 方程式 $\log_3(x-1) + \log_3(2x-5) = 2$ を解け.

6. 関数 $y = x^3 - 3x - 2$ について，以下の問いに答えよ.

   (1) この関数の極大値，極小値を求めよ.

   (2) この関数のグラフの概形をかけ．(x 軸，y 軸との共有点を正確に書くこと)

   (3) (2) のグラフと x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

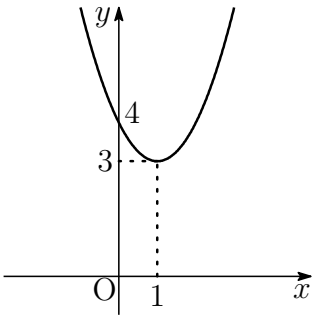
1. (1) $x^4-16=(x^2+4)(x^2-4)$
$$=\boldsymbol{(x^2+4)(x+2)(x-2)}$$

(2) $3x^2-4x-4=\boldsymbol{(x-2)(3x+2)}$

(3) (次数の低い文字 a に着目)
$$\begin{aligned}x^2+ax+a-1&=(x+1)(x-1)+a(x+1)\\&=(x+1)\{(x-1)+a\}\\&=\boldsymbol{(x+1)(x+a-1)}\end{aligned}$$

(4) (次数の低い文字 b に着目)
$$\begin{aligned}a^3-a^2b-4a+4b&=a(a^2-4)-b(a^2-4)\\&=(a^2-4)(a-b)\\&=\boldsymbol{(a+2)(a-2)(a-b)}\end{aligned}$$

2. (1) 右辺を変形すると
$$y=(x-1)^2+3$$
頂点が $(1,\ 3)$ で下に凸の放物線である.
グラフは，右の図のようになる.



(2) 放物線 $y=x^2-2x+4$ と直線 $y=mx$ が接するとき，2 次方程式
$$x^2-2x+4=mx\quad\text{すなわち}\quad x^2-(m+2)x+4=0\quad\cdots①$$
の係数について
$$D=\{-(m+2)\}^2-4\cdot1\cdot4=(m+6)(m-2)$$
とすると，$D=0$ であるから　$m=-6,\ 2$
① より，接点の x 座標は
$$x=-\frac{-(m+2)}{2\cdot1}=\frac{m+2}{2}$$
ゆえに，接点の座標は　$\left(\dfrac{m+2}{2},\ \dfrac{m(m+2)}{2}\right)$
よって　　$\boldsymbol{m=2}$ のとき　　**接点 (2, 4)**
　　$\boldsymbol{m=-6}$ のとき　**接点 (−2, 12)**

3. α は第 3 象限の角であるから　$\cos A < 0$

ゆえに　$\cos A = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

よって　$\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A} = -\dfrac{1}{3} \div \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

4. (1) $a = \sqrt{13}$，$b = 4$，$c = 3$ であるから，余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4^2+3^2-(\sqrt{13})^2}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{\angle A = 60^\circ}$

(2) $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

(3) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

よって　$R = \dfrac{\sqrt{13}}{2\sin 60^\circ} = \dfrac{\sqrt{13}}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{39}}{3}}$

5. (1) $(2^{-3}\times 3^2)^2 \times 4^2 = 2^{-6}\times 3^4 \times (2^2)^2$
$= 2^{-6}\times 3^4 \times 2^4$
$= 2^{-2}\times 3^4$
$= \boldsymbol{\dfrac{81}{4}}$

(2) $2^x = t$ とすると　$t > 0$

方程式は　$t^2 - 3t + 2 = 0$
ゆえに　$(t-1)(t-2) = 0$

$t > 0$ に注意して　$t = 1,\ 2$

よって　$2^x = 1$ を解いて　$x = 0$
$2^x = 2$ を解いて　$x = 1$

したがって　$\boldsymbol{x = 0,\ 1}$

(3) 与えられた不等式から　$2^{-x} < 2^2$

底 2 は 1 より大きいので

$-x < 2$　これを解いて　$\boldsymbol{x > -2}$

(4) 真数は正であるから　$x-1>0$　かつ　$2x-5>0$

すなわち　　$x>\dfrac{5}{2}$　$\cdots$①

方程式は　　$\log_3(x-1)(2x-5)=\log_3 3^2$

ゆえに　　$(x-1)(2x-5)=3^2$

整理すると　$2x^2-7x-4=0$

ゆえに　　$(x-4)(2x+1)=0$

① より　　$\boldsymbol{x=4}$

6. (1) $y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると　$x=-1,\ 1$

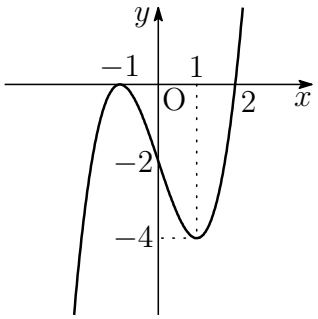
したがって，y の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -4	↗

よって，$\boldsymbol{x=-1}$ で**極大値 0**，$\boldsymbol{x=1}$ で**極小値 -4** をとる．

(2) $y=x^3-3x-2$ の右辺を因数分解すると　$y=(x+1)^2(x-2)$

これと (1) の結果から，グラフは次のようになる．



(3) $-1\leqq x\leqq 2$ において　$x^3-3x-2\leqq 0$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}\{-(x^3-3x-2)\}\,dx\\&=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}\\&=\boldsymbol{\frac{27}{4}}\end{aligned}$$

7.13 平成 18 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の式を展開せよ.

   (1) $(x^2+x-1)(x^2-x+1)$

   (2) $(x+1)(x+2)(x-1)(x-2)$

2. 次の式を因数分解せよ.

   (1) $3x^2-2x-8$

   (2) $a^2-4b^2+(ab-2)(a+2b)$

3. 2 次関数 $y=x^2-8x+10$ について次の問いに答えよ.

   (1) グラフの頂点の座標を求めよ.

   (2) $1 \leqq x \leqq 6$ における最大値と最小値を求めよ.

4. 2 次関数 $y=4x^2+4mx+m$ のグラフが x 軸と接するときの m の値を求め，そのときの接点の座標を求めよ.

5. $\sin 15^\circ$ の値を求めよ.

6. $\sin x+\cos x=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin x\cos x$ の値を求めよ.

7. △ABC において $\angle \mathrm{A}=120^\circ$，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=3$ であるとき，辺 BC の長さと △ABC の外接円の半径を求めよ.

8. $(a^{-2}b^3)^4\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}=a^pb^q$ を満たす p，q の値を求めよ.

9. 方程式 $9^x+2\cdot 3^x-3=0$ を解け.

10. $2\log_2 6+\log_2 10-\log_2 45$ を簡単にせよ.

11. 不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x<3$ を解け.

12. 関数 $y=x^3-3x^2+3$ に関して，以下の問いに答えよ.

    (1) この関数の増減を調べ，グラフの概形をかけ.

    (2) (1) のグラフと直線 $y=-1$ との共有点の x 座標を求めよ.

    (3) (1) のグラフと直線 $y=-1$ で囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $(x^2+x-1)(x^2-x+1) = \{x^2+(x-1)\}\{x^2-(x-1)\}$
$= (x^2)^2 - (x-1)^2$
$= \boldsymbol{x^4 - x^2 + 2x - 1}$

(2) $(x+1)(x+2)(x-1)(x-2) = (x+1)(x-1) \times (x+2)(x-2)$
$= (x^2-1)(x^2-4)$
$= \boldsymbol{x^4 - 5x^2 + 4}$

2. (1) $3x^2 - 2x - 8 = \boldsymbol{(x-2)(3x+4)}$

(2) $a^2 - 4b^2 + (ab-2)(a+2b) = (a+2b)(a-2b) + (ab-2)(a+2b)$
$= (a+2b)\{(a-2b) + ab - 2\}$
$= (a+2b)(ab + a - 2b - 2)$
$= \boldsymbol{(a+2b)(a-2)(b+1)}$

3. (1) 右辺を変形すると　$y = (x-4)^2 - 6$
よって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(4, -6)}$

(2) $\boldsymbol{x = 1}$ で**最大値 3** をとり，$\boldsymbol{x = 4}$ で**最小値 −6** をとる．

4. 2 次関数の係数について

$$D/4 = (2m)^2 - 4 \cdot m = 4m(m-1)$$

グラフが x 軸と接するとき $D = 0$ であるから　$m = 0,\ 1$

接点の x 座標は

$$x = -\frac{4m}{2 \cdot 4} = -\frac{m}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{m = 0}$ のとき　**接点 (0, 0)**

$\boldsymbol{m = 1}$ のとき　**接点** $\left(\boldsymbol{-\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{0}\right)$

5. 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

6. $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

したがって $$1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

よって $$\boldsymbol{\sin x \cos x = -\frac{3}{8}}$$

7. 余弦定理により，BC の長さ a は

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 3^2 + 2^2 - 2{\cdot}3{\cdot}2\cos 120^\circ \\ &= 9 + 4 - 2{\cdot}3{\cdot}2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 19 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから $\quad \boldsymbol{BC = \sqrt{19}}$,

正弦定理により $\quad \dfrac{a}{\sin A} = 2R$

よって $\quad R = \dfrac{\sqrt{19}}{2\sin 120^\circ} = \dfrac{\sqrt{19}}{2{\cdot}\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{57}}{3}}$

8. 左辺を計算すると

$$\begin{aligned} (a^{-2}b^3)^4 \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} &= a^{-8}b^{12} \times (a^2 b^{-1})^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{-8}b^{12} \times a^{\frac{2}{3}} b^{-\frac{1}{3}} \\ &= a^{-\frac{22}{3}} b^{\frac{35}{3}} \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{p = -\dfrac{22}{3},\ \ q = \dfrac{35}{3}}$

9. $3^x = t$ とおくと $\quad t > 0$

方程式は $\quad t^2 + 2t - 3 = 0$

ゆえに $\quad (t+3)(t-1) = 0$

$t > 0$ より $\quad t = 1$

したがって $\quad 3^x = 1 \quad$ これを解いて $\quad \boldsymbol{x = 0}$

10.　$2\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 45$
$= \log_2 36 + \log_2 10 - \log_2 45$
$= \log_2 \dfrac{36 \times 10}{45}$
$= \log_2 8$
$= \log_2 2^3 = \boldsymbol{3}$

11. 与えられた不等式から　$\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{8}$

真数は正であるから　　$x > 0$　$\cdots$①
底 $\frac{1}{2}$ は 1 より小さいから　　$x > \dfrac{1}{8}$　$\cdots$②

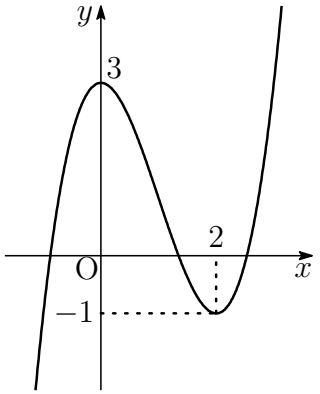
①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{x > \dfrac{1}{8}}$

12. (1) $y = x^3 - 3x^2 + 3$ より
$y' = 3x^2 - 6x$
$= 3x(x-2)$
$y' = 0$ とすると
$x = 0,\ 2$
y の増減表は右のようになる．
したがって，この関数は

$x = 0$ で極大値 3
$x = 2$ で極小値 -1

をとる．
グラフは，右の図のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗



(2) 関数のグラフと直線 $y = -1$ の共有点の x 座標は

$x^3 - 3x^2 + 3 = -1$
整理すると　$x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
ゆえに　$(x-2)^2(x+1) = 0$
よって　$\boldsymbol{x = 2, -1}$

(3) $-2 \leqq x \leqq 1$ の範囲において　$x^3 - 3x^2 + 3 \geqq -1$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(x^3 - 3x^2 + 3) - (-1)\}\, dx \\ &= \int_{-1}^{2} (x^3 - 3x^2 + 4)\, dx \\ &= \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-1}^{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$

7.14　平成 17 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の式を因数分解せよ.

   (1) $9x^2 - y^2$

   (2) $3x^2 - 7x - 6$

   (3) $x^2 + ax + x + 2a - 2$

   (4) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$

2. 放物線 $y = x^2 + 6x + 7$ の頂点の座標を求めよ.

3. 2 次不等式 $x^2 - 2x + 1 > 0$ を解け.

4. 2 次関数 $y = x^2 + 2mx + 2m$ について，次の問いに答えよ．ただし m は正の定数とする.

   (1) この関数の最小値 M を m の式で表せ.

   (2) この関数の最小値が -3 であるとき m の値を定めよ.

5. α の動径が第 4 象限にあり，$\sin\alpha = -\dfrac{3}{4}$ のとき $\cos\alpha$ と $\sin 2\alpha$ の値を求めよ.

6. $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，次の方程式および不等式を解け.

   (1) $\tan 2\theta = -\tan\theta$

   (2) $\cos 2\theta > \sin\theta$

7. 次の式の値を求めよ.

   (1) $(3^{-2} \times 2^3)^2 \times 3^5$

   (2) $\log_3 8 \cdot \log_2 81$

8. 次の方程式および不等式を解け.

   (1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x \geqq 9$

   (2) $\log_3(4x + 2) - \log_3(x - 7) = 2$

9. 関数 $y = x^3 - 3x$ の増減を調べ極値を求め，グラフを描け.

10. 不定積分 $\displaystyle\int (3x - 4)^2\, dx$ を求めよ.

11. 放物線 $y = x^2 + 2x + 3$ と $y = -2x$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $9x^2 - y^2 = \boldsymbol{(3x + y)(3x - y)}$

   (2) $3x^2 - 7x - 6 = \boldsymbol{(x - 3)(3x + 2)}$

   (3) (次数の低い文字 a に着目)

$$\begin{aligned} x^2 + ax + x + 2a - 2 &= a(x + 2) + x^2 + x - 2 \\ &= a(x + 2) + (x + 2)(x - 1) \\ &= (x + 2)\{a + (x - 1)\} \\ &= \boldsymbol{(x + 2)(x + a - 1)} \end{aligned}$$

   (4) (特定に文字に着目する．ここでは a)

$$\begin{aligned} & a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \\ =& a(b + c)(b - c) + bc^2 - a^2b + ca^2 - b^2c \\ =& -a^2(b - c) + a(b + c)(b - c) - bc(b - c) \\ =& -(b - c)\{a^2 - (b + c)a + bc\} \\ =& -(b - c)(a - b)(a - c) \\ =& \boldsymbol{(a - b)(b - c)(c - a)} \end{aligned}$$

2. 右辺を変形すると　$y = (x + 3)^2 - 2$

   よって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(-3, -2)}$

3. 不等式は　$(x - 1)^2 > 0$

   よって　**1 以外のすべての実数**

4. (1) 右辺を変形すると　$y = (x + m)^2 - m^2 + 2m$

   したがって，この関数の最小値 M は　$\boldsymbol{M = -m^2 + 2m}$

   (2) 関数の最小値が -3 であるから

$$\begin{aligned} & -m^2 + 2m = -3 \\ \text{整理すると}\quad & m^2 - 2m - 3 = 0 \\ \text{ゆえに}\quad & (m + 1)(m - 3) = 0 \end{aligned}$$

   m は正であるから　$\boldsymbol{m = 3}$

5. α の動径が第 4 象限にあるから　$\cos\alpha > 0$

よって　$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\dfrac{3}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{4}}$

また　　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\times\left(-\dfrac{3}{4}\right)\times\dfrac{\sqrt{7}}{4} = \boldsymbol{-\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}$

6. (1) 方程式を変形すると

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = -\tan\theta$$

整理すると　$\tan^3\theta - 3\tan\theta = 0$

すなわち　　$\tan\theta(\tan^2\theta - 3) = 0$

よって　　$\tan\theta = 0,\ \pm\sqrt{3}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ おいて

$\tan\theta = 0$ を解くと　　$\theta = 0,\ \pi$

$\tan\theta = \sqrt{3}$ を解くと　　$\theta = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$

$\tan\theta = -\sqrt{3}$ を解くと　$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5\pi}{3}$

よって　　$\boldsymbol{\theta = 0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi}$

(2) 不等式を変形すると

$$1 - 2\sin^2\theta > \sin\theta$$

整理すると　$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 < 0$

ゆえに　　$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) < 0$

よって　　$-1 < \sin\theta < \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲でこれを解くと

$$\boldsymbol{0 \leqq \theta < \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi}$$

7. (1) $(3^{-2}\times 2^3)^2 \times 3^5 = 3^{-4}\times 2^6 \times 3^5$

$= 2^6 \times 3$

$= \boldsymbol{192}$

(2) $\log_3 8\cdot\log_2 81 = \dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}\times\log_2 3^4 = \dfrac{3}{\log_2 3}\times 4\log_2 3 = \boldsymbol{12}$

8. (1) 不等式は $3^{-x} \geqq 3^2$
底 3 は 1 より大きいので

$$-x \geqq 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x \leqq -2}$$

(2) 真数は正であるから $4x+2>0$ かつ $x-7>0$
すなわち $x>7 \quad \cdots ①$
方程式を変形すると

$$\log_3(4x+2) = \log_3 9 + \log_3(x-7)$$
$$\log_3(4x+2) = \log_3 9(x-7)$$

ゆえに $4x+2 = 9(x-7)$
① に注意しながら，これを解いて $\boldsymbol{x = 13}$

9. $y = x^3 - 3x$ より

$$y' = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$y' = 0$ とすると

$$x = -1,\ 1$$

y の増減表は右のようになる．

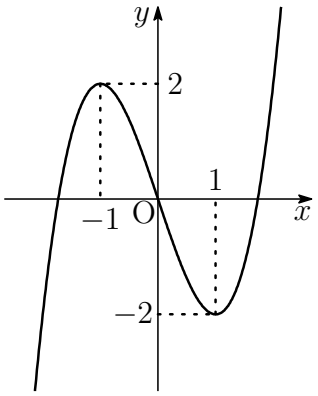
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

したがって，この関数は

$x = -1$ で極大値 2

$x = 1$ で極小値 -2

をとる．
グラフは，右の図のようになる．



10. $$\int (3x-4)^2\,dx = \int (9x^2 - 24x + 16)\,dx$$
$$= \boldsymbol{3x^3 - 12x^2 + 16x + C}$$

11. 放物線と直線の共有点の x 座標は

$$x^2+2x+3=-2x \quad \text{これを解いて} \quad x=-3,-1$$

$-3 \leqq x \leqq -1$ の範囲において　$2x \geqq x^2+2x+3$

したがって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{-1} \{-2x-(x^2+2x+3)\}\,dx \\ &= -\int_{-3}^{-1} (x^2+4x+3)\,dx \\ &= -\int_{-3}^{-1} (x+3)(x+1)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{-1-(-3)\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3}$$

7.15 平成 16 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の各問に答えなさい.

(1) 2 次関数 $y = 2x^2 - (2k+1)x + k + 1$ のグラフが x 軸と 2 点で交わるように，定数 k の値の範囲を求めよ.

(2) 2 次方程式 $2x^2 + x + 3 = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の式の値を求めよ.

$$(\alpha + \beta)^3 - \alpha\beta$$

(3) $A > 90^\circ$ の $\triangle$ABC で，AB $= 3$，AC $= 2$，$\triangle$ABC の面積が 1 のとき，$\cos A$ の値を求めよ.

(4) 7 個の数字 0，1，2，3，4，5，6 から，異なる 4 個を並べて 4 けたの数をつくるとき，3210 以上の数はいくつできるか.

(5) 2 点 A$(5,\ 3)$，B$(2, -3)$ に対して

① 直線 AB の方程式を求めよ.

② 線分 AB を 2 : 1 に内分する点を通り，① で求めた直線に垂直な直線の方程式を求めよ.

(6) 次式を簡単にせよ.

$$\frac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_2 \sqrt{2} - \log_2 \sqrt{6}$$

(7) $\cos 15^\circ - \cos 75^\circ$ の値を求めよ.

(8) $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ で $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき，$\sin\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ.

(9) 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\, dx$$

2. 次の方程式・不等式を解け.

(1) $9^{x+1} - 3^x - 8 = 0$

(2) $2\log_{0.5}(x-2) \geqq \log_{0.5}(x+4)$

(3) $\cos 2x + \sin x = 0$ (但し，$0 \leqq x \leqq 2\pi$)

3. 4 人でジャンケンをするとき，次の確率を求めよ．但し，各人がグー，チョキ，パーを出す確率はすべて $\dfrac{1}{3}$ とする．

   (1) 1 回ジャンケンをして 1 人だけ勝つ確率

   (2) 1 回ジャンケンをして 2 人勝ち残る確率

   (3) 2 回ジャンケンをして 4 人とも残る確率

4. 放物線 $y=-x^2+4x$ と x 軸で囲まれた部分に内接する長方形の底辺の長さを t とし，その面積を S とする．次の各問に答えよ．

   (1) S と t を用いて表せ．t の範囲も示すこと．

   (2) S の最大値とそのときの t の値を求めよ．

5. 次の各問に答えよ．

   (1) 関数 $f(x)$ は $f'(x)=6x-3$，$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx=5$ を満たす．この $f(x)$ を求めよ．

   (2) 2 つの曲線 $y=x^2-2x$，$y=-2x^2+3x+2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) 2 次関数の係数について

$$D=\{-(2k+1)\}^2-4\cdot2\cdot(k+1)=4k^2-4k-7$$

とすると，このとき $D>0$ であるから

$$4k^4-4k-7>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{k<\frac{1-2\sqrt{2}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{2}}{2}<k}$$

(2) 解と係数の関係により　　$\alpha+\beta=-\dfrac{1}{2},\ \ \alpha\beta=\dfrac{3}{2}$

よって　　$(\alpha+\beta)^3-\alpha\beta=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3-\dfrac{3}{2}=\boldsymbol{-\dfrac{13}{8}}$

(3) $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A$ より

$$1 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin A \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{1}{3}$$

A は鈍角であるから $\cos A < 0$

よって $\cos A = -\sqrt{1-\sin^2 A} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = \boldsymbol{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}$

(4) ［1］321□，324□，325□，326□ の場合

□ には，残りの数字が 4 通り入る．したがって，積の法則により

$4 \times 4 = 16$ (通り)

［2］34□□，35□□，36□□ の場合

□□ には，残りの数字 5 個から 2 個並べる順列 ${}_5\mathrm{P}_2$ 通り．したがって，積の法則により $3 \times {}_5\mathrm{P}_2 = 3 \times 5\cdot 4 = 60$ (通り)

［3］4□□□，5□□□，6□□□ の場合

□□□ には，残りの数字 6 個から 3 個並べる順列 ${}_6\mathrm{P}_3$ 通り．したがって，積の法則により $3 \times {}_6\mathrm{P}_3 = 3 \times 6\cdot 5\cdot 4 = 360$ (通り)

よって，求める場合の数は $16 + 60 + 360 = \boldsymbol{436}$ (通り)

(5) ① 2 点 A$(5,\ 3)$，B$(2, -3)$ を通る直線は

$$y - 3 = \frac{-3-3}{2-5}(x-5) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 2x - 7}$$

② 2 点 A$(5,\ 3)$，B$(2, -3)$ を結ぶ線分 AB を 2 : 1 に内分する点は

$$\left(\frac{1\cdot 5 + 2\cdot 2}{2+1},\ \frac{1\cdot 3 + 2\cdot(-3)}{2+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad (3, -1)$$

直線 AB に垂直な直線の傾きを m とすると

$$2m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = -\frac{1}{2}$$

よって，求める直線は

$$y - (-1) = -\frac{1}{2}(x-3) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}$$

(6) $\dfrac{1}{2}\log_2 3 + 3\log_2\sqrt{2} - \log_2\sqrt{6} = \log_2 3^{\frac{1}{2}} + \log_2(\sqrt{2})^3 - \log_2\sqrt{6}$

$$= \log_2\sqrt{3} + \log_2 2\sqrt{2} - \log_2\sqrt{6}$$

$$= \log_2 \frac{\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$= \log_2 2 = \boldsymbol{1}$$

(7) $\cos 15^\circ - \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(8) $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$\cos\theta \leqq 0$

ゆえに　　$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = -\dfrac{3}{5}$

よって　　$\sin^2\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1-\cos\theta}{2} = \dfrac{1}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{3}{5}\right)\right\} = \dfrac{4}{5}$

$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より $45^\circ \leqq \dfrac{\theta}{2} \leqq 90^\circ$ であるから　$\sin\dfrac{\theta}{2} > 0$

したがって　　$\sin\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{4}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(9) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^2-2x+3)\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}-x^2+3x\ \right]_{-1}^{2} = \mathbf{9}$

2. (1) $3^x = t$ とすると　$t > 0$

方程式は　　$9t^2 - t - 8 = 0$
ゆえに　　$(t-1)(9t+8) = 0$
$t > 0$ より　　$t = 1$
したがって　$3^x = 1$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 0}$

(2) 真数は正であるから　$x-2>0$　かつ　$x+4>0$
すなわち　　$x > 2$　$\cdots$①
不等式は　　$\log_{0.5}(x-2)^2 \geqq \log_{0.5}(x+4)$
底 0.5 は 1 より小さいので

$(x-2)^2 \leqq x+4$　これを解いて　$0 \leqq x \leqq 5$　$\cdots$②

したがって，①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{2 < x \leqq 5}$

(3) 方程式を変形すると

$$(1-2\sin^2 x)+\sin x=0$$

整理すると $2\sin^2 x-\sin x-1=0$

ゆえに $(\sin x-1)(2\sin x+1)=0$

よって $\sin x=1,-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq x\leqq 2\pi$ において

$\sin x=1$ を解くと $x=\dfrac{\pi}{2}$

$\sin x=-\dfrac{1}{2}$ を解くと $x=\dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

したがって $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi}$

3. 4 人のジャンケンの出し方の総数は $3^4=81$ (通り)

(1) 1 回ジャンケンをして特定の 1 人が勝つときの 4 人の出し方は 3 通りある.

したがって，求める確率は $\dfrac{3\times 4}{81}=\boldsymbol{\dfrac{4}{27}}$

(2) 1 回ジャンケンをして特定の 2 人が勝つときの 4 人の出し方は 3 通りある.

ジャンケンに勝つ 2 人の選び方は ${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある.

したがって，求める確率は $\dfrac{3\times {}_4\mathrm{C}_2}{81}=\dfrac{3\times 6}{81}=\boldsymbol{\dfrac{2}{9}}$

(3) 1 回ジャンケンをして特定の 3 人が勝つときの 4 人の出し方は 3 通りある.

ジャンケンに勝つ 3 人の選び方は ${}_4\mathrm{C}_3$ 通りある.

したがって，このときの確率は $\dfrac{3\times {}_4\mathrm{C}_3}{81}=\dfrac{3\times 4}{81}=\dfrac{4}{27}$

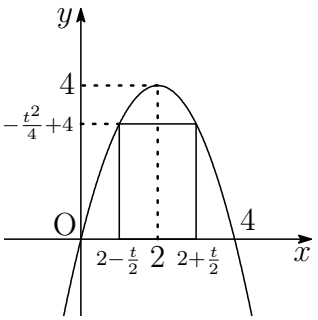
これと (1)，(2) の結果から，1 回ジャンケンをして 4 人とも残る確率は

$$1-\left(\frac{4}{27}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}\right)=\frac{13}{27}$$

よって，2 回ジャンケンをして 4 人とも残る確率は $\left(\dfrac{13}{27}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{169}{729}}$

4. (1) 放物線の方程式を変形すると

$$y = -(x-2)^2 + 4 \quad \cdots ①$$



放物線は直線 $x=2$ に関して対称で，長方形の底辺の長さが t であるから，底辺の両端の x 座標は

$$x = 2 \pm \frac{t}{2}$$

このときの y 座標は，① より　$y = -\dfrac{t^2}{4} + 4$

長方形の面積 S は　$S = t \times \left(-\dfrac{t^2}{4} + 4\right) = -\dfrac{1}{4}t^3 + 4t$

よって，t の範囲に注意して　$\boldsymbol{S = -\dfrac{1}{4}t^3 + 4t \ \ (0 < t < 4)}$

(2) $S' = -\dfrac{3}{4}t^2 + 4$

$0 < t < 4$ のとき $S' = 0$ となる t の値は　　$t = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

このとき，S の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	4
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	極大 $\frac{32\sqrt{3}}{9}$	↘	

したがって，S は $\boldsymbol{t = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$ で**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{32\sqrt{3}}{9}}$ をとる．

5. (1) $f'(x) = 6x - 3$ より，$f(x) = 3x^2 - 3x + C$ とすると (C は定数)

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 (3x^2 - 3x + C)\,dx$$
$$= \left[\, x^3 - \frac{3}{2}x^2 + Cx \,\right]_1^2 = C + \frac{5}{2}$$

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = 5$ より

$$C + \frac{5}{2} = 5 \quad \text{これを解いて} \quad C = \frac{5}{2}$$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 - 3x + \dfrac{5}{2}}$

(2) 2 つの曲線の共有点の x 座標は

$$x^2 - 2x = -2x^2 + 3x + 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = -\frac{1}{3},\ 2$$

$-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 2$ の範囲において $\quad -2x^2 + 3x + 2 \geqq x^2 - 2x$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{3}}^{2} \{(-2x^2 + 3x + 2) - (x^2 - 2x)\}\, dx \\ &= -\int_{-\frac{1}{3}}^{2} (3x^2 - 5x - 2)\, dx \\ &= -\int_{-\frac{1}{3}}^{2} (3x + 1)(x - 2)\, dx \\ &= -3\int_{-\frac{1}{3}}^{2} \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2)\, dx \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{2 - \left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^3 = \boldsymbol{\frac{343}{54}} \end{aligned}$$

定積分の公式

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)dx = -\frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3}$$

7.16　平成 15 年度編入学試験 (90 分)

1. 次の 2 つの 2 次関数について各問に答えよ．ただし，k は定数とする．

$$\begin{cases} y = -2x^2 + 8x - 9 & \cdots ① \\ y = x^2 + kx + k & \cdots ② \end{cases}$$

(1) ① の最大値と ② の最小値を求めよ．

(2) ② の最小値が ① の最大値より大きいとき，定数 k の値の範囲を求めよ．

2. △ABC において，AB $= 3$，BC $= 4$，CA $= 2$ とする．

(1) $\cos A$ の値を求めよ．

(2) △ABC の外接円の半径を求めよ．

3. 正八角形に対して，次のような図形の個数を求めよ．

(1) 各頂点を結んでできる三角形

(2) (1) の三角形のうち，もとの正八角形と辺を共有しないもの．

4. 2 点 A$(-1, 3)$，B$(2, -3)$ がある．次の方程式を求めよ．

(1) 2 点 A，B を通る直線．

(2) 線分 AB を 2 : 1 に内分する点を通り，(1) で求めた直線に垂直な直線．

5. 次の各値を求めよ．

(1) $\cos 75^\circ$

(2) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ で $\sin\theta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\sin 2\theta$

6. 次の各問に答えよ．

(1) 次の等式を満たす r の値を求めよ．

$$\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} = x^r$$

(2) 次の値を求めよ．

$$\frac{1}{2}\log_3 5 - \log_3 \sqrt{\frac{5}{3}}$$

(3) 次の等式を満たす x の値を求めよ.

$$\sqrt{2} \times 4^x = 8$$

(4) 次の不等式を満たす x の値の範囲を求めよ.

$$3^{x-2} > \frac{1}{27}$$

(5) 次の極限値を求めよ.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - x - 2}$$

(6) 次の定積分の値を求めよ.

$$\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 1)\, dx$$

7. 次の各問に答えよ.

(1) 次の関数の増減・極値を調べ (増減表を明記する), グラフの概形をかけ.

$$y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$$

(2) 次の 2 つの曲線で囲まれた図形を斜線で示し, その面積を求めよ.

$$y = x^2 - 2x,\ y = -x^2 + 4$$

解答例

1. (1) ① を変形すると　$y = -2(x-2)^2 - 1$

   よって　　① は $\boldsymbol{x = 2}$ で最大値 $\boldsymbol{-1}$ をとる.

   ② を変形すると　$y = \left(x + \dfrac{k}{2}\right)^2 - \dfrac{k^2}{4} + k$

   よって　　② は $x = -\dfrac{k}{2}$ で最小値 $-\dfrac{k^2}{4} + k$ をとる.

   (2) (1) の結果から

   $$-\frac{k^2}{4} + k > -1 \quad \text{すなわち} \quad k^2 - 4k - 4 < 0$$

   これを解いて　　$\boldsymbol{2 - 2\sqrt{2} < k < 2 + 2\sqrt{2}}$

2. (1) $a = 4$，$b = 2$，$c = 3$ であるから，余弦定理より

   $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

   (2) $\sin A > 0$ であるから，(1) の結果から

   $$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

   正弦定理により　　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R$

   よって　　$R = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{1}{2} \times 4 \div \dfrac{\sqrt{15}}{4} = \dfrac{8}{\sqrt{15}} = \boldsymbol{\dfrac{8\sqrt{15}}{15}}$

3. (1) 8 個の頂点からから 3 個とる組合せであるから

   $${}_8\mathrm{C}_3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \boldsymbol{56}\ (\text{通り})$$

   (2) ［1］1 辺だけを共有する三角形の個数は，特定の 1 辺に対して残りの頂点 1 個の選び方は 4 通りある．したがって，積の法則により

   $$8 \times 4 = 32\ (\text{通り})$$

   ［2］2 辺を共有する三角形の個数は　　8 通り

   これと (1) の結果から，求める場合の数は

   $$56 - (32 + 8) = \boldsymbol{16}\ (\text{通り})$$

4. (1) 2 点 A$(-1,3)$，B$(2,-3)$ を通る直線は

$$y-3=\frac{-3-3}{2-(-1)}(x+1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=-2x+1}$$

(2) 2 点 A$(-1,3)$，B$(2,-3)$ を結ぶ線分 AB を 2 : 1 に内分する点は

$$\left(\frac{1\cdot(-1)+2\cdot 2}{2+1},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot(-3)}{2+1}\right) \quad \text{すなわち} \quad (1,-1)$$

直線 AB に垂直な直線の傾きを m とすると

$$-2m=-1 \quad \text{すなわち} \quad m=\frac{1}{2}$$

よって，求める直線は

$$y-(-1)=\frac{1}{2}(x-1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}}$$

5. (1) 加法定理により

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ &= \cos(45^\circ+30^\circ)\\ &= \cos 45^\circ\cos 30^\circ-\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}\end{aligned}$$

(2) $90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき $\cos\theta<0$

ゆえに $\quad \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{21}}{5}}$

よって $\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{2}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)=\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{21}}{25}}$

6. (1) 左辺を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} &= \frac{x\times x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\\ &= x^{1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=x^{\frac{7}{6}}\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{r=\frac{7}{6}}$

(2) $\dfrac{1}{2}\log_3 5 - \log_3 \sqrt{\dfrac{5}{3}} = \dfrac{1}{2}\log_3 5 - \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{5}{3}$

$= \dfrac{1}{2}\left(\log_3 5 - \log_3 \dfrac{5}{3}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\log_3 \left(5 \div \dfrac{5}{3}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\log_3 3 = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(3) 与式を変形すると　　$2^{\frac{1}{2}} \times 2^{2x} = 2^3$

ゆえに　　$2^{\frac{1}{2}+2x} = 2^3$

したがって　$\dfrac{1}{2} + 2x = 3$　これを解いて　$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{4}}$

(4) 与えられた不等式は　　$3^{x-2} > 3^{-3}$

底 3 は 1 より大きいので　$x - 2 > -3$　これを解いて　$\boldsymbol{x > -1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x\to -1} \frac{x+2}{x-2} = \frac{-1+2}{-1-2} = \boldsymbol{-\frac{1}{3}}$

(6) $\displaystyle\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 1)\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3} - x^2 - x\ \right]_{-1}^{3} = \boldsymbol{-\frac{8}{3}}$

7. (1) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$ より

$y' = -3x^2 + 12x - 9$

$= -3(x-1)(x-3)$

$y' = 0$ とすると

$x = 1,\ 3$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	極小 -2	↗	極大 2	↘

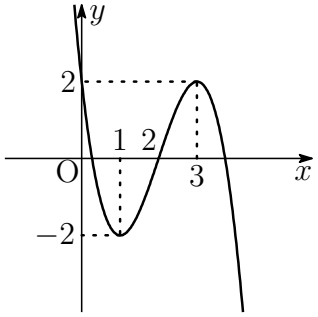
したがって，この関数は

$x = 1$ で極小値 -2

$x = 3$ で極大値 2

をとる．

グラフは，右の図のようになる．



(2) 2 つの曲線の共有点の x 座標は

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4$$

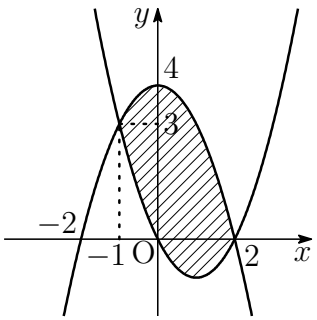
整理すると $x^2 - x - 2 = 0$

ゆえに $(x+1)(x-2) = 0$

よって $x = -1,\ 2$

$-1 \leqq x \leqq 2$ において

$$-x^2 + 4 \geqq x^2 - 2x$$



求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2} \{(-x^2+4) - (x^2-2x)\} dx \\ &= -2\int_{-1}^{2} (x+1)(x-2)\, dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3 = \mathbf{9} \end{aligned}$$

第 8 章　鹿児島工業高等専門学校

8.1　平成 31 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 方程式 $3x(x+3)=10(x+1)$ を解け.

   (2) 方程式 $x^3-7x-6=0$ を解け.

   (3) 連立不等式 $\begin{cases} 5x-3<5+3x \\ 4x-9<7x \end{cases}$ を解け.

   (4) $\log_2\sqrt{10}-\log_2\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ を簡単にせよ.

   (5) 3 直線 $3x-2y=7$，$x-4y=9$，$ax+2y=1$ が 1 点で交わるように定数 a の値を求めよ.

2. 2 点 $(0,\ 1)$，$(-3,-5)$ を通り，$x=-1$ を軸とする放物線の方程式を求めよ.

3. 2 次方程式 $x^2+px+q=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，2 次方程式 $x^2+qx+p=0$ の 2 つの解は $\alpha-1$，$\beta-1$ であるという．定数 p，q の値を求めよ.

4. 中心が直線 $y=5$ 上にあり，2 点 $(1,\ 1)$，$(8,\ 8)$ を通る円の方程式を求めよ.

5. $90^\circ<\alpha<180^\circ$，$\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$ のとき，次の値を求めよ.

   (1) $\cos 2\alpha$

   (2) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$

6. △ABC において BC の中点を M とし，AB $=8$，AC $=6$，$\angle$A $=60^\circ$ とするとき，次の値を求めよ.

   (1) BC の長さ

   (2) $\cos B$

   (3) AB の長さ

7. 関数 $y=2x^3-9x^2+12x-2$ の極値を求め，グラフをかけ.

8. 放物線 $y = 3 - 3x^2$ と直線 $y = -x - 1$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

解答例

1. (1) 与えられた方程式から

$$3x^2 - x - 10 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(3x+5) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = 2, -\frac{5}{3}}$$

(2) $x^3 - 7x - 6 = 0$ は，$x = -1$ を解にもつことに注意すると

$$x^3 - 7x - 6 = (x+1)(x^2 - x - 6) = (x+1)(x+2)(x-3)$$

よって　　$\boldsymbol{x = -1, -2,\ 3}$

(3) 第 1 式から　$2x < 8$　ゆえに　$x < 4$
第 2 式から　$-3x < 9$　ゆえに　$x > -3$
よって　$\boldsymbol{-3 < x < 4}$

(4) $\log_2 \sqrt{10} - \log_2 \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \log_2 4\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

(5) 2 直線 $3x - 2y = 7$，$x - 4y = 9$ の交点は　$(1, -2)$
直線 $ax + 2y = 1$ が点 $(1, -2)$ を通るから

$$a - 4 = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = 5}$$

2. 軸の方程式が $x = -1$ であるから，放物線の方程式を $y = a(x+1)^2 + q$ とおく．
これが 2 点 $(0,\ 1)$，$(-3, -5)$ を通るから

$$1 = a + q, \quad -5 = 4a + q \quad \text{これを解いて} \quad a = -2, \quad q = 3$$

よって，求める放物線の方程式は　$y = -2(x+1)^2 + 3$

3. 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解が $\alpha,\ \beta$ より

$$\alpha + \beta = -p, \quad \alpha\beta = q \quad \cdots (*)$$

2 次方程式 $x^2 + qx + p = 0$ の解が $\alpha - 1,\ \beta - 1$ より

$$(\alpha - 1) + (\beta - 1) = -q, \quad (\alpha - 1)(\beta - 1) = p$$

ゆえに　　$\alpha + \beta = -q + 2, \quad \alpha\beta - (\alpha + \beta) = p - 1$
上の 2 式に $(*)$ を代入すると

$$-p = -q + 2, \quad q + p = p - 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = -3,\ q = -1}$$

4. 中心を $(a,\ 5)$，半径を r とおくと，円の方程式は

$$(x-a)^2+(y-5)^2=r^2$$

2 点 $(1,\ 1)$，$(8,\ 8)$ がこの円周上にあるから

$$(1-a)^2+(1-5)^2=r^2 \quad \cdots ①$$
$$(8-a)^2+(8-5)^2=r^2 \quad \cdots ②$$

①，② から

$$(1-a)^2+16=(8-a)^2+9 \quad \text{これを解いて} \quad a=4$$

$a=4$ を ① に代入して　$r^2=25$　よって　$r=5$

よって　　$\boldsymbol{(x-4)^2+(y-5)^2=25}$

5. (1) $\cos 2\alpha=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$ より　$\cos 2\alpha=\dfrac{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\dfrac{\boldsymbol{7}}{\boldsymbol{25}}$

(2) $\tan\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$ より，$x=\tan\dfrac{\alpha}{2}$ とおくと，$90^\circ<\alpha<180^\circ$ より　$x>0$

$$-\frac{4}{3}=\frac{2x}{1-x^2} \quad \text{整理すると} \quad 2x^2-3x-2=0$$

したがって　$(x-2)(2x+1)=0$　よって　$x=\tan\dfrac{\alpha}{2}=\boldsymbol{2}$

6. (1) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{BC}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\mathrm{A}=8^2+6^2-2\cdot8\cdot6\cdot\frac{1}{2}=52$$

よって　　$\mathrm{BC}=\boldsymbol{2\sqrt{13}}$

(2) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{64+52-36}{2\cdot8\cdot2\sqrt{13}}=\frac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2\sqrt{13}}}$$

(3) △ABM に余弦定理を適用すると，$\mathrm{BM}=\sqrt{13}$

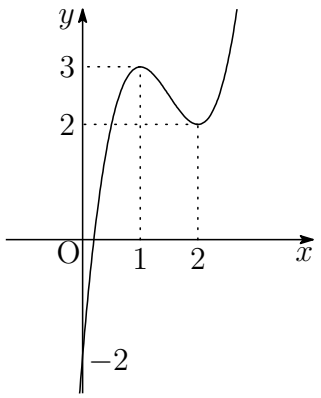
$$\mathrm{AM}^2=\mathrm{AB}^2+\mathrm{BM}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BM}\cos B=64+13-2\cdot8\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5}{2\sqrt{13}}=37$$

よって　　$\mathrm{AM}=\boldsymbol{\sqrt{37}}$

7. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ より

$$y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	3	↘	2	↗



よって　$\boldsymbol{x = 1}$ のとき極大値 $\mathbf{3}$

$\boldsymbol{x = 2}$ のとき極小値 $\mathbf{2}$

8. $y = 3 - 3x^2$ と $y = -x - 1$ から y を消去すると

$$3 - 3x^2 = -x - 1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+1)(3x-4) = 0$$

これを解いて　$x = -1,\ \dfrac{4}{3}$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{\frac{4}{3}} \{(3 - 3x^2) - (-x - 1)\}\, dx \\ &= -3\int_{-1}^{\frac{4}{3}} (x+1)\left(x - \frac{4}{3}\right) dx \\ &= \frac{3}{6}\left(\frac{4}{3} - (-1)\right)^3 = \boldsymbol{\frac{343}{54}} \end{aligned}$$

8.2　平成 30 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ．

   (1) 方程式 $3x^2 + \dfrac{7}{2}x - \dfrac{3}{2} = 0$ を解け．

   (2) 方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ を解け．

   (3) 連立不等式 $\begin{cases} 4x + 3 > 2x - 7 \\ 3x + 2 > 6x - 4 \end{cases}$ を解け．

   (4) $\log_5 \sqrt{45} + \log_5 \dfrac{5}{3}$ を簡単にせよ．

   (5) 3 直線 $2x + 3y - 8 = 0$，$x - 2y + 3 = 0$，$ax + y + 1 = 0$ が 1 点で交わるように定数 a の値を定めよ．

2. x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，点 $(1, -16)$ を通る放物線の方程式を求めよ．

3. 2 次方程式 $x^2 - 6x + k = 0$ は異なる 2 つの正の解をもち，1 つの解が他の解の 2 乗であるという．このとき，定数 k の値と 2 つの解を求めよ．

4. 中心が直線 $y = -x$ 上にあり，2 点 $(5,\ 2)$，$(-2,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ．

5. $90^\circ < \alpha < 180^\circ$，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ．

   (1) $\sin 2\alpha$

   (2) $\sin\dfrac{\alpha}{2}$

6. 四角形 ABCD において，AB = 8，BC = 5，CD = DA = 3，$\angle$A = 60° のとき，次のものを求めよ．

   (1) 対角線 BD の長さ

   (2) $\triangle$ABD の外接円の半径 R

   (3) 角 C の大きさ

7. $y = x^3 - x^2 - x + 1$ の極値を求め，そのグラフをかけ，x 軸，y 軸との共有点も記入せよ．

8. 2 つの放物線 $y = x^2 - 3x$ と $y = -x^2 + 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) $6x^2+7x-3=0$ より　$(2x+3)(3x-1)=0$　よって　$\boldsymbol{x=-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{3}}$

   (2) $x^3-3x^2-4x+12=0$ より

   $$x^2(x-3)-4(x-3)=0 \quad \text{ゆえに} \quad (x-3)(x^2-4)=0$$

   したがって　$(x-3)(x+2)(x-2)=0$　よって　$\boldsymbol{x=3,-2,\ 2}$

   (3) 第 1 式から　$2x>-10$　ゆえに　$x>-5$　$\cdots$①
   第 2 式から　$-3x>-6$　ゆえに　$x<2$　$\cdots$②
   ①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-5<x<2}$

   (4) $\log_5\sqrt{45}+\log_5\dfrac{5}{3}=\log_5 3\sqrt{5}+\log_5\dfrac{5}{3}=\log_5 5\sqrt{5}=\log_5 5^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

   (5) 2 直線 $2x+3y-8=0$，$x-2y+3=0$ の交点は　$(1,\ 2)$
   点 $(1,\ 2)$ は直線 $ax+y+1=0$ 上の点であるから

   $$a\cdot 1+2+1= \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=-3}$$

2. 放物線が x 軸と $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるから

   $$y=a(x+3)(x-2)$$

   とおける (a は定数)．これが点 $(1,-16)$ を通るから

   $$-16=a(1+3)(1-2) \quad \text{ゆえに} \quad a=4$$

   よって，求める放物線の方程式は

   $$\boldsymbol{y=4(x+3)(x-2)}$$

3. 2 次方程式 $x^2-6x+k=0$ の 2 つの正の解を $\alpha,\ \alpha^2$ とおくと，解と係数の関係により

   $$\alpha+\alpha^2=6 \quad \alpha\cdot\alpha^2=k \quad \cdots(*)$$

   上の第 1 式から　$(\alpha-2)(\alpha+3)=0$　ゆえに　$\boldsymbol{\alpha=2,\ \alpha^2=4}$
   $\alpha=2$ を $(*)$ に代入して　$\boldsymbol{k=8}$

4. 中心を $(a, -a)$，半径を r とおくと，円の方程式は

$$(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$$

2 点 $(5,\ 2)$，$(-2,\ 3)$ がこの円周上にあるから

$$(5-a)^2+(2+a)^2=r^2 \quad \cdots ①$$
$$(-2-a)^2+(3+a)^2=r^2 \quad \cdots ②$$

①，② から

$$(5-a)^2+(2+a)^2=(-2-a)^2+(3+a)^2 \quad \text{これを解いて} \quad a=1$$

$a=1$ を ① に代入して　$r^2=25$　よって　$r=5$

よって　　$\boldsymbol{(x-1)^2+(y+1)^2=25}$

5. (1) $90^\circ<\alpha<180^\circ$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ より，$\cos\alpha<0$ であるから

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5} \quad \cdots ①$$

したがって　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{24}{25}}$

(2) $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ であるから，① より

$$-\frac{4}{5}=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{9}{10}$$

$45^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<90^\circ$ であるから，$\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$ より

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

6. (1) △ABD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{BD}^2 = \mathrm{DA}^2 + \mathrm{AB}^2 - 2\mathrm{DA}\cdot\mathrm{AB}\cos\mathrm{A} = 3^2 + 8^2 - 2\cdot3\cdot8\cdot\frac{1}{2} = 49$$

よって　　$\mathrm{BD} = 7$

(2) △ABD に正弦定理を適用すると

$$2R = \frac{\mathrm{BD}}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad R = \frac{\mathrm{BD}}{2\sin 60^\circ} = \frac{7}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$$

(3) △BCD に余弦定理を適用すると

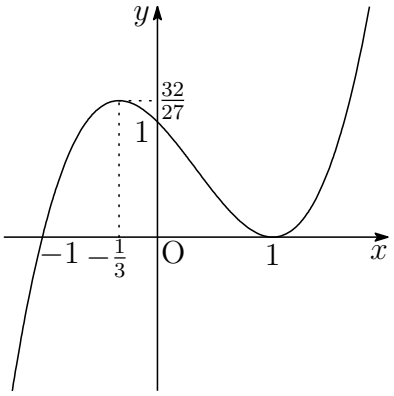
$$\cos C = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CD}^2 - \mathrm{BD}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}} = \frac{5^2 + 3^2 - 7^2}{2\cdot5\cdot3} = -\frac{1}{2}$$

よって　$\boldsymbol{\angle \mathrm{C} = 120^\circ}$

7. $y = x^3 - x^2 - x + 1$ より

$$y' = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗



よって　$\boldsymbol{x = -\frac{1}{3}}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\frac{32}{27}}$
$\boldsymbol{x = 1}$ のとき極小値 $\boldsymbol{0}$

8. $y = x^2 - 3x$ と $y = -x^2 + 2$ から y を消去すると

$$x^2 - 3x = -x^2 + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x-2)(2x+1) = 0$$

これを解いて　$x = -\frac{1}{2},\ 2$

よって，求める面積 S は

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^{2} \{-x^2 + 2 - (x^2 - 3x)\}\,dx$$
$$= -2\int_{-\frac{1}{2}}^{2} \left(x + \frac{1}{2}\right)(x-2) = -\frac{-2}{6}\left(2 + \frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{125}{24}}$$

8.3　平成 29 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 方程式 $x(9x-16)=2(4-5x)$ を解け.

   (2) 方程式 $x^3+2x^2-5x-6=0$ を解け.

   (3) 連立方程式 $\begin{cases} 2x>3-x \\ 3x-7<x+1 \end{cases}$ を解け.

   (4) $\log_{10}7+\log_{10}\dfrac{5}{14}-2\log_{10}5$ を簡単にせよ.

   (5) 3 直線 $2x+y=5$，$4x+3y=3$，$ax+2y+3a=5$ が 1 点で交わるように定数 a の値を定めよ.

2. 2 点 $(-1,\ 4)$，$(2,\ 7)$ を通り，$x=1$ を軸とする放物線の方程式を求めよ.

3. 2 次方程式 $2x^2-4ax+3a-1=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲を求めよ.

4. 2 点 $(1,\ 5)$，$(8,-2)$ を通り，y 軸に接する円の方程式を求めよ.

5. $90^\circ<\alpha<180^\circ$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{3}$ のとき，次の値を求めよ.

   (1) $\sin 2\alpha$

   (2) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$

6. $\triangle$ABC において，$A=45^\circ$，$\mathrm{BC}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=3\sqrt{2}$ のとき，B，C，AB を求めよ．ただし，B は鈍角とする.

7. $y=x^3-3x^2+8$ の極値を求め，そのグラフをかけ.

8. 放物線 $y=4-x^2$ と直線 $y=x+2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

解答例

1. (1) $x(9x-16)=2(4-5x)$ を整理すると　$9x^2-6x-8=0$

   ゆえに　$(3x+2)(3x-4)=0$　よって　$\boldsymbol{x=-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}}$

   (2) $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$ とおくと，$P(-1)=0$ であるから，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつので

   $$P(x)=(x+1)(x^2+x-6)=(x+1)(x-2)(x+3)$$

   よって，方程式 $P(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 2,-3}$

   (3) $2x>3-x$ を解いて　$x>1$

   $3x-7<x+1$ を解いて　$x<4$

   これらを同時に満たす範囲を求めて　$1<x<4$

   (4) $\log_{10}7+\log_{10}\dfrac{5}{14}-2\log_{10}5=\log_{10}\left(7\times\dfrac{5}{14}\div5^2\right)$

   $$=\log_{10}\frac{1}{10}=\boldsymbol{-1}$$

   (5) 2 直線 $2x+y=5$，$4x+3y=3$ の交点は　$(x,\ y)=(6,-7)$

   この点が直線 $ax+2y+3a=5$ 上にあるから

   $$a\cdot6+2\cdot(-7)+3a=5\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{a=\frac{19}{9}}$$

2. $x=1$ を軸とするから，放物線の方程式を $y=a(x-1)^2+q$ とおく．

   2 点 $(-1,\ 4)$，$(2,\ 7)$ がこの放物線上にあるから

   $$4a+q=4,\quad a+q=7$$

   これを解いて　$a=-1$，$q=8$　よって　$\boldsymbol{y=-(x-1)^2+8}$

3. $2x^2-4ax+3a-1=0$ が実数解をもつとき

   $$D/4=(-2a)^2-2\cdot(3a-1)\geqq0\quad\text{ゆえに}\quad(a-1)(2a-1)\geqq0$$

   これを解いて　$\boldsymbol{a\leqq\dfrac{1}{2},\ 1\leqq a}$

4. 2 点 $(1,\ 5)$，$(8, -2)$ を通り，y 軸に接する円の中心は，y 軸の右側にある．円の半径を r とすると，円の方程式は

$$(x-r)^2+(y-b)^2=r^2$$

とおける．これが 2 点 $(1,\ 5)$，$(8, -2)$ を通るから

$$(1-r)^2+(5-b)^2=r^2,\quad (8-r)^2+(-2-b)^2=r^2$$

これらを整理すると

$$\begin{cases} b^2-10b-2r+26=0 & \cdots ① \\ b^2+4b-16r+68=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② から，r を消去して整理すると

$$b^2-12b+20=0 \quad \text{これを解いて} \quad b=2, 10$$

① より，$b=2$ のとき $r=5$，$b=10$ のとき $r=13$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-5)^2+(y-2)^2=25 \quad \text{または} \quad (x-13)^2+(y-10)^2=169}$$

5. (1) $90^\circ<\alpha<180^\circ$ より，$\sin\alpha>0$ であるから

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって　$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{9}\sqrt{2}$

(2) $\tan^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2$

$45^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<90^\circ$ より，$\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$ であるから

$$\boldsymbol{\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}}$$

6. 正弦定理により $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

したがって $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sin B}$ ゆえに $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

B は鈍角であるから $\boldsymbol{B=120^\circ}$

また $C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=\boldsymbol{15^\circ}$

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned}c&=a\cos B+b\cos A\\&=2\sqrt{3}\cos 120^\circ+3\sqrt{2}\cos 45^\circ\\&=2\sqrt{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=3-\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって $\quad\boldsymbol{AB=3-\sqrt{3}}$

7. $y=x^3-3x^2+8$ を微分すると

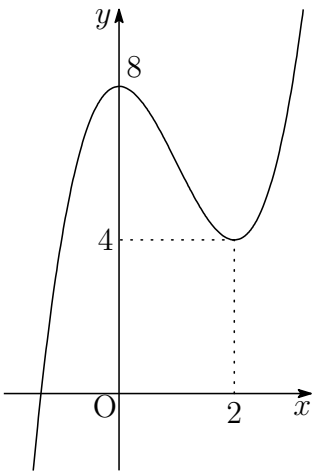
$$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$$

したがって，増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 8	↘	極小 4	↗

よって $\quad x=0$ で極大値 $\boldsymbol{8}$

$x=2$ で極小値 $\boldsymbol{4}$



8. $4-x^2-(x+2)=-x^2-x+2=-(x+2)(x-1)$ より

$$S=-\int_{-2}^{1}(x+2)(x-1)\,dx=\frac{1}{6}\{1-(-2)\}^3=\boldsymbol{\frac{9}{2}}$$

8.4　平成 28 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 方程式 $x^2 - 13x + 22 = 0$ を解け.

   (2) 方程式 $x^3 - 4x^2 - 7x + 10 = 0$ を解け.

   (3) $3\log_3 15 - \log_3 135$ を簡単にせよ.

   (4) 関数 $f(x) = 2^x + 8{\cdot}2^{-x}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ.

   (5) 実数 a に対して a を越えない最大の整数を $[a]$ で表す. $[x^2 - 4x] = 0$ を満たす実数 x を求めよ.

2. 2 次関数 $y = 3x^2 - 6x + 7 \cdots ①$ のグラフは 2 次関数 $y = 3x^2 \cdots ②$ のグラフをどのように平行移動したものか.

3. AB = 7，BC = 8，CA = 9 である △ABC について，次の問いに答えよ.

   (1) $\angle \mathrm{A} = \theta$ とおく. $\cos\theta$ の値を求めよ.

   (2) △ABC の外接円の半径を求めよ.

   (3) △ABC の面積を求めよ.

4. α，β をそれぞれ $0° < \alpha < 90°$ かつ $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$，$90° < \beta < 180°$ かつ $\sin\beta = \dfrac{3}{5}$ を満たす角とする. このとき，$\sin(\alpha + \beta)$ の値を求めよ.

5. x 軸にも y 軸にも接して点 $(4,\ 2)$ を通る円の方程式をすべて求めよ.

6. 3 次関数 $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ の極大値と極小値，およびそのときの x の値を求めよ.

7. 方程式 $2x^2 - 2x + 5 = 0$ の解を α，β とする. このとき，次の値を求めよ.

   (1) $\alpha^2 + \beta^2$

   (2) $\alpha^3 + \beta^3$

8. a は $0 < a < 2$ を満たす実数とする. 2 つの直線 $x = a$，$x = a + 2$，曲線 $C : y = |x^2 - 4|$ および x 軸で囲まれる部分の面積 $S(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ.

解答例

1. (1) 方程式から $(x-2)(x-11)=0$ よって $\boldsymbol{x=2,\ 11}$

   (2) $P(x)=x^3-4x^2-7x+10$ とおくと，$P(1)=0$ より，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．$P(x)$ を $x-1$ で割った商が $x^2-3x-10$ であるから

   $$P(x)=(x-1)(x^2-3x-10)=(x-1)(x+2)(x-5)$$

   よって，求める方程式 $P(x)=0$ の解は $\boldsymbol{x=1,-2,\ 5}$

   (3) $3\log_3 15-\log_3 135=\log_3\dfrac{15^3}{135}=\log_3\dfrac{3^3\cdot5^3}{3^3\cdot5}=\log_3 5^2=\boldsymbol{2\log_3 5}$

   (4) $2^x>0$ であるから，相加平均・相乗平均の関係により

   $$f(x)=2^x+\frac{8}{2^x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot\frac{8}{2^x}}=4\sqrt{2}$$

   等号が成立するとき

   $$2^x=\frac{8}{2^x}\quad \text{すなわち}\quad x=\frac{3}{2}$$

   よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{3}{2}}$ のとき，最小値 $4\sqrt{2}$

   (5) $0\leqq x^2-4x<1$ であるから

   $0\leqq x^2-4x$ を解いて $x\leqq 0,\ 4\leqq x$ $\cdots$①

   $x^2-4x<1$ を解いて $2-\sqrt{5}<x<2+\sqrt{5}$ $\cdots$②

   ①，② の共通範囲を求めて

   $$\boldsymbol{2-\sqrt{5}<x\leqq 0,\ 4\leqq x<2+\sqrt{5}}$$

2. ① を変形すると $y=3(x-1)^2+4$

   よって，① は ② を x 軸方向に **1**，y 軸方向に **4** だけ平行移動したものである．

3. (1) $a=8$，$b=9$，$c=7$ とすると，余弦定理により

   $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9^2+7^2-8^2}{2\cdot9\cdot7}=\frac{11}{21}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\cos\theta=\frac{11}{21}}$$

   (2) (1) の結果から $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{8\sqrt{5}}{21}$

   正弦定理により，外接円の半径を R とすると

   $$2R=\frac{a}{\sin A}\quad \text{ゆえに}\quad R=\frac{1}{2}\times 8\times\frac{21}{8\sqrt{5}}=\frac{21}{2\sqrt{5}}=\boldsymbol{\frac{21\sqrt{5}}{10}}$$

   (3) △ABC の面積を S とすると

   $$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot9\cdot7\cdot\frac{8\sqrt{5}}{21}=\boldsymbol{12\sqrt{5}}$$

4. $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より $\sin\alpha > 0$，$90^\circ < \beta < 180^\circ$ より $\cos\beta < 0$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

したがって　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{5}{13}\cdot\frac{3}{5} = \boldsymbol{-\frac{33}{65}}$$

5. 円の半径を r とすると，点 $(4, 2)$ を通るから円の方程式を

$$(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$$

とおける．このとき

$$(4-r)^2 + (2-r)^2 = r^2 \quad \text{これを解いて} \quad r = 2,\ 10$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100}$$

6. $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ より

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 = (3x-1)(x-1)$$

$y' = 0$ とすると　$x = \dfrac{1}{3},\ 1$

したがって，増減表は

x	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$\frac{31}{27}$	↘	1	↗

よって，$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{3}}$ で極大値 $\boldsymbol{\dfrac{31}{27}}$，$\boldsymbol{x = 1}$ で極小値 $\boldsymbol{1}$ をとる．

7. (1) 解と係数の関係により　$\alpha+\beta=1$，$\alpha\beta=\dfrac{5}{2}$

したがって　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot\dfrac{5}{2}=\boldsymbol{-4}$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1^3-3\cdot\dfrac{5}{2}\cdot 1=\boldsymbol{-\dfrac{13}{2}}$

8. $f(x)=x^2-4$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{1}{3}x^3-4x$ とおくと

$$\begin{aligned}S(a)&=-\int_a^2(x^2-4x)\,dx+\int_2^{a+2}(x^2-4x)dx\\&=-\Big[\,F(x)\,\Big]_a^2+\Big[\,F(x)\,\Big]_2^{a+2}\\&=F(a+2)+F(a)-2F(2)\\&=\frac{2}{3}a^3+2a^2-4a+\frac{16}{3}\end{aligned}$$

これを微分すると　$S'(a)=2a^2+4a-4$

$S'(a)=0$ とすると $(0<a<2)$　$a=\sqrt{3}-1$

したがって，$S(a)$ の増減表は

a	0	$\cdots$	$\sqrt{3}-1$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		↘	極小	↗	

よって，求める最小値は　　$\boldsymbol{S(\sqrt{3}-1)=\dfrac{32}{3}-4\sqrt{3}}$

8.5　平成 27 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 方程式 $(x-1)(3x+1)=7$ を解け.

   (2) 方程式 $x^3+2x^2-9x-18=0$ を解け.

   (3) 連立方程式 $\begin{cases} x^2+7x-18<0 \\ x^2+x-2>0 \end{cases}$ を解け.

   (4) $2\log_2 12-\dfrac{1}{4}\log_2\dfrac{8}{9}-5\log_2\sqrt{3}$

   (5) 2 点 A(1, 6)，B(3, 1) を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ.

2. $x=3$ のとき最大値 2 をとり，$x=-3$ のとき $y=-34$ をとる 2 次関数を求めよ.

3. 2 次方程式 $x^2-2x+k=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，1 つの解が他の解の平方であるという．定数 k の値と方程式の解を求めよ.

4. x 軸，y 軸の両方に接し，点 (2, 4) を通る円の方程式を求めよ.

5. $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\tan\alpha=-\sqrt{2}$ のとき，$\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ.

6. △ABC において，外接円の半径が 1 であり，$\mathrm{BC}=(1+\sqrt{3})k$，$\mathrm{CA}=2k$ (k は正の実数)，$C=60^\circ$ であるという．次の各問いに答えよ.

   (1) AB の長さを求めよ.

   (2) k の値および BC，CA の長さを求めよ.

   (3) 角 B の大きさを求めよ.

解答例

1. (1) $(x-1)(3x+1)=7$ から　　$3x^2-2x-8=0$

   したがって　$(x-2)(3x+4)=0$　よって　$\boldsymbol{x=2,\ -\dfrac{4}{3}}$

   (2) $P(x)=x^3+2x^2-9x-18$ とおくと　$P(-2)=0$

   $P(x)$ は $x+2$ を因数にもつから

   $$P(x)=(x+2)(x^2-9)=(x+2)(x+3)(x-3)$$

   よって，$P(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=-2,\pm 3}$

   (3) $$\begin{cases} x^2+7x-18<0 \\ x^2+x-2>0 \end{cases}$$

   第 1 式から　$(x+9)(x-2)<0$　ゆえに　$-9<x<2\cdots$①

   第 2 式から　$(x+2)(x-1)>0$　ゆえに　$x<-2,\ 1<x\cdots$②

   ①，② の共通範囲を求めて

   $$\boldsymbol{-9<x<-2,\ 1<x<2}$$

   (4)　$2\log_2 12-\dfrac{1}{4}\log_2\dfrac{8}{9}-5\log_2\sqrt{3}$

   $=2(2\log_2 2+\log_2 3)-\dfrac{1}{4}(3\log_2 2-2\log_2 3)-5\cdot\dfrac{1}{2}\log 3=\boldsymbol{\dfrac{13}{4}}$

   (5) 線分 AB の垂直二等分線上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ より

   $$(x-1)^2+(y-6)^2=(x-3)^2+(y-1)^2$$
   $$x^2-2x+1+y^2-12y+36=x^2-6x+9+y^2-2y+1$$
   $$\boldsymbol{4x-10y+27=0}$$

2. $x=3$ のとき最大値 2 をとることから，求める 2 次関数を

   $$y=a(x-3)^2+2$$

   とおく．これが点 $(-3,-34)$ を通るから

   $-34=a(-3-3)^2+2$　これを解いて　$a=-1$

   よって　　$\boldsymbol{y=-(x+3)^2+2}$

3. 2 次方程式 $x^2-2x+k=0$ は異なる 2 つの実数解をもつから，$D/4>0$ より

$$(-1)^2-1\cdot k>0 \quad \text{ゆえに} \quad k<1 \quad \cdots ①$$

2 次方程式 $x^2-2x+k=0$ の解を $\alpha,\ \alpha^2$ とおくと，解と係数の関係により

$$\alpha+\alpha^2=2, \quad \alpha\cdot\alpha^2=k$$

上の第 1 式から　$(\alpha+2)(\alpha-1)=0$　ゆえに　$\alpha=-2,\ 1$

$\alpha=1$ のとき，第 2 式から，$k=1$ となり，① に反する．

$\alpha=-2$ のとき　$\boldsymbol{k=-8}$，異なる 2 つの解は　$\boldsymbol{-2,\ 4}$

4. このとき，x 軸，y 軸の両方に接する円の中心は第 1 象限にあるから，求める円の方程式を

$$(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$$

とおくと $(r>0)$，これが点 $(2,\ 4)$ を通るから　$(2-r)^2+(4-r)^2=r^2$

ゆえに　　$r^2-12r+20=0$　　これを解いて　$r=2,\ 10$

よって　$\boldsymbol{(x-2)^2+(y-2)^2=4}$　または　$\boldsymbol{(x-10)^2+(y-10)^2=100}$

5. $\tan\alpha=-\sqrt{2}$ を $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ に代入すると

$$1+(\sqrt{2})^2=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{3}$$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ より，$\cos\alpha<0$ であるから

$$\cos\alpha=-\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}, \quad \sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}}$$

6. (1) $a=(1+\sqrt{3})k$，$b=2k$，$C=60^\circ$ を (第 2) 余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \\ &= (1+\sqrt{3})^2k^2+(2k)^2-2(1+\sqrt{3})k\cdot 2k\times\frac{1}{2}=6k^2 \end{aligned}$$

$c>0$ であるから　$\mathrm{AB}=c=\boldsymbol{\sqrt{6}k}$

(2) (1) の結果を正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ に適用すると

$$\frac{\sqrt{6}k}{\sin 60^\circ}=2\cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{2\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

よって　$\mathrm{BC}=(1+\sqrt{3})\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$

$$\mathrm{CA}=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$$

(3) 正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

ゆえに　$\dfrac{2k}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{6}k}{\sin 60^\circ}$ すなわち　$\sin B=\dfrac{2\sin 60^\circ}{\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

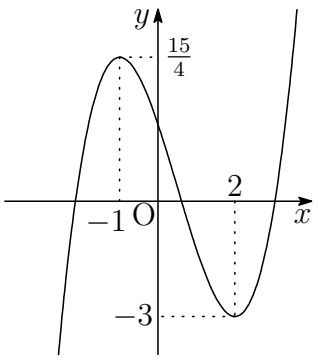
$C=60^\circ$ より，$B<120^\circ$ であるから　$\boldsymbol{B=45^\circ}$

7. $y=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{4}x^2-3x+2$ を微分すると

$$y'=\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x-3=\frac{3}{2}(x+1)(x-2)$$

よって　$\boldsymbol{x=-1}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\dfrac{15}{4}}$，$\boldsymbol{x=2}$ のとき極小値 $\boldsymbol{-3}$

グラフは，次のようなる．



8. (1) 点 $(1,\ 3)$ を通り，傾き k の直線は

$$y-3=k(x-1)\quad \text{すなわち}\quad y=kx-k+3$$

これと放物線 $y=-x^2$ から y を消去すると

$$kx-k+3=-x^2\quad \text{ゆえに}\quad x^2+kx-k+3=0\quad \cdots(*)$$

2 次方程式 $(*)$ は，重解をもつから

$$k^2-4\cdot 1(-k+3)=0\quad \text{ゆえに}\quad k^2+4k-12=0$$

これを解いて　$k=2,\ -6$

このとき，2 次方程式 $(*)$ の重解は　$x=-\dfrac{k}{2}$

したがって，2 本の接線の接点の x 座標は　$x=-1,\ 3$

(2) (1) の結果から，x^2 の係数に注意して

$$S=\frac{1}{12}\{3-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{16}{3}}$$

8.6 平成 26 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の方程式を解け.

   (1) $x^2 - 2x + 5 = 0$

   (2) $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$

   (3) $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

   (4) $2\cos\theta + \sqrt{3} = 0 \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

2. $\tan 105^\circ$ の値を求めよ.

3. 次の不等式，連立不等式を解け.

   (1) $\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leqq 0 \\ 0.1x - 0.2 > 0 \end{cases}$

   (2) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \dfrac{1}{27}$

   (3) $\log_2 x < \log_2(4 - x)$

   (4) $\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

4. 5，7 でない実数 x に対して，次の等式が成り立つ．定数 a，b の値を求めよ.

$$\frac{x-1}{(x-5)(x-7)} = \frac{a}{x-5} + \frac{b}{x-7}$$

5. 次の計算をセよ．ただし，i は虚数単位とする.

   (1) $\dfrac{1}{3+i} + \dfrac{1}{3-i}$

   (2) $(1-2i)^3$

6. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

   (2) $\log_3\sqrt{15} - \dfrac{1}{2}\log_3 5 - 3\log_3\sqrt[3]{3}$

7. $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta$ を $r\sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ．ただし，$r > 0$，$-\pi < \alpha \leqq \pi$ とする.

8. 3 点 $(1,\ 5)$，$(2, -2)$，$(-2, -4)$ を通る円の方程式を求めよ．また，円の中心と半径を求めよ.

9. 円 $x^2 + y^2 = 10$ の接線のうち，点 $(2, -4)$ を通るものを求めよ．

10. 関数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ のグラフ上の点 $(-1,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ．

11. 関数 $x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，そのグラフをかけ．

12. 定積分 $\displaystyle\int_0^1 (3x - 1)^2\, dx$ の値を求めよ．

13. 2 つの放物線 $y = 2x^2 + 2x - 5$，$y = -x^2 + 8x + 4$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) $\boldsymbol{x = 1 \pm 2i}$

   (2) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ とおくと，$P(1) = 0$ より，$P(x)$ は $x - 1$ を因数にもつ.

   $$P(x) = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = (x-1)(x-2)^2$$

   $P(x) = 0$ を解いて　$\boldsymbol{x = 1,\ 2}$**(2 重解)**

   (3) 方程式から　$(2^x - 4)(2^x + 1) = 0$

   $2^x > 0$ より　$2^x = 4$　よって　$\boldsymbol{x = 2}$

   (4) $\boldsymbol{\theta = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{5}{7}\pi}$

2. 加法定理により

   $$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \\ &= -\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \boldsymbol{-2 - \sqrt{3}}\end{aligned}$$

3. (1) 第 1 式から　$(x-1)(x-3) \leqq 0$　ゆえに　$1 \leqq x \leqq 3$　$\cdots$①

   第 2 式から　$x > 2$　$\cdots$②

   ①，② から　$\boldsymbol{2 < x \leqq 3}$

   (2) 与えられた不等式から　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x} > \left(\dfrac{1}{3}\right)^3$

   底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$2x < 3$　よって　$\boldsymbol{x < \dfrac{3}{2}}$

   (3) $\log_2 x < \log_2(4 - x)$

   底 2 は 1 より大きいので，真数が正であることに注意して

   $$0 < x < 4 - x \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0 < x < 2}$$

   (4) $\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{3}{4}\pi$

4. 与えられた等式の両辺に $(x-5)(x-7)$ をかけると

   $$x - 1 = a(x-7) + b(x-5) \qquad = (a+b)x + (-7a - 5b)$$

   これが x についての恒等式となるためには

   $$1 = a + b, \quad -1 = -7a - 5b$$

   これを解いて　$\boldsymbol{a = -2,\ b = 3}$

5. (1) $\dfrac{1}{3+i}+\dfrac{1}{3-i}=\dfrac{1\cdot(3-i)+1\cdot(3+i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{6}{10}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

   (2) $(1-2i)^3=1-6i+12i^2-8i^3=1-6i-12+8i=\boldsymbol{-11+2i}$

6. (1) (与式) $=(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3=\boldsymbol{a+b}$

   (2) $\log_3\sqrt{15}-\dfrac{1}{2}\log_3 5-3\log_3\sqrt[3]{3}=\log_3\sqrt{15}-\log_3\sqrt{5}-\log_3 3$

   $=\log_3\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}-1=\log_3\sqrt{3}-1=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

7. 三角関数の合成により　$\boldsymbol{2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)}$

8. 求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく．これが与えられた 3 点を通るから

$$\begin{cases} l+5m+n=-26 \\ 2l-2m+n=-8 \\ -2l-4m+n=-20 \end{cases}$$

   これを解いて　$l=4,\ m=-2,\ n=-20$

   よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2+y^2+4x-2y-20=0}$

   これを変形すると　　$(x+2)^2+(y-1)^2=25$

   したがって，中心 $\boldsymbol{(-2,\ 1)}$，半径 $\boldsymbol{5}$ の円

9. 点 $(2,-4)$ を極とする円 $x^2+y^2=10$ の極線は

   $2x-4y=10$　ゆえに　$x-2y=5$

   円 $x^2+y^2=10$ と直線 $x-2y=5$ の交点は

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ x-2y=5 \end{cases}$$

   これを解いて　$(3,-1)$，$(-1,-3)$

   よって，接線の方程式は　$\boldsymbol{3x-y=10,\ -x-3y=10}$

10. $y=x^4-2x^3+1$ を微分すると　$y'=4x^3-6x^2$

    $x=-1$ のとき　$y'=-10$

    求める接線の方程式は，点 $(-1,\ 4)$ を通り，傾き -10 の直線であるから

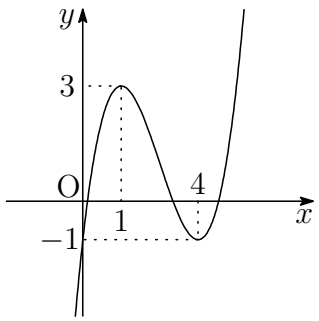
    $y-4=-10(x+1)$　すなわち　$\boldsymbol{y=-10x-6}$

11. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ とおくと

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 1,\ 3$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗



12. $\displaystyle\int_0^1 (3x-1)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{9}(3x-1)\ \right]_0^1 = 1$

13. 2 つの放物線の交点の x 座標は

$$2x^2 + 2x - 5 = -x^2 + 8x + 4 \quad \text{整理すると} \quad (x+1)(x-3) = 0$$

ゆえに　　$x = -1,\ 3$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{3} \{(-x^2 + 8x + 4) - (2x^2 + 2x - 5)\}\,dx \\ &= -3\int_{-1}^{3} (x+1)(x-3)\,dx \\ &= -\frac{-3}{6}\{3 - (-1)\}^3 = \mathbf{32} \end{aligned}$$

8.7　平成 25 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 方程式 $\dfrac{4}{3}x^2 - 2x + \dfrac{3}{4} = 0$ を解け.

   (2) 方程式 $2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0$ を解け.

   (3) 次の不等式が同時に成り立つような x の値の範囲を求めよ.

   $$\begin{cases} x^2 - 2x - 15 < 0 \\ x^2 - x - 6 > 0 \end{cases}$$

   (4) 次の式を簡単にせよ.

   $$\left(\log_3 \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\log_3 45\right)\left(\log_{10} \sqrt[3]{81} - \frac{1}{3}\log_{10} 3\right)$$

   (5) 原点 O から直線 $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ に下ろした垂線の長さを求めよ.

2. 次の条件をみたす 2 次関数をすべて求めよ.

   ① グラフは放物線 $y = 2x^2$ を平行移動したもの.

   ② 点 $(2,\ 4)$ を通る.

   ③ 頂点は $y = 2x - 4$ 上にある.

3. a，b は 0 でない相異なる実数であるとする．2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解が a と b であるとき，a と b の値を求めよ.

4. 3 点 $(4,\ 6)$，$(5,\ 5)$，$(6,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ.

5. $\sin 165°$，$\cos 165°$ の値を求めよ.

6. 四角形 ABCD において，AB = 8，BC = 5，CD = DA = 3，∠A = 60° であるとする．次のものを求めよ．

   (1) 対角線の長さ

   (2) ∠C の大きさ

   (3) △ABD の外接円の半径 R

7. $y = x^3 + 3x^2 - 2$ の極値を求め，そのグラフをかけ．x 軸との交点も求め，グラフに記入せよ．

8. 次の各問いに答えよ．

   (1) $y = x(x-1)$ 上の点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$ における接線の方程式をそれぞれ求めよ．

   (2) (1) で求めた 2 本の接線および $y = x(x-1)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) 与えられた方程式の両辺に 12 をかけると

$$16x^2 - 24x + 9 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (4x-3)^2 = 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{x = \dfrac{3}{4}}$

(2) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - x + 6$ とすると

$$P(-1) = -2 - 5 + 1 + 6 = 0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

$$P(x) = (x+1)(2x^2 - 7x + 6)$$
$$= (x+1)(x-2)(2x-3)$$

$P(x) = 0$ から

$$\boldsymbol{x = -1,\ 2,\ -\frac{3}{2}}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2\ -7x\ +6 \\ \hline x+1\,)\,2x^3 -5x^2\ -x+6 \\ \underline{2x^3 +2x^2\ \ \ } \\ -7x^2\ -x \\ \underline{-7x^2 -7x\ } \\ 6x+6 \\ \underline{6x+6} \\ 0 \end{array}$$

(3) 第 1 式から　$(x+3)(x-5) < 0$　ゆえに　$-3 < x < 5$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+2)(x-3) > 0$　ゆえに　$x < -2,\ 3 < x$　$\cdots$②

①，② を同時にみたす x の範囲を求めて

$$\boldsymbol{-3 < x < -2,\ 3 < x < 5}$$

(4)　$\log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \dfrac{1}{2}\log_3 45 = \log_3 \dfrac{\sqrt{2}}{3} + \log_3 3\sqrt{5} = \log_3 \sqrt{10} = \dfrac{1}{2}\log_3 10$

$\log_{10} \sqrt[3]{81} - \dfrac{1}{3}\log_{10} 3 = \log_{10} \sqrt[3]{81} - \log_{10} \sqrt[3]{3} = \log_{10} \sqrt[3]{27} = \log_{10} 3$

したがって

$$\left(\log_3 \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}\log_3 45\right)\left(\log_{10} \sqrt[3]{81} - \frac{1}{3}\log_{10} 3\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 10 \times \log_{10} 3$$

$$= \frac{1}{2}\log_3 10 \times \frac{\log_3 3}{\log_3 10} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(5) 原点 O から直線 $\sqrt{3}x + y - \sqrt{3} = 0$ までの距離であるから

$$\frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. 条件 ③ により，頂点の座標を $(p,\ 2p-4)$ とする．これと条件 ① より，求める 2 次関数を

$$y = 2(x-p)^2 + 2p - 4$$

とおける．これが点 $(2,\ 4)$ を通るから

$$4 = 2(2-p)^2 + 2p - 4 \quad \text{整理すると} \quad p^2 - 3p = 0$$

これを解いて　　$p = 0,\ 3$

よって，求める 2 次関数は

$$\boldsymbol{y = 2x^2 - 4, \quad y = 2(x-3)^2 + 2}$$

3. 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解が a，b であるから，解と係数の関係により

$$a + b = -\frac{a}{1}, \quad ab = \frac{b}{1} \quad \text{ゆえに} \quad b = -2a, \quad b(a-1) = 0$$

$b \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 1,\ \ b = -2}$

4. 求める円の方程式を

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

とおく．これが，3 点 $(4,\ 6)$，$(5,\ 5)$，$(6,\ 2)$ を通るから

$$\begin{aligned} 4^2 + 6^2 + a\cdot 4 + b\cdot 6 + c &= 0 \\ 5^2 + 5^2 + a\cdot 5 + b\cdot 5 + c &= 0 \\ 6^2 + 2^2 + a\cdot 6 + b\cdot 2 + c &= 0 \end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned} 4a + 6b + c &= -52 \\ 5a + 5b + c &= -50 \\ 6a + 2b + c &= -40 \end{aligned}$$

これを解いて　　$a = -2$，$b = -4$，$c = -20$

よって　　$\boldsymbol{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0}$

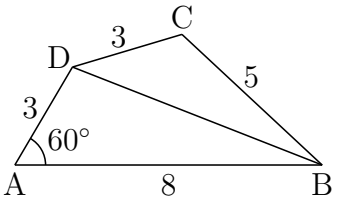
5. $\sin 165^\circ = \sin 15^\circ$，$\cos 165^\circ = -\cos 15^\circ$

加法定理を用いて

$$\begin{aligned} \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\sin 165^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},\quad \cos 15^\circ = -\dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}$

6. (1) △ABD に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned} \mathrm{BD}^2 &= 3^2 + 8^2 - 2\cdot 3\cdot 8\cos 60^\circ \\ &= 49 \end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　　$\boldsymbol{\mathrm{BD} = 7}$

(2) △BCD に余弦定理を適用すると

$$\cos C = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2\cdot 3\cdot 5} = -\frac{1}{2}$$　　よって　　$\boldsymbol{\angle \mathrm{C} = 120^\circ}$

(3) △ABD に正弦定理を適用して

$$2R = \frac{7}{\sin 60^\circ}$$　　よって　　$R = \frac{7}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{7\sqrt{3}}{3}}$

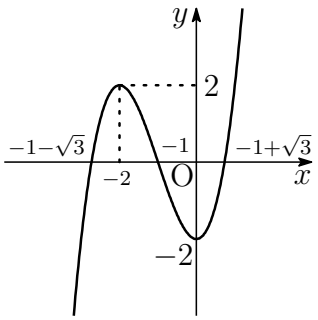
7. $y = x^3 + 3x^2 - 2$ より

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 + 6x \\ &= 3x(x+2) \end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると

$$x = -2,\ 0$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗



y の増減表は右のようになる．
したがって，この関数は

$x = -2$ で極大値 2

$x = 2$ で極小値 -2

をとる．

$y = x^3 + 3x^2 - 2$ は，$x = -1$ のとき $y = 0$ となるので，

$x^3 + 3x^2 - 2$ は $x + 1$ を因数にもち

$$y = x^3 + 3x^2 - 2 = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$$

$y = 0$ とすると　　$x = -1, -1 \pm \sqrt{3}$

グラフは，右の図のようになる．

8. (1) $y = x(x-1) = x^2 - x$ より　$y' = 2x - 1$

放物線上の点 $(a,\ a^2 - a)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 - a) = (2a - 1)(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = (2a - 1)x - a^2$$

よって，点 $(0,\ 0)$ における接線の方程式は　$\boldsymbol{y = -x}$

点 $(1,\ 0)$ における接線の方程式は　$\boldsymbol{y = x - 1}$

(2) (1) で求めた 2 本の接線の交点の座標は　$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

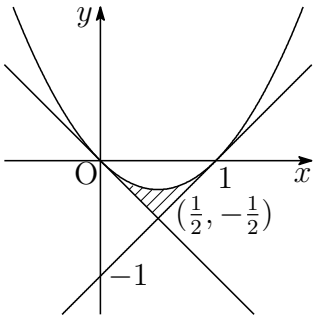
これと点 $(0,\ 0)$，点 $(1,\ 0)$ を結ぶ三角形の面積は　$\dfrac{1}{4}$

$y = x(x-1)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$-\int_0^1 x(x-1)dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(1-0)^3 = \frac{1}{6}$$

よって，求める斜線部分の面積 S は

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$



8.8　平成 24 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 方程式 $2(x-1)^2=(x-3)^2$ を解け.

   (2) 方程式 $3x^3-4x^2-13x-6=0$ を解け.

   (3) 次の 2 つの不等式を同時にみたす整数 x をすべて求めよ.

   $$\begin{cases} x^2+x-6 \geqq 0 \\ x^2-3x-4<0 \end{cases}$$

   (4) $\log_3\sqrt{72}-\log_3 4-\log_3\dfrac{27}{\sqrt{6}}$ を簡単にせよ.

   (5) 2 点 A$(-3,\ 6)$，B$(5,\ 2)$ を結ぶ線分の垂直二等分線の方程式を求めよ.

2. 2 次関数 $y=x^2+ax+b$ が $x=1$ のとき最小値 -4 をとるように，定数 a，b を定めよ.

3. 2 次方程式 $x^2+px+6=0$ の解が 2 と q であるとき，p，q の値を求めよ.

4. △ABC において，AB $=\sqrt{6}$，BC $=1+\sqrt{3}$，CA $=2$ であるとき，次の各問いに答えよ.

   (1) ∠C は何度か.

   (2) △ABC の面積 S を求めよ.

5. 直線 $y=mx+5$ が円 $x^2+y^2=16$ に接するように定数 m の値を定めよ.

6. α が第 1 象限の角で，β が第 4 象限の角で，$\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{5}$ のとき，$\cos(\alpha-\beta)$ の値を求めよ.

7. 関数 $f(x) = x^2 - 1$ について，次の各問いに答えよ．

   (1) 放物線 $y = f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2-1)$ における接線の方程式を求めよ．

   (2) 点 $\mathrm{B}(1, -4)$ から，$y = f(x)$ に引いた接線の方程式を求めよ．

8. 3 次関数 $y = 2x^3 - 3x^2$ について，次の各問いに答えよ．

   (1) この 3 次関数の極値を求め，グラフをかけ．

   (2) $y = 2x^3 - 3x^2$ と x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ．

解答例

1. (1) 与えられた方程式を整理すると　$x^2 + 2x - 7 = 0$
   これを解いて　　$\boldsymbol{x = -1 \pm 2\sqrt{2}}$

   (2) $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 13x - 6$ とすると
   $P(-1) = -3 - 4 + 13 - 6 = 0$
   よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち
   $P(x) = (x+1)(3x^2 - 7x - 6)$
   $= (x+1)(x-3)(3x+2)$
   $P(x) = 0$ から
   $\boldsymbol{x = -1,\ 3, -\dfrac{2}{3}}$

   $$\begin{array}{r} 3x^2\ -7x\ \ -6 \\ \hline x+1\,)\,3x^3 -4x^2 -13x -6 \\ \underline{3x^3 +3x^2\ \ \ \ \ \ } \\ -7x^2 -13x \\ \underline{-7x^2\ -7x\ \ } \\ -6x -6 \\ \underline{-6x -6} \\ 0 \end{array}$$

   (3) 第 1 式から　$(x+3)(x-2) \geqq 0$　ゆえに　$x \leqq -3,\ 2 \leqq x$　$\cdots$①
   第 2 式から　$(x+1)(x-4) < 0$　ゆえに　$-1 < x < 4$　$\cdots$②
   ①，② を同時にみたす x の範囲を求めて　　$2 \leqq x < 4$
   よって，これを満たす整数 x は　　$\boldsymbol{x = 2,\ 3}$

   (4) $\log_3 \sqrt{72} - \log_3 4 - \log_3 \dfrac{\sqrt{27}}{4} = \log_3 \left(\sqrt{72} \div 4 \div \dfrac{27}{\sqrt{6}} \right)$
   $= \log_3 \dfrac{\sqrt{3}}{9}$
   $= \log_3 3^{-\frac{3}{2}} = \boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$

(5) A，B の中点は　$\left(\dfrac{-3+5}{2},\ \dfrac{6+2}{2}\right)$　すなわち　$(1,\ 4)$

直線 AB の傾きは　　$\dfrac{2-6}{5-(-3)} = -\dfrac{1}{2}$

垂直二等分線の傾きを m とすると

$$-\frac{1}{2}m = -1 \quad \text{ゆえに} \quad m = 2$$

求める垂直二等分線は，点 $(1,\ 4)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y - 4 = 2(x-1) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 2x + 2}$$

2. 条件をみたす 2 次関数は，x^2 の係数に注意して

$$y = (x-1)^2 - 4 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 2x - 3$$

よって　　$\boldsymbol{a = -2,\ b = -3}$

3. 2 次方程式の解と係数の関係により

$$2 + q = -p,\ \ 2q = 6$$

これを解いて　　$\boldsymbol{p = -5,\ q = 3}$

4. (1) $a = 1 + \sqrt{3}$，$b = 2$，$c = \sqrt{6}$ を余弦定理に適用すると

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2(1+\sqrt{3})\cdot 2}$$
$$= \frac{2(1+\sqrt{3})}{4(1+\sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

ゆえに　　$\boldsymbol{C = 60^\circ}$

(2) $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3})\cdot 2\sin 60^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+3}{2}}$

5. $y = mx + 5$ を $x^2 + y^2 = 16$ に代入すると

$$x^2 + (mx + 5)^2 = 16$$

ゆえに $\qquad (m^2 + 1)x^2 + 10mx + 9 = 0$

判別式を計算すると

$$\begin{aligned} D/4 &= (5m)^2 - (m^2 + 1)\cdot 9 \\ &= 16m^2 - 9 = (4m + 3)(4m - 3) \end{aligned}$$

このとき，$D = 0$ であるから $\qquad \boldsymbol{m = \pm\dfrac{3}{4}}$

6. α が第 1 象限の角，β が第 4 象限の角であるから

$$\cos\alpha > 0, \quad \sin\beta < 0$$

したがって

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$$

$$\sin\beta = -\sqrt{1 - \cos^2\beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

加法定理により

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{12}{13} \times \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = \boldsymbol{\frac{16}{65}} \end{aligned}$$

7. (1) $f'(x) = 2x$ より $\quad f'(a) = 2a$

したがって，この放物線上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2 - 1)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 - 1) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2ax - a^2 - 1} \quad \cdots ①$$

(2) (1) で求めた接線が点 $\mathrm{B}(1, -4)$ を通るとき

$$-4 = 2a\cdot 1 - a^2 - 1 \quad a^2 - 2a - 3 = 0$$

しがって $\qquad a = -1,\ 3$

求める接線の方程式は，これらを ① に代入して

$$\boldsymbol{y = -2x - 2,\ \ y = 6x - 10}$$

8. (1) $y = 2x^3 - 3x^2$ より

$$y' = 6x^2 - 6x$$
$$= 6x(x-1)$$

$y' = 0$ とすると

$$x = 0,\ 1$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -1	↗

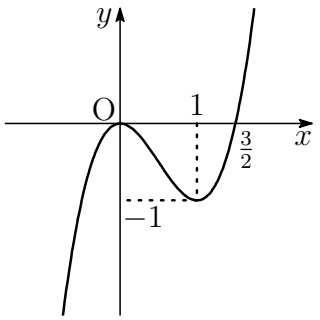
したがって，この関数は

$x = 0$ で極大値 0

$x = 1$ で極小値 -1

をとる．

グラフは，右の図のようになる．



(2) 曲線 $y = 2x^3 - 3x^2$ と x 軸との共有点の x 座標は

$$2x^3 - 3x^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0,\ \frac{3}{2}$$

求める部分の面積 S は，(1) で求めたグラフにより

$$S = -\int_0^{\frac{3}{2}} (2x^3 - 3x^2)\,dx$$
$$= -\left[\ \frac{x^4}{2} - x^3\ \right]_0^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{27}{32}}$$

8.9 平成 23 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) 方程式 $3x^2 - 6x + 2 = 0$ を解け.

   (2) 方程式 $2x^3 - x^2 - 7x + 6 = 0$ を解け.

   (3) 次の不等式の組を同時にみたす x の値の範囲を求めよ.

   $$\begin{cases} x^2 + x - 2 < 0 \\ x^2 + 3x > 0 \end{cases}$$

   (4) $\log_{10} \sqrt{8} - \log_{10} \dfrac{1}{\sqrt{5}} - \log_{10} \dfrac{2}{\sqrt{10}}$ を簡単にせよ.

   (5) $\cos(120^\circ + 45^\circ) + \cos(120^\circ - 45^\circ)$ の値を求めよ.

2. グラフが 3 点 $(-2,\ 5)$, $(0, -3)$, $(3,\ 0)$ を通る 2 次関数を求めよ.

3. 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解が 1 と α, 2 次方程式 $x^2 + qx + p = 0$ の解が -3 と β であるとき, 以下の問いに答えよ.

   (1) 定数 p, q の値を求めよ.

   (2) 残りの解 α, β の値を求めよ.

4. x 軸上に中心をもち, 2 点 $(3, -5)$, $(-3,\ 7)$ を通る円の方程式を求めよ.

5. $\mathrm{AB} = 1 + \sqrt{3}$, $\mathrm{BC} = \sqrt{2}$, $B = 45^\circ$ である $\triangle \mathrm{ABC}$ において, CA の長さおよび角 A の大きさを求めよ.

6. θ が鈍角で, $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ のとき, $\sin 2\theta$ および $\cos\dfrac{\theta}{2}$ の値を求めよ.

7. $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 2$ について次の各問いに答えよ.

   (1) 関数の極値とそのときの x の値を求めよ.

   (2) 関数のグラフをかけ.

8. $y = x^2$ について次の各問いに答えよ.

   (1) $y = x^2$ 上の点 $(2,\ 4)$ における接線の方程式を求めよ.

   (2) (1) で求めた接線と y 軸および $y = x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $\boldsymbol{x = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}}$

(2) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 7x + 6$ とすると

$P(1) = 2\cdot 1^3 - 1^2 - 7\cdot 1 + 6 = 0$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもち

$$P(x) = (x-1)(2x^2 + x - 6)$$
$$= (x-1)(x+2)(2x-3)$$

$P(x) = 0$ から

$$\boldsymbol{x = 1, -2, \dfrac{3}{2}}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 \quad +x \quad -6 \\ \hline x-1\,)\,2x^3 \quad -x^2 -7x +6 \\ \underline{2x^3 -2x^2} \\ \quad x^2 -7x \\ \quad \underline{x^2 \quad -x} \\ \quad -6x +6 \\ \quad \underline{-6x +6} \\ \quad 0 \end{array}$$

(3) 第 1 式から $(x+2)(x-1) < 0$

$-2 < x < 1 \quad \cdots ①$

第 2 式から $x(x+3) > 0$

$x < -3,\ 0 < x \quad \cdots ②$

①，② の共通範囲を求めて $\boldsymbol{0 < x < 1}$

(4) $\log_{10}\sqrt{8} - \log_{10}\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \log_{10}\dfrac{2}{\sqrt{10}}$

$$= \log_{10}\left(\sqrt{8} \div \frac{1}{\sqrt{5}} \div \frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= \log_{10} 10 = \boldsymbol{1}$$

(5) 加法定理により

$$\cos(120^\circ + 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ - \sin 120^\circ \sin 45^\circ$$
$$\cos(120^\circ - 45^\circ) = \cos 120^\circ \cos 45^\circ + \sin 120^\circ \sin 45^\circ$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$\cos(120^\circ + 45^\circ) + \cos(120^\circ - 45^\circ) = 2\cos 120^\circ \cos 45^\circ$$
$$= 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

2. 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと

点 $(-2,\ 5)$ を通るから　　$4a - 2b + c = 5 \quad \cdots ①$

点 $(0, -3)$ を通るから　　$c = -3 \quad \cdots ②$

点 $(3,\ 0)$ を通るから　　$9a + 3b + c = 0 \quad \cdots ③$

①〜③ を解いて　$a = 1$，$b = -2$

よって，求める 2 次関数は　　$\boldsymbol{y = x^2 - 2x - 3}$

3. (1) 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ の解が 1，α であるから，解と係数の関係により

$$1 + \alpha = -p,\ \ \alpha = q \quad 2\text{ 式から}\alpha\text{を消去すると} \quad p + q = -1 \cdots ①$$

同様に，2 次方程式 $x^2 + qx + p = 0$ の解が -3，β であるから

$$-3 + \beta = -q,\ \ -3\beta = p \quad 2\text{ 式から}\beta\text{を消去すると} \quad p - 3q = -9 \cdots ②$$

①，② を解いて　　$\boldsymbol{p = -3,\ \ q = 2}$

(2) $\alpha = q$，$-3\beta = p$ および (1) の結果から　$\boldsymbol{\alpha = 2,\ \beta = 1}$

4. 2 点 $(3, -5)$，$(-3,\ 7)$ をそれぞれ A，B とし，x 軸上にある円の中心を $\mathrm{C}(c,\ 0)$ とする．このとき，$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$ であるから

$$(c-3)^2 + 5^2 = (c+3)^2 + (-7)^2 \quad \text{これを解いて} \quad c = -2$$

したがって，円の中心は　　$\mathrm{C}(-2,\ 0)$

円の半径を r とすると　$r^2 = \mathrm{AC}^2 = (-2-3)^2 + (0+5)^2 = 50$

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{(x+2)^2 + y^2 = 50}$

5. $c = 1 + \sqrt{3}$，$a = \sqrt{2}$，$B = 45^\circ$ であるから，CA の長さ b は，余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ &= (1+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 2 - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$b > 0$ であるから　$b = 2$　よって　$\boldsymbol{\mathrm{CA} = 2}$

正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$$b\sin A = a\sin B \quad \text{ゆえに} \quad 2\sin A = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを解いて　　$\sin A = \dfrac{1}{2}$

$B = 45^\circ$ より，$A < 135^\circ$ であるから　$\boldsymbol{A = 30^\circ}$

6. θ が鈍角であるから　$\cos\theta < 0$

ゆえに　$\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = -\dfrac{3}{5}$

よって　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\dfrac{4}{5}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{24}{25}}$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2} = \frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2} = \frac{1}{5}$$

このとき，$\dfrac{\theta}{2}$ は鋭角であるから　$\cos\dfrac{\theta}{2} > 0$

したがって　$\boldsymbol{\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

7. (1) $y = x^3+6x^2+9x+2$ より

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2+12x+9 \\ &= 3(x+3)(x+1) \end{aligned}$$

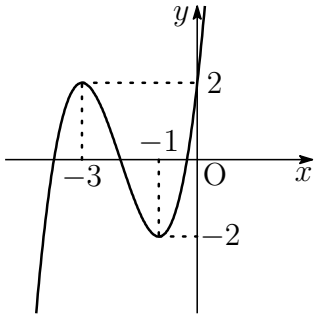
x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

$y' = 0$ とすると　$x = -3, -1$

増減表は，右のようになる．

よって，$\boldsymbol{x = -3}$ で**極大値 2**，$\boldsymbol{x = -1}$ で**極小値 -2** をとる

(2) (1) の結果から



8. (1) $f(x)=x^2$ とおくと　$f'(x)=2x$

したがって　　$f'(2)=2\cdot 2=4$

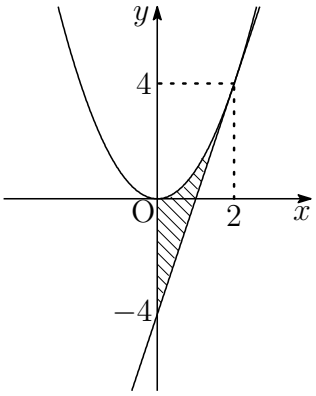
求める接線は，点 $(2,\ 4)$ を通り，傾き 4 の直線であるから

$$y-4=4(x-2)$$

ゆえに　　$\boldsymbol{y=4x-4}$

(2) 求める面積を S とすると，図の斜線部分の面積であるから

$$\begin{aligned} S&=\int_0^2 \{x^2-(4x-4)\}dx \\ &=\int_0^2 (x-2)^2dx \\ &=\left[\ \frac{1}{3}(x-2)^3\ \right]_0^2=\boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$



8.10 平成 22 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の方程式を解け.

   (1) $x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 = 0$

   (2) $3x^3 - 4x^2 - 5x + 2 = 0$

   (3) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

   (4) $2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

2. 次の不等式を解け.

   (1) $0.1x - 0.2 \geqq 0.4x - 0.7$

   (2) $2^x > 32$

   (3) $\log_3 x < \log_3(6 - x)$

   (4) $\sin\theta > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$

3. 次の式を簡単にせよ.

   (1) $3^{4\log_3 2}$

   (2) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 + (\sin\theta - \cos\theta)^2$

4. 次の計算をせよ.

   (1) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})$

   (2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$ (ただし，i は虚数単位である)

5. 直線 $l : 2x - y - 1 = 0$ に関して，点 $\mathrm{A}(3, -1)$ と対称な点 B の座標を求めよ.

6. 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とし，直線 $x + 2y - 5 = 0$ に接する円の方程式を求めよ.

7. 関数 $y = x^3 - 3x + 1$ の極値を求め，またそのグラフをかけ.

8. 放物線 $y = x^2 - 4x + 9$ に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ から 2 本の接線を引くとき，次の各問に答えよ.

   (1) これら 2 本の接線の方程式を求めよ.

   (2) この放物線と 2 本の接線で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) $\boldsymbol{x = \sqrt{3} \pm \sqrt{5}}$

   (2) $P(x) = 3x^3 - 4x^2 - 5x + 2$ とすると

   $P(-1) = 3(-1)^3 - 4(-1)^2 - 5(-1) + 2 = 0$

   よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもち

   $$P(x) = (x+1)(3x^2 - 7x + 2)$$
   $$= (x+1)(x-2)(3x-1)$$

   $P(x) = 0$ から

   $$\boldsymbol{x = -1,\ 2,\ \frac{1}{3}}$$

   (3) $2^x = t$ とすると　$t > 0$

   $$t^2 - 5t + 4 = 0$$

   ゆえに　$(t-1)(t-4) = 0$

   $t > 0$ に注意して　$t = 1,\ 4$

   よって　$2^x = 1$ を解いて　$x = 0$

   $2^x = 4$ を解いて　$x = 2$

   したがって　　$\boldsymbol{x = 0,\ 2}$

   (4) 左辺を変形して　　$\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}$

   $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より　$0 \leqq 2\theta \leqq 2\pi$

   この範囲で方程式を解くと　$2\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

   よって　　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{12},\ \dfrac{5}{12}\pi}$

2. (1) $\boldsymbol{x \leqq \dfrac{5}{3}}$

   (2) 不等式は　　$2^x > 2^5$

   底 2 は 1 より大きいので　$\boldsymbol{x > 5}$

   (3) 真数は正で，底 3 は 1 より大きいので

   $$0 < x < 6 - x \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{0 < x < 3}$$

   (4) $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{2}{3}\pi}$

3. (1) $3^{4\log_3 2} = 3^{\log_3 16} = \boldsymbol{16}$

   補足 $\log_a M = p$ のとき，$M = a^p$ であるから　$M = a^{\log_a M}$

(2) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2$
$=(\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)+(\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$
$=2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=2\times1=\boldsymbol{2}$

4. (1) $(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})$
$=(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2$
$=1+2\sqrt{2}+2-5=\boldsymbol{-2+2\sqrt{2}}$

(2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1+2i+i^2}{2}=\dfrac{1+2i+(-1)}{2}=\boldsymbol{i}$

5. l に関して A と対称な点を B$(p,\ q)$ とする.

［1］l の傾きは 2，直線 AB の傾きは $\dfrac{q+1}{p-3}$ である．$l\perp$AB であるから

$$2\cdot\frac{q+1}{p-3}=-1 \quad \text{すなわち} \quad p+2q-1=0 \quad \cdots①$$

［2］線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p+3}{2},\ \dfrac{q-1}{2}\right)$ が l 上にあるから

$$2\cdot\frac{p+3}{2}-\frac{q-1}{2}-1=0 \quad \text{すなわち} \quad 2p-q+5=0 \quad \cdots②$$

①，② を解いて $p=-\dfrac{9}{5},\ q=\dfrac{7}{5}$ よって $\left(\boldsymbol{-\dfrac{9}{5},\ \dfrac{7}{5}}\right)$

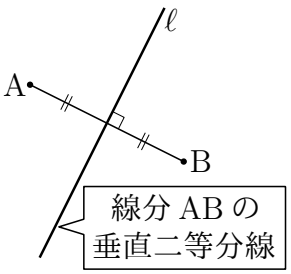
直線に関して対称な点

2 点 A，B が直線 ℓ に関して対称であるのは，次の［1］,［2］が成り立つときである．

［1］直線 AB は ℓ に垂直である．

［2］線分 AB の中点は ℓ 上にある．

補足 直線 ℓ は線分 AB の垂直二等分線である．



6. 円の半径を r とすると，円の方程式は　　$x^2+y^2=r^2$

円の中心 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ から直線 $x+2y-5=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

円と直線が接するのは $d=r$ のときである

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{x^2+y^2=5}$

7. $y=x^3-3x+1$ より

$$y'=3x^2-3$$
$$=3(x+1)(x-1)$$

$y'=0$ とすると

$$x=-1,\ 1$$

y の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

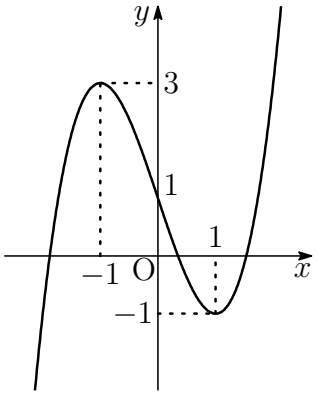
したがって，この関数は

$x=-1$ で極大値 3

$x=1$ で極小値 -1

をとる．

グラフは，右の図のようになる．



8. (1) $y=x^2-4x+9$ を微分すると　$y'=2x-4$

接点の座標を $(a,\ a^2-4a+9)$ とすると，接線の傾きは $2a-4$ となるから，その方程式は

$$y-(a^2-4a+9)=(2a-4)(x-a)$$

すなわち　　$y=(2a-4)x-a^2+9$　$\cdots$①

この直線が原点 O を通るから

$$0=(2a-4)\cdot 0-a^2+9$$

よって　　$a^2-9=0$

すなわち　　$(a+3)(a-3)=0$

$$a=-3,\ 3$$

したがって，接線の方程式は，① より

$a=-3$ のとき　　$\boldsymbol{y=-10x}$

$a=3$ のとき　　$\boldsymbol{y=2x}$

(2) (1) の結果から，求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^{0} \{(x^2-4x+9)-(-10x)\}\,dx + \int_{0}^{3} \{(x^2-4x+9)-2x\}\,dx \\ &= \int_{-3}^{0} (x+3)^2\,dx + \int_{0}^{3} (x-3)^2\,dx \\ &= \left[\ \frac{1}{3}(x+3)^3\ \right]_{-3}^{0} + \left[\ \frac{1}{3}(x-3)^3\ \right]_{0}^{3} \\ &= 9+9 = \mathbf{18} \end{aligned}$$

微分・積分の公式

$$\boldsymbol{\{(ax+b)^n\}' = an(ax+b)^{n-1},}$$

$$\boldsymbol{\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C}$$

8.11　平成 21 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ．

   (1) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$ を因数分解せよ．

   (2) 方程式 $2x^2 - 2x - 1 = 0$ を解け．

   (3) 25^{-1}，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^3$，$\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-3}$ の大小を調べ，不等号 $<$ を使って表せ．

   (4) $\log_{10} 15 + 3\log_{10}\sqrt{2} - \dfrac{1}{2}\log_{10} 18$ を簡単にせよ．

   (5) $\sin(45^\circ + 30^\circ) + \sin(45^\circ - 30^\circ)$ の値を求めよ．

2. 2 点 $\mathrm{A}(3,\ 1)$，$\mathrm{B}(1, -3)$ を直径の両端とする円について，次の各問いに答えよ．

   (1) 円の中心 C の座標を求めよ．

   (2) 円の方程式を求めよ．

3. △ABC において，角 A の大きさ $A = 60^\circ$，辺 CA の長さ $b = 8$，辺 AB の長さ $c = 3$ としたとき，次の各問いに答えよ．

   (1) △ABC の面積 S を求めよ．

   (2) 辺 BC の長さ a を求めよ．

4. 方程式 $x^2 + mx + n = 0$ が異なる 2 つの虚数解 $x = 3 \pm 2i$ を持つように定数 m，n の値を定めよ．

5. 放物線 $y = x^2 + 1$ とこの放物線に接する 2 本の接線 l，m がある．このとき，次の各問いに答えよ．

   (1) 接線 l は放物線と点 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$ で接する．このとき，接線 l の方程式を求めよ．

   (2) 接線 m は接線 l と垂直に交わる．このとき，放物線と接線 m との接点 B の座標を求めよ．

6. 関数 $y = x^3 - 3x^2 + 4$ の $-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値，最小値を求めよ．

7. 放物線 $y = x^2 - kx$ と x 軸で囲まれた部分の面積が 36 となるように正の定数 k の値を定めよ．

解答例

1. (1) $P(x)=2x^3-3x^2-2x+3$ とすると

$$P(1)=2\cdot1^3-3\cdot1^2-2\cdot1+3=0$$

よって，$P(x)$ は $x-1$ を因数にもつ．
右の割り算から

$$2x^3-3x^2-2x+3=(x-1)(2x^2-x-3)$$

したがって

$$x^3-2x^2-5x+6=\boldsymbol{(x-1)(x+1)(2x-3)}$$

$$\begin{array}{r} 2x^2\ \ -x\ \ -3 \\ \hline x-1\,)\,2x^3-3x^2-2x+3 \\ \underline{\ 2x^3-2x^2\ \ \ \ \ \ } \\ -x^2-2x \\ \underline{\ -x^2\ \ +x\ \ } \\ -3x+3 \\ \underline{\ -3x+3\ } \\ 0 \end{array}$$

(2) $\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}}$

(3) $$25^{-1}=\frac{1}{25}=\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

底 $\dfrac{1}{5}$ は 1 より小さいので

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3<\left(\frac{1}{5}\right)^2<\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$$

よって $$\boldsymbol{\left(\frac{1}{5}\right)^3<25^{-1}<\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}}$$

(4) $$\begin{aligned}&\log_{10}15+3\log_{10}\sqrt{2}-\frac{1}{2}\log_{10}18\\ =&\log_{10}15+\log_{10}(\sqrt{2})^3-\log_{10}\sqrt{18}\\ =&\log_{10}15+\log_{10}2\sqrt{2}-\log_{10}3\sqrt{2}\\ =&\log_{10}\frac{15\times2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\log_{10}10=\boldsymbol{1}\end{aligned}$$

(5) 加法定理により

$$\begin{aligned}&\sin(45^\circ+30^\circ)+\sin(45^\circ-30^\circ)\\ =&(\sin45^\circ\cos30^\circ+\cos45^\circ\sin30^\circ)+(\sin45^\circ\cos30^\circ-\cos45^\circ\sin30^\circ)\\ =&2\sin45^\circ\cos30^\circ\\ =&2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}}\end{aligned}$$

2. (1) C は，線分 AB の中点であるから，その座標は

$$\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{1+(-3)}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{(2,\,-1)}$$

(2) 円の半径を r とすると

$$r = \mathrm{CA} = \sqrt{(3-2)^2 + \{1-(-1)\}^2} = \sqrt{5}$$

よって，円の方程式は

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = (\sqrt{5})^2$$

すなわち　　$\boldsymbol{(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5}$

3. (1) $S = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 3\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 3 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{6\sqrt{3}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= 8^2 + 3^2 - 2\cdot 8\cdot 3\cos 60^\circ \\ &= 64 + 9 - 2\cdot 8\cdot 3 \times \frac{1}{2} \\ &= 49 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 7}$

4. 解と係数の関係により

$$(3+2i) + (3-2i) = -\frac{m}{1}, \quad (3+2i)(3-2i) = \frac{n}{1}$$

したがって　　$\boldsymbol{m = -6,\ n = 13}$

5. (1) $f(x) = x^2 + 1$ とすると　$f'(x) = 2x$
点 A$(-1,\ 2)$ における接線 l の傾きは

$$f'(-1) = 2\cdot(-1) = -2$$

よって，l の方程式は

$$y - 2 = -2\{x - (-1)\}　\text{すなわち}　\boldsymbol{y = -2x}$$

(2) 接点 B の座標を $(b,\ b^2 + 1)$ とおくと
B における接線 m の傾きは　　$f'(b) = 2b$
m は l と垂直に交わるので

$$-2 \times 2b = -1　\text{すなわち}　b = \frac{1}{4}$$

よって，点 B の座標は　　$\left(\boldsymbol{\frac{1}{4}},\ \boldsymbol{\frac{17}{16}}\right)$

6. $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
$y' = 0$ とすると　$x = 0,\ 2$
したがって，y の増減表は次のようになる．

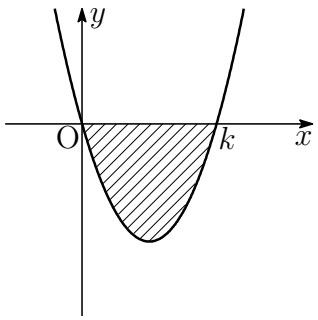
x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-16	↗	極大 4	↘	極小 0	↗	4

よって，$-2 \leqq x \leqq 3$ において，

$x = 0,\ 3$ で最大値 4，$x = -2$ で最小値 -16

をとる．

7. この放物線と x 軸の共有点の x 座標は，



$x^2 - kx = 0$ を解いて

$$x = 0,\ k$$

$0 \leqq x \leqq k$ では $y \leqq 0$ であるから，面積 S は

$$S = -\int_0^k (x^2 - kx)\,dx$$

$$= -\int_0^k x(x-k)\,dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(k-0)^3 = \frac{k^3}{6}$$

条件より　$\dfrac{k^3}{6} = 36$　よって　$\boldsymbol{k = 6}$

8.12 平成 20 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) $6x^2+7x-3$ を因数分解せよ.

   (2) 方程式 $5x^2-x-1=0$ を解け.

   (3) $2\log_{10}2-\log_{10}5+\log_{10}125$ を簡単にせよ.

   (4) 2^3，0.5^3，0.5^{-1} の大小を比較せよ.

   (5) 2 次方程式 $x^2+kx+k+3=0$ が重解をもつように k の値を定めよ.

2. 方程式 $x^2-5x-1=0$ の 2 解を α，β とおくとき，次の各値を求めよ.

   (1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}$

   (2) $\alpha^2+\beta^2$

3. 3 辺の長さが $a=4$，$b=5$，$c=6$ である $\triangle$ABC について，内接円の半径を求めよ.

4. θ が第 2 象限の角で，$\tan\theta=-1$ のとき $\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を定めよ.

5. 円 $x^2+y^2=2$ と直線 $y=x+1$ について，次の各問いに答えよ.

   (1) 円と直線を図示せよ.

   (2) 円と直線の交点を A，B とするとき，AB の長さを求めよ.

6. $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ について，次の各問いに答えよ.

   (1) $f(x)$ を微分し，$f'(x)=0$ を満たす x の値を求めよ.

   (2) $y=f(x)$ の増減を調べ，増減表にまとめよ．また，これを用いて $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ.

7. $f(x)=x^2+kx+l$ が $\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=1$，$\displaystyle\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=0$ を満たすように，定数 k の値を定めよ.

解答例

1. (1) $6x^2+7x-3=\boldsymbol{(2x+3)(3x-2)}$

   (2) $\boldsymbol{x=\dfrac{1\pm\sqrt{21}}{10}}$

   (3) $2\log_{10}2-\log_{10}5+\log_{10}125=\log_{10}2^2-\log_{10}5+\log_{10}125$
   $$=\log_{10}\frac{2^2\times125}{5}$$
   $$=\log_{10}100=\log_{10}10^2=\boldsymbol{2}$$

   (4)　　$0.5^3=(2^{-1})^3=2^{-3}$,　　$0.5^{-1}=(2^{-1})^{-1}=2$

   底 2 は 1 より大きいので
   $$2^{-3}<2<2^3$$
   すなわち　　$\boldsymbol{0.5^3<0.5^{-1}<2^3}$

   (5) 係数について
   $$D=k^2-4\cdot1(k+3)=k^2-4k-12=(k+2)(k-6)$$
   とすると，重解をもつとき $D=0$ であるから
   $$(k+2)(k-6)=0\quad\text{これを解いて}\quad\boldsymbol{k=-2,\ 6}$$

2. 解と係数の関係により　$\alpha+\beta=5$，$\alpha\beta=-1$

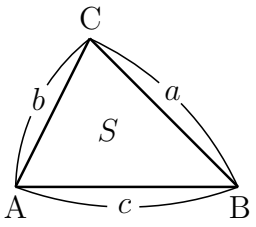
   (1) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{5}{-1}=\boldsymbol{-5}$

   (2) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=5^2-2\cdot(-1)=\boldsymbol{27}$

ヘロンの公式

$2s=a+b+c$ のとき，面積 S は

$$\boldsymbol{S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$



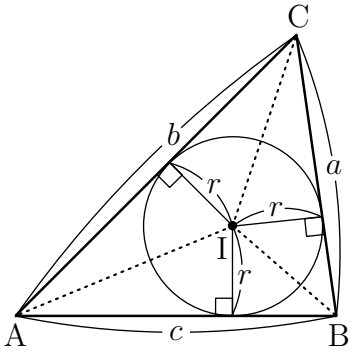
内接円の半径

三角形 ABC の内接円の中心を I，内接円の半径を r，$2s = a+b+c$ とする．このとき，△IBC, △ICA, △IAB の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}ar, \quad \frac{1}{2}br, \quad \frac{1}{2}cr$$

であり，三角形 ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs \end{aligned}$$



3. $2s = 4+5+6$ とすると　　$s = \dfrac{15}{2}$

ゆえに，三角形の面積を S とすると

$$S = \sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-4\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-6\right)} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

これらを $S = rs$ に代入して

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = r \times \frac{15}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{r = \frac{\sqrt{7}}{2}}$$

4. $\tan\theta = -1$ を満たす第 2 象限の角 θ は　$\theta = 135°$

このとき　　$\boldsymbol{\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}}$

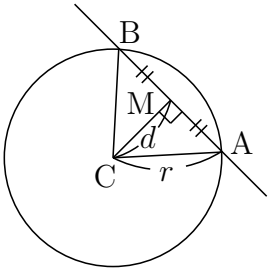
弦 AB の長さ

円の半径を r，円の中心 C から直線 AB までの距離を d，AB の中点を M とすると

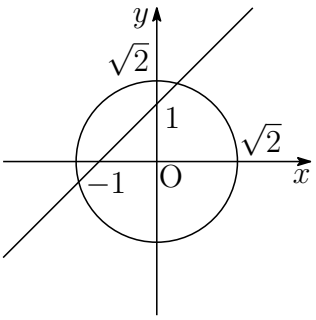
$$\mathrm{AM} = \sqrt{r^2 - d^2}$$

AB = 2AM であるから

$$\boldsymbol{\mathrm{AB} = 2\sqrt{r^2 - d^2}}$$



5. (1)



(2) 円の半径 r は　　$r=\sqrt{2}$

円の中心から直線 $y=x+1$ $(x-y+1=0)$ までの距離 d は

$$d=\frac{|\,1\,|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　　$\mathrm{AB}=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2-\dfrac{1}{2}}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

6. (1) $f(x)$ を微分すると　$f'(x)=3x^2-12x+9$

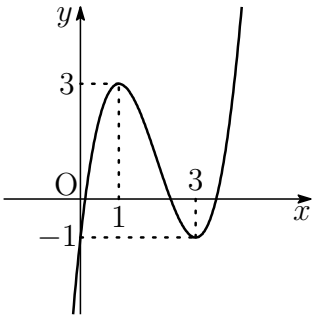
$f'(x)=0$ を満たす x は

$$3x^2-12x+9=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=1,\ 3}$$

(2) (1) の結果から増減表は，つぎのようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

したがって，グラフは，右の図のようになる．



7. $f(x)=x^2+kx+l$ より

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^2+kx+l)\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}+\frac{k}{2}x^2+l\ \right]_{-1}^{1}=\frac{2}{3}+2l$$

$$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3+kx^2+lx)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{k}{3}x^3+\frac{l}{2}x^2\right]_{-1}^{1}=\frac{2k}{3}$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1,\ \int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=0$ であるから

$$\frac{2}{3}+2l=1,\ \ \frac{2k}{3}=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k=0,\ l=\frac{1}{6}}$$

8.13 平成 19 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) $a^2b+b^2c-a^2c-b^3$ を因数分解せよ.

   (2) 方程式 $(x^2-2x)^2+5(x^2-2x)-24=0$ を解け.

   (3) $\log_{10}36+\dfrac{1}{2}\log_{10}\sqrt[3]{9}-\dfrac{1}{3}\log_{10}24-\log_{10}6$ を簡単にせよ.

   (4) 2 次関数 $y=x^2-ax+a$ の値域が $y \geqq 1$ であるように定数 a の値を定めよ.

   (5) x の 2 次方程式 $x^2-2(m-5)x+2m^2-4m-2=0$ が実数解をもつような m の値を求めよ.

2. △ABC において，$\sin A:\sin B:\sin C=2:3:4$ のとき，$\cos A$ の値を求めよ.

3. 2 点 A$(2,-2)$，B$(-2,\ 2)$ を頂点とする正三角形の第 3 の頂点 C の座標を求めよ.

4. 点 P$(2,\ 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式と接点の座標を求めよ.

5. α，β が鋭角で，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ ならば $\alpha+\beta=45^\circ$ であることを証明せよ.

6. 縦の長さ 10，横の長さ 16 の板の 4 すみから等しい正方形を切り取った残りでで箱を作るとき，その体積を最大にしたい.

   (1) 正方形の一辺の長さを x，箱の体積を y とするとき，y を x の式で表せ．また，x の定義域を求めよ.

   (2) 体積の最大値と，そのとき切り取った正方形の一辺の長さを求めよ.

7. 放物線 $y=x^2$ 上の点 $(1,\ 1)$ における接線と x 軸および $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

解答例

1. (1) (c について整理する)

$$\begin{aligned} a^2b+b^2c-a^2c-b^3 &= b(a^2-b^2)-c(a^2-b^2) \\ &= (a^2-b^2)(b-c) \\ &= \boldsymbol{(a+b)(a-b)(b-c)} \end{aligned}$$

(2) $x^2-2x=A$ とおくと

$$A^2+5A-24=0 \quad \text{すなわち} \quad (A-3)(A+8)=0$$

したがって

$$\begin{aligned} (x^2-2x-3)(x^2-2x+8)&=0 \\ (x+1)(x-3)(x^2-2x+8)&=0 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{x=-1,\ 3,\ 1\pm\sqrt{7}\,i}$

(3)　$\log_{10}36+\dfrac{1}{2}\log_{10}\sqrt[3]{9}-\dfrac{1}{3}\log_{10}24-\log_{10}6$

$=\log_{10}36+\log_{10}\sqrt[3]{3}-\log_{10}\sqrt[3]{24}-\log_{10}6$

$=\log_{10}\dfrac{36\times\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}\times6}=\boldsymbol{\log_{10}3}$

(4) 2 次関数は　$y=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$

この関数の値域が $y\geqq 1$ であるから

$$-\frac{a^2}{4}+a=1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2}$$

(5) 2 次方程式の係数について

$$D/4=\{-(m-5)\}^2-1\cdot(2m^2-4m-2)=-(m+9)(m-3)$$

方程式が実数解をもつとき，$D\geqq 0$ であるから

$$-(m+9)(m-3)\geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-9\leqq m\leqq 3}$$

2. 正弦定理により　$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

したがって，条件により　$a:b:c=2:3:4$

ゆえに，$a=2k$，$b=3k$，$c=4k$ とおいて，余弦定理に代入すると

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(3k)^2+(4k)^2-(2k)^2}{2\cdot3k\cdot4k}=\frac{21k^2}{24k^2}=\boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

3. $\mathrm{AB}^2 = (-2-2)^2 + (2+2)^2 = 32$

C の座標を $(x,\ y)$ とする.

$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2$ であるから

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 32$$

すなわち $\quad x^2 + y^2 - 4x + 4y - 24 = 0 \quad \cdots ①$

$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2$ であるから

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 32$$

すなわち $\quad x^2 + y^2 + 4x - 4y - 24 = 0 \quad \cdots ②$

① − ② より

$$-8x + 8y = 0 \quad \text{すなわち} \quad y = x \quad \cdots ③$$

③ を ① に代入すると

$$2x^2 - 24 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm 2\sqrt{3}$$

③ より $\quad x = \pm 2\sqrt{3},\ y = \pm 2\sqrt{3}$ (複号同順)

よって，頂点 C の座標は $\quad \boldsymbol{(2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}),\ (-2\sqrt{3}, -2\sqrt{3})}$

4. 接点を $\mathrm{Q}(a,\ b)$ とすると，Q は円上にあるから

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots ①$$

また，Q における円の接線の方程式は $ax + by = 1$ で，この直線が点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$ を通るから

$$2a + b = 1 \quad \cdots ②$$

①，② から b を消去して整理すると $\quad 5a^2 - 4a = 0$

これを解くと $\quad a = 0,\ \dfrac{4}{5}$

② より $\quad a = 0$ のとき $\quad b = 1, \quad a = \dfrac{4}{5}$ のとき $\quad b = -\dfrac{3}{5}$

よって，接線は 2 本あり，その接点の座標と接線の方程式は，次のようになる.

点 $\boldsymbol{(0,\ 1)}$ における接線は $\quad 0x + 1y = 1 \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{y = 1}$

点 $\left(\dfrac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5}}, -\dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}}\right)$ における接線は $\quad \dfrac{4}{5}x - \dfrac{3}{5}y = 1 \quad$ すなわち $\quad \boldsymbol{4x - 3y = 5}$

5. 加法定理により

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$$

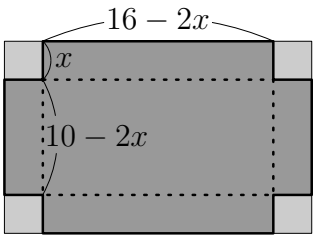
α，β は鋭角であるから　　$0^\circ<\alpha+\beta<180^\circ$

この範囲で $\tan(\alpha+\beta)=1$ を満たす $\alpha+\beta$ は　$\boldsymbol{\alpha+\beta=45^\circ}$

6. (1) 切り取る正方形の 1 辺の長さを x，箱の容積を y とする．

$x>0$，$10-2x>0$，$16-2x>0$ であるから

$$0<x<5 \quad \cdots ①$$



このとき

$$y=x(10-2x)(16-2x)$$

よって

$$y=4(x^3-13x^2+40x) \quad (0<x<5)$$

(2) (1) の結果から

$$y'=4(3x^2-26x+40)=4(x-2)(3x-20)$$

① の範囲において，y の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	5
y'		$+$	0	$-$	
y		↗	極大 144	↘	

したがって，y は $\boldsymbol{x=2}$ で**最大値 144** をとる．

7. $f(x)=x^2$ とすると　$f'(x)=2x$
点 $(1,\ 1)$ における接線の傾きは

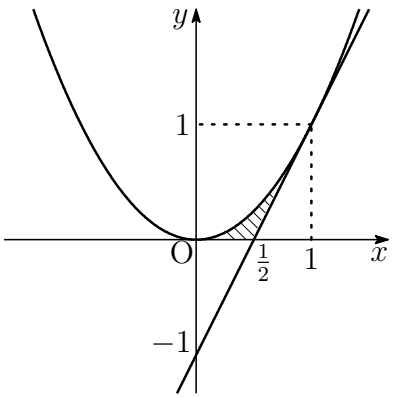
$$f'(1)=2\cdot 1=2$$

ゆえに，点 $(1,\ 1)$ における接線の方程式は

$$y-1=2(x-1)\quad \text{すなわち}\quad y=2x-1$$

この直線と x 軸との共有点の x 座標は

$$2x-1=0\quad \text{ゆえに}\quad x=\frac{1}{2}$$



放物線 $y=x^2$ と x 軸，2 直線 $x=0$，$x=1$ で囲まれた部分の面積 S_1 は

$$S_1=\int_0^1 x^2\,dx=\left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1=\frac{1}{3}$$

3 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$ を頂点とする直角三角形の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{1}{4}$$

よって，求める面積 S は

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

8.14　平成 18 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問いに答えよ.

   (1) $2x^2 - x - 5 = 0$ を解け.

   (2) $6x^2 - x - 15 > 0$ を解け.

   (3) $\log_3 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{6}$ を簡単にせよ.

   (4) α，β が鋭角で $\sin\alpha = \dfrac{1}{7}$，$\cos\beta = \dfrac{11}{14}$ であるとき $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ.

   (5) 3 点 $(0,\ 2)$，$(2,\ 0)$，$(a,\ a^2)$ が同一直線上にあるように定数 a の値を定めよ.

   (6) x 軸上に中心をもち，2 点 $(2,\ 2)$，$(3, -1)$ を通る円の方程式を求めよ.

2. AB $= 2$，BC $= \sqrt{3} + 1$，CD $= \sqrt{2}$，$\angle$ABC $= 60°$，$\angle$BCD $= 75°$ である四角形 ABCD の面積 S を求めよ.

3. 関数 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ について，次の各問いに答えよ.

   (1) $y = f(x)$ の増減，極値を求め，そのグラフをかけ.

   (2) $y = f(x)$ の接線のうちで傾きが最小となるものと，そのときの接点の座標を求めよ.

4. 放物線 $y = x(4 - x) \cdots$ ① について，次の各問いに答えよ.

   (1) 放物線 ① と x 軸で囲まれた部分 A の面積 S を求めよ.

   (2) 直線 $y = x$ によって分けられた A の 2 つの部分の面積の比を求めよ.

解答例

1. (1) $\boldsymbol{x = \dfrac{1 \pm \sqrt{41}}{4}}$

(2) 左辺を因数分解して $(2x+3)(3x-5) > 0$

よって $\boldsymbol{x < -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{3} < x}$

(3) $\log_3 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2}\log_3 \sqrt[3]{6}$

$= \dfrac{1}{2}\log_3 2 + \dfrac{1}{2}\log_3 \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\log_3 6$

$= \dfrac{1}{2}\left(\log_3 2 + \log_3 \dfrac{1}{3} - \log_3 6\right)$

$= \dfrac{1}{2}\log_3 \left(2 \times \dfrac{1}{3} \div 6\right) = \dfrac{1}{2}\log_3 3^{-2} = \boldsymbol{-1}$

(4) α, β は鋭角より, $\cos\alpha > 0$, $\sin\beta > 0$ であるから

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1 - \cos^2\beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

加法定理により

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$= \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{11}{14} + \frac{1}{7} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(5) 2 点 $(2,\ 0)$, $(0,\ 2)$ を通る直線の方程式は

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad x + y - 2 = 0$$

この直線上に点 $(a,\ a^2)$ があるので

$$a + a^2 - 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -2,\ 1}$$

補足 2 点 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ を通る直線の方程式は $\boldsymbol{\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1}$

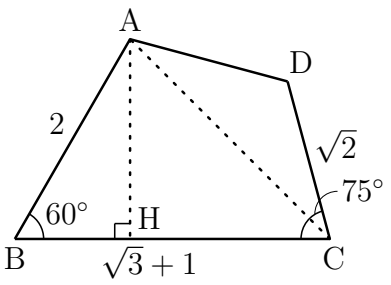
(6) 円周上の 2 点を $\mathrm{A}(2,\ 2)$, $\mathrm{B}(3, -1)$ とし, x 軸上にある円の中心を $\mathrm{C}(a,\ 0)$, 半径を r とすると, $r^2 = \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$ より

$$r^2 = (a-2)^2 + (0-2)^2 = (a-3)^2 + \{0-(-1)\}^2$$

これを解いて $\quad a = 1,\ r = \sqrt{5}$

よって, 求める円の方程式は $\quad \boldsymbol{(x-1)^2 + y^2 = 5}$

2. 右の図のように，点 A から辺 BC に垂線 AH を下ろすと



$$\mathrm{BH}=1,\quad \mathrm{AH}=\sqrt{3}$$

したがって，△ACH は $\mathrm{AH}=\mathrm{CH}=\sqrt{3}$ の直角二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AC}=\sqrt{6},\quad \angle\mathrm{ACD}=75^\circ-45^\circ=30^\circ$$

よって，求める面積 S は

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AH}+\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{ACD}\\&=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\sin 30^\circ\\&=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3}{2}+\sqrt{3}}\end{aligned}$$

3. (1) $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=x^2-4x+3\\&=(x-1)(x-3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると

$$x=1,\ 3$$

$f(x)$ の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 $\frac{7}{3}$	↘	極小 1	↗

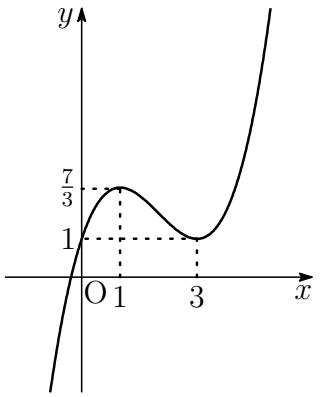
したがって，この関数は

$x=1$ で極大値 $\dfrac{7}{3}$

$x=3$ で極小値 1

をとる．

グラフは，右の図のようになる．



(2) $f'(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$

接線の傾き $f'(x)$ は $x=2$ のとき最小値 -1 とる．

このとき　$f(2)=-\dfrac{1}{3}\cdot 2^3-2\cdot 2^2+3\cdot 2+1=\dfrac{5}{3}$

ゆえに，接点の座標は　$\left(\mathbf{2},\ \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$

また，この点における接線の方程式は

$$y-\frac{5}{3}=-1(x-2)\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=-x+\frac{11}{3}}$$

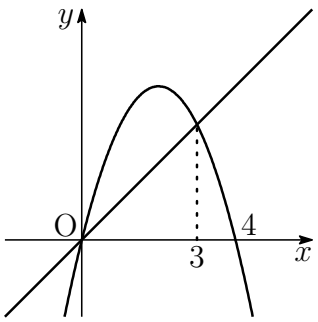
4. (1) 曲線 $y = x(4-x)$ と x 軸との共有点の x 座標は $x = 0,\ 4$

$0 \leqq x \leqq 4$ において $x(4-x) \geqq 0$

したがって，A の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 x(4-x)\,dx \\ &= -\int_0^4 x(x-4)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(4-0)^3 = \mathbf{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

(2) 直線 $y = x$ の上側および下側の A の部分の面積を，それぞれ S_1，S_2 とする．曲線 $y = x(4-x)$ と直線 $y = x$ の共有点の x 座標は



$$x(4-x) = x$$

ゆえに $\quad x = 0,\ 3$

$0 \leqq x \leqq 3$ において $x(4-x) \geqq x$

したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^3 \{x(4-x) - x\}\,dx \\ &= -\int_0^3 x(x-3)\,dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(3-0)^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$S_2 = S - S_1 = \frac{32}{3} - \frac{9}{2} = \frac{37}{6}$$

よって $\quad S_1 : S_2 = \dfrac{9}{2} : \dfrac{37}{6} = \mathbf{27 : 37}$

8.15　平成 17 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問に答えよ.

   (1) $3x^2 + 5x - 2 \leqq 0$ を解け.

   (2) $\tan\theta = -2$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ であるとき，$\cos\theta$ の値を求めよ.

   (3) $\dfrac{1}{2}\log_2 3 - \log_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の値を求めよ.

   (4) 6 人を 2 人ずつ 3 つの組に分ける方法は何通りあるか.

   (5) 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(3,\ 2)$ から等距離にある点の軌跡を求めよ.

   (6) 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(1, -1)$，B$(2,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ.

   (7) BC $= 4$，$B = 60^\circ$，$C = 75^\circ$ である $\triangle$ABC の面積 S を求めよ.

2. 関数 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ について，次の各問に答えよ.

   (1) $f(x)$ を微分せよ.

   (2) $y = f(x)$ の接線のうちで，傾きが 9 であるものをすべて求めよ.

   (3) $y = f(x)$ の極値を求め，グラフをかけ.

3. 2 つの放物線 $y = x^2 + 2x - 3$，$y = -x^2 + 2x + 3$ で囲まれた図形について，次の各問に答えよ.

   (1) 2 つの放物線の交点の座標を求め，この図形の概形をかけ.

   (2) この図形の面積 S を求めよ.

解答例

1. (1) 不等式は $(x+2)(3x-1) \leqq 0$

ゆえに $\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq \frac{1}{3}}$

(2) $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1}{1+(-2)^2} = \dfrac{1}{5}$

$\tan\theta < 0$ より $90^\circ < \theta < 180^\circ$

このとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{1}{5}} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_2 3 - \log_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \log_2\sqrt{3} - \log_2 \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \log_2\left(\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \log_2 2 = \boldsymbol{1}$$

(4) 3 つの組を A 組，B 組，C 組とする．

A 組の 2 人の選び方は，${}_6\mathrm{C}_2$ 通りある．

残りの 4 人から B 組の 2 人の選び方は，${}_4\mathrm{C}_2$ 通りある．

A 組，B 組の人が決まれば，残りの C 組の 2 人は決まる．

よって，分け方の総数は，積の法則により

$${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 = \frac{6\cdot5}{2\cdot1} \times \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = 90 \text{ (通り)}$$

この分け方で，A，B，C の区別をなくすと同じ組が 3! 通りずつできる．

よって，分け方の総数は $\dfrac{90}{3!} = \dfrac{90}{6} = \boldsymbol{15}$ (通り)

(5) 条件を満たす点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする．

このとき，$\mathrm{AP} = \mathrm{BP}$ より $\mathrm{AP}^2 = \mathrm{BP}^2$ であるから

$$(x-1)^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-2)^2$$

これを整理して $\boldsymbol{x + y - 3 = 0}$

(6) 求める円は原点 O(0, 0) を通るので，その方程式を

$$x^2+y^2+lx+my=0$$

とする．

点 A(1, 0) を通るから　　$1^2+(-1)^2+l\cdot 1+m\cdot(-1)=0$

点 B(2, 2) を通るから　　$2^2+2^2+l\cdot 2+m\cdot 2=0$

整理すると　　$l-m=-2$，$l+m=-4$

これを解くと　　$l=-3$，$m=-1$

よって，求める円の方程式は　　$\boldsymbol{x^2+y^2-3x-y=0}$

(7) $A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(60^\circ+75^\circ)=45^\circ$

正弦定理により　　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

ゆえに　　$b\sin 45^\circ=4\sin 60^\circ$

$$b\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　　$b=2\sqrt{6}$

したがって　　$S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{6}\sin 75^\circ$

$$=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\boldsymbol{6+2\sqrt{3}}$$

2. (1) $\boldsymbol{f'(x)=3x^2-12x+9}$

(2) $f'(x)=9$ より

$$3x^2-12x+9=9 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ 4$$

このとき　$f(0)=-1$，　$f(4)=4^3-6\cdot 4^2+9\cdot 4-1=3$

ゆえに接線の傾きが 9 である点の座標は　　$(0,-1)$，$(4,\ 3)$

点 $(0,-1)$ における接線の方程式は

$$y-(-1)=9x \quad \text{すなわち} \quad y=9x-1$$

点 $(4,\ 3)$ における接線の方程式は

$$y-3=9(x-4) \quad \text{すなわち} \quad y=9x-33$$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y=9x-1,\ y=9x-33}$

(3) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$
$= 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ とすると

$x = 1,\ 3$

$f(x)$ の増減表は右のようになる．

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 3	↘	極小 -1	↗

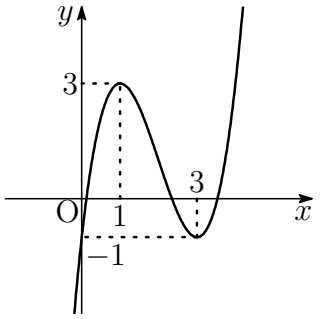
したがって，この関数は

$x = 1$ で極大値 3

$x = 3$ で極小値 -1

をとる．

グラフは，右の図のようになる．



3. (1) 連立方程式

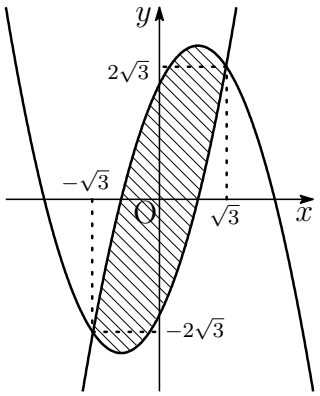
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases}$$

を解くと

$x = \pm\sqrt{3}$，$y = \pm 2\sqrt{3}$ (複号同順)

よって，求める共有点の座標は

$(\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$，$(-\sqrt{3}, -2\sqrt{3})$



グラフは，右の図のようになる．

(2) $-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ において　$-x^2 + 2x + 3 \geqq x^2 + 2x - 3$

したがって，求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{(-x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x - 3)\}\, dx \\ &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-2x^2 + 6)\, dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 6x \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \mathbf{8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

補足 $S = \displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (-2x^2 + 6)\, dx = -2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})\, dx$

$= -2 \left(-\dfrac{1}{6} \right) \{\sqrt{3} - (-\sqrt{3})\}^3 = \dfrac{1}{3}(2\sqrt{3})^3 = \mathbf{8\sqrt{3}}$

8.16　平成 16 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の各問に答えよ．

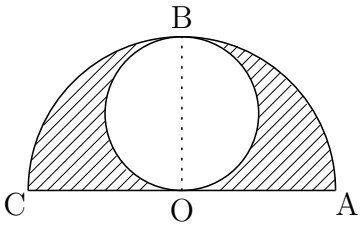
   (1) $(x+2y)^2-(x-2y)^2$

   (2) $2x^2-7x+6$ を因数分解せよ．また，$2x^2-7x+6 \geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ．

   (3) $\sin 15^\circ + \cos 75^\circ$ の値を求めよ．

   (4) $\log_5 50 + \log_5 10 - 2\log_5 2$ の値を求めよ．

   (5) 下の図において，おうぎ形 OABC は中心 O，半径 6 の半円であり，内側の円と点 O，B で接している．このとき，図の斜線部の面積，および，斜線部を直線 OB を軸として回転してできる立体の体積を求めよ．



2. 次の各問に答えよ．

   (1) 次の 2 つの方程式の表す図形を図示せよ．

   ① $y=2x+2$

   ② $x^2+y^2-2x-4y-20=0$

   (2) ① の表す図形と平行であり，② の表す図形と接する方程式を求めよ．

   (3) $y=2x+b$ と $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ の表す図形の共有点の個数は b の値によってどのように変わるか調べよ．

3. 次の各問に答えよ．

   (1) x^3 を微分の定義に従って微分せよ．

   (2) 関数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+11$ について，次の各問に答えよ．

   (a) $f(a)=0$ となる a を 1 つ求めよ．

   (b) $f(x)$ を因数分解せよ．

   (c) $f(x)=0$ となる解を 3 つ求めよ．

   (d) $f(x) \geqq 0$ となる x の範囲を求めよ．

   (e) $y=f(x)$ を微分せよ．

   (f) $y=f(x)$ の増減を調べ増減表にまとめよ．また，そのグラフをかけ．

4. 関数 $y = 3x^2 - 12x + 7$ について，次の各問に答えよ．

   (1) $y = 3x^2 - 12x + 7$ のグラフをかけ．

   (2) $3x^2 - 12x + 7 = 0$ の 2 つの解を α，β とするとき，次の値を求めよ．ただし，$\alpha < \beta$ とする．

      (a) $\alpha + \beta$

      (b) $\alpha\beta$

      (c) $\alpha^2 + \beta^2$

      (d) $\beta - \alpha$

      (e) $\beta^3 - \alpha^3$

   (3) $y = 3x^2 - 12x + 7$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

1. (1) $(x+2y)^2 - (x-2y)^2 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - (x^2 - 4xy + 4y^2)$
   $= \boldsymbol{8xy}$

   (2) $2x^2 - 7x + 6 = \boldsymbol{(x-2)(2x-3)}$
   $2x^2 - 7x + 6 \geqq 0$ の解は　$\boldsymbol{x \leqq \dfrac{3}{2},\ 2 \leqq x}$

   (3) $\sin 15^\circ + \cos 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}$

   (4) $\log_5 50 + \log_5 10 - 2\log_5 2 = \log_5 50 + \log_5 10 - \log_5 4$
   $= \log_5 \dfrac{50 \times 10}{4}$
   $= \log_5 125 = \log_5 5^3 = \boldsymbol{3}$

   (5) 斜線部の面積は

   $$\frac{1}{2}\pi\cdot 6^2 - \pi\cdot 3^2 = \boldsymbol{9\pi}$$

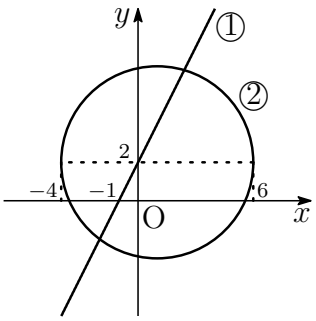
   OB を軸とする回転体の体積は

   $$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi\cdot 6^3 - \frac{4}{3}\pi\cdot 3^3 = \boldsymbol{108\pi}$$

2. (1) ① は，傾き 2，切片 2 の直線
② を変形すると

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5^2$$

ゆえに中心 $(1,\ 2)$，半径 5 の円



(2) 求める直線を $y=2x+k$ $(2x-y+k=0)$ とおくと，
円の中心 $(1,\ 2)$ からこの直線までの距離 d は

$$d=\frac{|\,2\cdot 1-2+k\,|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\,k\,|}{\sqrt{5}}$$

このとき，d は円の半径に等しいので

$$\frac{|\,k\,|}{\sqrt{5}}=5 \quad \text{これを解いて} \quad k=\pm 5\sqrt{5}$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y=2x+5\sqrt{5},\ \ y=2x-5\sqrt{5}}$$

(3) (2) の結果から

$\boldsymbol{-5\sqrt{5}<b<5\sqrt{5}}$ **のとき 2 個**
$\boldsymbol{b=\pm 5\sqrt{5}}$ **のとき 1 個**
$\boldsymbol{b<-5\sqrt{5},\ 5\sqrt{5}<b}$ **のとき 0 個**

3. (1) $f(x)=x^3$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2 \end{aligned}$$

(2) (a) $f(1)=1^3-3\cdot1^2-9\cdot1+11=0$ よって $\boldsymbol{a=1}$

(b) (a) の結果から，$f(x)$ は $x-1$ を因数にもつので

$$\begin{array}{r|l} & x^2\ -2x\ -11 \\ \hline x-1 & x^3-3x^2\ -9x+11 \\ & x^3\ -x^2 \\ \hline & -2x^2\ -9x \\ & -2x^2\ +2x \\ \hline & -11x+11 \\ & -11x+11 \\ \hline & 0 \end{array}$$

この割り算から

$$\boldsymbol{f(x)=(x-1)(x^2-2x-11)}$$

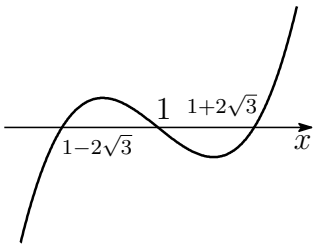
(c) $f(x)=0$ より

$$x-1=0 \quad \text{または} \quad x^2-2x-11=0$$

よって $\qquad \boldsymbol{x=1,\ x=1\pm2\sqrt{3}}$

(d) $f(x)\geqq 0$ となる x の範囲は

$$\boldsymbol{1-2\sqrt{3}\leqq x\leqq 1,\ 1+2\sqrt{3}\leqq x}$$

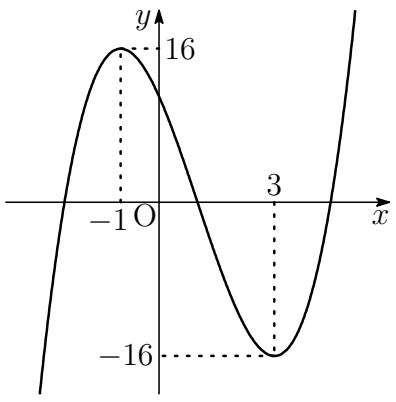


(e) $\boldsymbol{f'(x)=3x^2-6x-9}$

(f) $f'(x)=3x^2-6x-9$
$=3(x+1)(x-3)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 16	↘	極小 -16	↗

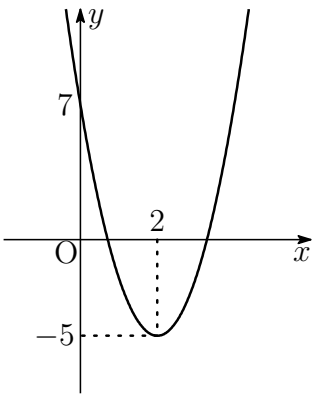
グラフは，右の図のようになる．



4. (1) $y = 3x^2 - 12x + 7$ の右辺を変形すると

$$y = 3(x-2)^2 - 5$$

頂点が $(2, -5)$ で下に凸の放物線である．
グラフは右の図のようになる．



(2) (a) 解と係数の関係により　$\alpha + \beta = -\dfrac{-12}{3} = \mathbf{4}$

(b) 解と係数の関係により　$\alpha\beta = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}$

(c) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 4^2 - 2 \times \dfrac{7}{3} = \dfrac{\mathbf{34}}{\mathbf{3}}$

(d) $\beta - \alpha > 0$ であるから

$$\beta - \alpha = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{4^2 - 4 \times \frac{7}{3}} = \frac{\mathbf{2\sqrt{15}}}{\mathbf{3}}$$

(e) (b),(c),(d) の結果から

$$\begin{aligned}\beta^3 - \alpha^3 &= (\beta-\alpha)\{(\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta\} \\ &= \frac{2\sqrt{15}}{3} \times \left(\frac{34}{3} + \frac{7}{3}\right) = \frac{\mathbf{82\sqrt{15}}}{\mathbf{9}}\end{aligned}$$

(3) 解と係数の関係により　$3x^2 - 12x + 7 = 3(x-\alpha)(x-\beta)$
よって，求める図形の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S &= -\int_{\alpha}^{\beta} (3x^2 - 12x + 7)\,dx \\ &= -3\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 \\ &= -3\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2\sqrt{15}}{3}\right)^3 = \frac{\mathbf{20\sqrt{15}}}{\mathbf{9}}\end{aligned}$$

8.17 平成 15 年度編入学試験 (80 分)

1. 次の設問に答えよ.

   (1) 2 次方程式 $3x^2 - 5x - 2 = 0$ の解を求めよ.

   (2) 2 次不等式 $3x^2 + 4x - 4 < 0$ を解け.

   (3) $90^\circ < \theta < 180^\circ$ なる θ に対して，$\sin\theta = \dfrac{2}{3}$ のとき $\cos\theta$ の値を求めよ.

   (4) 三角形 ABC において，AB$= 4$，BC$= 3\sqrt{3}$，$\angle$ABC$= 30^\circ$ とする．このとき，辺 AC の長さを求めよ.

   (5) $\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として，$\log_{10} 18$ の値を求めよ.

2. 次の設問に答えよ.

   (1) 中心が C$(1,\ 1)$ で半径 5 の円の方程式を求めよ.

   (2) 原点 O と中心 C$(1,\ 1)$ を通る直線の式を求めよ.

   (3) (1) の円と (2) の直線との交点の座標を求めよ.

   (4) (2) の直線に平行で，(1) の円に接する直線の方程式を求めよ.

3. 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$ について，以下の設問に答えよ.

   (1) $f(-1) = 0$ になることを示し，$f(x)$ を因数分解せよ．さらに $f(x) = 0$ となる x の値を求めよ.

   (2) 導関数 $f'(x)$ を求めよ.

   (3) 増減表をつくり，曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ.

4. (1) 次の 2 つの式のグラフの概形をかけ.
   (イ) $y = -2x^2 - 4x + 1$
   (ロ) $4x - 3y - 5 = 0$

   (2) (イ),(ロ) の交点の座標を求めよ.

   (3) (イ),(ロ) のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ.

解答例

1. (1) 左辺を因数分解すると　$(x-2)(3x+1)=0$

   よって　　$\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{3},\ 2}$

   (2) 左辺を因数分解すると　$(x+2)(3x-2)<0$

   よって　　$\boldsymbol{-2<x<\dfrac{2}{3}}$

   (3) $90^\circ<\theta<180^\circ$ のとき　$\cos\theta<0$

   よって　　$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2}=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{5}}{3}}$

   (4) $c=4$，$a=3\sqrt{3}$，$B=30^\circ$ であるから，余弦定理により，AC の長さ b は

   $$\begin{aligned} b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ &=4^2+(3\sqrt{3})^2-2\cdot4\cdot3\sqrt{3}\cos30^\circ\\ &=16+27-2\cdot4\cdot3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\ &=7 \end{aligned}$$

   $b>0$ であるから　$b=\sqrt{7}$　すなわち　$\boldsymbol{AC=\sqrt{7}}$

   (5) $\log_{10}18=\log_{10}2\cdot3^2=\log_{10}2+2\log_{10}3$

   $=0.3010+2\times0.4771=\boldsymbol{1.2552}$

2. (1) $\boldsymbol{(x-1)^2+(y-1)^2=25}$

   (2) $\boldsymbol{y=x}$

   (3) 連立方程式

   $$\begin{cases} (x-1)^2+(y-1)^2=25 & \cdots① \\ y=x & \cdots② \end{cases}$$

   について，② を ① に代入すると

   $$(x-1)^2+(x-1)^2=25$$

   ゆえに　　$(x-1)^2=\dfrac{25}{2}$　よって　$x-1=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

   ②より　　$x=1\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$，$y=1\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$　(複号同順)

   交点の座標は　$\boldsymbol{\left(1+\dfrac{5}{2}\sqrt{2},\ 1+\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\right)},\quad \left(1-\dfrac{5}{2}\sqrt{2},\ 1-\dfrac{5}{2}\sqrt{2}\right)$

(4) 求める直線を $y = x + k$ $(x - y + k = 0)$ とおくと，
円の中心 $(1,\ 1)$ からこの直線までの距離 d は

$$d = \frac{|\,1 - 1 + k\,|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{|\,k\,|}{\sqrt{2}}$$

このとき，d は円の半径に等しいので

$$\frac{|\,k\,|}{\sqrt{2}} = 5 \quad \text{これを解いて} \quad k = \pm 5\sqrt{2}$$

よって，求める接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = x + 5\sqrt{2},\ \ y = x - 5\sqrt{2}}$$

3. (1) $f(-1) = 2(-1)^3 - 3\cdot(-1)^2 - 12\cdot(-1) - 7 = 0$
よって，$f(x)$ は $x + 1$ を因数にもち

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+1)(2x^2 - 5x - 7) \\ &= (x+1)^2(2x - 7) \end{aligned}$$

$f(x) = 0$ から

$$x + 1 = 0 \quad \text{または} \quad 2x - 7 = 0$$

したがって　　$\boldsymbol{x = -1,\ \dfrac{7}{2}}$

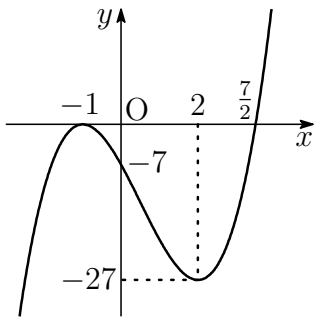
$$\begin{array}{r} 2x^2\ -5x\ \ -7 \\ \hline x+1\,)\,2x^3 -3x^2 -12x -7 \\ \underline{\ 2x^3 +2x^2\ \ \ \ \ } \\ \quad -5x^2 -12x \\ \quad \underline{-5x^2\ -5x\ \ } \\ \quad\ \ -7x -7 \\ \quad\ \ \underline{-7x -7} \\ \quad\ \ \ \ 0 \end{array}$$

(2) $\boldsymbol{f'(x) = 6x^2 - 6x - 12}$

(3) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$
したがって，増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 0	↘	極小 -27	↗

よって，グラフは右の図のようになる．



4. (1) $y=-2x^2-4x+1$ の右辺を変形すると

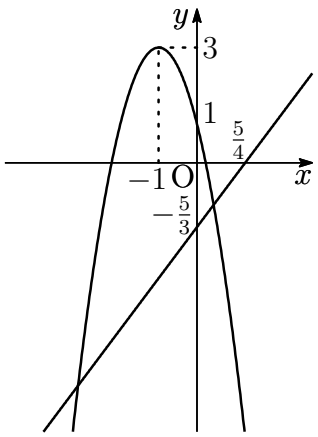
$$y=-2(x+1)^2+3$$

これは，頂点が $(-1,\ 3)$ で上に凸の放物線

$4x-3y-5=0$ を変形すると

$$y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

これは，傾きが $\dfrac{4}{3}$，切片が $-\dfrac{5}{3}$ の直線



(2)　　$y=-2x^2-4x+1 \quad \cdots ①$

(ロ) から　　$y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3} \quad \cdots ②$

①，② から y を消去して

$$2x^2+\frac{16}{3}x-\frac{8}{3}=0 \quad \cdots ③$$

整理すると　　$3x^2+8x-4=0$

これを解いて　$x=\dfrac{-4\pm 2\sqrt{7}}{3}$

これを ② に代入して　$y=\dfrac{-31\pm 8\sqrt{7}}{9}$

交点は　$\left(\dfrac{\boldsymbol{-4+2\sqrt{7}}}{\boldsymbol{3}},\ \dfrac{\boldsymbol{-31+8\sqrt{7}}}{\boldsymbol{9}}\right),\quad \left(\dfrac{\boldsymbol{-4-2\sqrt{7}}}{\boldsymbol{3}},\ \dfrac{\boldsymbol{-31-8\sqrt{7}}}{\boldsymbol{9}}\right)$

(3) (2) で求めた 2 つの交点の x 座標を

$$\alpha = \frac{-4-2\sqrt{7}}{3},\quad \beta = \frac{-4+2\sqrt{7}}{3}$$

とすると，③ から

$$2x^2+\frac{16}{3}x-\frac{8}{3} = 2(x-\alpha)(x-\beta)$$

したがって，求める面積 S は，上式に注意して

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta}\left\{(-2x^2-4x+1)-\left(\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}\right)\right\}\\
&= \int_{\alpha}^{\beta}\left(-2x^2-\frac{16}{3}x+\frac{8}{3}\right)dx\\
&= -2\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\
&= -2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3\\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{-4+2\sqrt{7}}{3}-\frac{-4-2\sqrt{7}}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{4\sqrt{7}}{3}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{448}{81}\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

第 9 章　県立技術短期大学校 (数学)

9.1　令和 2 年度推薦前期試験 (90 分)

［1］(1) $(x+2y)(x-2y)(x^2+y^2)$ を展開したとき，y^4 の係数は［ア］，x^2y^2 の係数は［イ］である．

(2) 2 次方程式 $x^2-mx+m=0$ が 0 でない重解をもつとき，定数 m の値は［ウ］であり，重解は $x=$［エ］である．

(3) a は正の実数とする．2 次関数 $y=x^2+2ax-2$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値と最小値の差が 9 である．このとき，$a=$［オ］，最大値は［カ］である．

(4) △ABC において，$\angle \mathrm{C}=60^\circ$，$\mathrm{AC}=\sqrt{2}$，その外接円の半径が 1 のとき，$\mathrm{AB}=$［キ］，$\mathrm{BC}=$［ク］である．

(5) 5 個のデータ 3, 5, 4, 1, 7 の平均値は［ケ］，標準偏差は［コ］である．

［2］(1) $A=\{x \mid a \leqq x \leqq b,\ x \text{ は実数}\}$，$B=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 2,\ x \text{ は実数}\}$ とする．

$$A \cap B=\{x \mid 1 \leqq x \leqq 2,\ x \text{ は実数}\}, \quad A \cup B=\{x \mid 0 \leqq x \leqq 3,\ x \text{ は実数}\}$$

(2) 不等式 $x^2-2|x|-3 \leqq 0$ の解は［ス］$\leqq x \leqq$［セ］である．

(3) 放物線 $y=x^2+ax+b$ は点 $(1,\ 1)$ を通り，その頂点は x 軸上にある．このとき，定数 a，b の値は $a=$［ソ］，$b=$［タ］である．ただし，$a \neq 0$ とする．

(4) △ABC において $\mathrm{AB}=7$，$\mathrm{BC}=13$，$\mathrm{AC}=8$ であるとき $\angle \mathrm{A}=$［チ］$^\circ$ であり，△ABC の外接円の半径は［ツ］である．

(5) 4 個のデータ 4, 6, a, 20 の中央値を M，四分位範囲を Q とする．ただし，$6<a<20$ である．$Q=\dfrac{5}{4}M$ であるとき，$a=$［テ］，$M=$［ト］である．

［3］$P=5x^2+12y^2+12xy+8x+10$，$A=x+2$，$B=x+2y$ とする．P を A，B を用いて表すと $P=2A^2+3B^2+$［ナ］である．x，y が実数全体を動くとき P の最小値は $(x,\ y)=$［ニ］のときにとる．x，y のとる値は整数とする．このとき $P=14$ を満たす x, y の値は［ヌ］，［ネ］である．

［4］△ABC において，AB = 3，AC = 5 とする．∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とし，△ABD の面積を S_1，△ADC の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_2}{S_1} =$ ノ である．∠B = 90° であるとき，$S_1 =$ ハ であり，AD = ヒ，$\cos\angle\mathrm{BAD} =$ フ である．

解答例

［**1**］(1) $(x+2y)(x-2y)(x^2+y^2)=(x^2-4y^2)(x^2+y^2)=x^4\boldsymbol{-3}x^2y^2\boldsymbol{-4}y^4$

(答) ア. -4　イ. -3

(2) 2 次方程式 $x^2-mx+m=0$ が重解をもつから，係数について

$$(-m)^2-4\cdot1\cdot m=m(m-4)=0 \quad \text{ゆえに} \quad m=0,\ 4$$

このとき，重解は　$x=-\dfrac{-m}{2}=\dfrac{m}{2}$

0 でない重解をもつから，$m\neq0$ により

$$\boldsymbol{m=4}, \quad \text{重解は} \quad \frac{m}{2}=\frac{4}{2}=\boldsymbol{2}$$

(答) ウ. 4　エ. 2

(3) $f(x)=x^2+2ax-2$ とおくと　$f(x)=(x+a)^2-a^2-2$

$$f(-a)=-a^2-2, \quad f(-2)=-4a+2, \quad f(2)=4a+2$$

$-2\leqq x\leqq2$ における $f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．

(i) $-a\leqq-2$，すなわち，$a\geqq2$ のとき
$M=f(2)$，$m=f(-2)$ より，$f(2)-f(-2)=9$ であるから

$$(4a+2)-(-4a+2)=9 \quad \text{これを解いて} \quad a=\frac{9}{8}$$

これは，$a\geqq2$ に反するから不適．

(ii) $-2\leqq-a\leqq0$，すなわち，$0\leqq a\leqq2$ のとき
$M=f(2)$，$m=f(-a)$ より，$f(2)-f(-a)=9$ であるから

$$(4a+2)-(-a^2-2)=9 \quad \text{ゆえに} \quad (a+5)(a-1)=0$$

$0\leqq a\leqq2$ に注意して　$\boldsymbol{a=1}$　このとき　$M=4\cdot1+2=\boldsymbol{6}$

(答) オ. 1　カ. 6

(4) $b=\sqrt{2}$，$C=60^\circ$，$R=1$

正弦定理により　$\dfrac{c}{\sin 60^\circ}=2\cdot 1$　ゆえに　$c=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}=2\cdot 1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin B=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$b<c$ より，$B<C$ であるから　$B=45^\circ$

($C=60^\circ$ より，$B<120^\circ$ であるから)

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} a =& b\cos C+c\cos B=\sqrt{2}\cos 60^\circ+\sqrt{3}\cos 45^\circ \\ =& \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{2}+\sqrt{6}}}{\boldsymbol{2}} \end{aligned}$$

(答) キ. $\sqrt{3}$　ク. $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

第 1 余弦定理

$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$

なお，余弦定理とは，第 2 余弦定理のことである．

(5) 平均値は　$\dfrac{3+5+4+1+7}{4}=\boldsymbol{4}$

したがって，標準偏差 s は

$$s^2=\frac{1}{5}\{(3-4)^2+(5-4)^2+(4-4)^2+(1-4)^2+(7-4)^2\}=4$$

よって　　$s=\boldsymbol{2}$

(答) ケ. 4　コ. 2

[2] (1) A, B, $A\cap B$ より　$\boldsymbol{a=1}$

$3\notin B$，$3\in A\cup B$ より，$3\in A$ であるから　$\boldsymbol{b=3}$

(答) サ. 1　シ. 3

(2) 不等式 $x^2-2|x|-3\leqq 0$ において，$x^2=|x|^2$ であるから

$$|x|^2-2|x|-3\leqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad (|x|+1)(|x|-3)\leqq 0$$

$|x|+1>0$ であるから　$|x|-3\leqq 0$　ゆえに　$|x|\leqq 3$

これを解いて　　$\boldsymbol{-3\leqq x\leqq 3}$

(答) ス. −3　セ. 3

(3) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ は点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$1 = 1^2 + a\cdot 1 + b \quad \text{ゆえに} \quad b = -a \quad \cdots ①$$

放物線 $y = x^2 + ax + b$ は x 軸に接するから $\quad a^2 - 4b = 0 \quad \cdots ②$

① を ② に代入すると

$$a^2 + 4a = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a+4) = 0$$

$a \neq 0$ に注意して $\quad \boldsymbol{a = -4} \quad$ ① より $\quad \boldsymbol{b = 4}$

(答) ソ. -4 タ. 4

(4) $a = 13$，$b = 8$，$c = 7$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 7^2 - 13^2}{2\cdot 8\cdot 7} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{A = 120^\circ}$$

外接円の半径を R とすると，正弦定理により $\quad 2R = \dfrac{a}{\sin A}$

ゆえに $\quad R = \dfrac{a}{2R\sin A} = \dfrac{13}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{\dfrac{13\sqrt{3}}{3}}$

(答) チ. 45 ツ. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) 4 個のデータ $4,\ 6,\ a,\ 20$ について $(6 < a < 20)$

$$M = \text{中央値} = \frac{a+6}{2}$$

$$\text{第 1 四分位数} = \frac{4+6}{2} = 5, \quad \text{第 3 四分位数} = \frac{a+20}{2}$$

ゆえに $\quad Q = \text{四分位範囲} = \dfrac{a+20}{2} - 5 = \dfrac{a+10}{2}$

$Q = \dfrac{5}{4}M$ より $\quad \dfrac{a+10}{2} = \dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{a+6}{2}$

したがって $\quad 4(a+10) = 5(a+6) \quad$ これを解いて $\quad \boldsymbol{a = 10}$

よって $\quad M = \dfrac{10+6}{2} = \boldsymbol{8}$

(答) テ. 10 ト. 8

［**3**］$P = 5x^2 + 12y^2 + 12xy + 8x + 10$，$A = x + 2$，$B = x + 2y$ より

$$\begin{aligned} P - 2A^2 - 3B^2 &= 5x^2 + 12y^2 + 12xy + 8x + 10 - 2(x+2)^2 - 3(x+2y)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

したがって　　$P = 2A^2 + 3B^2 + \mathbf{2}$

P が最小となるとき，$A = B = 0$ であるから

$$x + 2 = x + 2y = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = -2,\ y = 1}$$

x，y が整数のとき，A，B は整数であるから，$P = 14$ のとき

$$2A^2 + 3B^2 = 12 \quad \text{ゆえに} \quad A = 0,\ \ B = \pm 2$$

したがって　$x + 2 = 0$，$x + 2y = \pm 2$　ゆえに　$x = -2,\ y = 1 \pm 1$

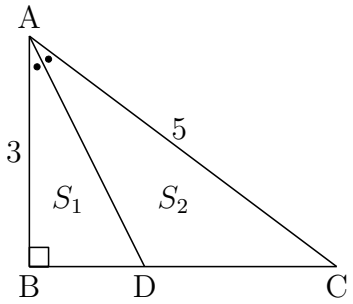
よって　　$\boldsymbol{(x,\ y) = (-2,\ 2),\ (-2,\ 0)}$

(答) ナ. 2　ニ. $(-2,\ 1)$　ヌ. ネ. $(-2,\ 2)$, $(-2,\ 0)$

［**4**］線分 AD は，∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 3 : 5 \quad \text{よって} \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD}} = \boldsymbol{\frac{5}{3}}$$

右の図から



$$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} \times \frac{3}{3+5} = 4 \times \frac{3}{8} = \frac{3}{2},$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AB} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 3 = \boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

よって　$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{5}}{2}}$

$$\cos\angle\mathrm{BAD} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}} = 3 \div \frac{3\sqrt{5}}{2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$$

(答) ノ. $\dfrac{5}{3}$　ハ. $\dfrac{9}{4}$　ヒ. $\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$　フ. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

9.2 令和２年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $4a^2+4ab+b^2-4c^2$ を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 1 以上 2020 以下の自然数の中に，12 の倍数は $\boxed{\text{ウ}}$ 個，「4 または 6」の倍数は $\boxed{\text{エ}}$ 個ある．

(3) 関数 $f(x)=|x-1|-|x+2|$ の最大値は $\boxed{\text{オ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(4) △ABC において，AB = 4，BC = 6，CA = 5 のとき，$\sin\angle \mathrm{A} = \boxed{\text{キ}}$ であり，この三角形に内接する円の直径は $\boxed{\text{ク}}$ である．

(5) データ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 の四分位範囲は $\boxed{\text{ケ}}$，分散は $\boxed{\text{コ}}$ である．

[2] (1) $0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする．$\sin\theta = \dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ のとき，$\cos^2\theta = \dfrac{\boxed{\text{サ}}}{15}$ であり，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{15}}$ である．ただし，$\boxed{\text{シ}}$ は $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (a, b は実数) の形で表せ．

(2) 放物線 $y=x^2+ax+b$ について，y 軸との交点の y 座標が -2 で，x 軸との 2 つの交点の x 座標の差が 4 のとき，$a = \boxed{\text{ス}}$，$b = \boxed{\text{セ}}$ である．ただし，$a>0$ とする．

(3) 2 次関数 $y=-x^2+ax+b$ の最大値は 7 であり，$x \leqq 0$ における最大値は 3 である．このとき，定数 a，b の値は $a = \boxed{\text{ソ}}$，$b = \boxed{\text{タ}}$ である．

(4) △ABC において，$\angle \mathrm{B} = 30^\circ$，$\angle \mathrm{C} = 90^\circ$，AC = 2 とする．辺 BC 上に点 D を $\angle \mathrm{ADC} = 45^\circ$ となるようにとる．このとき BD = $\boxed{\text{チ}}$ である，点 D から辺 AB に垂線 DE を下ろすとき，DE = $\boxed{\text{ツ}}$ である．

(5) 右の表は 5 人の生徒が短距離と長距離の 2 つの距離で競争したときの順位のデータである．2 つの順位の和が最も小さい生徒は $\boxed{\text{テ}}$ である．また，2 つの順位の相関係数は $\boxed{\text{ト}}$ となる．

生徒	A	B	C	D	E
短距離	1	2	3	4	5
長距離	3	1	4	2	5

[3] 実数 a，b に対して $f(x)=x^2-x+2$，$g(x)=x^2-ax+1$，$h(x)=bx^2-2x$ とおく．まず，すべての実数 x に対して $g(x) \leqq f(x)$ となる a の値は $\boxed{\text{ナ}}$ であり，$0 \leqq x \leqq 1$ をみたす実数 x に対して $g(x) \leqq f(x)$ となる a の値の範囲は $a \geqq \boxed{\text{ニ}}$ である．次に，すべての実数 x に対して $h(x) \leqq f(x)$ となる b の範囲は $b \leqq \boxed{\text{ヌ}}$ である．また，関数 $h(x)$ の最大値が存在して，その最大値が関数 $f(x)$ の最小値以下となる b の範囲は $b \leqq \boxed{\text{ネ}}$ である．

［**4**］1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD の辺 BC 上に点 E をとる．まず，AE の長さが最小となるように点 E をとる．このとき，AE = ノ，$\cos\angle\mathrm{AED}$ = ハ である．次に，$\cos\angle\mathrm{AED} = \dfrac{2}{5}$ となるように点 E をとる．このとき，AE = ヒ であり，△AED の面積は フ となる．

解答例

［**1**］(1) $4a^2+4ab+b^2-4c^2=(2a+b)^2-(2c)^2$
$$=\boldsymbol{(2a+b+2c)(2a+b-2c)}$$
(答) ア. イ. $2a+b+2c,\ \ 2a+b-2c$

(2) 1 以上 2020 以下の自然数の集合を U とし，U の部分集合で，4 の倍数の集合を A，6 の倍数の集合を B とすると，12 の倍数の集合は $A\cap B$，4 または 6 の倍数の集合は $A\cup b$ である．集合 X の要素の個数を $n(X)$ とおくと

$$n(A)=505,\quad n(B)=336,\quad n(A\cap B)=\boldsymbol{168}$$

ゆえに　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=505+336-168=\boldsymbol{673}$

(答) ウ. 168　エ. 673

(3)　$|x-1|=\begin{cases}-x+1 & (x\leqq 1)\\ x-1 & (x\geqq 1)\end{cases}$，　$|x+2|=\begin{cases}-x-2 & (x\leqq -2)\\ x+2 & (x\geqq -2)\end{cases}$

(i) $x\leqq -2$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=|x-1|-|x+2|\\&=(-x+1)-(-x-2)=3\end{aligned}$$

(ii) $-2\leqq x\leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=|x-1|-|x+2|\\&=(-x+1)-(x+2)=-2x-1\end{aligned}$$

(iii) $1\leqq x$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=|x-1|-|x+2|\\&=(x-1)-(x+2)=-3\end{aligned}$$

(i)〜(iii) より，$f(x)$ の最大値は $\boldsymbol{3}$，最小値は $\boldsymbol{-3}$

(答) オ. 3　カ. -3

(4) $a=6$，$b=5$，$c=4$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\cdot5\cdot4}=\frac{1}{8}$$

したがって　　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\dfrac{1}{64}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{7}}{8}}$

△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\cdot\frac{3\sqrt{7}}{8}=\frac{15}{4}\sqrt{7}$$

三角形 ABC の内接円の半径を r，$2s=a+b+c$ とすると　$s=\dfrac{15}{2}$

$S=rs$ であるから　$\dfrac{15}{4}\sqrt{7}=r\cdot\dfrac{15}{2}$　ゆえに　$2r=\boldsymbol{\sqrt{7}}$

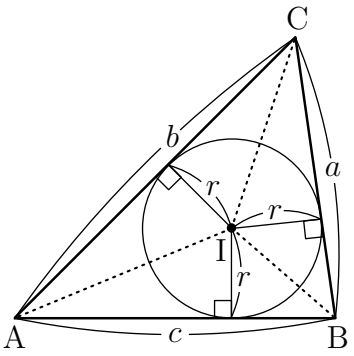
(答) キ. $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$　ク. $\sqrt{7}$

解説 三角形 ABC の内接円の中心を I，内接円の半径を r，$2s=a+b+c$ とする．このとき，△IBC, △ICA, △IAB の面積はそれぞれ

$$\frac{1}{2}ar,\quad \frac{1}{2}br,\quad \frac{1}{2}cr$$

であり，三角形 ABC の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr\\&=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs\end{aligned}$$



別解 $a=6$，$b=5$，$c=4$

$2s=a+b+c$ とおくと　$s=\dfrac{15}{2}$

△ABC の面積 S は，ヘロンの公式により

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\\&=\sqrt{\frac{15}{2}\left(\frac{15}{2}-6\right)\left(\frac{15}{2}-5\right)\left(\frac{15}{2}-4\right)}=\frac{15}{4}\sqrt{7}\end{aligned}$$

(5) 7 個のデータ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 について

第 1 四分位数 2, 第 3 四分位数 6, 四分位範囲は $6-2=\mathbf{4}$

平均値 $=\dfrac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$ より，分散 s^2 は

$$s^2=\frac{1}{7}\{(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2 \\ +(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2\}=\mathbf{4}$$

(答) ケ. 4 コ. 4

[2] (1) $\sin\theta=\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}$ より

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right)^2=\frac{8+4\sqrt{3}}{15}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ より，$\cos\theta\geqq 0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{15}}=\frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}}{\sqrt{15}}=\frac{\boldsymbol{\sqrt{6}+\sqrt{2}}}{\boldsymbol{\sqrt{15}}}$$

(答) サ. $8+4\sqrt{2}$ シ. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

(2) $y=x^2+ax+b$ のグラフと y 軸との交点 $(0,-2)$ を通るから $\boldsymbol{b=-2}$

$y=x^2+ax-2$ のグラフと x 軸との交点の x 座標は $x=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+8}}{2}$

これらの x 座標の差が 4 であるから

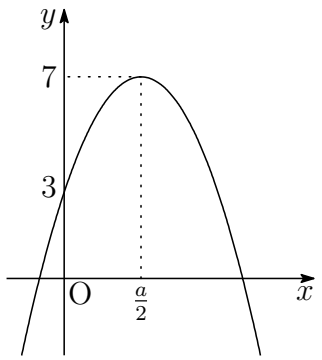
$$\frac{-a+\sqrt{a^2+8}}{2}-\frac{-a-\sqrt{a^2+8}}{2}=4 \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{a^2+8}=4$$

したがって $a^2+8=16$ $a>0$ に注意して $\boldsymbol{a=2\sqrt{2}}$

(答) ス. $2\sqrt{2}$ セ. -2

(3)　$y = -x^2 + ax + b$

$$= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + b$$



最大値 7 をとるから　$\dfrac{a^2}{4} + b = 7$　$\cdots$①

$x \leqq 0$ における最大値が 3 であるから

$\dfrac{a}{2} > 0$　ゆえに　$a > 0$

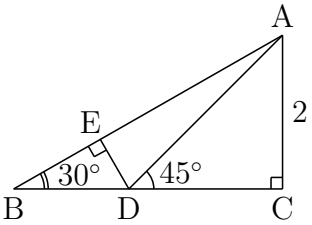
$x = 0$ で $y = 3$ であるから　$\boldsymbol{b = 3}$　$\cdots$②

② を ① に代入すると　$\dfrac{a^2}{4} + 3 = 7$　ゆえに　$a^2 = 16$

$a > 0$ であることに注意して　$\boldsymbol{a = 4}$

(答) ソ. 4　タ. 3

(4) 右の図から　DC = AC = 2



$\tan 30^\circ = \dfrac{2}{\mathrm{BC}}$　ゆえに　$\mathrm{BC} = 2\sqrt{3}$

したがって　$\mathrm{BD} = \mathrm{BC} - \mathrm{DC} = \boldsymbol{2\sqrt{2} - 2}$

また　$\mathrm{DE} = \mathrm{BD}\sin 30^\circ = (2\sqrt{3} - 2)\cdot\dfrac{1}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3} - 1}$

(答) チ. $2\sqrt{3} - 2$　ツ. $\sqrt{3} - 1$

(5) 短距離，長距離の順位のデータをそれぞれ x，y とし，これらの分散 ${s_x}^2$，${s_y}^2$，共分散 s_{xy} について

$${s_x}^2 = {s_y}^2 = \frac{1}{5}\{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\} = 2$$

$$s_{xy} = \frac{1}{5}\{(1-3)(3-3) + (2-3)(1-3) + (3-3)(4-3) + (4-3)(2-3) + (5-3)(5-3)\} = 1$$

$s_x = s_y = \sqrt{2}$，$s_{xy} = 1$ より，相関係数 r は

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \boldsymbol{0.5}$$

(答) テ. B　ト. 0.5

[3] $f(x)=x^2-x+2$，$g(x)=x^2-ax+1$，$h(x)=bx^2-2x$

$$f(x)-g(x)=(x^2-x+2)-(x^2-ax+1)=(a-1)x+1 \qquad \cdots ①$$
$$f(x)-h(x)=(x^2-x+2)-(bx^2-2x)=(1-b)x^2+x+2 \qquad \cdots ②$$

すべての実数 x に対して，$g(x) \leqq f(x)$，すなわち，$f(x)-g(x) \geqq 0$ のとき

① より　$a-1=0$　ゆえに　$\boldsymbol{a=1}$

$0 \leqq x \leqq 1$ に対して，$g(x) \leqq f(x)$，すなわち，$f(x)-g(x) \geqq 0$ のとき

$(a-1)\cdot 0+1 \geqq 0$　かつ　$(a-1)\cdot 1+1 \geqq 0$　よって　$\boldsymbol{a \geqq 0}$

すべての実数 x に対して，$h(x) \leqq f(x)$，すなわち，$f(x)-h(x) \geqq 0$ のとき，② より

$1-b>0$　かつ　$1^2-4(1-b)\cdot 2 \leqq 0$　よって　$\boldsymbol{b \leqq \dfrac{7}{8}}$

関数 $h(x)$ の最大値が存在するから　$b<0$

$$h(x)=bx^2-2x=b\left(x^2-\frac{2}{b}x\right)=b\left(x-\frac{1}{b}\right)^2-\frac{1}{b}$$
$$f(x)=x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}$$

$h(x)$ の最大値 $-\dfrac{1}{b}$ が $f(x)$ の最小値 $\dfrac{7}{4}$ 以下であるから

$-\dfrac{1}{b} \leqq \dfrac{7}{4}$　両辺に $b<0$ を掛けると　$-1 \geqq \dfrac{7}{4}b$　よって　$\boldsymbol{b \leqq -\dfrac{4}{7}}$

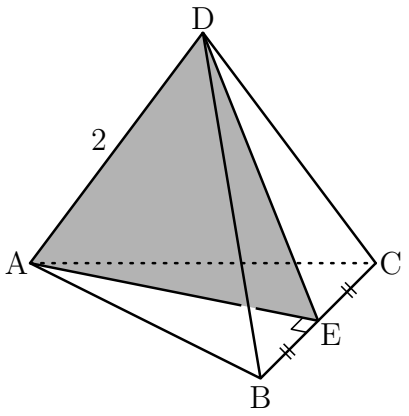
(答) ナ. 1　ニ. 0　ヌ. $\dfrac{7}{8}$　ネ. $-\dfrac{4}{7}$

［**4**］右の図の直角三角形 ABE に着目すると，

AB = 2，∠B = 60° より　$\mathbf{AE = \sqrt{3}}$

△AED に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle \mathrm{AED} = \frac{\mathrm{AE}^2 + \mathrm{DE}^2 - \mathrm{AD}^2}{2\mathrm{AE}\cdot\mathrm{DE}} = \frac{(\sqrt{3})^3 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2\sqrt{3}\sqrt{3}} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$



AE = DE = x とおき，$\cos\angle \mathrm{AED} = \dfrac{2}{5}$ を △AED に余弦定理を適用すると

$$\frac{2}{5} = \frac{x^2 + x^2 - 2^2}{2x^2}$$　これを解いて　$x = \mathbf{\frac{\sqrt{30}}{3}}$

また，$\sin\angle \mathrm{AED} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$ より，△AED の面積は

$$\frac{1}{2}x^2 \sin\angle \mathrm{AED} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{\sqrt{21}}{5} = \mathbf{\frac{\sqrt{21}}{3}}$$

(答) ノ. $\sqrt{3}$　ハ. $\dfrac{1}{3}$　ヒ. $\dfrac{\sqrt{30}}{3}$　フ. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$

9.3 令和 2 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) a を実数とする．3 次方程式 $x^3 - 4x^2 + 7x + a = 0$ の 1 つの解が $x = 2$ であるとき，他の解は $x =$ ア, イ である．

(2) 原点を通り，直線 $x + 2y = 4$ に垂直な直線の方程式は $y =$ ウ である．直線 $x + 2y = 4$ に関して，原点と対称な点の座標は エ である．

(3) 関数 $\sin^2 x + \sqrt{3}\cos x + 1$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ は，$x =$ オ のとき最大値 カ をとる．

(4) 相加平均と相乗平均の大小関係より，$\dfrac{2^x}{8} + 2^{1-x}$ は $x =$ キ のとき最小値 ク をとる．

(5) 曲線 $y = x^2 + 2x + 1$ 上の点 $(0,\ 1)$ における接線の方程式は $y =$ ケ である．さらに，この直線が曲線 $y = -x^2 + 4x + a$ の接線であるとき，$a =$ コ である．

[2] (1) 整式 $2x(x+2)(x-1)$ を $(x-2)(x+1)$ で割ったときの余りは サ $x +$ シ である．

(2) 2 点 $(0,\ 7)$，$(4,\ 1)$ を通る円の中心が直線 $y = x + 2$ 上にあるとき，円の中心の座標は ス であり，円の半径は セ である．

(3) $0° < \theta < 360°$ のとき，$\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta > \sqrt{2}$ を満たす θ の範囲は ソ $° < \theta <$ タ $°$ である．

(4) 次の方程式を満たす正の実数 $a,\ b$ の値は $a =$ チ，$b =$ ツ である．

$$2\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{a}{2} = 1, \quad (\log_2 3)(\log_7 8)(\log_9 b) = \frac{3}{2}$$

(5) $\displaystyle\int_1^3 (3x^2 - 4x + 1)\,dx$ の値を S とすると，$S =$ テ である．
$\displaystyle\int_1^a (3x^2 - 4x + 1)\,dx = \frac{S}{6}$ を満たす定数 a の値は $a =$ ト である．

[3] $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする．円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線と x 軸の交点を A とする．A の座標は ナ である．また，円 $x^2 + y^2 = 1$ 上を点 B が動くとき，線分 AB を 1 : 2 に内分する点 C の軌跡は，点 ニ を中心とする半径 ヌ の円となる．C の軌跡と円 $x^2 + y^2 = 1$ が外接するのは，$\theta =$ ネ のときである．

［**4**］p を正の定数とする．関数 $f(x)$ が $f'(x) = 3x^2 - 3p^2$，$f(0) = p^2$ を満たすとき，$f(x) =$ ノ である．$f(x)$ の極大値が 20 であるとき，$p =$ ハ である．このとき，区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最小値は ヒ，最大値は フ である．

解答例

［**1**］(1) $x=2$ は 3 次方程式 $x^3-4x^2+7x+a=0$ の解であるから

$$2^3-4\cdot 2^2+7\cdot 2+a=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=-6$$

3 次方程式 $x^3-4x^2+7x-6=0$ は $\quad (x-2)(x^2-2x+3)=0$
求める他の解は，方程式 $x^2-2x+3=0$ を解いて $\quad \boldsymbol{x=1\pm\sqrt{2}i}$

(答) ア. イ. $1+\sqrt{2}i,\ 1-\sqrt{2}i$

(2) 原点を通り，直線 $x+2y=4$ $\left(y=-\frac{1}{2}x+2\right)$ に垂直な直線は $\quad \boldsymbol{y=2x}$

直線 $x+2y=4$ と直線 $y=2x$ の交点を M とすると $\quad \mathrm{M}\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{15}\right)$

直線 $x+2y=4$ に関して原点 O と対称な点を $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，M は線分 OP の中点であるから

$$\frac{0+a}{2}=\frac{4}{5}, \quad \frac{0+b}{2}=\frac{8}{5} \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{8}{5},\ \ b=\frac{16}{5}$$

よって，直線 $x+2y=4$ に関して，原点と対称な点は $\quad \left(\boldsymbol{\frac{8}{5},\ \frac{16}{5}}\right)$

(答) ウ. $2x$ $\quad$ エ. $\left(\frac{8}{5},\ \frac{16}{5}\right)$

(3) $t=\cos x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ とすると $\quad -1\leqq t\leqq 1$

$$\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=(1-\cos^2 x)+\sqrt{3}x+1$$
$$=-t^2+\sqrt{3}t+2=-\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\boldsymbol{\frac{11}{4}}$$

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，すなわち，$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{11}{4}}$ をとる．

(答) オ. $\frac{\pi}{6}$ $\quad$ カ. $\frac{11}{4}$

(4) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\frac{2^x}{8}+2^{1-x}=2^{x-3}+2^{1-x}\geqq 2\sqrt{2^{x-3}\cdot 2^{1-x}}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \text{最小値 } \boldsymbol{1}$$

上式で等号が成立するとき

$$2^{x-3}=2^{1-x} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{x=2}$$

(答) キ. 2 $\quad$ ク. 1

(5) $y = x^2 + 2x + 1$ より　$y' = 2x + 2$　$x = 0$ のとき　$y' = 2$
求める接線は，点 $(0,\ 1)$ を通り，傾き 2 の直線であるから

$$y - 1 = 2(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 2x + 1}$$

この直線と曲線 $y = -x^2 + 4x + a$ から y を消去すると

$$2x + 1 = -x^2 + 4x + a \quad \text{整理すると} \quad x^2 - 2x + 1 - a = 0$$

このとき，上の第 2 式の判別式を D とすると

$$D/4 = (-1)^2 - 1\cdot(1 - a) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 0}$$

(答) ケ. $2x + 1$　コ. 0

[2] (1) $2x(x + 2)(x - 1) = 2x^3 + 2x^2 - 4x$，$(x - 2)(x + 1) = x^2 - x - 2$
したがって，上の第 1 式を第 2 式で割った余りは

$$\begin{array}{r} 2x \quad +4 \\ \hline x^2 - x - 2 \ \big)\ 2x^3 + 2x^2 - 4x \\ \underline{\ 2x^3 - 2x^2 - 4x\ } \\ 4x^2 \\ \underline{\ 4x^2 - 4x - 8\ } \\ 4x + 8 \end{array}$$

(答) サ. 4　シ. 8

(2) 2 点 A$(0,\ 7)$，B$(4,\ 1)$ とし，直線 $y = x + 2$ 上の中心 C を $(a,\ a + 2)$ とおく．$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$ であるから

$$a^2 + \{(a + 2) - 7\}^2 = (a - 4)^2 + \{(a + 2) - 1\}^2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

したがって，C$\boldsymbol{(2,\ 4)}$．半径は　$\mathrm{AC} = \sqrt{2^2 + (4 - 7)^2} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$

(答) ス. $(2,\ 4)$　セ. $\sqrt{13}$

(3) $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta = 2\sin(\theta + 30^\circ)$ より，不等式 $\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta > \sqrt{2}$ は

$$2\sin(\theta + 30^\circ) > \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin(\theta + 30^\circ) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0^\circ < \theta < 360^\circ$ より，$30^\circ < \theta + 30^\circ < 390^\circ$ であるから

$$45^\circ < \theta + 30^\circ < 135^\circ \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{15^\circ < \theta < 105^\circ}$$

(答) ソ. 15　タ. 105

(4) $2\log_2\dfrac{2}{3}+\log_2\dfrac{a}{2}=1$ より　$\log_2\dfrac{2a}{9}=1$　ゆえに　$\dfrac{2a}{9}=2$　よって　$\boldsymbol{a=9}$

$(\log_2 3)(\log_7 8)(\log_9 b)=\dfrac{3}{2}$ より

$$\frac{\log_7 3}{\log_7 2}\cdot\frac{\log_7 8}{\log_7 7}\cdot\frac{\log_7 b}{\log_7 9}=\frac{3}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\frac{\log_7 3}{\log_7 2}\cdot\frac{3\log_7 2}{1}\cdot\frac{\log_7 b}{2\log_7 3}=\frac{3}{2}$$

整理すると　$\log_7 b=1$　よって　$\boldsymbol{b=7}$

別解 積における真数の交換法則 $\log_a M\log_b N=\log_a N\log_b M$ を適用すると

$$\begin{aligned}\log_2 3\log_7 8\log_9 b&=\log_2 8\log_7 3\log_9 b=3\log_7 3\log_9 b\\&=3\log_7 b\log_9 3=\frac{3}{2}\log_7 b\end{aligned}$$

したがって　$\dfrac{3}{2}\log_7 b=\dfrac{3}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{b=7}$

(答) チ. 9　ツ. 7

(5) $S=\displaystyle\int_1^3(3x^2-4x+1)\,dx=\left[\,x^3-2x^2+x\,\right]_1^3=\mathbf{12}$

$$\int_1^a(3x^2-4x+1)\,dx=\left[\,x^3-2x^2+x\,\right]_1^a=a^3-2a^2+a$$

上式が $\dfrac{S}{6}=\dfrac{12}{6}=2$ であるから

$a^3-2a^2+a=2$　ゆえに　$(a-2)(a^2+1)=0$　よって　$\boldsymbol{a=2}$

(答) テ. 12　ト. 2

［**3**］$x^2+y^2=1$ 上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ における接線の方程式は

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

この直線と x 軸との共有点 A では，$y=0$ であるから

$$x\cos\theta=1 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{1}{\cos\theta}$$

よって，点 A の座標は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{1}{\cos\theta}},\ \mathbf{0}\right)$

点 B が $(1,\ 0)$ にあるとき，AB を $2:1$ に内分する点は　$\left(\dfrac{2}{3\cos\theta}+\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

点 B が $(-1,\ 0)$ にあるとき，AB を $2:1$ に内分する点は　$\left(\dfrac{2}{3\cos\theta}-\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

C の軌跡は上の 2 点を直径の両端とする円であるから

$$\text{中心}\left(\boldsymbol{\dfrac{2}{3\cos\theta}},\ \mathbf{0}\right),\quad \text{半径}\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$$

C の軌跡と円 $x^2+y^2=1$ が外接するとき，2 円の中心間の距離が，2 円の半径の和に等しいから

$$\frac{2}{3\cos\theta}=1+\frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \cos\theta=\frac{1}{2}$$

これを $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に注意して解くと　　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{3}}$

(答) ナ. $\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$　ニ. $\left(\dfrac{2}{3\cos\theta},\ 0\right)$　ヌ. $\dfrac{1}{3}$　ネ. $\dfrac{\pi}{3}$

［4］$f'(x)=3x^2-3p^2$ を $f(0)=p^2$ に注意して積分すると

$$\boldsymbol{f(x)=x^3-3p^2x+p^2}$$

$f'(x)=3(x+p)(x-p)$ であるから $(p>0)$，$f(-p)=20$ であるから

$$(-p)^3-3p^2(-p)+p^2=20 \quad \text{ゆえに} \quad (p-2)(2p^2+5p+10)=0$$

方程式 $2p^2+5p+10=0$ の判別式は　$D=5^2-4\cdot2\cdot10=-55<0$

p は実数であるから　　$\boldsymbol{p=2}$

$f(x)=x^3-12x+4$ より，$1\leqq x\leqq 3$ において

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-7	↘	-12	↗	-5

よって，最小値 $f(2)=\boldsymbol{-12}$，最大値 $f(3)=\boldsymbol{-5}$

(答) ノ．$x^3-3p^2x+p^2$　ハ．2　ヒ．-12　フ．-5

9.4　平成 31 年度推薦前期試験 (90 分)

［1］(1) $\sqrt{2}=1.4142$，$\sqrt{3}=1.7321$ とするとき，分母の有利化を利用して $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ の値を小数で表すと，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=$ ア，$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ イ である．

(2) 方程式 $|2x-1|=2-x$ の解は，$x=$ ウ と $x=$ エ である．

(3) 放物線 $y=x^2-3x+1$ を x 軸方向に オ，y 軸方向に カ だけ平行移動した放物線は $y=x^2+5x+2$ である．

(4) $\angle\mathrm{A}=60°$，$\angle\mathrm{C}=45°$，$\mathrm{BC}=5\sqrt{6}$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ について，$\mathrm{AB}=$ キ，$\mathrm{AC}=$ ク である．

(5) データ $-7,-3,-1,\ 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 10$ の中央値は ケ，四分位範囲は コ である．

［2］(1) $(x^2+2x-2)(x^2-2x+2)=x^4+ax^2+bx-4$ ならば，定数 a，b の値は $a=$ サ，$b=$ シ である．

(2) 連立 1 次不等式 $x-1\leqq\dfrac{1}{2}x\leqq 2x+1$ の解と 2 次不等式 $x^2+ax+b\leqq 0$ の解が一致するとき，$a=$ ス，$b=$ セ である．

(3) 関数 $y = x^2 - 2x + a$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 6 である．このとき，定数 a の値は［ソ］であり，関数の最小値は［タ］である．

(4) $0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする．x の 2 次方程式 $x^2 - 2(\cos\theta)x + \sin^2\theta = 0$ が重解をもつとき，$\theta =$［チ］$^\circ$ である．また，そのときの重解は［ツ］である．

(5) a，b は実数で，$a > 0$ とする．データ $a + b$，$2a + b$，$3a + b$ の平均値は 7，分散は 6 であるとき，$a =$［テ］，$b =$［ト］である．

［3］ $U = \{10$ 以下の自然数 $\}$ を全体集合とし，U の部分集合 A，B を

$$A = \{2,\ 3,\ n^2 - 3n + 8\}, \quad B = \{1,\ n + 1,\ 2n + 2,\ n^3 + 2\}$$

とする．ただし，n は自然数である．$A \cap B = \{3,\ 6\}$ となるのは，$n =$［ナ］のときである．このとき，$A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,$［ニ］$\}$ であり，A の補集合を $\overline{A}$ と表すと $\overline{A} \cap B = \{$［ヌ］,［ネ］$\}$ である．

［4］ △ABC において，∠B = 22.5°，∠C = 90°，AC = 1 とする．BC 上に ∠ADC = 45° となるように点 D をとると，DC =［ノ］，∠DAB =［ハ］$^\circ$ である．AD =［ヒ］であるから，$\tan 22.5° =$［フ］である．

解答例

［1］(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1.4142}{2} = \mathbf{0.7071}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$$
$$= 1.7321 - 1.4142 = \mathbf{0.3179}$$

(答) ア. 0.7071　イ. 0.3179

(2) $|2x-1| = 2-x \geqq 0$ より　$x \leqq 2$

(i) $2x-1 \geqq 0$，すなわち，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 2$ のとき

$2x-1 = 2-x$　ゆえに　$x = 1$

(ii) $2x-1 < 0$，すなわち，$x < \dfrac{1}{2}$ のとき

$-(2x-1) = 2-x$　ゆえに　$x = -1$

よって　　$\boldsymbol{x = 1, -1}$

(答) ウ. エ. $1, -1$

(3)　　$y = x^2 - 3x + 1 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4}$　頂点 $\left(\dfrac{3}{2}, -\dfrac{5}{4}\right)$

$y = x^2 + 5x + 2 = \left(x + \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{17}{4}$　頂点 $\left(-\dfrac{5}{2}, -\dfrac{17}{4}\right)$

求める平行移動は

x 軸方向に $-\dfrac{5}{2} - \dfrac{3}{2} = \mathbf{-4}$,　　y 軸方向に $-\dfrac{17}{4} - \left(-\dfrac{5}{4}\right) = \mathbf{-3}$

(答) オ. -4　カ. -3

(4) $a = 5\sqrt{6}$，$A = 60°$，$C = 45°$

正弦定理により　$\dfrac{5\sqrt{6}}{\sin 60°} = \dfrac{c}{\sin 45°}$

$$c = \frac{5\sqrt{6}\sin 45°}{\sin 60°} = 5\sqrt{6} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{10}$$

第 1 余弦定理により　$b = c\cos A + a\cos C$

$$b = 10\cos 60° + 5\sqrt{6}\cos 45° = 10\cdot\frac{1}{2} + 5\sqrt{6}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \mathbf{5(1+\sqrt{3})}$$

(答) キ. 10　ク. $5(1+\sqrt{3})$

(5) 中央値は　$\dfrac{1+3}{2} = \mathbf{2}$

第 1 四分位数 -1，第 3 四分位数 6 より，四分位範囲は　$6-(-1) = \mathbf{7}$

(答) ケ. 2　コ. 7

[2] (1) $(x^2+2x-2)(x^2-2x+2) = \{x^2+(2x-2)\}\{x^2-(2x-2)\}$
$= x^4-(2x-2)^2 = x^4-4x^2+8x-4$

x^4+ax^2+bx-4 と同じ次数の項の係数を比較して　$\boldsymbol{a=-4}$，$\boldsymbol{b=8}$

(答) サ. -4　シ. 8

(2) $x-1 \leqq \dfrac{1}{2}x \leqq 2x+1$ より　$\begin{cases} x-1 \leqq \dfrac{1}{2}x \\ \dfrac{1}{2}x \leqq 2x+1 \end{cases}$　ゆえに　$-\dfrac{2}{3} \leqq x \leqq 2$

これを解とする 2 次不等式は，x^2 の係数が 1 であることに注意して

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-2) \leqq 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3} \leqq 0$$

これが $x^2+ax+b \leqq 0$ と一致するから　$a=-\dfrac{4}{3}$，$b=-\dfrac{4}{3}$

(答) ス. $-\dfrac{4}{3}$　セ. $-\dfrac{4}{3}$

(3) 関数 $y = x^2-2x+a = (x-1)^2+a-1$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ より，
$x=3$ のとき最大値 6 をとるから

$$a+3=6 \quad \text{ゆえに} \quad a=\mathbf{3} \quad \text{すなわち} \quad y=(x-1)^2+2$$

よって，$x=1$ のとき，最小値 **2** をとる.

(答) ソ. 3　タ. 2

(4) $x^2-2(\cos\theta)x+\sin^2\theta=0$ が重解をもつから，係数について

$$(-2\cos\theta)^2-4\cdot1\cdot\sin^2\theta=0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta=\sin^2\theta$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ より　　$\cos\theta=\sin\theta \geqq 0$

上式から，$\theta \neq 90^\circ$ に注意して　$\tan\theta=1$　よって　$\boldsymbol{\theta=45^\circ}$

重解は　　$x=\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(答) チ. 45　ツ. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) データ $a+b$，$2a+b$，$3a+b$ の平均値が 7 であるから

$$\frac{(a+b)+(2a+b)+(3a+b)}{3}=7 \quad \text{ゆえに} \quad 2a+b=7 \quad \cdots ①$$

$a+b=(2a+b)-a=7-a$，$2a+b=7$，$3a+b=(2a+b)+a=7+a$

これに注意して，分散が 6 であるから

$$\frac{(7-a-7)^2+(7-7)^2+(7+a-7)^2}{3}=6 \quad \text{ゆえに} \quad a^2=9$$

$a>0$ に注意して $\boldsymbol{a=3}$ これを ① に代入して $\boldsymbol{b=1}$

(答) テ. 3 ト. 1

[3] A は 6 を要素 (元) にもつから

$$n^2-3n+8=6 \quad \text{ゆえに} \quad (n-1)(n-2)=0$$

$n=1$ とすると，要素 2 は A，B の共通の要素となり，不適.

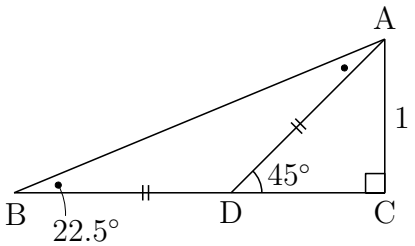
$n=\mathbf{2}$ のとき，$A=\{2,\ 3,\ 6\}$，$B=\{1,\ 3,\ 6,\ 10\}$ より

$$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ \mathbf{10}\}, \quad \overline{A}\cap B=\{\mathbf{1,\ 10}\}$$

(答) ナ. 2 ニ. 10 ヌ. 1 ネ. 10

[4] 右の図から

$\mathrm{DC}=\mathbf{1}$, $\angle\mathrm{DAB}=\mathbf{22.5^\circ}$,
$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$



よって $\tan 22.5^\circ=\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BD}+\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

(答) ノ. 1 ハ. 22.5 ヒ. $\sqrt{2}$ フ. $\sqrt{2}-1$

9.5　平成 31 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})(1+\sqrt{5}-\sqrt{6})$ の値は［ア］である．$\dfrac{1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{6}}$ の値は分母を有理化すると［イ］である．

(2) a，b は整数とする．条件「a，b がともに偶数である」は「$a+b$ が偶数である」ための［ウ］条件であり，「ab が偶数である」は「a，b がともに偶数である」ための［エ］条件である．「必要」，「十分」，「必要十分」から選んで答えよ．

(3) 不等式 $|2x+a| \leqq b$ の解が $-3 \leqq x \leqq 2$ であるとき，定数 a，b の値は $a=$［オ］，$b=$［カ］である．

(4) △ABC において，$0^\circ \leqq \angle \mathrm{A} \leqq 90^\circ$，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=6$，△ABC の面積が $6\sqrt{3}$ であるとき，$\angle \mathrm{A}=$［キ］$^\circ$，$\mathrm{BC}=$［ク］である．

(5) 4 個のデータ $4,\ a,\ b,\ 24$ が大きさの順に並んでいる．中央値が 14，四分位範囲が 12 であるとき，$a=$［ケ］，$b=$［コ］である．

[2] (1) 放物線 $y=-x^2+ax+b$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線は 2 点 $(-2,-2)$，$(-1,-1)$ を通る．このとき，定数 a，b の値は $a=$［サ］，$b=$［シ］である．

(2) 2 次関数 $f(x)=x^2+4x+3$ において $f(a+3)-f(a)=3$ が成り立つとき，$a=$［ス］である．このとき，関数 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq a+3)$ の最大値と最小値の差は［セ］である．

(3) a を正の定数とする．2 次方程式 $x^2-2ax+4=0$ が 1 より大きい異なる 2 つの実数解を持つとき，a の範囲は，［ソ］$<a<$［タ］である．

(4) $\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=13$，$\mathrm{CA}=12$ である直角三角形 ABC の外接円の半径は［チ］，内接円の半径は［ツ］である．

(5) a を正の実数とし，データ $a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a$ を考える．平均値が 5 となるのは $a=$［テ］のときである．また，分散が 1 となるのは $a=$［ト］のときである．

[3] 2 直線 $y=-x+1$ と $y=\dfrac{x}{2}-1$ の交点の x 座標は［ナ］であり，この値を a とおく．$-1 \leqq x \leqq a$ に対して 2 直線上の点 $\mathrm{A}(x,\ -x+1)$，$\mathrm{B}\left(x,\ \dfrac{x}{2}-1\right)$ をとり，定点 $\mathrm{C}(-1,\ 0)$ を加えて △ABC を考える．△ABC の面積 S は，x の 2 次式［ニ］で表すことができるので，$x=$［ヌ］のとき最大値［ネ］をとる．

［**4**］四角形 ABCD において，AB = 8，BC = 4，CD = 4，AD = 6，∠B+∠D = 180° であるとき，cos ∠B = ノ，cos ∠D = ハ，AC = ヒ である．また，四角形 ABCD の面積は フ である．

解答例

［1］(1)　$(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})(1+\sqrt{5}-\sqrt{6}) = (1+\sqrt{5})^2-(\sqrt{6})^2 = \mathbf{2\sqrt{5}}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sqrt{5}+\sqrt{6}} &= \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}{(1+\sqrt{5}+\sqrt{6})(1+\sqrt{5}-\sqrt{6})}\\ &= \frac{1+\sqrt{5}-\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{(1+\sqrt{5}-\sqrt{6})\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\sqrt{5}}\\ &= \frac{\mathbf{5+\sqrt{5}-\sqrt{30}}}{\mathbf{10}}\end{aligned}$$

(答) ア. $2\sqrt{5}$　イ. $\dfrac{5+\sqrt{5}-\sqrt{30}}{10}$

(2) 「a，b がともに偶数である」は「$a+b$ が偶数である」ための**十分**条件.
「ab が偶数である」は「a，b がともに偶数である」ための**必要**条件.

(答) ウ. 十分　エ. 必要

(3) $|2x+a| \leqq b$ より

$$-b \leqq 2x+a \leqq b \quad \text{ゆえに} \quad -\frac{b+a}{2} \leqq x \leqq \frac{b-a}{2}$$

これが $-3 \leqq x \leqq 2$ であるから

$$-\frac{b+a}{2} = -3, \quad \frac{b-a}{2} = 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1,\ b=5}$$

(答) オ. 1　カ. 5

(4) $b=6$，$c=4$，$0^\circ \leqq A \leqq 90^\circ$，$S=6\sqrt{3}$ を $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A$ に代入すると

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 4\sin A = 6\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって} \quad A = \mathbf{60^\circ}$$

余弦定理により

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A = 6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cos 60^\circ = 28$$

$a>0$ であるから　$\mathrm{BC} = a = \mathbf{2\sqrt{7}}$

(答) キ. 60　ク. $2\sqrt{7}$

(5) 4 個のデータ 4, a, b, 24 について，

第 1 四分位数 $\dfrac{4+a}{2}$，中央値 $\dfrac{a+b}{2}$，第 3 四分位数 $\dfrac{b+24}{2}$

四分位範囲は $\dfrac{b+24}{2}-\dfrac{4+a}{2}=\dfrac{b-a}{2}+10$

条件から $\dfrac{a+b}{2}=14$，$\dfrac{b-a}{2}+10=12$ よって $a=\mathbf{12}$, $b=\mathbf{16}$

(答) ケ. 12 コ. 16

[2] (1) 与えられた 2 点を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した点は

$(0,-5)$，$(1,-4)$

$y=-x^2+ax+b$ はこの 2 点を通るから

$b=\mathbf{-5}$, $-1+a+b=-4$ ゆえに $a=\mathbf{2}$

(答) サ. 2 シ. -5

(2) $f(x)=x^2+4x+3$，$f(a+3)-f(a)=3$ より

$(a+3)^2+4(a+3)+3-(a^2+4a+3)=3$ ゆえに $a=\mathbf{-3}$

ゆえに $f(x)=x^2+4x+3=(x+2)^2-1$ $(-3\leqq x\leqq 0)$

最大値 $f(0)=3$，最小値 $f(-2)=-1$ よって $f(0)-f(-2)=\mathbf{4}$

(答) ス. -3 セ. 4

(3) $f(x)=x^2-2ax+4$ とおくと $f(x)=(x-a)^2-a^2+4$

このとき，$a>1$，$f(1)>0$，$f(a)<0$ であるから

$f(1)=1-2a+4>0$, $f(a)=-a^2+4<0$

上の第 1 式から $a<\dfrac{5}{2}$, 第 2 式から $a<-2$, $2<a$

$a>1$ および上の 2 式から $\boldsymbol{2<a<\dfrac{5}{2}}$

(答) ソ. 2 タ. $\dfrac{5}{2}$

(4) AB $=5$，BC $=13$，CA $=12$ より，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2=\mathrm{BC}^2$ であるから，BC は △ABC の外接円の直径であるから，その半径は $\boldsymbol{\dfrac{13}{2}}$

△ABC の内接円の半径を r とすると

$\dfrac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})=\triangle\mathrm{ABC}$ ゆえに $\dfrac{1}{2}r(5+13+12)=\dfrac{1}{2}\cdot 5\cdot 12$

これを解いて $r=\mathbf{2}$

(答) チ. $\dfrac{13}{2}$ ツ. 2

(5) データ $a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a$ の平均値 $3a$ が 5 であるとき　$\boldsymbol{a = \dfrac{5}{3}}$

データ $a,\ 2a,\ 3a,\ 4a,\ 5a$ の分散は

$$\frac{(a-3a)^2+(2a-3a)^2+(3a-3a)^2+(4a-3a)^2+(5a-3a)^2}{5} = 2a^2$$

これが 1 であるとき　$2a^2 = 1$　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(答) テ. $\dfrac{5}{3}$　ト. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

[3] $y = -x+1$ と $y = \dfrac{x}{2} - 1$ から y を消去すると

$$-x+1 = \frac{x}{2} - 1 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$$

$-1 \leqq x \leqq \dfrac{4}{3}$ に対して，3 点 $\mathrm{A}(x, -x+1)$，$\mathrm{B}\left(x,\ \dfrac{x}{2}-1\right)$，$\mathrm{C}(-1,\ 0)$ を頂点とする $\triangle \mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\{x-(-1)\}\left\{(-x+1) - \left(\frac{x}{2}-1\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}(x+1)\left(-\frac{3}{2}x+2\right) = \boldsymbol{-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x + 1} \\ &= -\frac{3}{4}\left(x^2 - \frac{1}{3}x\right) + 1 = -\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{49}{48} \end{aligned}$$

よって，$x = \boldsymbol{\dfrac{1}{6}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{49}{48}}$ をとる.

(答) ナ. $\dfrac{4}{3}$　ニ. $-\dfrac{3}{4}x^2 + \dfrac{1}{4}x + 1$　ヌ. $\dfrac{1}{6}$　ネ. $\dfrac{49}{48}$

［**4**］△ABC および △ADC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}
\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\mathrm{B} \\
&= 8^2 + 4^2 - 2\cdot 8\cdot 4\cos B = 80 - 64\cos B, \\
\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{CD}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{AD}\cos(180^\circ - \mathrm{B}) \\
&= 4^2 + 6^2 + 2\cdot 4\cdot 6\cos B = 52 + 48\cos B
\end{aligned}$$

上の 2 式から　$\cos B = \boldsymbol{\frac{1}{4}}$，$\cos D = \cos(180^\circ - B) = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$，$\mathrm{AC} = \boldsymbol{8}$

また　$\sin B = \sin D = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$

よって，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ADC} = \frac{1}{2}(8\cdot 4 + 4\cdot 6)\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = \boldsymbol{7\sqrt{15}}$$

(答) ノ. $\frac{1}{4}$　ハ. $-\frac{1}{4}$　ヒ. 8　フ. $7\sqrt{15}$

9.6　平成 31 年度一般試験 (90 分)

［1］(1) 3 次方程式 $(x+1)(x^2-2x+a+1)=0$ が重解をもつのは $a=$ ア または $a=$ イ のときである．

(2) 3 点 O(0, 0)，A(−2, 3)，B(1, 2) を頂点とする △OAB において，点 O と直線 AB の距離は ウ であり，△OAB の面積は エ である．

(3) $0<\theta<\pi$ のとき，不等式 $3\sin\theta-2\cos^2\theta>0$ の解は オ $<\theta<$ カ である．

(4) $\log_5 2=a$，$\log_5 3=b$ とおく．a，b を用いて表すとき，$\log_5 24=$ キ，$\log_4\sqrt{3}=$ ク である．

(5) 曲線 $y=x^3-2x^2-3x$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は $y=$ ケ である．この接線と曲線の接点以外の交点の x 座標は コ である．

［2］(1) a を正の実数とする．$(ax+3)^5$ の展開式で x^2 の係数が 1080 であるとき，$a=$ サ である．このとき x^3 の係数は シ である．

(2) 2 つの円 $x^2-2x+y^2-2y=0$ と $x^2+2x+y^2-2ay=1-a^2$ が異なる 2 点で交わるのは，ス $<a<$ セ のときである．

(3) $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\cos\beta=\dfrac{1}{3}\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\beta<0\right)$ のとき $\sin(\alpha+\beta)=$ ソ，$\cos(\alpha-\beta)=$ タ である．

(4) 関数 $y=2^{2x+1}-2^{x+2}+6$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ は，$x=$ チ のとき最大値 ツ をとる．

(5) $x\geqq 0$ のとき，関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^x t(1-t)\,dt$ は，$x=$ テ のとき最大値 ト をとる．

［3］$0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき，$t=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，t の範囲は ナ $\leqq t\leqq$ ニ である．$y=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta+4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta-2$ を t の式で表すと $y=$ ヌ であり，y の最小値は ネ である．

［4］放物線 $y=x^2+x$ 上の点 $(-1,\ 0)$ を通る直線 ℓ の方程式は $y=$ ノ である．また，放物線 $y=x^2+x$ 上の点 $(a,\ a^2+a)$ を通る接線の傾きが 5 となるのは $a=$ ハ のときである．このとき，2 本の接線の交点の x 座標は ヒ であり，2 本の接線と放物線で囲まれる領域の面積は フ である．

解答例

［**1**］(1) $x^2-2x+a+1=0$ が重解をもつとき，係数について

$$(-2)^2-4\cdot 1(a+1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=0}$$

$x^2-2x+a+1=0$ が $x=-1$ を解にもつとき

$$(-1)^2-2(-1)+a+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=-4}$$

(答) ア. イ. $0, -4$

(2) 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 3)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{2-3}{1+2}(x+2) \quad \text{すなわち} \quad x+3y-7=0$$

原点 O とこの直線の距離は $\dfrac{|-7|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\boldsymbol{\dfrac{7}{\sqrt{10}}}$

$\mathrm{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(2-3)^2}=\sqrt{10}$ より，求める面積は

$$\triangle \mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{7}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

(答) ウ. $\dfrac{7}{\sqrt{10}}$ エ. $\dfrac{7}{2}$

(3) $3\sin\theta-2\cos^2\theta>0$ より

$$3\sin\theta-2(1-\sin^2\theta)>0 \quad \text{ゆえに} \quad (2\sin\theta-1)(\sin\theta+2)>0$$

$0<\theta<\pi$ より，$0<\sin\theta<1$ に注意して $\sin\theta>\dfrac{1}{2}$ よって $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{5}{6}\pi}$

(答) オ. $\dfrac{\pi}{6}$ カ. $\dfrac{5}{6}\pi$

(4) $\log_5 24=\log_5 2^3\cdot 3=3\log_5 2+\log_5 3=\boldsymbol{3a+b}$

$\log_4\sqrt{3}=\dfrac{\log_5 3^{\frac{1}{2}}}{\log_5 2^2}=\dfrac{\log_5 3}{4\log_5 2}=\boldsymbol{\dfrac{b}{4a}}$

(答) キ. $3a+b$ ク. $\dfrac{b}{4a}$

(5) $y = x^3 - 2x^2 - 3x$ より　$y' = 3x^2 - 4x - 3$

$x = -1$ のとき，$y' = 4$ であるから，曲線上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y = 4(x+1) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = 4x + 4}$$

曲線と上の接線の方程式から y を消去すると

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 4x + 4 \quad (x+1)^2(x-4) = 0$$

よって，求める交点の x 座標は　$\boldsymbol{x = 4}$

(答) ケ. $4x + 4$　コ. 4

[2] (1) $(ax+3)^5$ の x^2 の係数は　${}_5\mathrm{C}_2 a^2 \cdot 3^3 = 270a^3$

これが 1080 であるから，$a > 0$ に注意して

$$270a^2 = 1080 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 4 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = 2}$$

$(2x+3)^3$ の x^3 の係数は　　${}_5\mathrm{C}_3 2^3 \cdot 3^2 = \boldsymbol{720}$

(答) サ. 2　シ. 720

(2) $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0$ より

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{中心 } (1,\ 1),\ \text{半径 } \sqrt{2}$$

$x^2 + 2x + y^2 - 2ay = 1 - a^2$ より

$$(x+1)^2 + (y-a)^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad \text{中心 } (-1,\ a),\ \text{半径 } \sqrt{2}$$

2 円の中心間の距離は　$\sqrt{4 + (a-1)^2}$

2 円が異なる 2 点で交わるとき

$$\sqrt{4 + (a-1)^2} < \sqrt{2} + \sqrt{2} \quad \text{ゆえに} \quad |a-1| < 2$$

これを解いて　$\boldsymbol{-1 < a < 3}$

(答) ス. -1 セ. 3

(3) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ より $\quad \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \dfrac{4}{5}$

$\cos\beta = \dfrac{1}{3}\ \left(-\dfrac{\pi}{2} < \beta < 0\right)$ より $\quad \sin\beta = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

加法定理により

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\alpha \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{3-8\sqrt{2}}{15}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{4-6\sqrt{2}}{15}}\end{aligned}$$

(答) ソ. $\dfrac{3-8\sqrt{2}}{15}$ $\quad$ タ. $\dfrac{4-6\sqrt{2}}{15}$

(4) 関数 $y = 2^{2x+1} - 2^{x+2} + 6\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ について，$t = 2^x$ とおくと

$$\begin{aligned}y &= 2t^2 - 4t + 6 \quad \left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 2\right) \\ &= 2(t-1)^2 + 4\end{aligned}$$

$t = 2$，すなわち，$\boldsymbol{x = 1}$ のとき，最大値 $\mathbf{6}$

(答) チ. 1 $\quad$ ツ. 6

(5) $f(x) = \displaystyle\int_0^x t(1-t)\,dt$ より $(x \geqq 0)$ $\quad f'(x) = x(1-x)$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	最大	↘

最大値 $f(\mathbf{1}) = \displaystyle\int_0^1 t(1-t)\,dt = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

(答) テ. 1 $\quad$ ト. $\dfrac{1}{6}$

[3] $t=\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ より

$$t=2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{-1\leqq t\leqq 2}$$

$$\begin{aligned}t^2&=(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)^2=3\sin^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=-\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+2\end{aligned}$$

ゆえに　$\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta=2-t^2$

したがって　$\begin{aligned}y&=(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)+4(\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta)-2\\&=(2-t^2)+4t-2=\boldsymbol{-t^2+4t}\end{aligned}$

$y=-(t-2)^2+4$ $(-1\leqq t\leqq 2)$ であるから，$t=-1$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-5}$

(答) ナ. -1　ニ. 2　ヌ. $-t^2+4t$　ネ. -5

[4] $y=x^2+x$ を微分すると　$y'=2x+1$

$x=-1$ のとき　$y'=-1$

放物線 $y=x^2+x$ 上の点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は

$$y=-(x+1)\quad\text{すなわち}\quad\boldsymbol{y=-x-1}$$

$x=a$ のとき，$y'=2a+1$

これが 5 であるから　$2a+1=5$　ゆえに　$\boldsymbol{a=2}$

2 直線の交点の x 座標は　$\dfrac{-1+2}{2}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

求める面積は，x^2 の係数に注意して

$$\frac{1}{12}\left(2-(-1)\right)^3=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

(答) ノ. $-x-1$　ハ. 2　ヒ. $\dfrac{1}{2}$　フ. $\dfrac{9}{4}$

9.7 平成 30 年度推薦前期試験 (90 分)

[1] (1) $4x^3+ax^2+2x-3$ を因数分解すると $(4x^2+x+3)(x+b)$ となった。このとき，定数 a，b の値は $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) 次の命題の真偽を述べよ．ただし，x，y は実数とする．

(i) 命題「$x^2=x$ ならば，$x=1$ である。」は ウ である。

(ii) 命題「$x+y=2$ かつ $xy=1$ ならば，$x=y=1$ である。」は エ である。

(3) 放物線 $y=x^2+ax+1$ の頂点が直線 $y=x+1$ 上にあるとき，定数 a の値は オ または カ である。

(4) △ABC は $\angle \mathrm{C}=90^\circ$ の直角三角形とする。$\sin A=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\sin B=$ キ，$\tan B=$ ク である。

(5) データ $4,\ 1,\ 2,\ 1,-2,\ 0$ の平均値は ケ，分散は コ である。

[2] (1) $|x-1|+|x-2|=x$ を満たす x の値は $x=$ サ，シ である。

(2) $x=1$ が 2 次方程式 $x^2+ax+3=0$ の解であるとき，$a=$ ス であり，もう 1 つの解は $x=$ セ である。

(3) △ABC において，$\angle \mathrm{B}=60^\circ$，$\angle \mathrm{C}=45^\circ$，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$ のとき，$\mathrm{AC}=$ ソ である。頂点 A から辺 BC へ下ろした垂線を AD とするとき，△ADC の面積は タ である。

(4) 2 次関数 $f(x)=2x^2-ax+2$，$g(x)=x^2+ax+1$ において，$f(x)>g(x)$ が全ての実数 x で成り立つとき，定数 a の範囲は チ $<a<$ ツ である。

(5) 10 個のデータ $a,a,a,a,a,b,b,7,8,10$ の平均値は 5，中央値は 4 である。ただし，$a<b<7$ とする．このとき，$a=$ テ，$b=$ ト である。

［**3**］ある商品は 1 個の価格が 100 円のとき 1 日に 600 個売れ，価格を 1 円あげるごとに 1 日に売れる個数が 4 個ずつ減る．この商品 1 個の価格を x 円 $(x \geqq 100)$ に設定したときの 1 日の売上個数を y 個とする。y を x の式で表すと，$y =$ ナ である。1 日の売上総額 z 円を x の式で表すと，$z =$ ニ である。1 日の売上総額を最大にするには，1 個の価格を $x =$ ヌ とすればよい。このときの 1 日の売上個数は，$y =$ ネ である。

［**4**］四角形 ABCD において，$\angle \mathrm{B} = 120°$，$\mathrm{AB} = 1$，$\mathrm{BC} = 2$，$\mathrm{AD} = \mathrm{CD}$ である。このとき，△ABC の面積は ノ であり，$\mathrm{AC} =$ ハ である。また，△ABC の外接円の半径は ヒ である。点 D が △ABC の外接円の円周上にあるとき，四角形 ABCD の面積は フ である。

解答例

［**1**］(1) $4x^3+ax^2+2x-3=(4x^2+x+3)(x+b)\quad\cdots(*)$

$(*)$ の定数項を比較すると　$-3=3b$　ゆえに　$\boldsymbol{b=-1}$

これを $(*)$ に代入して右辺を展開すると

$$(4x^2+x+3)(x-1)=4x^3-3x^2+2x-3\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{a=-3}$$

(答) ア. -3　イ. -1

(2)　(i) $x^2=x$ を解くと　$x=0,\ 1$　$x^2=x\not\Rightarrow x=1$　よって　**偽**

($x=0$ が反例である)

(ii) $x+y=2,\ xy=1$ を解くと　$x=y=1$　よって　**真**

(答) ウ. 偽　エ. 真

(3) $y=x^2+ax+1=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+1$

放物線の頂点 $\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{4}+1\right)$ が直線 $y=x+1$ 上にあるから

$$-\frac{a^2}{4}+1=-\frac{a}{2}+1\quad\text{ゆえに}\quad a(a-2)=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=0,\ 2}$

(答) オ. カ. 0, 2

(4) $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ であるから，$\angle\mathrm{A}$ は鋭角であるから

$$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また　$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1}{3}\div\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ より，$A+B=90^\circ$ であるから

$$\sin B=\cos A=\boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}},\quad \tan B=\frac{1}{\tan A}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(答) キ. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　ク. $2\sqrt{2}$

(5) 平均は　$\dfrac{4+1+2+1+(-2)+0}{6}=\boldsymbol{1}$

したがって，分散は　$\dfrac{1}{6}\{4^2+1^2+2^2+1^2+(-2)^2+0^2\}-1^2=\boldsymbol{\dfrac{10}{3}}$

(答) ケ. 1　コ. $\dfrac{10}{3}$

［**2**］(1) $|x-1|+|x-2|=x$

(i) $x<1$ のとき

$$(-x+1)+(-x+2)=x \quad \text{これを解いて} \quad x=1 \text{ (不適)}$$

(ii) $1 \leqq x<2$ のとき

$$(x-1)+(-x+2)=x \quad \text{これを解いて} \quad x=1$$

(iii) $2 \leqq x$ のとき

$$(x-1)+(x-2)=x \quad \text{これを解いて} \quad x=2$$

(答) サ. シ. 1, 2

(2) $x=1$ が 2 次方程式 $x^2+ax+3=0$ の解であるから

$$1+a+3=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=-4}$$

したがって，2 次方程式 $x^2-4x+3=0$ の解は　$x=1,\ 3$
よって，求める他の解は　$\boldsymbol{x=3}$

(答) ス. -4　セ. 3

(3) △ABC に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} \quad \text{これを解いて} \quad \mathrm{AC}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

△ACD は直角二等辺三角形で

$$\mathrm{AD}=\mathrm{CD}=\sqrt{3}\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

よって，△ADC の面積は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

(答) ソ. $\sqrt{3}$　タ. $\dfrac{3}{4}$

(4) $f(x)=2x^2-ax+2$，$g(x)=x^2+ax+1$ より

$$f(x)-g(x)=x^2-2ax+1$$

すべての x について，$f(x)-g(x)>0$ であるから，係数について

$$(-2a)^2-4\cdot1\cdot1<0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+1)(a-1)<0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-1<a<1}$

(答) チ. -1　ツ. 1

(5) 平均値が 5 であるから

$$\frac{5a+2b+7+8+10}{10}=5 \quad \text{ゆえに} \quad 5a+2b=25 \quad \cdots①$$

$a<b<7$ で，中央値が 4 であるから

$$\frac{a+b}{2}=4 \quad \text{ゆえに} \quad a+b=8 \quad \cdots②$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{a=3,\ b=5}$ (答) テ. 3　ト. 5

[3] $(x,\ y)$ を座標平面上の直線上の点である.

その直線は，点 $(100,\ 600)$ を通り，傾き -4 であるから

$$y-600=-4(x-100) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=-4x+1000}$$

1 日の売上総額 z は

$$z=xy=x(-4x+1000)=\boldsymbol{-4x^2+1000x}$$

上式を変形すると　$z=-4(x-125)^2+62500$

売上総額を最大にする x は　$\boldsymbol{x=125}$　このとき売上個数は

$$y=-4\cdot125+1000=\boldsymbol{500}$$

(答) ナ. $-4x+1000$　ニ. $-4x^2+1000x$　ヌ. 125　ネ. 500

［**4**］△ABC の面積は

$$\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin 120^\circ = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

△ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ = 7 \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AC} = \boldsymbol{\sqrt{7}}$$

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$R = \frac{\mathrm{AC}}{2\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{21}}{3}}$$

$\angle\mathrm{ABD} = 120^\circ$ より，$\angle\mathrm{CDA} = 60^\circ$．AD = CD であるから，△ACD は一辺の長さが $\sqrt{7}$ の正三角形であるから

$$\triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}(\sqrt{7})^2\sin 60^\circ = \frac{7}{4}\sqrt{3}$$

よって，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ACD} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{4}\sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{9}{4}\sqrt{3}}$$

(答) ノ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ハ. $\sqrt{7}$　ヒ. $\dfrac{\sqrt{21}}{3}$　フ. $\dfrac{9}{4}\sqrt{3}$

9.8 平成 30 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) 定数 a，b に対して $x^3+ax^2+bx+4=(x^2-3x+2)(x+2)$ が成り立つとき $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) $n<2\sqrt{10}<n+1$ をみたす自然数 n は $n=$ ウ である。また，$\sqrt{k}-\sqrt{10}>1$ をみたす最小の自然数 k は $k=$ エ である。

(3) 点 $(1,-2)$ を通る放物線 $y=-x^2+ax+b$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動して得られる放物線は，点 $(-1,-2)$ を通る．このとき，定数 a，b の値は $a=$ オ，$b=$ カ である。

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta=$ キ，$\sin\theta=$ ク である。

(5) 10 個のデータ $x_1, x_2, \cdots, x_{10}$ が，$x_1+x_2+\cdots+x_{10}=55$，${x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_{10}}^2=385$ を満たすとき，データの平均値は ケ，分散は コ である。

[2] (1) 関数 $f(x)=|2x-1|+|3-x|$ は，$x=$ サ のとき最小値 シ をとる。

(2) 関数 $y=x^2-4x+3$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値は ス，最小値は セ である。

(3) △ABC において AB $=2$，AC $=3$，BC $=a$ (>0) とする。$a\cos B=3\cos A$ が成り立つとき，$a=$ ソ，$\cos C=$ タ である。

(4) $2-2x \leqq x^2-x \leqq 2$ の解は チ $\leqq x \leqq$ ツ である。

(5) 2 つの変量 x，y の値の組が $(1,\ 1)$，$(1,-1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,-1)$ であるとき，x と y の分散は共に テ であり，相関係数は ト である。

[3] p を定数とする。2 次関数 $y=x^2-2(p-1)x+2p+3$ のグラフの頂点の y 座標は ナ である。頂点の x 座標と y 座標がともに 0 以上であるとき，p の値の範囲は ニ $\leqq p \leqq$ ヌ であり，頂点の y 座標の最大値は ネ である。

[4] 四角形 ABCD において，AB $=5$，BC $=12$，CD $=6$，$\angle$B $=\angle$C $=60^\circ$ である。このとき，BD $=$ ノ，$\angle$BDC $=$ ハ $^\circ$ である。したがって，AD $=$ ヒ であり，四角形 ABCD の面積は フ である。

解答例

［**1**］(1) $x^3+ax^2+bx+4=(x^2-3x+2)(x+2)$ の右辺を展開すると

$$x^3+ax^2+bx+4=x^3-x^2-4x+4$$

同じ次数の項の係数を比較して　$\boldsymbol{a=-1,\ b=-4}$

(答) ア. -1　イ. -4

(2) $n<2\sqrt{10}<n+1$，$2\sqrt{10}=\sqrt{40}$，$6<\sqrt{40}<7$　ゆえに　$\boldsymbol{n=6}$

$\sqrt{k}-\sqrt{10}>1$ より，$\sqrt{k}>\sqrt{10}+1$ の両辺を平方して

$$k>11+2\sqrt{10}$$

$17<11+2\sqrt{10}<18$ であるから，求める最小の自然数 k は　$\boldsymbol{18}$

(答) ウ. 6　エ. 18

(3) 放物線 $y=-x^2+ax+b\cdots(*)$ は点 $(1,-2)$ を通るから

$$-2=-1+a+b\quad\text{ゆえに}\quad a+b=-1\quad\cdots①$$

点 $(-1,-2)$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に -1 だけ平行移動した点 $(2,-3)$ が放物線 $(*)$ 上にあるから

$$-3=-4+2a+b\quad\text{ゆえに}\quad 2a+b=1\quad\cdots②$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

(答) オ. 2　カ. -3

(4) $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}\cdots①$ の両辺を平方すると

$$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ であるから　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}\cdots②$

① より，$\cos\theta=\sin\theta-\dfrac{1}{2}$　これを ② に代入すると

$$\sin\theta\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}\quad\text{ゆえに}\quad 8\sin^2\theta-4\sin\theta-3=0$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より，$\sin\theta>0$ に注意してこれを解くと

$$\sin\theta=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{7}}{4}}$$

(答) キ. $\dfrac{3}{8}$　ク. $\dfrac{2+\sqrt{7}}{4}$

(5) 平均値は $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10} = \dfrac{55}{10} = \boldsymbol{\dfrac{11}{2}}$

分散は

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{1}{10}({x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_{10}}^2) - \overline{x}^2 \\ &= \frac{385}{10} - \left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{77}{2} - \frac{121}{4} = \boldsymbol{\frac{33}{4}}\end{aligned}$$

(答) ケ. 3　コ. 0

[2] (1) $f(x) = |2x-1| + |3-x|$ より

(i) $x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$$f(x) = (1-2x) + (3-x) = -3x + 4$$

この区間での最小値は　$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$

(ii) $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ のとき

$$f(x) = (2x-1) + (3-x) = x + 2$$

この区間での最小値は　$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$

(iii) $3 \leqq x$ のとき

$$f(x) = (2x-1) + (x-3) = 3x - 4$$

この区間での最小値は　$f(3) = 5$

(i)〜(iii) より，$x = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$ をとる．

(答) サ. $\dfrac{1}{2}$　シ. $\dfrac{5}{2}$

(2) $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \quad (0 \leqq x \leqq 3)$

ゆえに，最大値 $f(0) = \boldsymbol{3}$，最小値 $f(2) = \boldsymbol{-1}$

(答) ス. 3　セ. -1

(3) $b=3$，$c=2$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}==\frac{3^2+2^2-a^2}{2\cdot3\cdot2}=\frac{13-a^2}{12}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{2^2+a^2-3^2}{2\cdot2\cdot a}=\frac{a^2-5}{4a}$$

これらを $a\cos B=3\cos A$ に代入すると

$$a\cdot\frac{a^2-5}{4a}=3\cdot\frac{13-a^2}{12}\quad\text{ゆえに}\quad a^2-5=13-a^2$$

$a>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a=3}$

よって　　$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{3^2+3^2-2^2}{2\cdot3\cdot3}=\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{9}}$

(答) ソ. 3　タ. $\dfrac{7}{9}$

(4) $2-2x\leqq x^2-x\leqq 2$ より

$$(*)\begin{cases}2-2x\leqq x^2-x\\ x^2-x\leqq 2\end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式から　　$x^2+x-2\geqq 0$

ゆえに　$(x+2)(x-1)\geqq 0$　すなわち　$x\leqq -2,\ 1\leqq x$　$\cdots$①

$(*)$ の第 2 式から　　$x^2-x-2\leqq 0$

ゆえに　$(x+1)(x-2)\leqq 0$　すなわち　$-1\leqq x\leqq 2$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{1\leqq x\leqq 2}$

(答) チ. 1　ツ. 2

(5) $\overline{x}=\overline{y}=\dfrac{1}{4}\{1+1+(-1)+(-1)\}=0$

x と y の分散は，ともに

$${\sigma_x}^2={\sigma_y}^2=\frac{1}{4}\{1^2+1^2+(-1)^2+(-1)^2\}-0^2=\mathbf{1}$$

共分散は

$$\sigma_{xy}=\frac{1}{4}\{(1-0)(1-0)+(1-0)(-1-0)+(-1-0)(1-0)+(-1-0)(-1-0)\}=0$$

よって，相関係数は　$\dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\dfrac{0}{1\cdot1}=0$

(答) テ. 1　ト. 0

[3]
$$\begin{aligned} y &= x^2 - 2(p-1)x + 2p + 3 \\ &= (x - p + 1)^2 - p^2 + 4p + 2 \end{aligned}$$

したがって，このグラフの頂点の y 座標は　$\boldsymbol{-p^2 + 4p + 2}$

頂点 $(p-1, -p^2+4p+2)$ の x 座標と y 座標がともに 0 以上であるとき

$$(*) \begin{cases} p - 1 \geqq 0 \\ -p^2 + 4p + 2 \geqq 0 \end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式を解いて　$p \geqq 1$　$\cdots$①

$(*)$ の第 2 式から

$p^2 - 4p - 2 \leqq 0$　これを解いて　$2 - \sqrt{6} \leqq p \leqq 2 + \sqrt{6}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1 \leqq p \leqq 2 + \sqrt{6}}$

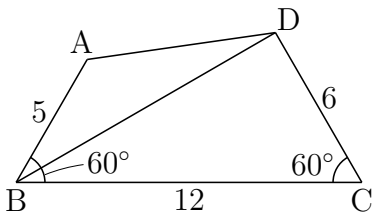
放物線の頂点の y 座標を q とすると

$$\begin{aligned} q &= -p^2 + 4p + 2 \\ &= -(p-2)^2 + 6 \end{aligned}$$

よって，頂点の y 座標の最大値は　$\boldsymbol{6}$

(答) ナ. $-p^2 + 4p + 2$　ニ. 1　ヌ. $2 + \sqrt{6}$　ネ. 6

［**4**］△BCD に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{BD}^2 = 12^2 + 6^2 - 2\cdot 12\cdot 6\cos 60^\circ = 108$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathrm{BD} = \boldsymbol{6\sqrt{3}}$

このとき，$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BD}^2 + \mathrm{CD}^2$ であるから

$$\boldsymbol{\angle \mathrm{BDC} = 90^\circ} \quad \text{また} \quad \angle \mathrm{DBC} = 30^\circ$$

$\angle \mathrm{ABD} = \angle \mathrm{ABC} - \angle \mathrm{DBC} = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$

△ABD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= 5^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2\cdot 5\cdot 6\sqrt{3}\cos 30^\circ \\ &= 25 + 108 - 90 = 43\end{aligned}$$

$\mathrm{AD} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{AD} = \sqrt{43}}$

$$\triangle \mathrm{BCD} = \frac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot \mathrm{BD} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

$$\triangle \mathrm{ABD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot \mathrm{BD}\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\sqrt{3}\cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}\sqrt{3}$$

よって，四角形 ABCD の面積は

$$\triangle \mathrm{BCD} + \triangle \mathrm{ABD} = 18\sqrt{3} + \frac{15}{2}\sqrt{3} = \boldsymbol{\frac{51}{2}\sqrt{3}}$$

(答) ノ. $6\sqrt{3}$　ハ. 90　ヒ. $\sqrt{43}$　フ. $\dfrac{51}{2}\sqrt{3}$

9.9 平成 30 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) $\dfrac{ax}{(x+1)^2}+\dfrac{b}{1-2x}=\dfrac{5x+2}{(x+1)^2(1-2x)}$ が成り立つとき，定数 a，b の値はそれぞれ $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) 2 点 A$(2,\ 1)$，B$(-1,\ 3)$ を $1:2$ に内分する点の座標は ウ である。この点を通り線分 AB と直交する直線の方程式は $y=$ エ である．

(3) $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$，$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta=$ オ，$\sin 2\theta=$ カ である。

(4) $\log_{16}\sqrt{4}$ の値は キ である。$\log_a 3=\dfrac{1}{4}$ を満たす a は，$a=$ ク である。

(5) 実数 a に対して，$f(a)=\displaystyle\int_0^1 (x+a)^2\,dx$ とする。このとき，$f(a)$ は $a=$ ケ で最小値 コ をとる。

[2] (1) 2 次方程式 $x^2-2x-2=0$ の 2 つの解を α，β とする。2 数 α^2，β^2 を解とする 2 次方程式を $x^2+ax+b=0$ と表すと，実数 a，b の値は $a=$ サ，$b=$ シ である。

(2) 半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $y=\sqrt{3}x-4$ が接するとき，$r=$ ス であり，接点の x 座標は セ である。

(3) $0\leqq\theta<2\pi$ に対して，$\cos\theta=\dfrac{3}{2}\tan\theta$ を満たす θ は $\theta=$ ソ と $\theta=$ タ である。

(4) $2^x+\dfrac{1}{2^x}\leqq\dfrac{5}{2}$ を満たす実数 x のとり得る値の範囲は チ $\leqq x\leqq$ ツ である。

(5) 放物線 $y=x^2+2x+3$ 上の点 $(0,\ 3)$ における接線の方程式は $y=$ テ であり，この接線が放物線 $y=x^2+a$ と接するとき，$a=$ ト である。

[3] k は正の定数で，円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-k)$ の交点の 1 つは x 座標が -1 である。このとき，$k=$ ナ であり，円と直線のもう一方の交点の x 座標は ニ である。さらに，連立不等式 $x^2+y^2\leqq 4$，$y\geqq-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-k)$ の表す領域を点 $(x,\ y)$ が動くとき，$x+y$ の最大値は ヌ，最小値は ネ である。

［**4**］放物線 $y = x^2 - x + 1$ に点 $(1,\ 0)$ から引いた 2 本の接線の方程式は $y =$ ノ と $y =$ ハ である。それぞれの接線と放物線の接点を A，B とするとき，A，B を通る直線は $y =$ ヒ であり，この直線と放物線で囲まれた部分の面積は フ である。

解答例

［**1**］(1) 与えられた等式の両辺に $(x+1)^2(1-2x)$ を掛けると

$$ax(1-2x)+b(x+1)^2=5x+2$$

左辺を整理すると

$$(-2a+b)x^2+(a+2b)x+b=5x+2$$

同じ次数の項の係数は等しいから

$$-2a+b=0,\quad a+2b=5,\quad b=2$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=1,\ b=2}$

(答) ア. 1　イ. 2

(2) 2 点 A$(2,\ 1)$，B$(-1,\ 3)$ を $1:2$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{2\cdot2+1\cdot(-1)}{1+2},\ \frac{2\cdot1+1\cdot3}{1+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\mathbf{1},\ \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}\right)$$

直線 AB の傾きは　　$\dfrac{3-1}{-1-2}=-\dfrac{2}{3}$

点 $\left(1,\ \dfrac{5}{3}\right)$ を通り，直線 AB に垂直な直線は

$$y-\frac{5}{3}=\frac{3}{2}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{6}}$$

(答) ウ. $\left(1,\ \dfrac{5}{3}\right)$　エ. $\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{6}$

(3) $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ より，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

また　　$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\cdot\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{\mathbf{4\sqrt{2}}}{\mathbf{9}}$

(答) オ. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　カ. $-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

(4) $\log_{16}\sqrt{4}=\log_{16}2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 16}=\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$

$\log_a 3=\dfrac{1}{4}$より　$a^{\frac{1}{4}}=3$　よって　$a=3^4=\mathbf{81}$

(答) キ. $\dfrac{1}{4}$　ク. 81

(5) $f(a)=\displaystyle\int_0^1 (x+a)^2\,dx=\frac{1}{3}\Big[\,(x+a)^3\,\Big]_0^1=\frac{1}{3}\{(1+a)^3-a^3\}=a^2+a+\frac{1}{3}$

ゆえに　$f(a)=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{12}$　よって　$\boldsymbol{a=-\dfrac{1}{2}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{12}}$

(答) ケ. $-\dfrac{1}{2}$　コ. $\dfrac{1}{12}$

［**2**］(1) 2 次方程式 $x^2-2x-2=0$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2,\quad \alpha\beta=-2$$

ゆえに　$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2^2-2\cdot(-2)=8$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(-2)^2=4$

α^2，β^2 を解とする 2 次方程式は

$$x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0\quad\text{ゆえに}\quad x^2-8x+4=0$$

これと $x^2+ax+b=0$ の同じ次数の項の係数を比較して　$a=-8$，$b=4$

(答) サ. -8　シ. 4

(2) 円の中心 $(0,\ 0)$ から直線 $y=\sqrt{3}x-4$ $(\sqrt{3}x-y-4=0)$ までの距離が円の半径 r であるから

$$r=\frac{|-4|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\mathbf{2}$$

$x^2+y^2=4$ と $y=\sqrt{3}x-4$ から y を消去すると

$$x^2+(\sqrt{3}x-4)^2=4\quad\text{整理すると}\quad x^2-2\sqrt{3}x+3=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{x=\sqrt{3}}$

(答) ス. 2　セ. $\sqrt{3}$

(3) $\cos\theta = \dfrac{3}{2}\tan\theta$ より　$2\cos^2\theta = 3\sin\theta$

したがって　$2(1-\sin^2\theta) = 3\sin\theta$　ゆえに　$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1) = 0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから　$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi}$

(答) ソ. タ. $\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

(4) $2^x + \dfrac{1}{2^x} \leqq \dfrac{5}{2}$ について，$t = 2^x$ とおくと $(t > 0)$

$$t + \frac{1}{t} \leqq \frac{5}{2}$$　ゆえに　$2t^2 - 5t + 2 \leqq 0$　これを解いて　$\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2$

したがって　$\dfrac{1}{2} \leqq 2^x \leqq 2$　すなわち　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 1}$

(答) チ. -1　ツ. 1

(5) $y = x^2+2x+3$ を微分すると　$y' = 2x+2$　ゆえに　$x = 0$ のとき，$y' = 2$

したがって，放物線 $y = x^2+2x+3$ 上の点 $(0,\ 3)$ における接線の方程式は

$$\boldsymbol{y = 2x + 3}$$

これと $y = x^2 + a$ から y を消去すると

$$x^2 + a = 2x + 3$$　ゆえに　$x^2 - 2x + a - 3 = 0$

上の 2 次方程式は重解をもつから，係数について

$$(-2)^2 - 4\cdot1(a-3) = 0$$　ゆえに　$\boldsymbol{a = 4}$

(答) テ. $4x-3$　ト. 2

［**3**］直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-k)$ の x 軸との交点の x 座標 k が正である.

また円と直線の交点の x 座標が -1 であるから，その交点は第 2 象限あり

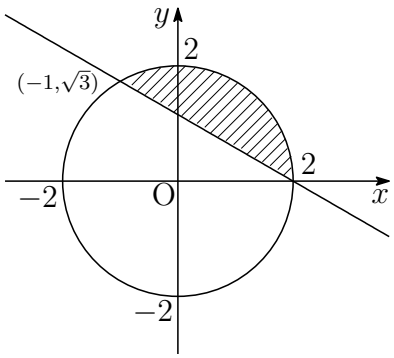
$$(-1)^2+y^2=4 \quad \text{ゆえに} \quad y=\sqrt{3}$$

交点 $(-1,\ \sqrt{3})$ は直線 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-k)$ 上の点であるから

$$\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}(-1-k) \quad \text{これを解いて} \quad k=2$$

もう一方の交点は $(2,\ 0)$ であるから，もう一方の交点の x 座標は　**2**

連立不等式 $x^2+y^2 \leqq 4$，$y \geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$ の表す領域は，下の図の斜線部分で，境界線を含む.



よって　$x+y$ は $(x,\ y)=(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ で最大値 $\mathbf{2\sqrt{2}}$,

$(x,\ y)=(-1,\ \sqrt{3})$ で最小値 $\mathbf{-1+\sqrt{3}}$ をとる.

(答) ナ. 2　ニ. 2　ヌ. $2\sqrt{2}$　ネ. $-1+\sqrt{3}$

［**4**］$y = x^2 - x + 1$ を微分すると　$y' = 2x - 1$

放物線 $y = x^2 - x + 1$ 上の点 $(t,\ t^2 - t + 1)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 - t + 1) = (2t - 1)(x - t)$$

すなわち　　$y = (2t - 1)x - t^2 + 1 \quad \cdots (*)$

これが点 $(1,\ 0)$ を通るから

$$0 = (2t - 1)\cdot 1 - t^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2t = 0$$

これを解いて　$t = 0,\ 2$

$(*)$ より，2 本の接線は　$\boldsymbol{y = -x + 1,\ y = 3x - 3}$

したがって，2 点 A，B の座標は $(0,\ 1),\ (2,\ 3)$

この 2 点を通る直線の方程式は

$$y - 1 = \frac{3 - 1}{2 - 0}(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = x + 1$$

求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{x + 1 - (x^2 - x + 1)\}\, dx \\ &= -\int_0^2 x(x - 2)\, dx = \frac{1}{6}(2 - 0)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

(答) ノ. ハ. $-x + 1,\ 3x - 3$　ヒ. $x + 1$　フ. $\dfrac{4}{3}$

9.10　平成 29 年度推薦前期試験 (90 分)

［1］(1) a を定数とする。$(x-y+1)(ax+y-2)$ を展開したとき，x の係数と y の係数が等しければ，$a=$ ア であり，xy の係数は イ である。

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ の整数部分を a，小数部分を b とすると，$a=$ ウ，$b=$ エ である。

(3) x は鋭角で，$\sin x=\dfrac{2}{3}$，$x+y=90^\circ$ のとき，$\sin y=$ オ，$\tan y=$ カ である。

(4) 放物線 $y=(x-3)(x+1)$ の軸は，直線 $x=$ キ であり，頂点は点 ク である。

(5) データ A とデータ B が次の表で与えられるとき，範囲が小さい方はデータ ケ であり，そのデータの平均値は コ である。

A	44	32	35	26	38
B	34	42	18	30	26

［2］(1) A 社は 1000 枚までは 1 枚 3 円，それ以後は 1 枚 1 円で，B 社は 1000 枚までは定額の 2000 円，それ以後は 1 枚 2 円で，それぞれ印刷を請け負う。A 社の印刷代金が B 社の印刷代金以下なのは，印刷枚数が サ 枚以下と，シ 枚以上のときである。

(2) 放物線 $y=x^2-2ax+b$ が点 $(1,\ 1)$ を通り，x 軸と異なる 2 点で交わるとき，定数 a の範囲は $a<$ ス，$a>$ セ である。

(3) x は $-2<x<1$ をみたす実数とする。座標平面の 3 点 $(1,\ 0)$，$\left(x,\ \dfrac{x}{2}+1\right)$，$\left(x,-\dfrac{x}{2}-1\right)$ を頂点にもつ三角形の面積は，$x=$ ソ のとき，最大値 タ をとる。

(4) $\mathrm{BC}=2$，$\angle\mathrm{B}=60^\circ$，$\angle\mathrm{C}=75^\circ$ の $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AC}=$ チ，$\mathrm{AB}=$ ツ である。

(5) 次のデータの平均値は 7 で標準偏差は 4 である．ただし $a<b$ とする。このとき $a=$ テ，$b=$ ト である。

$$a,\quad b,\quad 7,\quad 9,\quad 13$$

[3] 放物線 $y = x^2 + ax + b$ が 2 点 $(1, -1)$，$(2,\ k-5)$ を通る。ただし $k > 0$ とする。このとき，実数 a，b を k で表すと，$a =$ ナ，$b =$ ニ である。放物線と x 軸との交点を A，B とする。ただし，A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。線分 AB の長さが $\sqrt{40}$ であるとき，A，B の x 座標は ヌ，ネ である。

[4] 円 O に内接する四角形 ABCD があり，AB = 1，AD = 2，$\angle$A = 60°，そして BC = 2CD とする。このとき，BD = ノ であり，円 O の直径は ハ である。また，BC = ヒ であり，四角形 ABCD の面積は フ となる。

解答例

［**1**］(1) $(x-y+1)(ax+y-2) = ax^2+(1-a)xy-y^2+(a-2)x+3y-2$ より

$$a-2=3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=5} \quad \text{このとき} \quad xy \text{の係数は} \quad \boldsymbol{-4}$$

(答) ア. 5　イ. -4

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2+(\sqrt{2}-1)$

$1<\sqrt{2}<2$ より，$0<\sqrt{2}-1<1$ であるから　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=\sqrt{2}-1}$

(答) ウ. 2　エ. $\sqrt{2}-1$

(3) x は鋭角であるから，$\sin x = \dfrac{2}{3}$ より

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$x+y=90^\circ$ より

$$\sin y = \cos x = \frac{\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\boldsymbol{3}}, \quad \tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{5}}}{\boldsymbol{2}}$$

(答) オ. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　カ. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

(4) $y=(x-3)(x+1)=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$ より

軸 $x=1$，頂点 $(1,-4)$

(答) キ. **1**　ク. $\boldsymbol{(1,-4)}$

(5) データ A の範囲は $44-26=18$，データ B の範囲は $42-18=24$

範囲が小さい方は**データ A** であり，その平均値は

$$\frac{44+32+35+26+38}{5} = \frac{175}{5} = \boldsymbol{35}$$

(答) ケ. A　コ. 35

［**2**］(1) 印刷枚数を x 枚とする.

(i) $x \leqq 1000$ のとき，A 社の代金は $3x$ 円，B 社の代金は 2000 円より

$$3x \leqq 2000 \quad \text{ゆえに} \quad x \leqq \frac{2000}{3}$$

$\dfrac{2000}{3} = 666.6\cdots$ よって **666 枚以下**

(ii) $x > 1000$ のとき，A 社の代金は $3000 + 1(x - 1000)$ 円，B 社の代金は $2000 + 2(x - 1000)$ 円より

$$3000 + 1(x - 1000) \leqq 2000 + 2(x - 1000)$$

これを解いて $x \geqq 2000$ よって **2000 枚以上**

(答) サ. 666 シ. 2000

(2) 放物線 $y = x^2 - 2ax + b$ が点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$1 = 1 - 2a + b \quad \text{ゆえに} \quad b = 2a$$

したがって $y = x^2 - 2ax + 2a = (x - a)^2 - a^2 + 2a$
これが x 軸と異なる 2 点で交わるから

$$-a^2 + 2a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a - 2) > 0$$

これを解いて $\boldsymbol{a < 0,\ a > 2}$

(答) ス. 0 セ. 2

(3) $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(x,\ \dfrac{x}{2} + 1\right)$，$\mathrm{C}\left(x, -\dfrac{x}{2} - 1\right)$ とおくと $(-2 < x < 1)$

$$\mathrm{BC} = \left(\frac{x}{2} + 1\right) - \left(-\frac{x}{2} - 1\right) = 2 + x$$

A から BC に降ろした垂線の長さは $1 - x$

△ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}(2 + x)(1 - x) = -\frac{1}{2}(x^2 + x - 2)$$
$$= -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{8}$$

よって，$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{8}}$ をとる.

(答) ソ. $-\dfrac{1}{2}$ タ. $\dfrac{9}{8}$

(4) $B = 60°$，$C = 75°$ より

$$A = 180° - (B + C) = 180° - (60° + 75°) = 45°$$

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ により

$$\frac{2}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 60°} \quad \text{ゆえに} \quad b = \boldsymbol{\sqrt{6}}$$

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} c &= a\cos B + b\cos A \\ &= 2\cos 60° + \sqrt{6}\cos 45° = 1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{AB = 1 + \sqrt{3}}$

(答) チ. $\sqrt{6}$　ツ. $1 + \sqrt{3}$

(5) データの平均値が 7 であるから

$$\frac{a + b + 7 + 9 + 13}{5} = 7 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 6 \quad \cdots ①$$

このときデータの標準偏差が 4 であるから

$$\frac{1}{5}(a^2 + b^2 + 7^2 + 9^2 + 13^2) - 7^2 = 4^2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + b^2 = 26 \quad \cdots ②$$

$a < b$ に注意して，①，② を解くと　$\boldsymbol{a = 1,\ b = 5}$

(答) テ. 1　ト. 5

［**3**］放物線 $y=x^2+ax+b$ が 2 点 $(1,-1)$，$(2,\ k-5)$ を通るから

$$-1=1+a+b,\quad k-5=4+2a+b$$

ゆえに　$a+b=-2$，$2a+b=k-9$

これを解いて　$\boldsymbol{a=k-7}$，$\boldsymbol{b=-k+5}$

したがって，放物線 $y=x^2+(k-7)x-k+5$ の x 軸との交点の x 座標は

$$x=\frac{-(k-7)\pm\sqrt{(k-7)^2-4(-k+5)}}{2}$$
$$=\frac{-k+7\pm\sqrt{k^2-10k+29}}{2}$$

条件から　$\sqrt{k^2-10k+29}=\sqrt{40}$

したがって　$k^2-10k-11=0$　ゆえに　$(k+1)(k-11)=0$

$k>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{k=11}$

よって，A，B の x 座標は

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{2}=\boldsymbol{-2\pm\sqrt{10}}$$

(答) ナ. $k-7$　ニ. $-k+5$　ヌ. $-2-\sqrt{10}$　ネ. $-2+\sqrt{10}$

［**4**］△ABD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{BD}^2=1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cos60^\circ=3\qquad\text{ゆえに}\quad \mathrm{BD}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

円 O の直径 $2R$ は，正弦定理により　$2R=\dfrac{\mathrm{BD}}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin60^\circ}=\boldsymbol{2}$

$\angle\mathrm{C}=120^\circ$ であるから，$x=\mathrm{CD}$ とおいて，余弦定理に適用すると

$$(\sqrt{3})^2=x^2+(2x)^2-2\cdot x\cdot2x\cos120^\circ\quad\text{ゆえに}\quad x^2=\frac{3}{7}$$

したがって　$\mathrm{BC}=2x=2\sqrt{\dfrac{3}{7}}=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{21}}{7}}$

四角形 ABCD の面積は

$$\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sin60^\circ+\frac{1}{2}\cdot x\cdot2x\sin120^\circ=(1+x^2)\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{7}\sqrt{3}}$$

(答) ノ. $\sqrt{3}$　ハ. 2　ヒ. $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$　フ. $\dfrac{5\sqrt{3}}{7}$

9.11　平成 29 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $2x^2-2y^2+3xy+x+7y-3$ を因数分解すると，$\boxed{\text{ア}}\times\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) a を有理数とする。$x=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$，$y=a(2+\sqrt{2})$ に対して，$x+y$ が有理数であれば，$a=\boxed{\text{ウ}}$ であり，$x^2+y^2=\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 不等式 $3|x+1|<x+5$ を解くと，$\boxed{\text{オ}}<x<\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) △ABC において，AB = 12，AC = 4，∠A = 60° とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とすると，AD = $\boxed{\text{キ}}$ であり，△ABD の面積は $\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $a<3$ とする。次のデータの中央値は $\boxed{\text{ケ}}$ である。中央値と平均値が等しいとき $a=\boxed{\text{コ}}$ である。

$a,\ 3,\ \ 7,\ \ 1,\ \ 4$

[2] (1) 2 次不等式 $x^2+2ax+3-2a>0$ の解がすべての実数であるとき，定数 a の値の範囲は $\boxed{\text{サ}}<a<\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) $a\neq 0$ とする。2 次関数 $y=x^2-2ax+b$ のグラフを，y 軸方向に -1 だけ平行移動したグラフは x 軸に接し，かつ，y 軸との交点の y 座標と頂点の x 座標は等しい。このとき，$a=\boxed{\text{ス}}$，$b=\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次関数 $y=-2x^2+4x+a$ の最大値と 2 次関数 $y=x^2-4x+4a+3$ の最小値が等しいとき，実数 a の値は，$a=\boxed{\text{ソ}}$ であり，$y=-2x^2+4x+a$ の最大値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $0°<\theta<180°$ とする。$3\tan\theta=2\cos\theta$ を満たす θ は，$\theta=\boxed{\text{チ}}$, $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 次の表で与えられるデータ A とデータ B について，分散が大きい方はデータ $\boxed{\text{テ}}$ であり，そのデータの四分位範囲は $\boxed{\text{ト}}$ である。

A	122	126	130	134	138
B	15	25	30	35	45

[3] 実数 x に対して $f(x)=|x|-|x-1|+|x-3|$ とおく。x の値の範囲で場合分けすると，$f(x)$ は絶対値記号を含まない 1 次式で表すことができる。例えば，$0\leqq x<1$ のとき $f(x)=\boxed{\text{ナ}}$，$1\leqq x<3$ のとき $f(x)=\boxed{\text{ニ}}$ である。実数全体を定義域とする関数 $y=f(x)$ の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。また，方程式 $f(x)=\sqrt{5}$ は異なる $\boxed{\text{ネ}}$ 個の実数解をもつ。

[4] △ABC の外接円の半径を R，BC $=$ 4 とする。$\sin A$ を R を用いて表すと，$\sin A =$ ノ である。△ABC の 3 つの角の間に

$$3\sin A = 4\sin B = 6\sin C$$

が成り立つとき，$\cos A =$ ハ，$\sin A =$ ヒ であり，$R =$ フ である。

解答例

［**1**］(1) $2x^2-2y^2+3xy+x+7y-3=\boldsymbol{(x+2y-1)(2x-y+3)}$

(答) ア. イ. $x+2y-1,\ 2x-y+3$

(2) $x=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ より

$$x+y=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+a(2+\sqrt{2})=(2a+1)+\left(a-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2}$$

$x+y$ が有理数であるから

$$a-\frac{1}{2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$$

したがって　　$x+y=2,\ xy=\dfrac{1}{2}$

よって　　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{3}$

(答) ウ. $\dfrac{1}{2}$　エ. 3

(3) $|3(x+1)|<x+5$ より

$$-(x+5)<3(x+1)<x+5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-2<x<1}$$

(答) オ. -2　カ. 1

(4) $x=\mathrm{AD}$ とおくと，$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 12\cdot x\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 4\sin 60^\circ$$

$$3x+x=12\sqrt{3}$$

$$x=\boldsymbol{3\sqrt{3}}$$

よって　　$\triangle\mathrm{ABD}=\dfrac{1}{2}\cdot 12\cdot 3\sqrt{3}\sin 30^\circ=\boldsymbol{9\sqrt{3}}$

(答) キ. $3\sqrt{3}$　ク. $9\sqrt{3}$

(5) $a<3$ より，中央値は　**3**

中央値と平均値が等しいから

$$3=\frac{a+3+7+1+4}{5} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=0}$$

(答) ケ. 3　コ. 0

[2] (1) 与えられた不等式から　$(x+a)^2-a^2-2a+3>0$

この不等式の解がすべての実数であるから

$$-a^2-2a+3>0 \quad \text{ゆえに} \quad (a+3)(a-1)<0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-3<a<1}$

(答) サ. -3　シ. 1

(2) 与えられた放物線は　$y=(x-a)^2-a^2+b$

これを y 軸方向に -1 だけ平行移動すると

$$y=(x-a)^2-a^2+b-1 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ の頂点 $(a,-a^2+b-1)$ は，x 軸上にあるから

$$-a^2+b-1=0 \quad \cdots①$$

$(*)$ に $x=0$ を代入すると　$y=b-1$

これが，$(*)$ の頂点の x 座標に等しいから

$$b-1=a \quad \cdots②$$

①，② から，$a\neq 0$ に注意してこれを解くと

$$\boldsymbol{a=1,\ b=2}$$

(答) ス. 1　セ. 2

(3) $y=-2x^2+4x+a=-2(x-1)^2+a+2$ の最大値は　$a+2$

$y=x^2-4x+4a+3=(x-2)^2+4a-1$ の最小値は　$4a-1$

条件から　$a+2=4a-1$　これを解いて　$\boldsymbol{a=1}$

よって，$y=-2x^2+4a+a$ の最大値は　$\boldsymbol{3}$

(答) ソ. 1　タ. 3

(4) $3\tan\theta=2\cos\theta$ より　$\dfrac{3\sin\theta}{\cos\theta}=2\cos\theta$　ゆえに　$3\sin\theta=2\cos^2\theta$

したがって　$3\sin\theta=2(1-\sin^2\theta)$

$$(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)=0$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より，$0<\sin\theta\leqq 1$ であるから

$$\sin\theta=\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{\theta=30^\circ,\ 150^\circ}$$

(答) チ. ツ. 30°, 150°

(5) データ A の平均は 130，データ B の平均は 30 であるから

$$\sigma_A{}^2 = \frac{1}{5}\{(122-130)^2+(126-130)^2+(130-130)^2 + (134-130)^2+(138-130)^2\} = 32$$

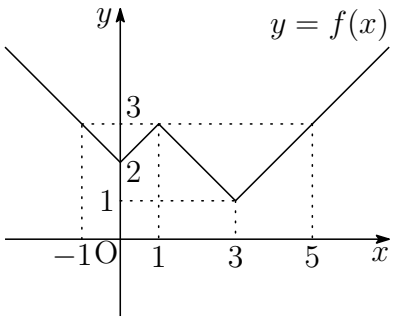
$$\sigma_B{}^2 = \frac{1}{5}\{(15-30)^2+(25-30)^2+(30-30)^2 + (35-30)^2+(45-30)^2\} = 100$$

分散が大きい方は，**データ B**，その四分位範囲は　$35-25=$ **10**

(答) テ. B　ト. 10

［3］ $f(x)=|x|-|x-1|+|x-3|$

$x<0$ のとき　　$f(x)=-x-(-x+1)+(-x+3)=-x+2$
$0 \leqq x<1$ のとき　$f(x)=x-(-x+1)+(-x+3)=\boldsymbol{x+2}$
$1 \leqq x<3$ のとき　$f(x)=x-(x-1)+(-x+3)=\boldsymbol{-x+4}$
$3 \leqq x$ のとき　　$f(x)=x-(x-1)+(x-3)=x-2$



上のグラフから，求める最小値は **1.**

方程式 $f(x)=\sqrt{5}$ の解の個数は，$y=f(x)$ と $y=\sqrt{5}$ の交点の個数であるから，上のグラフから，求める個数は **4** 個.

(答) ナ. $x+2$　ニ. $-x+4$　ヌ. 1　ネ. 4

［4］正弦定理により $\dfrac{4}{\sin A} = 2R$ ゆえに $\boldsymbol{\sin A = \dfrac{2}{R}}$

$3\sin A = 4\sin B = 6\sin C$ より $\dfrac{\sin A}{4} = \dfrac{\sin B}{3} = \dfrac{\sin C}{2}$

したがって，正弦定理により

$$a = 4k,\quad b = 3k,\quad c = 2k \quad (k \text{ は定数})$$

とおくと

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (4k)^2}{2\cdot 3k\cdot 2k} = \boldsymbol{-\frac{1}{4}}$$

したがって $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$

$$R = \frac{2}{\sin A} = 2 \times \frac{4}{\sqrt{15}} = \boldsymbol{\frac{8}{\sqrt{15}}}$$

(答) ノ. $\dfrac{2}{R}$ ハ. $-\dfrac{1}{4}$ ヒ. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ フ. $\dfrac{8}{\sqrt{15}}$

9.12　平成 29 年度一般試験 (90 分)

［1］(1) 整式 $x^5-3x^4-2x^3+3x^2+5x-1$ を整式 x^3+3 で割ると，商は［ア］，余りは［イ］である。

(2) 直線 $2x-y+3=0$ に関して，点 $\mathrm{P}(3,\ 4)$ と対称な点 Q の座標を $(a,\ b)$ とするとき，$a=$［ウ］，$b=$［エ］である。

(3) $\sin\dfrac{14}{3}\pi=$［オ］，$\cos\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=$［カ］である。

(4) 連立方程式 $8^x=4^{y+1}$，$9^{x+2}=27^y$ を解くと $x=$［キ］，$y=$［ク］である。

(5) 関数 $y=x^3-12x$ の $-3\leqq x\leqq 1$ における最大値は［ケ］，最小値は［コ］である。

［2］(1) 3 次方程式 $x^3-3x^2-4x+12=0$ の 3 つの解を α，β，γ で表すとき，$\alpha+\beta+\gamma=$［サ］，$\alpha\beta\gamma=$［シ］である。

(2) 原点 O と点 $\mathrm{A}(a,\ a^2+1)$ について，線分 OA を 2 : 1 に内分する点 B の座標は［ス］であり，点 A が放物線 $y=x^2+1$ の上を動くとき，点 B の軌跡の方程式は $y=$［セ］である。

(3) 定数 $a,\ b$ $(a>0)$ に対して $3\sin\theta-4\cos\theta=a\sin(\theta+b)$ が成り立つとき，$a=$［ソ］，$\tan b=$［タ］である。

(4) 不等式 $2\log_2(x+1)<\log_2(1-x)$ の解は［チ］$<x<$［ツ］である。

(5) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt=2x^2-3x-2$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a $(a>0)$ は，$f(x)=$［テ］，$a=$［ト］である。

［3］放物線 $y=x^2+(a-1)x-a$ $(a>0)$ 上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り，傾き -1 の直線を ℓ，傾き 1 の直線を m とする。放物線と直線 ℓ の A 以外の交点を B，放物線と直線 m の A 以外の交点を C とする。線分 AB，AC の長さを a を用いて表すと AB =［ナ］，AC =［ニ］である。BC = 6 のとき $a=$［ヌ］であり，△ABC の面積は［ネ］となる。

［4］放物線 $y=1-x^2$ の上に点 $\mathrm{A}(a,\ 1-a^2)$ をとる。ただし，$0<a<1$ とする。点 A を通る接線 ℓ の方程式は $y=$［ノ］である。x 軸上に点 $\mathrm{B}(a,\ 0)$ および接線 ℓ と x 軸の交点 C をとり，△ABC の面積を S_1 とすると，$S_1=$［ハ］となる。さらに x 軸上に点 $\mathrm{D}(-1,\ 0)$ をとり，直線 AD と放物線 $y=1-x^2$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると，$S_2=$［ヒ］となる。$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{3}{2}$ のとき，$a=$［フ］である。

解答例

［1］(1)

$$
\begin{array}{rr|l}
 & & x^2\ -3x\ \ -2 \\
\hline
x^3 & +3 & x^5\ -3x^4\ -2x^3\ +3x^2\ +5x\ -1 \\
 & & x^5\qquad\quad\ +3x^2 \\
\hline
 & & \quad -3x^4\ -2x^3\qquad +5x \\
 & & \quad -3x^4\qquad\quad\ -9x \\
\hline
 & & \qquad\quad -2x^3\qquad +14x\ -1 \\
 & & \qquad\quad -2x^3\qquad\quad\ -6 \\
\hline
 & & \qquad\qquad\qquad\quad\ 14x\ +5
\end{array}
$$

よって　商は $\boldsymbol{x^2-3x-2}$，余りは $\boldsymbol{14x+5}$

(答) ア. x^2-3x-2　イ. $14x+5$

(2) 2 点 P，Q の中点 $\left(\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{b+4}{2}\right)$ は直線 $2x-y+3=0$ 上の点であるから

$$2\cdot\frac{a+3}{2}-\frac{b+4}{2}+3=0 \quad \text{ゆえに} \quad 2a-b=-8 \quad \cdots ①$$

直線 $2x-y+3=0$ の傾きは 2，直線 PQ の傾きは $\dfrac{b-4}{a-3}$ であるから

$$2\cdot\frac{b-4}{a-3}=-1 \quad \text{ゆえに} \quad a+2b=11 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{a=-1,\ b=6}$

(答) ウ. -1　エ. 6

(3) $\sin\dfrac{14}{3}\pi=\sin\dfrac{2}{3}\pi=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$,　$\cos\left(-\dfrac{5}{3}\pi\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

(答) オ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　カ. $\dfrac{1}{2}$

(4) $8^x=4^{y+1}$,　$9^{x+2}=27^y$ より

$$2^{3x}=2^{2(y+1)},\quad 3^{2(x+2)}=3^{3y}$$

したがって　$3x=2(y+1)$,　$2(x+2)=3y$

これを解いて　$\boldsymbol{x=\dfrac{14}{5},\ \ y=\dfrac{16}{5}}$

(答) キ. $\dfrac{14}{5}$　ク. $\dfrac{16}{5}$

(5) $y = x^3 - 12x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

したがって，$-3 \leqq x \leqq 1$ における y の増減表は

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y	9	↗	16	↘	-11

よって，$x = -2$ のとき，最大値 **16**，$x = 1$ のとき，最小値 **-11**

(答) ケ. 16　コ. -11

［**2**］(1) 3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ の解が α，β，γ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{-3}{1} = \mathbf{3}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{12}{1} = \mathbf{-12}$$

(答) サ. 3　シ. -12

(2) 原点 O と点 A$(a,\ a^2+1)$ を結ぶ線分 OA を 2 : 1 に内分する点 B の座標は

$$\left(\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{a},\ \frac{\boldsymbol{2a^2+2}}{\mathbf{3}}\right)$$

$x = \dfrac{2}{3}a$，$y = \dfrac{2a^2+2}{3}$ とおいて，a を消去すると

$$3y = 2\left(\frac{3}{2}x\right)^2 + 2 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}}$$

(答) ス. $\left(\dfrac{2}{3}a,\ \dfrac{2a^2+2}{3}\right)$　セ. $\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}$

(3) $\cos b = \dfrac{3}{5}$，$\sin b = -\dfrac{4}{5}$ とおくと

$$\begin{aligned} 3\sin\theta - 4\cos\theta &= 5(\sin\theta\cos b + \cos\theta\sin b) \\ &= 5\sin(\theta + b) \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a = 5}$，$\tan b = \dfrac{\sin b}{\cos b} = \boldsymbol{-\dfrac{4}{3}}$

(答) ソ. 5　タ. $-\dfrac{4}{3}$

(4) $2\log_2(x+1) < \log_2(1-x) \quad \cdots ①$

真数は正であるから

$$x+1>0,\ \ 1-x>0 \quad \text{すなわち} \quad -1<x<1 \quad \cdots ②$$

① から $\log_2(x+1)^2 < \log_2(1-x)$

底 2 は 1 より大きいから

$$(x+1)^2 < 1-x \quad \text{ゆえに} \quad x(x+3)<0$$

② に注意して，これを解くと $\boldsymbol{-1<x<0}$

(答) チ. -1　ツ. 0

(5) $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = 2x^2-3x-2 \quad \cdots (*)$

$(*)$ を x について微分すると $\boldsymbol{f(x)=4x-3}$

$(*)$ に $x=a$ を代入すると

$$0=2a^2-3a-2 \quad \text{ゆえに} \quad (a-2)(2a+1)=0$$

$a>0$ に注意して，これを解くと $\boldsymbol{a=2}$

(答) テ. $4x-3$　ト. 2

［**3**］$y = x^2 + (a-1)x - a\ (a > 0)$　$\cdots(*)$

直線 ℓ の方程式は

$y = -1(x-1)$　すなわち　$y = -x + 1$　$\cdots$①

直線 m の方程式は

$y = 1(x-1)$　すなわち　$y = x - 1$　$\cdots$②

$(*)$，① から y を消去すると

$x^2 + (a-1)x - a = -x + 1$　ゆえに　$(x-1)(x+a+1) = 0$

したがって，点 B の x 座標は　$-a-1$

$a > 0$ より　　$\mathrm{AB} = \sqrt{2}\,|1 - (-a-1)| = \boldsymbol{\sqrt{2}\,(a+2)}$

$(*)$，② から y を消去すると

$x^2 + (a-1)x - a = x - 1$　ゆえに　$(x-1)(x+a-1) = 0$

したがって，点 C の x 座標は　$-a+1$

$a > 0$ より　　$\mathrm{AC} = \sqrt{2}\,|1 - (-a+1)| = \boldsymbol{\sqrt{2}\,a}$

$\angle \mathrm{BAC} = 90^\circ$ より，$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = \mathrm{BC}^2$ であるから

$2(a+2)^2 + 2a^2 = 36$　整理すると　$a^2 + 2a - 7 = 0$

$a > 0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a = 2\sqrt{2} - 1}$

このとき　$\mathrm{AB} = \sqrt{2}(2\sqrt{2}+1)$，$\mathrm{AC} = \sqrt{2}(2\sqrt{2}-1)$，

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC} = \boldsymbol{7}$$

(答) ナ. $\sqrt{2}\,(a+2)$　ニ. $\sqrt{2}\,a$　ヌ. $2\sqrt{2}-1$　ネ. 7

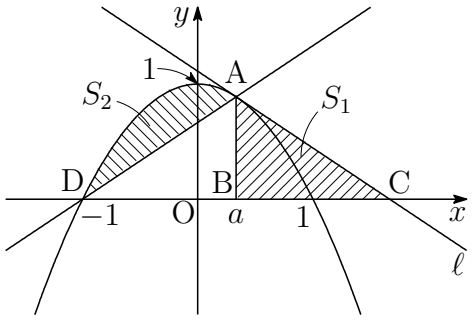
［**4**］$y = 1 - x^2$ を微分すると

$$y' = -2x$$

接線 ℓ の方程式は

$$y - (1 - a^2) = -2a(x - a)$$

$$y = \boldsymbol{-2ax + a^2 + 1}$$



点 C の x 座標は，上式に $y = 0$ を代入すると

$$-2ax + a^2 + 1 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{a^2 + 1}{2a}$$

したがって

$$S_1 = \frac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{BC} = \frac{1}{2}(1 - a^2)\left(\frac{a^2 + 1}{2a} - a\right) = \boldsymbol{\frac{(1 - a^2)^2}{4a}}$$

2 点 A，D の x 座標に注意して

$$S_2 = \frac{1}{6}\{a - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{(1 + a)^3}{6}}$$

$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{3}{2}$ のとき

$$\frac{(1 - a^2)^2}{4a} \times \frac{6}{(1 + a)^3} = \frac{3}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{(1 - a)^2}{a(1 + a)} = 1$$

これを解いて $\boldsymbol{a = \dfrac{1}{3}}$

(答) ノ. $-2ax + a^2 + 1$　ハ. $\dfrac{(1 - a^2)^2}{4a}$　ヒ. $\dfrac{(1 + a)^3}{6}$　フ. $\dfrac{1}{3}$

9.13　平成 28 年度推薦前期試験 (90 分)

[1] (1) $(x+1)^2(x+3) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ ならば，定数 a，b の値は $a =$ ア，$b =$ イ である。

(2) $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27} + \sqrt{72} = a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$ とおく．ただし，a，b は整数とする。このとき $a =$ ウ，$b =$ エ である。

(3) $y = x^2 + x + 2$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における最大値は オ，最小値は カ である。

(4) $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$ $(0° < \theta < 90°)$ のとき，$\cos\theta =$ キ，$\sin\theta =$ ク である。

(5) 次のデータの平均値は ケ であり，標準偏差は コ である。

4,　6,　7,　8,　10

[2] (1) 現金 3000 円を持って，1 個 180 円のリンゴと 1 個 140 円のミカンを合わせて 20 個買う。リンゴを出来るだけ多く買うとき，買えるリンゴの個数は最大 サ 個であり，このときミカンの個数は シ 個である。

(2) 放物線 $y = -x^2 + 2x - 3$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動すると放物線 $y = -x^2 - 4x - 5$ が得られた。このとき $a =$ ア，$b =$ イ である。

(3) 2 次不等式 $ax^2 + bx - 1 < 0$ の解が，$-1 < x < 2$ であれば，$a =$ ソ，$b =$ タ である。

(4) $\dfrac{11}{6}$ を循環小数で表すと チ，循環小数 $0.\dot{1}\dot{5}$ を分数で表すと ツ である。

(5) 次のデータの中央値は テ であり，四分位範囲は ト である。

8,　4,　6,　2,　10,　13

[3] 2 次方程式 $x^2 - x - \dfrac{10}{9} = 0$ の解は $x =$ ナ, ニ である。関数 $f(x) = \left|x^2 - x - \dfrac{10}{9}\right|$ は $0 \leqq x \leqq 2$ において，$x =$ ヌ のとき最大値 ネ をとる。

[4] 1 辺の長さが 6 の正四面体 OABC において，辺 OA 上に OP = 2 をみたす点 P，辺 OC 上に OQ = 1 をみたす点 Q をとる。このとき，BP = ノ，BQ = $\sqrt{31}$，PQ = ハ である。したがって，$\sin\angle$PBQ = ヒ であり，△BPQ の面積は フ となる。

解答例

［**1**］(1) 左辺を整理すると

$$x^3+5x^2+7x+3=x^3+ax^2+bx+3$$

係数を比較して　$\boldsymbol{a=5,\ b=7}$

$$\begin{aligned}2x^2+y^2+3xy+x+2y-3&=2x^2+(3y+1)x+(y-1)(y+3)\\&=\{x+(y-1)\}\{2x+(y+3)\}\\&=\boldsymbol{(x+y-1)(2x+y+3)}\end{aligned}$$

(答) ア. 5　イ. 7

(2) 左辺を整理すると　$6\sqrt{2}-\sqrt{3}=a\sqrt{2}+b\sqrt{3}\quad\cdots(*)$

したがって　　$\boldsymbol{a=6,\ b=-1}$

解説 $b+1\neq 0$ とすると，$(*)$ より　$\dfrac{6-a}{b+1}=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

a，b は整数であるから，左辺は有理数．右辺は無理数であるから不適．

$b+1=0$，すなわち，$b=-1$ であるから，$(*)$ より　$a=6$

(答) ウ. 6　エ. -1

(3) $y=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ であるから

$x=1$ のとき最大値 $\boldsymbol{4}$，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{7}{4}}$

(答) オ. 4　カ. $\dfrac{7}{4}$

(4) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ により

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\quad\text{ゆえに}\quad\cos^2\theta=\frac{9}{25}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$ であるから　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{3}{5}}$

また　　$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{4}{3}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

(答) キ. $\dfrac{3}{5}$　ク. $\dfrac{4}{5}$

(5) 平均 $\overline{x}$ は　　$\overline{x} = \dfrac{4+6+7+8+10}{5} = \mathbf{7}$

標準偏差 s は

$$5s^2 = (4-7)^2 + (6-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (10-7)^2 = 20$$

よって　$s = 2$

(答) ケ. 7　コ. 2

［**2**］(1) リンゴを x 個買うとすると

$$180x + 140(20-x) \leqq 3000 \quad \text{これを解いて} \quad x \leqq 5$$

リンゴの個数は最大 **5** 個，このときミカンの個数は **15** 個.

(答) サ. 5　シ. 15

(2) $y = -x^2 + 2x - 3 = -(x-1)^2 - 2 \cdots ①$,
$y = -x^2 - 4x - 5 = -(x+2)^2 - 1 \cdots ②$
① の頂点は $(1, -2)$，② の頂点は $(-2, -1)$
したがって　$a = -2 - 1 = \mathbf{-3}$,　　$b = -1 - (-2) = \mathbf{1}$

(答) ス. -3　セ. 1

(3) $-1 < x < 2$ を解とする 2 次不等式は

$$(x+1)(x-2) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - x - 2 < 0$$

定数項に注意して　$\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - 1 < 0$　　よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$, $\boldsymbol{b = -\dfrac{1}{2}}$

(答) ソ. $\dfrac{1}{2}$　タ. $-\dfrac{1}{2}$

(4) $\dfrac{11}{6} = 1.8333\cdots = \mathbf{1.8\dot{3}}$
$x = 0.\dot{1}\dot{5}$ とおくと　$100x = 15.\dot{1}\dot{5}$
ゆえに　$100x - x = 15$　よって　$x = \dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{33}}$

(答) チ. $1.8\dot{3}$　ツ. $\dfrac{5}{33}$

(5) 6 個のデータを整理すると　2,　4,　6,　8,　10,　13
中央値は　$\dfrac{6+8}{2} = \mathbf{7}$，第 1 四分位数 4，第 3 四分位数 10 より四分位範囲は　$10 - 4 = \mathbf{6}$

(答) テ. 7　ト. 6

[3] $x^2 - x - \dfrac{10}{9} = 0$ を解いて $\quad x = \boldsymbol{\dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{3}}$

$x^2 - x - \dfrac{10}{9} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{49}{36}$

したがって，$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{49}{36}$，$f(2) = \dfrac{8}{9}$

よって，$x = \boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{49}{36}}$

(答) ナ. ニ. $\dfrac{5}{3}, -\dfrac{2}{3}$　ヌ. $\dfrac{1}{2}$　ネ. $\dfrac{49}{36}$

[4] △OBP および △OPQ に余弦定理を適用すると

$\mathrm{BP}^2 = 6^2 + 2^2 - 2{\cdot}6{\cdot}2\cos 60^\circ = 28$　　ゆえに　$\mathrm{BP} = \boldsymbol{2\sqrt{7}}$

$\mathrm{PQ}^2 = 2^2 + 1^2 - 2{\cdot}2{\cdot}1\cos 60^\circ = 3$　　ゆえに　$\mathrm{PQ} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$

余弦定理を △BPQ に適用すると

$$\cos\angle\mathrm{PBQ} = \frac{(2\sqrt{7})^2 + (\sqrt{31})^2 - (\sqrt{3})^2}{2{\cdot}2\sqrt{7}{\cdot}\sqrt{31}} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}}$$

ゆえに　$\sin\angle\mathrm{PBQ} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{31}}\right)^2} = \sqrt{\boldsymbol{\dfrac{3}{31}}}$

また　$\triangle\mathrm{BPQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BP}{\cdot}\mathrm{BQ}\sin\angle\mathrm{PBQ} = \dfrac{1}{2}{\cdot}2\sqrt{7}{\cdot}\sqrt{31}{\cdot}\sqrt{\dfrac{3}{31}} = \boldsymbol{\sqrt{21}}$

(答) ノ. $2\sqrt{7}$　ハ. $\sqrt{3}$　ヒ. $\sqrt{\dfrac{3}{31}}$　フ. $\sqrt{21}$

9.14　平成 28 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $(ax+y-2)(2y-x-1) = -2x^2+bxy+2y^2-5y+2$ ならば $a =$ ア，$b =$ イ である。

(2) $a = \dfrac{1}{\sqrt{13}+2\sqrt{3}}$，$b = \dfrac{1}{\sqrt{13}-2\sqrt{3}}$ のとき，$a+b =$ ウ であり，$a+b$ の整数部分は エ である。

(3) 2 次関数 $y = x^2+ax+b$ は $x = 2$ のとき最小値 1 をとる。このとき $a =$ オ，$b =$ カ である。

(4) $0° < \theta < 90°$ とする。$\tan\theta = 2$ のとき，$\cos\theta =$ キ，$\sin\theta =$ ク である。

(5) 5 個の数値からなるデータ $2, -1, a, 5, 3$ の平均値は 2 である。このとき，$a =$ ケ であり，標準偏差は コ である。

[2] (1) 1 本 100 円の鉛筆を店 A では 10%引き，店 B では 10 本までは定価で 11 本目からは 16%引きで売っている。A で 20 本買うとき支払う金額は，B で 20 本買うとき支払う金額より サ 円少ない。また B で買うとき支払う金額が，A で買うとき支払う金額より少なくなるのは，鉛筆を シ 本以上買うときである。

(2) x 軸に接している放物線 $y = x^2-2ax+b$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動させると，グラフと y 軸との交点の y 座標が移動する前より 5 小さくなった。このとき，$a =$ ス，$b =$ セ である。

(3) 不定式 $x+2 < x^2 < 5x-4$ の解は ソ $< x <$ タ である。

(4) △ABC において，AB = 3，BC = 5，AC = 7 のとき，∠B = チ ° であり，△ABC の面積は ツ である。

(5) 5 個の数値からなるデータ $-3, -1, 1, 4, a$ の中央値は 1 である。このとき $a \geqq$ テ であり，さらに範囲が 8 であれば $a =$ ト である。

[3] 不等式 $|2x-4| \leqq x+1$ を解くと ナ $\leqq x \leqq$ ニ である。この範囲を定義域とする関数 $y = -2x^2+8x-1$ は $x =$ ヌ のとき，最小値 ネ をとる。

[4] △ABC において，AC = 2，∠B = 45°，∠C = 30° とする。辺 BC 上に，B，C とは異なる点 P をとる。△ABP と △APC の外接円の半径をそれぞれ r と R とすると，$\dfrac{r}{R} =$ ノ である。$r+R$ の最小値は ハ であり，このとき BP = ヒ，PC = フ である。

解答例

［**1**］(1) 左辺を整理すると

$$-ax^2+(2a-1)xy+2y^2+(-a+2)x-5y+2=-2x^2+bxy+2y^2-5y+2$$

係数を比較して　$-a=-2,\quad 2a-1=b,\quad -a+2=0$
これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=3}$

(答) ア. 2　イ. 3

(2) $a=\sqrt{13}-2\sqrt{3}$，$b=\sqrt{13}+2\sqrt{3}$ であるから

$$a+b=2\sqrt{13}=\sqrt{52},\quad 7<\sqrt{52}<8$$

よって，$a+b$ の整数部分は　$\boldsymbol{7}$

(答) ウ. $2\sqrt{13}$　エ. 7

(3) 条件から，与えられた 2 次関数は，x^2 の係数に注意して

$$y=(x-2)^2+1\quad \text{すなわち}\quad y=x^2-4x+5$$

よって　$\boldsymbol{a=-4,\ b=5}$

(答) オ. -4　カ. 5

(4) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ により

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+2^2=5\quad \text{ゆえに}\quad \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より，$\cos\theta>0$ であるから　$\boldsymbol{\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

また　　$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times 2=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) キ. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　ク. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(5) 条件から　$\dfrac{2+(-1)+a+5+3}{5}=2$　これを解いて　$\boldsymbol{a=1}$
したがって，標準偏差 s は

$$s^2=\frac{1}{5}\{2^2+(-1)^2+1^2+5^2+3^2\}-2^2=4\quad \text{よって}\quad s=\boldsymbol{2}$$

(答) ケ. 1　コ. 2

［**2**］(1) 店 A で鉛筆を 20 本買った金額は　$100 \times 0.9 \times 20 = 1800$ 円
店 B で鉛筆を 20 本買った金額は　$100 \times 10 + 100 \times 0.84 \times 10 = 1840$ 円
このとき，店 A で支払う金額は店 B で支払う金額より **40** 円少ない．
また B で買うとき支払う金額が，A で買うとき支払う金額より少なくなる鉛筆の本数を x とすると

$$100 \times 10 + 100 \times 0.84 \times (x - 10) < 100 \times 0.9 \times x$$

これを解いて　$x > \dfrac{80}{3}$ $(= 26.6\cdots)$　よって　**27** 本以上

(答) サ. 40　シ. 27

(2) $y = x^2 - 2ax + b = (x - a)^2 + b - a^2$
これが，x 軸に接しているから　$b - a^2 = 0$　すなわち　$b = a^2$　$\cdots(*)$
したがって，もとの放物線は　$y = (x - a)^2$　$\cdots$①
これを x 軸方向に 1 だけ平行移動した放物線の方程式は

$$y = (x - a - 1)^2 \quad \cdots②$$

①，② の y 軸との交点の y 座標は，それぞれ a^2，$(a + 1)^2$
条件から　$a^2 - (a + 1)^2 = 5$　これを解いて　$\boldsymbol{a = -3}$　$(*)$ より　$\boldsymbol{b = 9}$

(答) ス. -3　セ. 9

(3) $x + 2 < x^2 < 5x - 4$
$x + 2 < x^2$　これを解いて　$x < -1,\ 2 < x$　$\cdots$①
$x^2 < 5x - 4$　これを解いて　$1 < x < 4$　$\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{2 < x < 4}$

(答) ソ. 2　タ. 4

(4) $a = 5$，$b = 7$，$c = 3$ であるから，余弦定理により

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{B = 120^\circ}$$

したがって，△ABC の面積は

$$\frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{15}{4}\sqrt{3}}$$

(答) チ. 120　ツ. $\dfrac{15}{4}\sqrt{3}$

(5) 中央値が 1 であるとき　$\boldsymbol{a \geqq 1}$
さらに範囲が 8 であるとき　$a - (-3) = 8$　よって　$\boldsymbol{a = 5}$

(答) テ. 1　ト. 5

[3] $|2x-4| \leqq x+1$ より　$-(x+1) \leqq 2x-4 \leqq x+1$

これを解いて　$\boldsymbol{1 \leqq x \leqq 5}$

$y = -2x^2+8x-1 = -2(x-2)^2+7 \ (1 \leqq x \leqq 5)$

$\boldsymbol{x=5}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-11}$ をとる．

(答) ナ. 1　ニ. 5　ヌ. 5　ネ. -11

[4] △ABC に正弦定理を適用すると

$$\frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{\mathrm{AB}}{\sin 30^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AB} = \sqrt{2}$$

$\theta = \angle \mathrm{APB}$ とし，正弦定理を △ABP および △APC に適用すると

$$2r = \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta}, \quad 2R = \frac{2}{\sin(180^\circ-\theta)} = \frac{2}{\sin\theta}$$

上の 2 式から　$\dfrac{r}{R} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$，$r+R = \dfrac{\sqrt{2}+2}{2\sin\theta}$

また，$r+R$ は，$\theta = 90^\circ$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}}$ をとる．

このとき，$\boldsymbol{\mathrm{BP}=1}$，$\boldsymbol{\mathrm{PC}=\sqrt{3}}$

(答) ノ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ハ. $\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}$　ヒ. 1　フ. $\sqrt{3}$

9.15　平成 28 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{3+i}{3-i}=a+bi$ を満たす実数 a，b は，$a=$ ア，$b=$ イ である。ただし，i は虚数単位を表す。

(2) ある直線 ℓ に関して，点 $(-1,\ 1)$ と対称な点が $(1,\ 0)$ であるとき，直線 ℓ の y 切片は ウ，傾きは エ である。

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする。$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=$ オ，
$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=$ カ である。

(4) 方程式 $3^x+3^{3-x}=12$ の解は $x=$ キ と $x=$ ク である．

(5) 関数 $F(x)$ が，$F'(x)=3x^2-8x+a$，$F(1)=F(2)=0$ を満たすとき，実数 a の値は $a=$ ケ であり，$F(x)=$ コ である。

[2] (1) $(x-1)^5$ を $x(x-1)$ で割ったときの余りを $ax+b$ とすると，$a=$ サ，$b=$ シ である。

(2) 点 $(2,\ 1)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線と円と接点の x 座標は $x=$ ス と $x=$ セ である．

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，関数 $y=-2\cos\theta+\cos 2\theta$ の最小値は ソ である。また，そのときの θ の値は $\theta=$ タ である。

(4) 不等式 $\log_5(x-3)+\log_5(x+1)<1$ を解くと，チ $<x<$ ツ である。

(5) 3 次方程式 $2x^3-3x^2-12x+a=0$ が異なる 3 つの実数解をもつための必要十分条件は テ $<a<$ ト である。

[3] 正の実数 a に対して，x 軸上に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，y 軸上に点 $\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点を P とすると，P の座標は ナ である。a が $a>0$ の範囲を動くとき，点 P の軌跡 C を表す方程式は $y=$ ニ (ただし $x>0$) となる。線分 AB と軌跡 C は 2 点で交わるが，その交点のうち P でない方の点 Q の座標は ヌ である。a が $a>0$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最小値は ネ となる。

[4] 放物線 $y=ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ 上の 2 点 $(0,\ 1)$，$(2,\ 3)$ における放物線の接線をそれぞれ ℓ，m とする。ℓ と m の交点の y 座標が 0 である。このとき，$a=$ ノ，$b=$ ハ，$c=$ ヒ である。放物線と 2 つの接線 ℓ，m で囲まれた部分の面積は フ である。

解答例

［**1**］(1) 左辺を変形すると

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= \frac{(2-i)^2}{(2+i)(2-i)} + \frac{(3+i)^2}{(3-i)(3+i)} \\ &= \frac{3-4i}{5} + \frac{8+6i}{10} = \frac{7-i}{5} = \frac{7}{5} - \frac{1}{5}i\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a = \frac{7}{5},\ b = -\frac{1}{5}}$

(答) ア. $\frac{7}{5}$　イ. $-\frac{1}{5}$

(2) ℓ は 2 点 $(-1,\ 1)$，$(1,\ 0)$ の垂直二等分線であるから，

2 点の中点は　$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，　2 点を通る直線の傾きは　$\frac{0-1}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}$

ℓ の傾きを m とすると　$-\frac{1}{2}m = -1$　すなわち　$\boldsymbol{m = 2}$

ℓ は点 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ を通るから，ℓ の y 切片は　$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(答) ウ. $\frac{1}{2}$　エ. 2

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

したがって

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{3}}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

(答) オ. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　カ. $\frac{2}{\sqrt{5}}$

(4) $t = 3^x$ とおくと $(t > 0)$，$3^{3-x} = \dfrac{27}{t}$ であるから

$$t + \frac{t}{27} = 12 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 12t + 27 = 0$$

$t > 0$ に注意してこれを解くと　$t = 3,\ 9$　よって　$\boldsymbol{x = 1,\ 2}$

(答) キ. ク. 1, 2

(5) $F'(x) = 3x^2 - 8x + a$ より

$$F(x) = x^3 - 4x^2 + ax + C \ (C \text{ は積分定数})$$

$F(1) = F(2) = 0$ より

$$a + C - 3 = 0, \quad 2a + C - 8 = 0$$

ゆえに　$\boldsymbol{a = 5}$，$C = -2$　よって　$\boldsymbol{F(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

(答) ケ. 5　コ. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$

[2] (1) $(x-1)^5$ を $x(x-1)$ で割ったときの商を $Q(x)$ とすると

$$(x-1)^5 = x(x-1)Q(x) + ax + b$$

上式に $x = 0$，$x = 1$ をそれぞれ代入すると

$$-1 = b, \quad 0 = a + b \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 1,\ b = -1}$$

(答) サ. 1　シ. -1

(2) 接点の座標を $(a,\ b)$ とすると，接点は円周上の点であるから

$$a^2 + b^2 = 1 \quad \cdots ①$$

点 $(a,\ b)$ における円の接線の方程式は　$ax + by = 1$
これが点 $(2,\ 1)$ を通るから

$$2a + b = 1 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$(a,\ b) = (0,\ 1),\ \left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$
よって，求める接点の x 座標は　$\boldsymbol{x = 0,\ \dfrac{4}{5}}$

(答) ス. セ. 0, $\dfrac{4}{5}$

(3) $0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$t = \cos\theta$ とおくと $(-1 \leqq t \leqq 1)$

$$y = -2\cos\theta + \cos 2\theta = -2\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)$$
$$= 2t^2 - 2t - 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}$$

よって　$t = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{3}}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}}$

(答) ソ. $-\dfrac{3}{2}$　タ. $\dfrac{\pi}{3}$

(4)　$\log_5(x-3) + \log_5(x+1) < 1 \quad \cdots ①$

真数は正であるから

$$x - 3 > 0, \quad x + 1 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 3 \quad \cdots ②$$

① から　$\log_5(x-3)(x+1) < \log_5 5$

底 5 は 1 より大きいから

$$(x-3)(x+1) < 5 \quad \text{ゆえに} \quad (x+2)(x-4) < 0$$

② に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{3 < x < 4}$

(答) チ. 3　ツ. 4

(5) $2x^3 - 3x^2 - 12x + a = 0 \cdots ①$ より　$a = -2x^3 + 3x^2 + 12x$

$f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x$ とおくと，方程式 ① が，異なる 3 つの実数解をもつのは，直線 $y = a$ と曲線 $y = f(x)$ が 3 点を共有するときである．

$$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = -6(x+1)(x-2)$$

$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-7	↗	20	↘

よって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{-7 < a < 20}$

(答) テ. -7　ト. 20

［**3**］P は $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(0,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を $1:2$ に内分する点であるから

$$\left(\frac{2a+1\cdot 0}{1+2},\ \frac{2\cdot 0+1\cdot\frac{1}{a}}{1+2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \left(\boldsymbol{\frac{2a}{3},\ \frac{1}{3a}}\right)$$

$x=\dfrac{2a}{3}$，$y=\dfrac{1}{3a}$ とおいて，a を消去すると　$C:xy=\dfrac{2}{9}$　$\cdots$①

直線 AB の方程式は　$\dfrac{x}{a}+ay=1$　$\cdots$②

①，② を解くと　$(x,\ y)=\left(\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{1}{3a}\right),\ \left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{2}{3a}\right)$　よって　$\mathbf{Q}\left(\boldsymbol{\frac{a}{3},\ \frac{2}{3a}}\right)$

したがって

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=\left(\frac{a}{3}-\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}-\frac{a}{3}\right)^2\\&=\frac{1}{9}\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+2\right\}\geqq\frac{2}{9}\end{aligned}$$

よって，PQ の最小値は　$\sqrt{\dfrac{2}{9}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

(答) ナ. $\left(\dfrac{2a}{3},\ \dfrac{1}{3a}\right)$　ニ. $\dfrac{2}{9x}$　ヌ. $\left(\dfrac{a}{3},\ \dfrac{2}{3a}\right)$　ネ. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

［4］ℓ と m の交点の x 座標は $\dfrac{0+2}{2}=1$

ゆえに ℓ と m の交点の座標は $(1,\ 0)$

ℓ は，2 点 $(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$ を通る直線であるから

$$y-1=\frac{0-1}{1-0}(x-0) \quad \text{すなわち} \quad y=-x+1$$

m は，2 点 $(1, 0)$，$(2,\ 3)$ を通る直線であるから

$$y-0=\frac{3-0}{2-1}(x-1) \quad \text{すなわち} \quad y=3x-3$$

$y=ax^2+bx+c$ を微分すると $y'=2ax+b$

接線の傾きにより $x=0$ のとき $y'=-1$，$x=2$ のとき $y'=3$

したがって $\boldsymbol{b=-1}$，$4a+b=3$ ゆえに $\boldsymbol{a=1}$

この放物線は点 $(0,\ 1)$ を通ることから $\boldsymbol{c=1}$

よって，求める面積は a の値と接点の x 座標に注意して

$$\frac{1}{12}\cdot 1\cdot(2-0)^3=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(答) ノ. 1　ハ. -1　ヒ. 1　フ. $\dfrac{2}{3}$

9.16　平成 27 年度推薦前期試験 (90 分)

［1］(1) $2x^2+y^2+3xy+x+2y-3$ を因数分解すると，［ア］$\times$［イ］である。

(2) $9-6\sqrt{2}=(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$ $(p>q)$ をみたす整数は $p=$［ウ］，$q=$［エ］である。

(3) 連立不等式 $3x+2<2x+5$，$4x+3 \geqq 2x-1$ の解は［オ］$\leqq x <$［カ］である。

(4) 2 次方程式 $x^2-4x-7=0$ の解は，$x=$［キ］$\pm$［ク］である。

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ のとき，$\sin\theta=$［ケ］，$\tan\theta=$［コ］である。

［2］(1) m を 0 でない実数とする。2 つの異なる 2 次方程式 $x^2-(m+1)x-m^2=0$，$x^2-2mx-m=0$ が共通の解を持つとき，実数 m の値は［サ］であり，共通の解は［シ］である。

(2) 2 次関数 $y=2x^2+ax+b$ のグラフを x 軸方向に -1，y 軸方向に 2 だけ平行移動した関数のグラフが $y=2x^2+6x+7$ のグラフと一致するならば，$a=$［ス］，$b=$［セ］である。

(3) 2 次関数 $y=-2x^2+4x+k$ $(0 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 4 であるとき，定数 k の値は［ソ］である。また，このとき最小値は［タ］である。

(4) $x^2-4x-5<0<-2x^2+2x+12$ が成り立つ x の範囲は［チ］$<x<$［ツ］である。

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき $2\cos\theta+1 \geqq 0$ を満たす θ の範囲は
［テ］$^\circ \leqq \theta \leqq$［ト］$^\circ$ である。

［3］$x+y=a$，$xy=b$ とおく。x^2+y^2，x^3+y^3 を a，b を用いて表すと $x^2+y^2=$［ナ］，$x^3+y^3=$［ニ］である。また，$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-$［ヌ］となるので，$x^5+y^5$ を a，b を用いて表すと［ネ］である。

［4］$\angle \mathrm{A}=60^\circ$ である三角形 ABC において，$\angle \mathrm{B}=\theta$ とし，A より辺 BC に下ろした垂線の足を P とする。$\mathrm{AB}=a$ とおくとき，$\mathrm{AC}=\frac{3}{2}a$ であるならば，$\mathrm{BC}=$［ノ］a で $\cos\theta=$［ハ］である。これより，BC は BP の［ヒ］倍で，$\mathrm{AP}=$［フ］a である。

解答例

［**1**］(1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned} 2x^2+y^2+3xy+x+2y-3 &= 2x^2+(3y+1)x+(y-1)(y+3) \\ &= \{x+(y-1)\}\{2x+(y+3)\} \\ &= \boldsymbol{(x+y-1)(2x+y+3)} \end{aligned}$$

(答) ア. イ. $x+y-1,\ 2x+y+3$

(2) $9-6\sqrt{2}=(\sqrt{p}-\sqrt{q})^2$ より　$9-2\sqrt{18}=p+q-2\sqrt{pq}$

したがって　　$p+q=9,\ pq=18$

これをみたす整数 $p,\ q(p>q)$ は　$\boldsymbol{p=6,\ q=3}$

(答) ウ. 6　エ. 3

(3) $3x+2<2x+5$ を解いて　　$x<3$　$\cdots$①

$4x+3 \geqq 2x-1$ を解いて　　$x \geqq -2$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-2 \leqq x<3}$

(答) オ. -2　カ. 3

(4) $x^2-4x-7=0$ を解いて　　$\boldsymbol{x=2\pm\sqrt{11}}$

(答) キ. 2　ク. 11

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta>0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}\div\dfrac{3}{4}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$

(答) ケ. $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　コ. $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

［**2**］(1) 異なる 2 つの 2 次方程式 $x^2-(m+1)x-m^2=0$，$x^2-2mx-m=0$ の共通解を α とすると

$$\begin{cases} \alpha^2-(m+1)\alpha-m^2=0 & \cdots ① \\ \alpha^2-2m\alpha-m=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①，② の辺々を引くと

$$(m-1)\alpha-m^2+m=0 \quad \text{すなわち} \quad (m-1)(\alpha-m)=0$$

$m=1$ のとき，2 つの方程式は一致するから　$\alpha=m$　$\cdots ③$
これを ① に代入すると

$$m^2-(m+1)m-m^2=0 \quad \text{すなわち} \quad (m+1)m=0$$

$m\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{m=-1}$　また，③ より　$\boldsymbol{\alpha=-1}$

(答) サ. -1　シ. -1

(2) $y=2x^2+6x+7$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$y+2=2(x-1)^2+6(x-1)+7 \quad \text{すなわち} \quad y=2x^2+2x+1$$

これが $y=2x^2+ax+b$ に一致するから　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

(答) ス. 2　セ. 1

(3) $y=-2x^2+4x+k$ を変形すると　$y=-2(x-1)^2+k+2$
$0\leqq x\leqq 3$ のとき　　$k-6\leqq y\leqq k+2$
最大値が 4 であるから　$k+2=4$　すなわち　$\boldsymbol{k=2}$
このとき，最小値は　　$k-6=\boldsymbol{-4}$

(答) ソ. 2　タ. -4

(4) $x^2-4x-5<0$ より　　$(x+1)(x-5)<0$
すなわち　　$-1<x<5$　$\cdots ①$

$0<-2x^2+2x+12$ より　　$(x+2)(x-3)<0$
すなわち　　$-2<x<3$　$\cdots ②$

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{-1<x<3}$

(答) チ. -1　ツ. 3

(5) $\cos\theta\geqq -\dfrac{1}{2}$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ を解いて　$0^\circ\leqq\theta\leqq 120^\circ$

(答) テ. 0　ト. 120

［3］ $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\boldsymbol{a^2-2b}$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=\boldsymbol{a^3-3ab}$

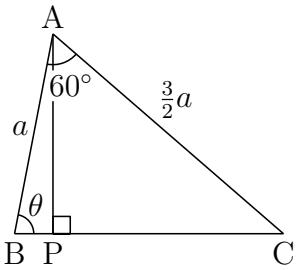
$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-\boldsymbol{x^2y^2(x+y)}$ であるから，上の 2 式から

$$\begin{aligned} x^5+y^5&=(a^2-2b)(a^3-3ab)-ab^2\\ &=\boldsymbol{a^5-5a^3b+5ab^2}\end{aligned}$$

(答) ナ. a^2-2b　ニ. a^3-3ab　ヌ. ab^2　ネ. $a^5-5a^3b+5ab^2$

［4］ 余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2&=a^2+\left(\frac{3}{2}a\right)^2-2\cdot a\cdot\frac{3}{2}a\cos 60^\circ\\ &=\frac{7}{4}a^2\end{aligned}$$



$\mathrm{BC}>0$ より　　$\mathrm{BC}=\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{7}}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{a}$

また　　$\cos\theta=\dfrac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\dfrac{a^2+\frac{7}{4}a^2-\frac{9}{4}a^2}{2\cdot a\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}a}=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{7}}}$

$\mathrm{BP}=a\cos\theta=\dfrac{a}{2\sqrt{7}}$　　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BP}}=\dfrac{\sqrt{7}a}{2}\div\dfrac{a}{2\sqrt{7}}=7$

したがって，BC は BP の **7** 倍

さらに　　$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

よって　　$\mathrm{AP}=a\sin\theta=\dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{21}}}{\boldsymbol{14}}\boldsymbol{a}$

(答) ノ. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　ハ. $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$　ヒ. 7　フ. $\dfrac{3\sqrt{21}}{4}$

9.17　平成 27 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $2x^2-2y^2+3xy-5x+5y-3=(x+ay+b)(2x+cy+1)$ ならば $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) $\sqrt{50}-\sqrt{8}+3\sqrt{18}=a\sqrt{b}$ とおく。ただし，a，b は整数とする。このとき，$a=$ ウ，$b=$ エ である。

(3) 1 冊 200 円のノート A と 1 冊 130 円のノート B を合計 13 冊購入する。2000 円を支払ったとき，A は最大 オ 冊購入でき，そのときのおつりは カ 円である。

(4) 放物線 $y=2x^2-3x+2$ を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると，2 点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 0)$ を通る。このとき，$p=$ キ，$q=$ ク である。

(5) $\tan\alpha=3$，$0^\circ<\alpha<90^\circ$ ならば，$\sin\alpha=$ ケ，$\cos\alpha=$ コ である。

[2] (1) $a=\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}$ のとき，$a^2+b^2=$ サ，$a^2-b^2=$ シ である。

(2) $-\dfrac{1}{2}x+|x-2|<3$ をみたす x の範囲は ス $<x<$ セ である。

(3) 2 次不等式 $x^2+(k+3)x-k>0$ の解が，すべての実数となるとき，定数 k の範囲は ソ $<k<$ タ である。

(4) $a>0$ のとき，$y=-x^2+2ax+b$ の $\dfrac{a}{2}\leqq x\leqq 2a$ における最大値が 5 で最小値が 1 ならば，$a=$ チ，$b=$ ツ である。

(5) 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 BC の中点を M とすると，DM $=$ テ である。これより，$\cos\angle\mathrm{ADM}=$ ト である。

[3] 定数 $a>0$ に対して，2 次関数 $y=-ax^2+2x+1$ のグラフ C の x 軸との 2 交点間の距離を d_1 とすると，$d_1=$ ナ である。また，C の頂点 P と x 軸との距離を d_2 とすると，$d_2=$ ニ である。したがって，$d_1=d_2$ となるのは $a=$ ヌ のときで，そのとき，$d_1=d_2=$ ネ である。

[4] △ABC において，AC $=2$，BC $=1$，AB $=c$，その外接円の半径を R とする。$\cos A\sin B$，$\sin A\cos B$ を c，R を用いて表すと，$\cos A\sin B=$ ノ，$\sin A\cos B=$ ハ である。$\cos A\sin B=4\sin A\cos B$ が成り立つとき，$c=$ ヒ，$R=$ フ である。

解答例

［**1**］(1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned} 2x^2-2y^2+3xy-5x+5y-3 &= 2x^2+(3y-5)x-(y-1)(2y-3) \\ &= \{x+(2y-3)\}\{2x-(y-1)\} \\ &= \boldsymbol{(x+2y-3)(2x-y+1)} \end{aligned}$$

(答) ア. 2　イ. -3

(2) $\sqrt{50}-\sqrt{8}+3\sqrt{18}=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=\boldsymbol{9\sqrt{2}}$

(答) ウ. 9　エ. 2

(3) ノート A を x 冊，ノート B を $13-x$ 冊購入すると

$$200x+130(13-x)\leqq 2000 \quad \text{ゆえに} \quad x\leqq \frac{31}{7}$$

上式をみたす最大の整数 x は　4

このとき，支払う代金は

$$200\times 4+130\times 9=1970 \ \text{(円)}$$

よって，おつりは　　$2000-1970=30$ (円)

(答) オ. 4　カ. 30

(4) $y=2x^2+bx+c$ が 2 点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 0)$ を通るとき

$$b+c=4,\ \ 3b+c=-18 \quad \text{これを解いて} \quad b=-11,\ c=15$$

$y=2x^2-3x+2=2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}$　頂点 $\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{8}\right)$

$y=2x^2-11x+15=2\left(x-\dfrac{11}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}$　頂点 $\left(\dfrac{11}{4},-\dfrac{1}{8}\right)$

よって　　$p=\dfrac{11}{4}-\dfrac{3}{4}=2$，$q=-\dfrac{1}{8}-\dfrac{7}{8}=-1$

(答) キ. 2　ク. -1

(5) $\tan\alpha=3$ を $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ に代入すると

$$1+3^2=\frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\alpha=\frac{1}{10}$$

$0^\circ<\alpha<90^\circ$ より $\cos\alpha>0$ であるから　$\cos\alpha=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{10}}}$

また　　$\sin\alpha=\cos\alpha\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{10}}\times 3=\boldsymbol{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}$

(答) ケ. $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　コ. $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

[2] (1) $a=\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{6}+2}=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$

ゆえに　$a+b=\sqrt{6}$，$a-b=2$，$ab=\dfrac{1}{2}$

よって　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(\sqrt{6})^2-2\cdot\dfrac{1}{2}=\mathbf{5}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)=\mathbf{2\sqrt{6}}$

(答) サ. 5　シ. $2\sqrt{6}$

(2)　$-\dfrac{1}{2}x+|x-2|<3$

i) $x<2$ のとき

$-\dfrac{1}{2}x-(x-2)<3$　これを解いて　$x>-\dfrac{2}{3}$

条件に注意して　$-\dfrac{2}{3}<x<2$

ii) $x\geqq 2$ のとき

$-\dfrac{1}{2}x+(x-2)<3$　これを解いて　$x<10$

条件に注意して　$2\leqq x<10$

よって，i)，ii) の結果から　$\boldsymbol{-\dfrac{2}{3}<x<10}$

(答) ス. $-\dfrac{2}{3}$　セ. 10

(3) 2 次不等式 $x^2+(k+3)x-k>0$ の解が，すべての実数となるのは，2 次関数 $y=x^2+(k+3)x-k$ のグラフが x 軸と共有点をもたないときであるから

$(k+3)^2-4\cdot 1(-k)<0$　すなわち　$(k+9)(k+1)<0$

これを解いて　$\boldsymbol{-9<k<-1}$

(答) ソ. -9　タ. -1

(4) $y=-x^2+2ax+b=-(x-a)^2+a^2+b$　$\left(\dfrac{a}{2}\leqq a\leqq 2a\right)$

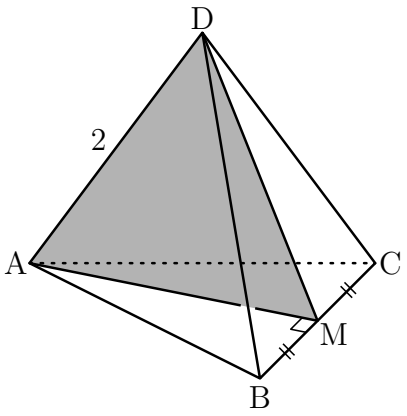
$x=a$ のとき最大値 a^2+b，$x=2a$ のとき最小値 b

したがって　　$a^2+b=5$，$\boldsymbol{b=1}$

$a>0$ に注意して，第 2 式を第 1 式に代入すると　$\boldsymbol{a=2}$

(答) チ. 2　ツ. 1

(5) 右の図から



$$\mathrm{DM} = \mathrm{AM} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ADM} = \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

(答) テ. $\sqrt{3}$　ト. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

[3] $C : y = -ax^2 + 2x + 1 = -a\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2 + \dfrac{1+a}{a}$

C と x 軸との共有点の x 座標は，$-ax^2 + 2x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+a}}{a}$$

したがって　$d_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+a}}{a} - \dfrac{1-\sqrt{1+a}}{a} = \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{1+a}}{a}}$

C の頂点の y 座標から　$d_2 = \boldsymbol{\dfrac{1+a}{a}}$

$d_1 = d_2$ のとき　$\dfrac{2\sqrt{1+a}}{a} = \dfrac{1+a}{a}$　ゆえに　$\sqrt{1+a} = 2$　よって　$\boldsymbol{a = 3}$

このとき　$d_1 = d_2 = \boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$

(答) ナ. $\dfrac{2\sqrt{1+a}}{a}$　ニ. $\dfrac{1+a}{a}$　ヌ. 3　ネ. $\dfrac{4}{3}$

［4］$a=1$，$b=2$ を正弦定理に適用すると　　$\dfrac{1}{\sin A}=\dfrac{2}{\sin B}=2R$

ゆえに　　$\sin A=\dfrac{1}{2R}$，$\sin B=\dfrac{1}{R}$

$a=1$，$b=2$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2^2+c^2-1^2}{2\cdot 2\cdot c}=\frac{c^2+3}{4c}$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{c^2+1^2-2^2}{2\cdot c\cdot 1}=\frac{c^2-3}{2c}$$

したがって

$$\cos A\sin B=\frac{c^2+3}{4c}\times\frac{1}{R}=\boldsymbol{\frac{c^2+3}{4cR}}$$
$$\sin A\cos B=\frac{1}{2R}\times\frac{c^2-3}{2c}=\boldsymbol{\frac{c^2-3}{4cR}}$$

$\cos A\sin B=4\sin A\cos B$ が成り立つとき，上式から

$c^2+3=4(c^2-3)$　これを解いて　$c=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

このとき　　$\cos A=\dfrac{(\sqrt{5})^2+3}{4\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\sin A=\dfrac{1}{2R}$ より　　$R=\dfrac{1}{2\sin A}=\dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}}$

(答) ノ. $\dfrac{c^2+3}{4cR}$　ハ. $\dfrac{c^2-3}{4cR}$　ヒ. $\sqrt{5}$　フ. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

9.18 平成 27 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) 整式 $f(x)$ を $x-1$ で割ると余りは 3，$x-2$ で割ると余りは 4 となる。このとき，$f(x)$ を x^2-3x+2 で割った余りを $ax+b$ とおくと，$a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) 2 直線 $2x-y+1=0$，$x+y-4=0$ の交点と点 $(-3,\ 5)$ を通る直線の方程式は $y=$ ウ $x+$ エ である。

(3) $\frac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ に対して，$\sin\theta+\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{5}}$ が成り立つならば，$\sin\theta-\cos\theta=$ オ，$\sin\theta=$ カ である。

(4) $a, b > 0$ が $ab=\dfrac{1}{4}$，$\log_2 a+\dfrac{1}{2}\log_2 b=-2$ をみたすなら，$a=$ キ，$b=$ ク である。

(5) 直線 $y=x$ と放物線 $y=-x(x-2)$ の交点の x 座標は 0 と ケ である。したがって，直線と放物線で囲まれた部分の面積は コ である。

[2] (1) a，b を実数とするとき，方程式 $x^3-ax^2-x-b=0$ が $x=-1+2i$ を 1 つの解としてもつなら，$a=$ サ，$b=$ シ である。

(2) 3 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通る円の中心は ス で半径は セ である。

(3) $\tan x=2$ のとき，$\cos^2 x=$ ソ，$\sin 2x=$ タ である。

(4) 関数 $y=4^{x+1}-2^{x+3}+7$ は，$x=$ チ で最小値 ツ をとる。

(5) 関数 $f(x)=2x^3-3x^2-12+6$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最小値は テ で最大値は ト である。

[3] 2 点 A$(1,\ 1)$，B$(2,\ 3)$ 間の距離は ナ である。放物線 $y=x^2+4x+1$ 上の点 P の x 座標を a とするとき，△PAB の面積 S は $S=$ ニ である。点 P が放物線上を動くとき，P $=$ ヌ のとき S は最小値 ネ をとる。

[4] 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 P$(a,\ a^2)$ $(a>0)$ における C の接線は $\ell_1: y=$ ノ である。放物線 C，接線 ℓ_1 および y 軸で囲まれる部分の面積 S_1 は ハ である。また，点 P を通り ℓ_1 と垂直な直線を ℓ_2 とするとき，放物線 C，直線 ℓ_2 および y 軸で囲まれる部分の面積 S_2 は ヒ である。特に，S_2 が S_1 の 5 倍となるのは $a=$ フ のときである。

解答例

[1] (1) 剰余の定理により　$f(1)=3$，$f(2)=4$

$f(x)$ を x^2-3x+2 で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-3x+2)Q(x)+ax+b \\ &= (x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \end{aligned}$$

上式に，それぞれ $x=1,\ 2$ を代入すると　$a+b=3$，$2a+b=4$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=2}$

(答) ア. 1　イ. 2

(2) 2 直線 $2x-y+1=0$，$x+y-4=0$ の交点を通る直線は，定数 k を用いて

$$2x-y+1+k(x+y-4)=0$$

これが，点 $(-3,\ 5)$ を通るから

$$-10+k(-2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad k=-5$$

したがって　$2x-y+1-5(x+y-4)=0$　すなわち　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}}$

(答) ウ. $-\dfrac{1}{2}$　エ. $\dfrac{7}{2}$

(3) $(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2$ であるから

これに $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{3}{\sqrt{5}}\cdots$① を代入すると

$$\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2=2 \quad \text{ゆえに} \quad (\sin\theta-\cos\theta)^2=\frac{1}{5}$$

$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において　$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\geqq 0$ であるから

$$\sin\theta-\cos\theta=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}} \quad \cdots②$$

①，② から　　$\sin\theta=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) オ. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　カ. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

(4) $ab = \dfrac{1}{4} \quad \cdots ①$

$\log_2 a + \dfrac{1}{2}\log_2 b = -2$ より

$$\log_2 ab^{\frac{1}{2}} = -2 \quad \text{ゆえに} \quad ab^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \quad \cdots ②$$

① を ② で辺々を割ると $b^{\frac{1}{2}} = 1$ ゆえに $\boldsymbol{b = 1}$

これを ① に代入して $\boldsymbol{a = \dfrac{1}{4}}$

(答) キ. $\dfrac{1}{4}$ ク. 1

(5) $y = x$ と $y = -x(x-2)$ から y を消去すると

$$x = -x(x-2) \quad \text{ゆえに} \quad x(x-1) = 0$$

よって，交点の x 座標は 0 と **1** である.

したがって，求める面積は，x^2 の係数に注意して

$$\frac{1}{6}\cdot 1(1-0)^3 = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

(答) ケ. 1 コ. $\dfrac{1}{6}$

[2] (1) a，b は実数であるから，方程式の解を

$$-1+2i,\ -1-2i,\ \gamma$$

とおくと，解と係数の関係により

$$a = -2+\gamma, \quad -1 = 5-2\gamma, \quad b = 5\gamma$$

これを解いて $\gamma = 3$，$\boldsymbol{a = 1}$，$\boldsymbol{b = 15}$

(答) サ. 1 シ. 15

(2) 求める円の方程式を $x^2+y^2+ax+by+c=0$ とおくと，この円が 3 点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通るから

$$a+b+c=-2,\quad 2a+3b+c=-13,\quad -a+c=-1$$

これを解いて　$a=3$，$b=-7$，$c=2$

したがって　$x^2+y^2+3x-7y+2=0$

すなわち　$\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{25}{2}$

よって，中心 $\left(\boldsymbol{-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}}\right)$，半径 $\boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{2}}}$

(答) ス. $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$　セ. $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$

(3) $\tan x=2$ を $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ に代入すると

$$1+2^2=\frac{1}{\cos^2 x}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\cos^2 x=\frac{1}{5}}$$

また　$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\tan x\cos^2 x=2\cdot 2\cdot\dfrac{1}{5}=\boldsymbol{\dfrac{4}{5}}$

(答) ソ. $\dfrac{1}{5}$　タ. $\dfrac{4}{5}$

(4) $t=2^x$ とおくと　$y=4t^2-8t+7=4(t-1)^2+3$

$t=1$　すなわち　$\boldsymbol{x=0}$ のとき，最小値 **3**

(答) チ. 0　ツ. 3

(5) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+6$ を微分すると

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	-14	↗	-3

$0\leqq x\leqq 3$ における最小値は -14，最大値は 6

(答) テ. $\sqrt{3}$　ト. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

［**3**］A(1, 1)，B(2, 3) 間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

直線 AB の方程式は

$$y-1=\frac{3-1}{2-1}(x-1)\quad \text{すなわち}\quad 2x-y-1=0$$

$\mathrm{P}(a,\ a^2+4a+1)$ から直線 AB までの距離を d とすると

$$d=\frac{|2a-(a^2+4a+1)-1|}{2^2+(-1)^2}=\frac{|a^2+2a+2|}{\sqrt{5}}=\frac{(a+1)^2+1}{\sqrt{5}}$$

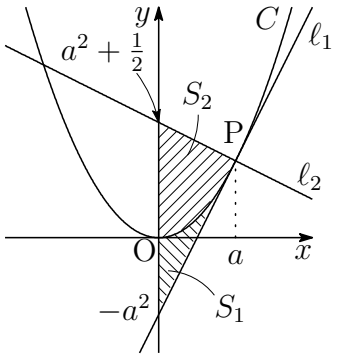
したがって

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\frac{(a+1)^2+1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{2}(a+1)^2+\frac{1}{2}$$

よって，$a=-1$　すなわち　$\boldsymbol{\mathrm{P}(-1,-2)}$ のとき，S の最小値　$\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(答) ナ. $\sqrt{5}$　ニ. $\frac{1}{2}(a+1)^2+\frac{1}{2}$　ヌ. $(-1,-2)$　ネ. $\frac{1}{2}$

［4］$y = x^2$ より　$y' = 2x$



ℓ_1 の方程式は　$y - a^2 = 2a(x - a)$

すなわち　$\boldsymbol{y = 2ax - a^2}$

ℓ_2 の方程式は　$y - a^2 = -\dfrac{1}{2a}(x - a)$

すなわち　$y = -\dfrac{1}{2a}x + a^2 + \dfrac{1}{2}$

右の図から

$$S_1 + S_2 = \frac{1}{2}a\left\{\left(a^2 + \frac{1}{2}\right) - (-a^2)\right\} = a^3 + \frac{1}{4}a$$

また

$$S_1 = \int_0^a \{x^2 - (2ax - a^2)\}\,dx$$
$$= \int_0^a (x - a)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}(x - a)^3\ \right]_0^a = \boldsymbol{\frac{1}{3}a^3}$$
$$S_2 = (S_1 + S_2) - S_1 = a^3 + \frac{1}{4}a - \frac{1}{3}a^3 = \boldsymbol{\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a}$$

S_2 が S_1 の 5 倍であるとき

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{4}a = 5 \times \frac{1}{3}a^3 \quad \text{整理すると} \quad a(2a + 1)(2a - 1) = 0$$

$a > 0$ であるから　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2}}$

(答) ノ. $2ax - a^2$　ハ. $\dfrac{1}{3}a^3$　ヒ. $\dfrac{2}{3}a^3 + \dfrac{1}{4}a$　フ. $\dfrac{1}{2}$

9.19 平成 26 年度推薦前期試験 (90 分)

[1] (1) $(2x-y+a)(x+by-3)=2x^2-2y^2+3xy-3x+9y-9$ ならば $a=$ ア, $b=$ イ である。

(2) $(x+1)^2+4(x+1)-1=0$ の解は $x=$ ウ, エ である。

(3) $x=2$ が 2 次方程式 $mx^2-3x-m=0$ の 1 つの解であるならば，実数 m の値は オ であり，残りの解は カ である。

(4) 2 次不等式 $ax^2+bx+3>0$ をみたす x の範囲が $-2<x<3$ ならば，$a=$ キ，$b=$ ク である。

(5) $0 \leqq \theta \leqq 180°$，$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin\theta=$ ケ，$\tan\theta=$ コ である。

[2] (1) $x=\sqrt{3}-1$ のとき，$x+\dfrac{2}{x}=$ サ，$x^2+\dfrac{4}{x^2}=$ シ である。

(2) $x^2+y^2=1$ のとき，$x+y^2$ の最大値は ス であり，最小値は セ である．

(3) 2 次曲線 $C: y=ax^2+bx-19$ と点 $\mathrm{P}(2,-1)$ に対して，C を x 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線と，C を y 軸方向に 2 だけ平行移動した曲線が共に点 P を通るなら，$a=$ ソ，$b=$ タ である。

(4) △ABC において $\angle\mathrm{B}=120°$，$\mathrm{BC}=6$，外接円の半径が 6 であるとき，$\angle\mathrm{A}=$ チ°，$\mathrm{AC}=$ ツ である。

(5) $2\sin^2\theta-\cos\theta-1=0$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ をみたす θ は，テ°，ト° である。

[3] 2 つの整式を $A=x^4+8x^3+ax^2+2x+3$，$B=x^2+bx+1$ とする。このとき $B^2=x^4+2bx^3+$ ナ $x^2+2bx+1$ である。$C=A-B^2$ が x の 1 次式になるとき $a=$ ニ，$b=$ ヌ であり，$C=$ ネ である。

[4] △ABC において，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{AC}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とする。

$$\frac{b+c}{4}=\frac{c+a}{5}=\frac{a+b}{6}$$

であるとき，この共通の値を $2k$ とおく。このとき a，b，c を k を用いて表すと $a=$ ノ，$b=$ ハ，$c=$ ヒ で，$\angle\mathrm{A}=$ フ° である。△ABC の面積が $3\sqrt{3}$ のとき $a=$ ヘ である。

解答例

［1］(1) x に着目して整理すると

$$\begin{aligned} 2x^2-2y^2+3xy-3x+9y-9 &= 2x^2+(3y-3)x-(y-3)(2y-3) \\ &= \{2x-(y-3)\}\{x+(2y-3)\} \\ &= (2x-y+3)(x+2y-3) \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{a=3,\ b=2}$

(答) ア. 3　イ. 2

(2) $(x+1)^2+4(x+1)-1=0$ より

$$(x+1)^2+4(x+1)+4=5 \quad \text{ゆえに} \quad \{(x+1)+2\}^2=5$$

したがって　$x+3=\pm\sqrt{5}$　よって　$\boldsymbol{x=-3\pm\sqrt{5}}$

(答) ウ. エ. $-3\pm\sqrt{5}$

(3) $x=2$ が 2 次方程式 $mx^2-3x-m=0$ の解であるから

$$m\cdot 2^2-3\cdot 2-m=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{m=2}$$

したがって，2 次方程式は

$$2x^2-3x-2=0 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)(2x+1)=0$$

よって，残りの解は　$x=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(答) オ. 2　カ. $-\dfrac{1}{2}$

(4) $-2<x<3$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x+2)(x-3)<0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-x-6<0$$

定数項に注意して

$$-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3>0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2}}$$

(答) キ. $-\dfrac{1}{2}$　ク. $\dfrac{1}{2}$

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{4}}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}\div\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\boldsymbol{-\sqrt{15}}$

(答) ケ. $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$　コ. $-\sqrt{15}$

[2] (1) $x=\sqrt{3}-1$ より

$$x+\frac{2}{x}=\sqrt{3}-1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}$$
$$=\sqrt{3}-1+\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

また　　$x^2+\dfrac{4}{x^2}=\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2-4=(2\sqrt{3}\,)^2-4=\boldsymbol{8}$

(答) サ. $2\sqrt{3}$　シ. 8

(2) $x^2+y^2=1$ より　$y^2=1-x^2$　$\cdots$①

① より　$1-x^2\geqq 0$　すなわち　$-1\leqq x\leqq 1$

$$x+y^2=x+(1-x^2)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$$

よって，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$，$x=-1$ のとき最小値 $\boldsymbol{-1}$

(答) ス. $\dfrac{5}{4}$　セ. -1

(3) $\mathrm{P}(2,-1)$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけそれぞれ平行移動した点は

$$(3,-1),\quad (2,-3)$$

これらは $C:y=ax^2+bx-19$ 上にあるから

$$-1=a\cdot 3^2+b\cdot 3-19,\quad -3=a\cdot 2^2+b\cdot 2-19$$

整理すると　　$3a+b=6$，$2a+b=8$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=12}$

(答) ソ. -2　タ. 12

(4) $a=6$，$B=120^\circ$，$R=6$ を正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=2R$$

に代入すると

$$\frac{6}{\sin A}=\frac{b}{\sin 120^\circ}=2\cdot 6$$

ゆえに　　$\sin A=\dfrac{1}{2}$，$b=12\sin 120^\circ=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

$B=120^\circ$ より，$A<60^\circ$ であるから　$\boldsymbol{A=30^\circ}$

(答) チ. 30　ツ. $6\sqrt{3}$

(5) $2\sin^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ より

$$2(1-\cos^2\theta) - \cos\theta - 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$$

したがって　$(\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1) = 0$　よって　$\boldsymbol{\theta = 60^\circ,\ 180^\circ}$

(答) テ. ト. $60^\circ,\ 180^\circ$

[3] $B = x^2 + bx + 1$ より

$$\begin{aligned} B^2 &= (x^2 + bx + 1)^2 \\ &= (x^2)^2 + (bx)^2 + 1^2 + 2\cdot x^2\cdot bx + 2\cdot bx\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot x^2 \\ &= x^4 + 2bx^3 + (b^2+2)x^2 + 2bx + 1 \\ C &= A - B \\ &= (8-2b)x^3 + (a - b^2 - 2)x^2 + (2-2b) + 2 \end{aligned}$$

C が x の 1 次式であるから

$$8 - 2b = 0, \quad a - b^2 - 2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{b = 4,\ a = 18}$$

このとき　　$\boldsymbol{C = -6x + 2}$

(答) ナ. $b^2 + 2$　ニ. 18　ヌ. 4　ネ. $-6x + 2$

[4] $\dfrac{b+c}{4} = \dfrac{c+a}{5} = \dfrac{a+b}{6} = 2k$ であるから

$$b + c = 8k \cdots ①, \quad c + a = 10k \cdots ②, \quad a + b = 12k \cdots ③$$

上の 3 式の辺々を加えると

$$2a + 2b + 2c = 30k \quad \text{よって} \quad a + b + c = 15k \cdots ④$$

①，④ より　　$\boldsymbol{a = 7k}$　これを ②，③ に代入して　$\boldsymbol{b = 5k,\ c = 3k}$

余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(5k)^2 + (3k)^2 - (7k)^2}{2\cdot 5k\cdot 3k} = -\frac{1}{2}$$

したがって　　$\boldsymbol{A = 120^\circ}$

△ABC の面積より，$\dfrac{1}{2}bc\sin A = 3\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 5k\cdot 3k\sin 120^\circ = 3\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

よって　　$a = 7k = 7 \times \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{14\sqrt{5}}{5}}$

(答) ノ. $7k$　ハ. $5k$　ヒ. $3k$　フ. 120°　ヘ. $\dfrac{14\sqrt{5}}{5}$

9.20 平成 26 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $(2x^2+x+1)(x^2+x-1)$ を展開したときの x^3 の係数は［ア］，x^2 の係数は［イ］である。

(2) $\dfrac{m\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{n\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=2(\sqrt{15}-1)$ をみたす整数 m，n は $m=$［ウ］，$n=$［エ］である。

(3) 方程式 $|x-5|=\dfrac{1}{2}x+1$ の解は［オ］，［カ］である。

(4) 2 次関数 $y=-x^2+6x-6$ の $1 \leqq x \leqq 6$ における最大値は［キ］で，最小値は［ク］である。

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ ならば，$\sin\theta=$［ケ］，$\cos\theta=$［コ］である。

[2] (1) $2a^2-2b^2-3c^2-3ab+7bc-ac$ を因数分解すると［サ］$\times$［シ］となる。

(2) 区間 $-1 \leqq x \leqq 3$ において $x^2-4x-a^2+4a<0$ であるとき，定数 a の範囲は $a<$［ス］，$a>$［セ］である。

(3) 放物線 $y=x^2+2ax+b$ が x 軸の正の部分で x 軸に接し，点 $(1,\ 4)$ を通るならば，定数 a，b の値は $a=$［ソ］，$b=$［タ］である。

(4) △ABC において，AB = 2，CA = 1 とする。角 A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，△ABD の面積は △ACD の面積の［チ］倍である。このとき，$\mathrm{BC}=\dfrac{9}{4}$ ならば BD =［ツ］である。

(5) 底面の半径が 2cm で高さが h cm の円柱を D とする．D と相似な円柱 E の高さが 9cm で，その体積が D の体積の $\dfrac{27}{8}$ 倍であるなら，E の底面の半径は［テ］cm で，$h=$［ト］cm である。

[3] 放物線 $C_1: y=x^2+2x-1$ 上に 2 点 $\mathrm{P}(-2,-1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2)$ をとる。別の放物線 $C_2: y=-ax^2+bx+c$ $(a>0)$ が P，Q を通るなら，b，c は a を用いて $b=$［ナ］，$c=$［ニ］と書ける。このとき，$-2<p<1$ をみたす p に対して，y 軸に平行な直線 $x=p$ と C_1 の交点 R および直線 $x=p$ と C_2 の交点 S の間の距離 RS は $p=$［ヌ］のとき，最大値［ネ］をとる。

［4］2 辺 AD，BC が平行な台形 ABCD において，AD = 2，BC = 4，CD = 1，∠BCD = 60° とすると ABCD の面積は［ノ］である。辺 AD 上の点 P と BC 上の点 Q を，線分 PQ が辺 AD に垂直で四辺形 ABCD の面積を 2 等分するようにとる。このとき PD = x とおくと，四辺形 PQCD の面積は x を用いると，［ハ］であるから，x =［ヒ］である。また，∠ABC = α° とおくと $\tan\alpha$° =［フ］であるから α =［ヘ］である。

解答例

［1］(1) $(2x^2+x+1)(x^2+x-1)$ を展開したとき

x^3 の係数は　$2\times1+1\times1=\mathbf{3}$

x^2 の係数は　$2\times(-1)+1\times1+1\times1=\mathbf{0}$

(答) ア. 3　イ. 0

(2) $\dfrac{m\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{n\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=2(\sqrt{15}-1)$ より

$$m\sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})+n\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})=4(\sqrt{15}-1)$$
$$(m+n)\sqrt{15}+(-3m+5n)=4\sqrt{15}-4$$

$m+n$，$-3m+5n$ は有理数であるから

$$m+n=4,\quad -3m+5n=-4$$

これを解いて　　$\boldsymbol{m=3,\ n=1}$

(答) ウ. 3　エ. 1

(3) $|x-5|=\dfrac{1}{2}x+1$ より　$\dfrac{1}{2}x+1\geqq0$　すなわち　$x\geqq-2$

i) $x\geqq5$ のとき

$$x-5=\frac{1}{2}x+1\quad \text{これを解いて}\quad x=12$$

ii) $-2\leqq x\leqq5$ のとき

$$-(x-5)=\frac{1}{2}x+1\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{8}{3}$$

よって　　$\boldsymbol{x=12,\ \dfrac{8}{3}}$

(答) オ. 12　カ. $\dfrac{8}{3}$

(4) $y=-x^2+6x-6$ を変形すると　$y=-(x-3)^2+3$

よって　$x=3$ のとき最大値 **3**，$x=6$ のとき最小値 $\boldsymbol{-6}$

(答) キ. 3　ク. -6

(5) $\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ を $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ に代入すると

$$1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\qquad \text{ゆえに}\quad \cos^2\theta=\frac{4}{5}$$

$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}<0$ より　θ は鈍角であるから　$\cos\theta<0$

よって　$\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$,　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

(答) ケ. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　コ. $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

[2] (1) $2a^2-2b^2-3c^2-3ab+7bc-ac$ を a について整理すると

$$\begin{aligned}2a^2+(-3b-c)a-2b^2+7bc-3c^2&=2a^2+(-3b-c)a-(b-3c)(2b-c)\\&=\{a-(2b-c)\}\{2a+(b-3c)\}\\&=\boldsymbol{(a-2b+c)(2a+b-3c)}\end{aligned}$$

(答) サ. シ. $a-2b+c,\ 2a+b-3c$

(2) $f(x)=x^2-4x-a^2+4a=(x-2)^2-a^2+4a-4$ $(-1\leqq x\leqq 3)$ の最大値は

$$f(-1)=-a^2+4a+5$$

このとき，$f(-1)<0$ であるから

$$-a^2+4a+5<0\quad \text{ゆえに}\quad (a+1)(a-5)>0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a<-1,\ a>5}$

(答) ス. -1　セ. 5

(3) $y = x^2 + 2ax + b$ は x 軸に接するから

$$y = (x + a)^2 \quad b = a^2 \quad \cdots ①$$

接点 $(-a,\ 0)$ の x 座標は正であるから

$$-a > 0 \quad \text{すなわち} \quad a < 0$$

$y = (x + a)^2$ は点 $(1,\ 4)$ を通るから

$$4 = (1 + a)^2 \quad a \text{ の符号に注意して} \quad \boldsymbol{a = -3}$$

これを ① に代入して　$\boldsymbol{b = 9}$

(答) ソ. -3　タ. 9

(4) D は線分 BC を 2 : 1 に内分するから　△ABD : △ACD = 2 : 1
よって，△ABD の面積は，△ACD の面積の 2 倍である.

$\mathrm{BC} = \dfrac{9}{4}$ のとき　　$\mathrm{BD} = \dfrac{2}{2+1}\mathrm{BC} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{9}{4} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

(答) チ. 2　ツ. $\dfrac{3}{2}$

(5) D と E の体積比が $1 : \left(\dfrac{3}{2}\right)^3$ であるから，D と E の相似比は　$1 : \dfrac{3}{2}$

したがって　E の底面の半径は　$2 \times \dfrac{3}{2} = \boldsymbol{3}$ (cm)

$$h = 9 \times \frac{2}{3} = \boldsymbol{6}\ (\mathrm{cm})$$

(答) テ. 3　ト. 6

［**3**］$C_2 : y = -ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$ が点 $\mathrm{P}(-2, -1)$，$\mathrm{Q}(1,\ 2)$ を通るから

$$-4a - 2b + c = -1, \quad -a + b + c = 2$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{b = 1 - a,\ c = 2a + 3}$

$-2 \leqq x \leqq 1$ において，C_2 は C_1 の上側にある．

$\mathrm{R}(p,\ p^2 + 2p - 1)$，$\mathrm{S}(p, -ap^2 + bp + c)$ より

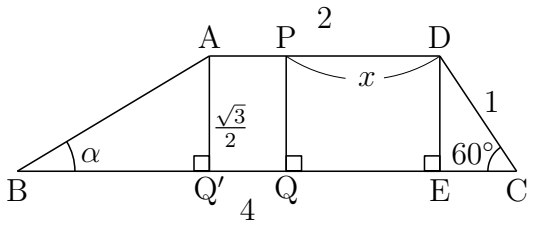
$$\begin{aligned}
\mathrm{RS} &= (-a - 1)p^2 + (b - 2)p + (c + 1) \\
&= (-a - 1)p^2 + (1 - a - 2)p + (2a + 3 + 1) \\
&= -(a + 1)p^2 - (a + 1)p + 2a + 4 \\
&= -(a + 1)\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}a + \frac{17}{4}
\end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{p = -\dfrac{1}{2}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}a + \dfrac{17}{4}}$

(答) ナ. $1 - a$　ニ. $2a + 3$　ヌ. $-\dfrac{1}{2}$　ネ. $\dfrac{9}{4}a + \dfrac{17}{4}$

［**4**］四角形 ABCD の高さ DE は　$\mathrm{DE} = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

四角形 ABCD の面積 S は　$\dfrac{1}{2}(2+4) \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$



四角形 PQCD の面積は

$$\frac{1}{2}\{x + (x + \cos 60^\circ)\} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{8}(4x+1)\sqrt{3}}$$

四角形 PQCD の面積は，四角形 ABCD の面積の $\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{1}{8}(4x+1)\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{5}{4}}$$

上の図で　$\mathrm{CE} = \cos 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

$$\mathrm{BQ'} = \mathrm{BC} - \mathrm{AD} - \mathrm{CE} = 4 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

したがって　$\tan\alpha = \dfrac{\mathrm{AQ'}}{\mathrm{BQ'}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \div \dfrac{3}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$　よって　$\boldsymbol{\alpha = 30^\circ}$

(答) ノ. $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　ハ. $\dfrac{1}{8}(4x+1)\sqrt{3}$　ヒ. $\dfrac{5}{4}$　フ. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ヘ. 30

9.21 平成 26 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) x^3-ax^2-5x-3 が x^2+bx-3 で割り切れるならば，$a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) $\dfrac{2-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i}+\dfrac{2}{1-\sqrt{2}i}$ を $a+bi$ (a, b は実数) の形に表すと，$a=$ ウ，$b=$ エ である。

(3) 直線 $\ell: 4x+3y-6=0$ と直交し，点 $\mathrm{P}(4,\ 2)$ を通る直線の方程式は，$y=$ オ で，P と ℓ の距離は カ である。

(4) $0<\theta<2\pi$ のとき，$2\sin^2\theta+\cos\theta-1=0$ をみたす θ は，$\theta=$ キ, ク である。

(5) $\dfrac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}}-\dfrac{5\times 2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}}=-\dfrac{11}{3}$ をみたす x の値は，ケ，コ である。

[2] (1) 円 $x^2+y^2-2x-4y+a=0$ $(a<5)$ と直線 $3x+4y+4=0$ が接するとき，円の中心と直線との距離は サ であり，$a=$ シ である。

(2) 原点 O を中心とする半径 2 の円の周上に点 P をとり，P より x 軸におろした垂線の足を Q とする。$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とするとき，$\triangle\mathrm{POQ}$ の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以上となるのは，ス $\leqq\theta\leqq$ セ のときである。

(3) $\log_3 x+2\log_x 3=3$ をみたす x は，$x=$ ソ, タ である。

(4) 関数 $f(x)=x^3-3x^2+3p^2x+p$ が極大値と極小値を持つとき，p の範囲は チ $<p<$ ツ である。

(5) 放物線 $C: y=1-x^2$ と x 軸で囲まれる部分の面積 S は $S=$ テ である。また C と直線 $y=a$ $(0<a<1)$ で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{8}S$ であるならば，$a=$ ト である。

[3] 点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ $(a>1)$ を中心とする半径 1 の円 C と x 軸との交点で，その x 座標が a より大きい点を Q とする。原点を通り C に接する直線 ℓ の傾きを m $(m>0)$ とし，ℓ と C の接点を R とすると，m^2 を a を用いて $m^2=$ ナ と書ける。また R の x 座標は a を用いて ニ と書ける。特に，Q の x 座標が R の x 座標の 2 倍であるならば，$a=$ ヌ で，ℓ と x 軸のなす角は ネ である。

［4］放物線 $y = x(2-x)$ の，点 $\mathrm{A}(a,\ a(2-a))$ $(1 < a < 2)$ における接線は，$y =$ ノ である。その接線と直線 $x = 2$ および放物線で囲まれた部分の面積を S_1 とすると，$S_1 =$ ハ である。また，接線と直線 $x = 2$ との交点 P，接線と x 軸との交点 Q および $\mathrm{R}(2,\ 0)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を S_2 とすると，$S_2 =$ ヒ である。特に，$S_1 = S_2$ ならば，$a =$ フ である。

解答例

［1］(1) x^3 の項と定数項に注意して

$$x^3 - ax^2 - 5x - 3 = (x^2 + bx - 3)(x + 1)$$

右辺を展開すると

$$x^3 - ax^2 - 5x - 3 = x^3 + (b+1)x^2 + (b-3)x - 3$$

同じ次数の項の係数を比較して

$$-a = b + 1, \quad -5 = b - 3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 1,\ b = -2}$$

(答) ア. 1　イ. -2

(2) $\dfrac{2-\sqrt{2}i}{1+\sqrt{2}i} + \dfrac{2}{1-\sqrt{2}i} = \dfrac{(2-\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i) + 2(1+\sqrt{2})}{1+2} = \dfrac{2-\sqrt{2}i}{3}$

よって　$\boldsymbol{a = \dfrac{2}{3},\ \ b = -\dfrac{\sqrt{2}}{3}}$

(答) ウ. $-\dfrac{2}{3}$　エ. $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

(3) $\mathrm{P}(4,\ 2)$ を通り，$\ell : 4x + 3y - 6 = 0$ に垂直な直線は

$$3(x-4) - 4(y-2) = 0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{3}{4}x - 1}$$

P と ℓ の距離は　$\dfrac{|4\cdot 4 + 3\cdot 2 - 6|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \boldsymbol{\dfrac{16}{5}}$

(答) オ. $\dfrac{3}{4}x - 1$　カ. $\dfrac{16}{5}$

(4) $2\sin^2\theta + \cos\theta - 1 = 0$ $(0 < \theta < 2\pi)$ より

$$2(1 - \cos^2\theta) + \cos\theta - 1 = 0 \quad \text{整理すると} \quad 2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = 0$$

ゆえに　$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$　よって　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi}$

(答) キ. ク. $\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

(5) $\dfrac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}}-\dfrac{5\times 2^{\frac{x}{2}}}{2^{\frac{x}{2}}+2^{-\frac{x}{2}}}=-\dfrac{11}{3}$ から $\dfrac{1}{2^x-1}-\dfrac{5\times 2^x}{2^x+1}=-\dfrac{11}{3}$

$t=2^x$ とおくと $\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{5t}{t+1}=-\dfrac{11}{3}$

$$3\{(t+1)-5t(t-1)\}=-11(t+1)(t-1)$$
$$(t-4)(2t-1)=0$$
$$t=4,\ \frac{1}{2}$$

ゆえに $2^x=4,\ \dfrac{1}{2}$ これを解いて $\boldsymbol{x=2,-1}$

(答) ケ. コ. $2,-1$

[2] (1) $x^2+y^2-2x-4y+a=0$ を変形すると

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5-a$$

したがって，円の中心は $(1,\ 2)$，半径 $\sqrt{5-a}$

円の中心から直線 $3x+4y+4=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot 1+4\cdot 2+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{15}{5}=\boldsymbol{3}$$

円と直線が接するとき，$d=r$ であるから

$3=\sqrt{5-a}$ これを解いて $\boldsymbol{a=-4}$

(答) サ. 3 シ. -4

(2) $\mathrm{P}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ より

$$\mathrm{OQ}=2\cos\theta,\quad \mathrm{PQ}=2\sin\theta$$

したがって $\triangle\mathrm{POQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta=\sin 2\theta\geqq\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<2\theta<\pi$ であるから

$\dfrac{\pi}{6}\leqq 2\theta\leqq\dfrac{5}{6}\pi$ よって $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{12}\leqq\theta\leqq\dfrac{5}{12}\pi}$

(答) ス. $\dfrac{\pi}{12}$ セ. $\dfrac{5}{12}\pi$

(3) $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$ より　$\log_3 x + \dfrac{2}{\log_3 x} = 3$

方程式から

$$(\log_3 x)^2 - 3\log_3 x + 2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (\log_3 x - 1)(\log_3 x - 2) = 0$$

したがって　$\log_3 x = 1,\ 2$　すなわち　$\boldsymbol{x = 3,\ 9}$

(答) ソ. 3, 9　タ. 3, 9

(4) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3p^2x + p$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3p^2 = 3(x^2 - 2x + p^2)$$

$f(x)$ が極大値と極小値をもつとき，$f'(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつから，

$$D/4 = (-1)^2 - 1\cdot p^2 > 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{-1 < p < 1}$$

(答) チ. -1　ツ. 1

(5) $C : y = 1 - x^2 = -(x+1)(x-1)$

C と x 軸で囲まれた部分の面積 S は

$$S = \frac{1}{6}\{1 - (-1)\}^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

C と直線 $y = a$ $(0 < a < 1)$ との共有点の x 座標は

$$1 - x^2 = a \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm\sqrt{1-a}$$

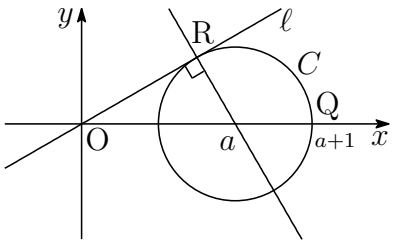
条件から

$$\frac{1}{6}(2\sqrt{1-a})^3 = \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} \quad \text{ゆえに} \quad (\sqrt{1-a})^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

したがって　$\sqrt{1-a} = \dfrac{1}{2}$　これを解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{4}}$

(答) テ. $\dfrac{4}{3}$　ト. $\dfrac{3}{4}$

[3] 点 $(a,\ 0)$ から直線 $\ell : mx - y = 0$ までの距離が円の半径 1 であるから



$$\frac{|ma|}{\sqrt{m^2+1}} = 1$$

両辺を平方して整理すると

$$m^2a^2 = m^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad m^2 = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{a^2 - 1}}$$

点 $(a,\ 0)$ を通り，$\ell : y = mx \cdots$① に垂直な直線は

$$y = -\frac{1}{m}(x - a) \cdots ②$$

①，② から，y を消去すると

$$mx = -\frac{1}{m}(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad m^2x = -x + a$$

$m^2 = \dfrac{1}{a^2-1}$ を上式に代入すると

$$\frac{x}{a^2-1} = -x + a \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{\boldsymbol{(a+1)(a-1)}}{\boldsymbol{a}}$$

Q の x 座標が R の x 座標の 2 倍であるとき

$$a + 1 = 2 \times \frac{(a+1)(a-1)}{a} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 2}$$

$m = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$ であるから $\quad m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

ℓ と x 軸のなす角を θ とすると

$$\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{すなわち} \quad \theta = \boldsymbol{30°}$$

(答) ナ. $\dfrac{1}{a^2-1}$ ニ. $\dfrac{(a+1)(a-1)}{a}$ ヌ. 2 ネ. 30

［**4**］$y = x(2-x) = -x^2 + 2x$ を微分すると

$$y' = -2x + 2$$

点 $\mathrm{A}(a,\ a(2-a))$ における接線は $(1 < a < 2)$

$$y - a(2-a) = (-2a+2)(x-a)$$

すなわち　　$\boldsymbol{y = (-2a+2)x + a^2}$　$\cdots$①

したがって

$$S_1 = \int_a^2 \{(-2a+2)x + a^2 - x(2-x)\}dx$$
$$= \int_a^2 (x-a)^2\,dx = \left[\ \frac{1}{3}(x-a)^3\ \right]_a^2 = \boldsymbol{\frac{1}{3}(2-a)^3}$$

P の y 座標は，① に $x = 2$ を代入して

$$y = (-2a+2)\cdot 2 + a^2 = (2-a)^2 \quad \cdots ②$$

また，Q の x 座標は，① に $y = 0$ を代入して

$$0 = (-2a+2)x + a^2 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{a^2}{2(a-1)}$$

したがって　　$\mathrm{QR} = \dfrac{a^2}{2(a-1)} - 2 = \dfrac{(2-a)^2}{2(a-1)}$　$\cdots ③$

②，③ から　　$S_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{(2-a)^2}{2(a-1)} \times (2-a)^2 = \boldsymbol{\dfrac{(2-a)^4}{4(a-1)}}$

とくに，$S_1 = S_2$ のとき

$$\frac{1}{3}(2-a)^3 = \frac{(2-a)^4}{4(a-1)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{3} = \frac{2-a}{4(a-1)} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = \frac{10}{7}}$$

(答) ノ. $(-2a+2)x + a^2$　ハ. $\dfrac{1}{3}(2-a)^3$　ヒ. $\dfrac{(2-a)^4}{4(a-1)}$　フ. $\dfrac{10}{7}$

9.22 平成 25 年度推薦前期試験 (90 分)

[1] (1) $(ax+y-b)^2$ を展開したとき，xy の係数は 4，x の係数は -12 である。このとき $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) 2 次不等式 $ax^2+(a+b)x+1>0$ の解が，$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}$ であるとき，$a=$ ウ，$b=$ エ である。

(3) 2 次関数 $y=-x^2+ax-a+1$ のグラフが x 軸に接するとき，$a=$ オ であり，接点の x 座標は カ である。

(4) 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において，辺 CD の中点を M とすると AM $=$ キ である。また $\angle \mathrm{ABM}=\theta$ とすると，$\cos\theta=$ ク である。

(5) ある地点 A から，ビルの土台までの距離が 102m である。そのビルの屋上を点 A から見上げる角度は 30° であるとする。A から見てビルより先にある，高さ 300m のタワーの先端がビルの屋上と一直線に見えるなら，ビルの高さは ケ m，点 A からタワーの土台までの間の距離は コ m である，ただし点 A とビルおよびタワーの土台は一直線上にあるとし，$\sqrt{3}=1.7$ とする。

[2] (1) $\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{12}-\sqrt{8}}$ の分母を有理化し $a+b\sqrt{6}$ (a, b は整数) の形に書くと，$a=$ サ，$b=$ シ である。

(2) $|x|+2|x-1|=x+3$ の解は，$x=$ ス, セ である。

(3) 2 次曲線 $y=-x^2+2x-3$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線 C の，$2\leqq x\leqq 5$ における最大値 ソ で最小値は タ である。

(4) $2\sin\theta-\tan\theta-2\cos\theta+1=0$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ の解は，$\theta=$ チ°, ツ° である。

(5) △ABC において $\angle \mathrm{A}=30^\circ$，$\angle \mathrm{B}=45^\circ$，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ であるとき，AC $=$ テ，AB $=$ ト である。

[3] 関数 $y=x^4+4x^3+12x^2+16x+10$ で，$t=x^2+2x$ とおいて，y を t で表すと $y=$ ナ である。また，t は ニ 以上の値をとる。したがって，y は $x=$ ヌ のとき，最小値 ネ をとる。

[4] 四辺形 ABCD において，AB $=3$，BC $=4$，CD $=3$，DA $=1$ で $\angle \mathrm{B}=60^\circ$ とすると，AC $=$ ノ である。また，$\cos\angle \mathrm{D}=$ ハ であるから，$\angle \mathrm{D}=$ ヒ° となる。これより四辺形 ABCD の面積は フ である。

解答例

［1］(1) $(ax+y-b)^2$ を展開したとき，xy の係数は $2a$，x の係数は $-2ab$ であるから

$$2a=4,\quad -2ab=-12$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=3}$

(答) ア. 2　イ. 3

(2) $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{3}$ を解とする 2 次不等式の一つは

$$(2x+1)(3x-1)<0 \quad \text{すなわち} \quad 6x^2+x-1<0$$

定数項に注意して　　$-6x^2-x+1>0$

同じ次数の項の係数を比較して

$$\boldsymbol{a=-6},\ \ a+b=-1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=5}$$

(答) ウ. -6　エ. 5

(3) 2 次関数 $y=-x^2+ax-a+1$ の判別式は

$$D=a^2-4\cdot(-1)\cdot(-a+1)=a^2-4a+4=(a-2)^2$$

この関数のグラフは x 軸に接するので，$D=0$ より

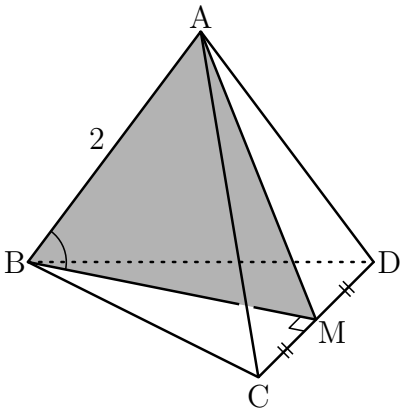
$$(a-2)^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2}$$

接点の x 座標は　　$x=-\dfrac{a}{2\cdot(-1)}=\dfrac{a}{2}$

上の 2 式より，求める接点の x 座標は　　$\boldsymbol{x=1}$

(答) オ. 2　カ. 1

(4) $\mathrm{AM} = \mathrm{AC}\sin 60^\circ = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$



よって，△ABM において

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BM}^2 - \mathrm{AM}^2}{2 \times \mathrm{AB} \times \mathrm{BM}} = \frac{2^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

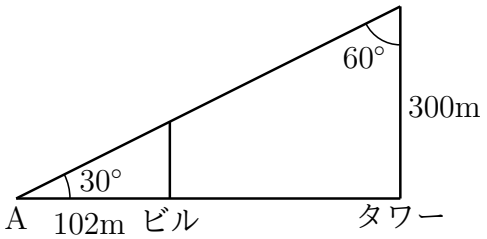
(答) キ. $\sqrt{3}$　ク. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(5) ビルの高さは

$$102\tan 30^\circ = 102 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 34\sqrt{3} = 34 \times 1.7 = \boldsymbol{57.8}\ (\mathrm{m})$$

点 A からタワーの土台までの距離は

$$300\tan 60^\circ = 300\sqrt{3} = 300 \times 1.7 = \boldsymbol{510}\ (\mathrm{m})$$



(答) ケ. 57.8　コ. 510

[2] (1) $\dfrac{\sqrt{48}+\sqrt{32}}{\sqrt{12}-\sqrt{8}} = \dfrac{4\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{2\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = \dfrac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 2(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 10+4\sqrt{6}$

よって　　$\boldsymbol{a = 10,\ b = 4}$

(答) サ. 10　シ. 4

(2) $|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$，$|x-1| = \begin{cases} x-1 & (x \geqq 1) \\ -x+1 & (x < 1) \end{cases}$ であるから，

次の 3 つの場合分けを行う。

i) $x < 0$ のとき，方程式は

$$(-x) + 2(-x+1) = x + 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -\frac{1}{4}$$

ii) $0 \leqq x < 1$ のとき，方程式は

$$x + 2(-x+1) = x + 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -\frac{1}{2}$$

これは $0 \leqq x < 1$ に反するので不適

iii) $1 \leqq x$ のとき

$$x + 2(x-1) = x + 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{5}{2}$$

i)〜iii) から　　$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}}$

(答) ス. セ. $-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{5}{2}$

(3) 2 次関数 $y = -x^2 + 2x - 3$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に 3 だけ平行移動した曲線の方程式は

$$y - 3 = -(x-3)^2 + 2(x-3) - 3 \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 8x - 15$$

2 次関数 $y = -(x-4)^2 + 1$ $(2 \leqq x \leqq 5)$ は

$$x = 4 \text{ で最大値 } \mathbf{1},\ x = 2 \text{ で最小値 } \mathbf{-3}$$

をとる.

(答) ソ. 1　タ. -3

(4) $\sin\theta = \cos\theta\tan\theta$ より，方程式は

$$\begin{aligned} 2\cos\theta\tan\theta - \tan\theta - 2\cos\theta + 1 &= 0 \\ \tan\theta(2\cos\theta - 1) - (2\cos\theta - 1) &= 0 \\ (\tan\theta - 1)(2\cos\theta - 1) &= 0 \end{aligned}$$

したがって　$\tan\theta = 1$　または　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より　　$\boldsymbol{\theta = 45^\circ,\ 60^\circ}$

(答) チ. ツ. 45, 60

(5) $a=\sqrt{2}$，$b=\mathrm{AC}$，$c=\mathrm{AB}$

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ により

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\frac{b}{\sin 45^\circ}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\mathrm{AC}=b=2}$$

第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} c&=a\cos B+b\cos A\\ &=\sqrt{2}\cos 45^\circ+2\cos 30^\circ=1+\sqrt{3}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\mathrm{AB}=1+\sqrt{3}}$

(答) テ. 2　ト. $1+\sqrt{3}$

[3] 右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y&=x^4+4x^3+12x^2+16x+10\\ &=(x^4+4x^3+4x^2)+8x^2+16x+10\\ &=(x^2+2x)^2+8(x^2+2x)+10\\ &=\boldsymbol{t^2+8t+10}\end{aligned}$$

$t=x^2+2x=(x+1)^2-1$ より　$\boldsymbol{t\geqq -1}$

したがって

$$\begin{aligned} y&=t^2+8t+10\\ &=(t+4)^2-6\end{aligned}$$

$t\geqq -1$ において，y は，$t=-1$ すなわち $\boldsymbol{x=-1}$ のとき最小値 **3** をとる.

(答) ナ. $t^2+8t+10$　ニ. -1　ヌ. -1　ネ. 3

［**4**］△ABC に余弦定理を適用して

$$\mathrm{AC}^2 = 3^2 + 4^2 - 2{\cdot}3{\cdot}4\cos 60^\circ = 13$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathbf{AC = \sqrt{13}}$

また，△BCD に余弦定理を適用して

$$\cos\angle\mathrm{D} = \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{CD}{\cdot}\mathrm{DA}} = \frac{3^2 + 1^2 - (\sqrt{13})^2}{2{\cdot}3{\cdot}1} = \mathbf{-\frac{1}{2}}$$

したがって　　$\mathbf{\angle D = 120^\circ}$

よって，四辺形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{BC}\sin B + \frac{1}{2}\mathrm{CD}{\cdot}\mathrm{DA}\sin D \\ &= \frac{1}{2}{\cdot}3{\cdot}4\sin 60^\circ + \frac{1}{2}3{\cdot}1\sin 120^\circ \\ &= 3\sqrt{3} + \frac{3}{4}\sqrt{3} = \mathbf{\frac{15}{4}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(答) ノ. $\sqrt{13}$　ハ. $-\frac{1}{2}$　ヒ. 120　フ. $\frac{15}{4}\sqrt{3}$

9.23 平成 25 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $2a^2-b^2+c^2+ab-3ac$ を因数分解すると $\boxed{\text{ア}}\times\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $(1-a-b)x^2+(1+a-b)y^2+(2b+c)xy=2(3y-x)(2x-y)$ となるとき，$a=\boxed{\text{ウ}}$，$c=\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 2 次曲線 $y=2x^2+(a-2)x+\frac{1}{2}(a^2-3a)+1$ が x 軸と 2 点を共有するのは $\boxed{\text{オ}}<a<\boxed{\text{カ}}$ のときである。

(4) △ABC において，AB $=4$，AC $=2$，BC $=a$ とする。$60^\circ \leqq \angle \mathrm{A} \leqq 120^\circ$ のとき，a の範囲は $\boxed{\text{キ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $\sin 10^\circ = a$ のとき，$\sin 80^\circ$，$\cos 100^\circ$ を a を用いて表すと，$\sin 80^\circ = \boxed{\text{ケ}}$，$\cos 100^\circ = \boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ のとき，$a^2-a-1=\boxed{\text{サ}}$，$a^3+a^2+a+1=\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) $a>0$ とする。2 次方程式 $2x^2+2ax+a+1=0$ の 2 つの解の差が 1 より大きく，2 より小さくなるとき，a の範囲は $\boxed{\text{ス}}<a<\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $a \geqq 3$ のとき，不等式 $2|x-a| \leqq x-3$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{ソ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 連立不等式 $\begin{cases} 2x+3b<4(x-a) \\ bx>-x-a \end{cases}$ をみたす x の範囲が $-1<x<3$ であるならば，$a=\boxed{\text{チ}}$，$b=\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$2x+y=1$ のとき，$2x^2+y^2$ の最大値は $\boxed{\text{テ}}$，最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] 直線 $\ell : y=\frac{3}{2}(x+1)$ と 2 次曲線 $C : y=-2(x^2-2x-3)$ において，x 座標 a をもつ ℓ 上の点 P と C 上の点 Q に対して，P の y 座標が Q の y 座標より小さくなるとき，a の範囲は $\boxed{\text{ナ}}$ である。このとき，線分 PQ の長さは $\boxed{\text{ニ}}$ である。さらに，Q を通り x 軸に平行な直線と曲線 C の交点を R とすると，R の x 座標は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。R の x 座標が Q の x 座標より小さくなるとき，a の範囲は $\boxed{\text{ネ}}$ である。さらに，点 S を，四辺形 PQRS が長方形となるようにとると，その長方形の周の長さは $a=\boxed{\text{ノ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ハ}}$ をとる。

［**4**］△ABC において，AB = 2，∠B = 45°，∠C = 60° とする。このとき，AC = ヒ である。A から辺 BC に下ろした垂線と辺 BC との交点を H とすると，AH = フ である。辺 AB，AC 上に点 D，E を，AD = AE となるようにとる。AD = x とおき，$\mathrm{DH}^2 + \mathrm{EH}^2$ を x で表すと，$\mathrm{DH}^2 + \mathrm{EH}^2$ = へ である。この値を最小にするのは x = ホ のときである。

解答例

［**1**］(1) a について整理すると

$$\begin{aligned} & 2a^2 - b^2 + c^2 + ab - 3ac \\ =& 2a^2 + (b - 3c)a - (b + c)(b - c) \\ =& \{a + (b - c)\}\{2a - (b + c)\} \\ =& \boldsymbol{(a + b - c)(2a - b - c)} \end{aligned}$$

(答) ア. イ. $a + b - c$，$2a - b - c$

(2) $(1 - a - b)x^2 + (1 + a - b)y^2 + (2b + c)xy = 2(3y - x)(2x - y)$ の右辺を展開すると

$$(1 - a - b)x^2 + (1 + a - b)y^2 + (2b + c)xy = -4x^2 - 6y^2 + 14xy$$

x^2，y^2，xy の項の係数が等しいから

$$1 - a - b = -4,\ 1 + a - b = -6,\ 2b + c = 14$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -1}$，$b = 6$，$\boldsymbol{c = 2}$

(答) ウ. -1　エ. 2

(3) 判別式 D は

$$\begin{aligned} D &= (a - 2)^2 - 4 \cdot 2\left\{\frac{1}{2}(a^2 - 3a) + 1\right\} \\ &= -(3a^2 - 8a + 4) \\ &= -(a - 2)(3a - 2) \end{aligned}$$

このとき，$D > 0$ であるから

$$-(a - 2)(3a - 2) > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (a - 2)(3a - 2) < 0$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{2}{3} < a < 2}$

(答) オ. $\dfrac{2}{3}$　カ. 2

(4) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{2^2 + 4^2 - a^2}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{20 - a^2}{16}$$

$60^\circ \leqq A \leqq 120^\circ$ のとき $\quad -\dfrac{1}{2} \leqq \cos A \leqq \dfrac{1}{2}$

したがって $\quad -\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{20 - a^2}{16} \leqq \dfrac{1}{2}$

ゆえに $\quad 12 \leqq a^2 \leqq 28$

よって $\quad \boldsymbol{2\sqrt{3} \leqq a \leqq 2\sqrt{7}}$

(答) キ. $2\sqrt{3}$ ク. $2\sqrt{7}$

(5) $\cos 10^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 10^\circ} = \sqrt{1 - a^2}$, $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

したがって $\quad \boldsymbol{\sin 80^\circ = \sqrt{1 - a^2}}$

$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$, $\cos 80^\circ = \sin 10^\circ = a$

したがって $\quad \boldsymbol{\cos 100^\circ = -a}$

(答) ケ. $\sqrt{1 - a^2}$ コ. $-a$

[2] (1) $a = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$ より

$$\begin{aligned} a^2 - a - 1 &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$a^2 = a + 1$ であるから

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 + a + 1 &= a^2(a + 1) + a + 1 \\ &= (a + 1)(a + 1) + a + 1 \\ &= a^2 + 3a + 2 \\ &= (a + 1) + 3a + 2 \\ &= 4a + 3 \\ &= 4 \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 3 = \boldsymbol{5 - 2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(答) サ. 0 シ. $5 - 2\sqrt{5}$

(2) この 2 次方程式の解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{2a}{2}=-a,\quad \alpha\beta=\frac{a+1}{2}$$

ゆえに

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-a)^2-4\times\frac{a+1}{2}=a^2-2a-2$$

$1<|\alpha-\beta|<2$ であるから　$1<(\alpha-\beta)^2<4$

したがって　　$1<a^2-2a-2<4$

$a>0$ に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{3<a<1+\sqrt{7}}$

(答) ス. 3　セ. $1+\sqrt{7}$

(3) 与えられた不等式から　　$-(x-3)\leqq 2(x-a)\leqq x-3$

これを解いて　　$\boldsymbol{\frac{2}{3}a+1\leqq x\leqq 2a-3}$

(答) ソ. $\frac{2}{3}a+1$　タ. $2a-3$

(4) $2x+3b<4(x-a)$ を解いて　$x>2a+\frac{3}{2}b$

不等式の解から　　$2a+\frac{3}{2}b=-1\quad\cdots①$

$bx>-x-a$ すなわち　$(b+1)x>-a$

この不等式の解が $x<3$ であるから，$b+1<0\quad\cdots②$

ゆえに　$\frac{-a}{b+1}=3$　すなわち　$a=-3b-3\quad\cdots③$

② に注意しながら，①，③ を解いて　　$\boldsymbol{a=\frac{1}{3},\ b=-\frac{10}{9}}$

(答) チ. $\frac{1}{3}$　ツ. $-\frac{10}{9}$

(5) $2x+y=1$ より　　$y=1-2x$　$\cdots$①

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ であるから，① より

$$x \geqq 0, \quad 1-2x \geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2} \quad \cdots②$$

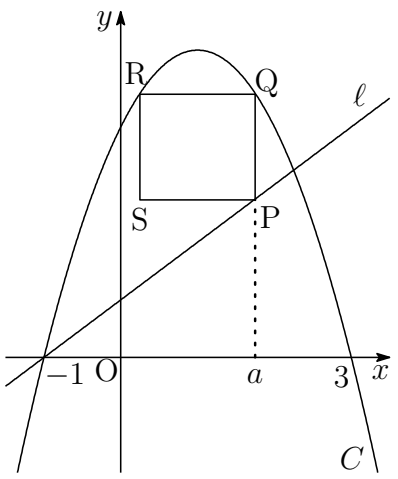
① より

$$\begin{aligned} 2x^2+y^2 &= 2x^2+(1-2x)^2 \\ &= 6x^2-4x+1 \\ &= 6\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3} \end{aligned}$$

② の範囲に注意して $x=0$ のとき最大値 $\mathbf{1}$，$x=\dfrac{1}{3}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(答) テ. 1　ト. $\dfrac{2}{3}$

[3] $x=a$ のとき



P の y 座標は $\dfrac{3}{2}(a+1)$

Q の y 座標は $-2(a^2-2a-3)$

P の y 座標が Q の y 座標より小さいとき

$$\frac{3}{2}(a+1) < -2(a^2-2a-3)$$

整理すると　$(a+1)(4a-9)<0$

これを解いて　$\boldsymbol{-1<a<\dfrac{9}{4}}$　$\cdots$①

このとき，線分 PQ の長さは

$$-2(a^2-2a-3)-\frac{3}{2}(a+1) = \boldsymbol{-2a^2+\frac{5}{2}a+\frac{9}{2}}$$

R の x 座標は

$$-2(x^2-2x-3) = -2(a^2-2a-3)$$

すなわち　　$(x-a)(x+a-2)=0$

$x \neq a$ に注意して　　$\boldsymbol{x=-a+2}$

R の x 座標が Q の x 座標より小さいとき

$$-a+2<a \quad \text{①に注意して} \quad \boldsymbol{1<a<\frac{9}{4}} \quad \cdots②$$

QR の長さは　$a-(-a+2)=2a-2$

長方形 PQRS の周の長さは

$$\begin{aligned} 2\mathrm{PQ}+2\mathrm{QR} &= 2\left(-2a^2+\frac{5}{2}a+\frac{9}{2}\right)+2(2a-2) \\ &= -4a^2+9a+5 \\ &= -4\left(a-\frac{9}{8}\right)^2+\frac{161}{16} \end{aligned}$$

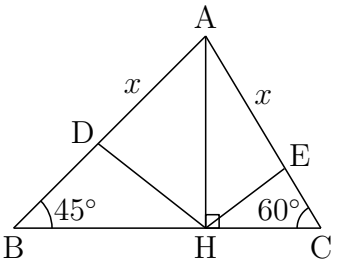
② に注意して　$\boldsymbol{a=\dfrac{9}{8}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\dfrac{161}{16}}$

(答) ナ. $-1<a<\dfrac{9}{4}$　ニ. $-2a^2+\dfrac{5}{2}a+\dfrac{9}{2}$　ヌ. $-a+2$　ネ. $1<a<\dfrac{9}{4}$
ノ. $\dfrac{9}{8}$　ハ. $\dfrac{161}{16}$

［4］△ABC に正弦定理を適用して

$$\frac{\mathrm{AC}}{\sin 45^\circ}=\frac{2}{\sin 60^\circ}$$

これを解いて　$\boldsymbol{\mathrm{AC}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$



$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin 45^\circ=2\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

$\mathrm{BH}=\mathrm{AH}$，$\mathrm{CH}=\mathrm{AC}\cos 60^\circ$ より　$\mathrm{BH}=\sqrt{2}$，$\mathrm{CH}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

△BDH と △CEH にそれぞれ余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{DH}^2 &= (\sqrt{2})^2+(2-x)^2-2\cdot\sqrt{2}(2-x)\cos 45^\circ \\ &= x^2-2x+2 \\ \mathrm{EH}^2 &= \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-x\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}-x\right)\cos 60^\circ \\ &= x^2-\sqrt{6}x+2 \end{aligned}$$

上の 2 式より　$\mathrm{DH}^2+\mathrm{EH}^2=\boldsymbol{2x^2-(2+\sqrt{6})x+4}$

この値を最小にする x の値は，$0<x<\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ に注意して

$$x=-\frac{-(2+\sqrt{6})}{2\cdot 2}=\boldsymbol{\frac{2+\sqrt{6}}{4}}$$

(答) ヒ. $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$　フ. $\sqrt{2}$　ヘ. $2x^2-(2+\sqrt{6})x+4$　ホ. $\dfrac{2+\sqrt{6}}{4}$

9.24 平成 25 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) 整式 $3x^3+8x^2+7x+6$ を整式 $ax+b$ で割ると，商が x^2+2x+1，余りが 4 であった。このとき $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) 2 直線 $x-2y-4=0$，$3x+2y-4=0$ の交点と，点 $(3,-2)$ を通る直線の方程式は $y=$ ウ $x+$ エ である。

(3) $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき，$4\cos^2\theta-2\left(1-\tan\frac{\pi}{3}\right)\sin\theta-4+\sqrt{3}>0$ となる θ の範囲は オ $<\theta<$ カ である。

(4) $x>0$ とする。方程式 $\log_2 x-\log_x 4+1=0$ を，$y=\log_2 x$ とおいて y の式に直すと キ $=0$ となる。従って，方程式の解は $x=$ ク である。

(5) 関数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{3}{2}$ は $x=$ ケ で極大であり，極大値は コ である。

[2] (1) 方程式 $x^3+ax^2-3x+b=0$ において，$x=2+i$ が解ならば，実数 a，b の値は，$a=$ サ，$b=$ シ である。

(2) 円 $C: x^2+y^2=4$ 上の点 $(\sqrt{3},-1)$ における接線 ℓ の方程式は $y=$ ス である。C 上の点 $(a,\ b)$ における接線が ℓ と直交するなら，$(a,\ b)=$ セ である。ただし $a>0$ とする。

(3) $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，$\cos\beta=-\dfrac{1}{2}$ $(0<\alpha<90^\circ,\ 90^\circ<\beta<180^\circ)$ のとき，

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{6}$，$\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\boxed{\text{タ}}}{6}$ である。

(4) $2^x-2^{-x}=4$ のとき，$2^x+2^{-x}=$ チ，$4^x-4^{-x}=$ ツ である。

(5) 関数 $f(x)$ と定数 a が，$\displaystyle\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2$，$\displaystyle\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\frac{a}{9}x^3$ を満たすとき，$a=$ テ，$f(x)=$ ト である。

[3] △ABC において，AB $=2$，AC $=4$ とする。$\angle\mathrm{A}=2\theta$ とするとき，△ABC の面積を θ を用いて表すと ナ である。$\angle$A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とし，AD $=\ell$ とするとき，△ABD，△ADC の面積を S_1，S_2 を ℓ と θ を用いて表すと，$S_1=$ ニ，$S_2=$ ヌ である。さらに，ℓ を θ を用いて表すと，$\ell=$ ネ となる。特に，BC $=3$ のとき，$\ell=$ ノ である。

［**4**］P$(a,\ 0)$ $(a>0)$ と原点 O の中点を M とし，M を通り y 軸と平行な直線と放物線 $C: y=x^2$ の交点を A とすると，A における C の接線 ℓ_1 の方程式は $y=$ ハ である。O を通り ℓ_1 と平行な直線 ℓ_2 と C の，O 以外の交点の座標は ヒ であるから C と ℓ_2 で囲まれる部分の面積 S は フ となる。また，2 直線 ℓ_1，ℓ_2 と y 軸および直線 $x=a$ で囲まれる平行四辺形の面積は S の へ 倍である。

解答例

［**1**］(1) 問題から

$$3x^3+8x^2+7x+6=(ax+b)(x^2+2x+1)+4$$

ゆえに　$3x^3+8x^2+7x+2=(ax+b)(x^2+2x+1)$

x^3 の係数と定数項を比較して　　$\boldsymbol{a=3,\ b=2}$

(答) ア. 3　イ. 2

(2) 2 直線 $x-2y-4=0$，$3x+2y-4=0$ の交点の座標は

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 3x+2y-4=0 \end{cases}$$　これを解いて　$(x,\ y)=(2,-1)$

求める直線は，2 点 $(2,-1)$，$(3,-2)$ を通る直線であるから

$$y-(-1)=\frac{-2-(-1)}{3-2}(x-2)$$　よって　$\boldsymbol{y=-x+1}$

[別解]

2 直線 $x-2y-4=0$，$3x+2y-4=0$ の交点を通る直線は，

$$(x-2y-4)+k(3x+2y-4)=0 \quad \cdots ①$$

とおける (k は定数)．これが点 $(3,-2)$ を通るから

$$\{3-2\cdot(-2)-4\}+k\{3\cdot3+2\cdot(-2)-4\}=0$$　ゆえに　$k=-3$

$k=-3$ を ① に代入して

$$(x-2y-4)-3(3x+2y-4)=0$$　よって　$\boldsymbol{y=-x+1}$

(答) ウ. -1　エ. 1

(3) 与えられた不等式から

$$\begin{aligned} 4(1-\sin^2\theta)-2(1-\sqrt{3})\sin\theta-4+\sqrt{3}>0 \\ -4\sin^2\theta-2(1-\sqrt{3})\sin\theta+\sqrt{3}>0 \\ 4\sin^2\theta+2(1-\sqrt{3})\sin\theta-\sqrt{3}<0 \\ (2\sin\theta+1)(2\sin\theta-\sqrt{3})<0 \end{aligned}$$

したがって $\quad -\dfrac{1}{2}<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\quad \boldsymbol{-\dfrac{\pi}{6}<\theta<\dfrac{\pi}{3}}$

(答) オ. $-\dfrac{\pi}{6}$ エ. $\dfrac{\pi}{3}$

(4) 方程式を変形すると

$$\log_2 x-\frac{\log_2 4}{\log_2 x}+1=0 \quad \text{ゆえに} \quad y-\frac{2}{y}+1=0$$

したがって $y^2+y-2=0$ これを解いて $y=-2,\ 1$

よって $\log_2 x=-2,\ 1$ から $\quad \boldsymbol{x=\dfrac{1}{4},\ 2}$

(答) ク. $\dfrac{1}{4},\ 2$

(5) $f'(x)=3x^2+x-2=(x+1)(3x-2)$

$f'(x)=0$ とすると $\quad x=-1,\ \frac{2}{3}$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 3	↘	極小 $\frac{37}{54}$	↗

よって，$\boldsymbol{x=-1}$ のとき極大値 **3** をとる.

(答) ケ. -1 コ. 3

［**2**］(1) $2+i$ が方程式 $x^3+ax^2-3x+b=0$ の解であるから

$$(2+i)^3+a(2+i)^2-3(2+i)+b=0$$

ゆえに　　$(3a+b-4)+(4a+8)i=0$

$3a+b-4$，$4a+8$ は実数であるから

$3a+b-4=0,\ 4a+b=0$　これを解いて　$\boldsymbol{a=-2,\ b=10}$

(答) サ. -2　シ. 10

(2) $C: x^2+y^2=4$ 上の点 $(\sqrt{3},-1)$ における接線 ℓ の方程式は

$\sqrt{3}x-1\cdot y=4$　ゆえに　$\boldsymbol{y=\sqrt{3}x-4}$

$x^2+y^2=4$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は　$ax+by=4$

これが ℓ に垂直なので，$b\neq 0$ に注意して　$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{4}{b}$

この接線が直線 ℓ に垂直であるから

$$-\frac{a}{b}\times\sqrt{3}=-1\quad\text{ゆえに}\quad b=\sqrt{3}a\quad\cdots①$$

点 $(a,\ b)$ は，円 $x^2+y^2=4$ 上にあるから　$a^2+b^2=4$　$\cdots②$

$a>0$ に注意して，①，② を解いて　$\boldsymbol{(a,\ b)=(1,\ \sqrt{3})}$

(答) ス. $\sqrt{3}x-4$　セ. $(1,\ \sqrt{3})$

(3) $0^\circ<\alpha<90^\circ$ より，$\cos\alpha>0$ であるから

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$90^\circ<\beta<180^\circ$ より，$\sin\beta>0$ であるから

$$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，加法定理により

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{-1+2\sqrt{6}}{6}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}}\end{aligned}$$

(答) ソ. $-1+2\sqrt{6}$　タ. $-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(4) $t = 2^x$ とおくと，$2^x - 2^{-x} = 4$ より

$$t - \frac{1}{t} = 4 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 4t - 1 = 0$$

$t > 0$ に注意して，これを解くと　$t = 2 + \sqrt{5}$

ゆえに　$2^x = \sqrt{5} + 2$，$2^{-x} = \dfrac{1}{2^x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{5} - 2$

よって

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{-x} &= (\sqrt{5} + 2) + (\sqrt{5} - 2) = \mathbf{2\sqrt{5}} \\ 4^x - 4^{-x} &= (2^x + 2^{-x})(2^x - 2^{-x}) \\ &= 2\sqrt{5} \times 4 = \mathbf{8\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(答) チ. $2\sqrt{5}$　ツ. $8\sqrt{5}$

(5) $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a}{9}x^3$ を x で微分すると　$\boldsymbol{f(x) = \dfrac{a}{3}x^2}$

したがって

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{a}{3}x^2 = \left[\ \frac{a}{9}x^3\ \right]_{-1}^{1} = \frac{2}{9}a$$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 2$ であるから

$$\frac{2}{9}a = 2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a = 9}$$

(答) テ. 9　ト. $\dfrac{a}{3}x^2$

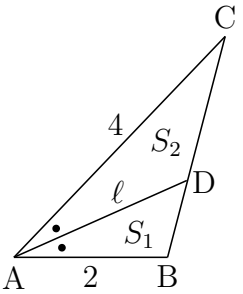
［3］△ABC の面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 4\sin 2\theta = 4\sin 2\theta$

$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot \ell \sin\theta = \boldsymbol{\ell \sin\theta}$

$S_2 = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot \ell \sin\theta = \boldsymbol{2\ell \sin\theta}$

$S_1 + S_2 = 4\sin 2\theta = 8\sin\theta\cos\theta$ であるから

$$\ell\sin\theta + 2\ell\sin\theta = 8\sin\theta\cos\theta$$



$\sin\theta \neq 0$ に注意して　$\boldsymbol{\ell = \dfrac{8}{3}\cos\theta}$　$\cdots$①

AD は ∠A の二等分線であるから　BD : DC = AB : AC

したがって，BC = 3 のとき　BD = 1

△ABD に余弦定理を適用すると

$$1^2 = 2^2 + \ell^2 - 2\cdot 2\cdot \ell\cos\theta$$

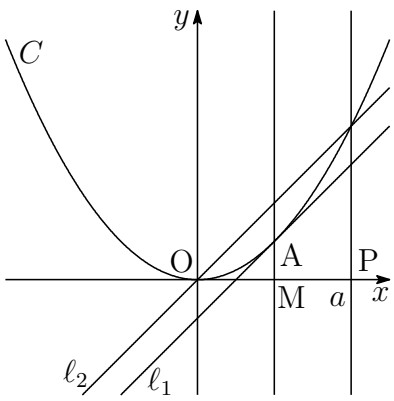
① より，$\cos\theta = \dfrac{3}{8}\ell$ を上式に代入すると

$$1^2 = 2^2 + \ell^2 - 2\cdot 2\cdot \ell \times \frac{3}{8}\ell \quad \text{ゆえに} \quad \ell^2 = 6$$

$\ell > 0$ であるから　　$\boldsymbol{\ell = \sqrt{6}}$

(答) ナ. $4\sin 2\theta$　ニ. $\ell\sin\theta$　ヌ. $2\ell\sin\theta$　ネ. $\dfrac{8}{3}\cos\theta$　ノ. $\sqrt{6}$

［4］A の座標は $\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$



$y = x^2$ を微分すると　　$y' = 2x$

$x = \dfrac{a}{2}$ のとき　　$y' = 2 \times \dfrac{a}{2} = a$

したがって，ℓ_1 の方程式は

$$y - \frac{a^2}{4} = a\left(x - \frac{a}{2}\right)$$

ゆえに　　$\boldsymbol{y = ax - \dfrac{a^2}{4}}$

ℓ_2 は，原点を通り傾き a の直線であるから　　$y = ax$

ℓ_2 と C の交点の座標は

$$\begin{cases} y = ax \\ y = x^2 \end{cases}$$ これを解いて　$(0,\ 0),\ \boldsymbol{(a,\ a^2)}$

C と ℓ_2 で囲まれる部分の面積 S は

$$S = \int_0^a (ax - x^2)\,dx = -\int_0^a x(x-a)\,dx$$
$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)(a-0)^3 = \boldsymbol{\frac{a^3}{6}}$$

2 直線 ℓ_1，ℓ_2 と y 軸および直線 $x = a$ で囲まれる平行四辺形の面積は

$$\frac{a^2}{4} \times a = \frac{a^3}{4}$$

これは S の面積の　　$\dfrac{a^3}{4} \div \dfrac{a^3}{6} = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$ 倍

(答) ハ. $ax - \dfrac{a^3}{4}$　ヒ. $(a,\ a^2)$　フ. $\dfrac{3}{2}$

9.25　平成 24 年度推薦前期試験 (90 分)

[1] (1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2$ を整理すると，$\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\times\sqrt{10}$ となる。

(2) 2 次方程式 $2x^2+5\sqrt{3}\,x-9=0$ の解は，$x=\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $a-2b=x$，$ab=y$ とおく。次の式を x，y で表すと，$a^2+4b^2=\boxed{\text{オ}}$，$a^3-8b^3=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $a>0$ のとき，$\begin{cases}2x-a<-3ax-2b\\-x+2a<x-3b\end{cases}$ をみたす x の範囲が $-\dfrac{5}{2}<x<1$ であるならば，$a=\boxed{\text{キ}}$，$b=\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $90^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta=\boxed{\text{ケ}}$，$\tan\theta=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) 周の長さ 16cm，面積 15cm^2 の長方形の隣り合う 2 辺の長さは $\boxed{\text{サ}}$cm と $\boxed{\text{シ}}$cm である。

(2) 2 次曲線 $y=2x^2-4x+5$ の $-1\leqq x\leqq2$ における最大値は $\boxed{\text{ス}}$，最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $6x^2-x-1=0$ の 2 つの解の逆数が 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるとき，$a=\boxed{\text{ソ}}$，$b=\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 点 A$(-2,\ 0)$ を通る直線 ℓ と y 軸との交点を B とする。原点を O とするとき，$\angle\text{BAO}=60^\circ$ ならば，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{チ}}x+\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 1 辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF の内角の和は $\boxed{\text{テ}}^\circ$ である。この正六角形の中心より辺 AB に下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] x，y は負でない整数で，等式 $x^2(x^2+4)+y^2(y^2-4)=2x^2y^2-3$ をみたすとする。$x^2-y^2=t$ とおいて，この等式を t で表すと $\boxed{\text{ナ}}=0$ となる。したがって，x^2-y^2 の値は $\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ である。このことから，等式をみたす x，y の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$ である。

[4] △ABC において $\angle\text{B}=30^\circ$，$\text{BC}=\sqrt{3}$，$\text{AC}=\sqrt{7}$ ならば，$\text{AB}=\boxed{\text{ハ}}$ であるから，△ABC の面積 S_1 は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。辺 BC 上に $\text{BE}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ となる点 E をとる。辺 AB 上に点 D をとり，△DBE の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{1}{3}S_1<S_2<\dfrac{1}{2}S_1$ が成り立つのは $\boxed{\text{フ}}<\text{BD}<\boxed{\text{ヘ}}$ のときである。

解答例

［**1**］(1) $$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{5+\sqrt{10}}{3}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=\frac{1}{3}+2+3=\frac{16}{3}$$

したがって

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2=\frac{5+\sqrt{10}}{3}+\frac{16}{3}=\mathbf{7+\frac{1}{3}\times\sqrt{10}}$$

(答) ア. 7　イ. $\frac{1}{3}$

(2) 解の公式により

$$x=\frac{-5\sqrt{3}\pm\sqrt{(5\sqrt{3})^2-4\cdot2\cdot(-9)}}{2\cdot2}=\frac{-5\sqrt{3}\pm\sqrt{147}}{4}$$
$$=\frac{-5\sqrt{3}\pm7\sqrt{3}}{4}=\mathbf{\frac{\sqrt{3}}{2},\ -3\sqrt{3}}$$

(答) ウ. エ. $\frac{\sqrt{3}}{2},\ -3\sqrt{3}$

(3) $$\begin{aligned}a^2+4b^2&=a^2-4ab+4b^2+4ab\\&=(a-2b)^2+4ab\\&=\boldsymbol{x^2+4y}\end{aligned}$$

この結果から

$$\begin{aligned}a^3-8b^3&=a^3-(2b)^3\\&=(a-2b)\{a^2+a\cdot2b+(2b)^2\}\\&=(a-2b)\{(a^2+4b^2)+2ab\}\\&=x\{(x^2+4y)+2y\}=\boldsymbol{x(x^2+6y)}\end{aligned}$$

(答) オ. x^2+4y　カ. $x(x^2+6y)$

(4) 第 1 式より　　$(3a+2)x < a-2b$

$3a+2>0$ であるから　　$x < \dfrac{a-2b}{3a+2}$　　$\cdots$①

第 2 式より　　$-2x < -2a-3b$

ゆえに　　$x > \dfrac{2a+3b}{2}$　　$\cdots$②

①，② の共通範囲が $-\dfrac{5}{2} < x < 1$ であるから

$$\frac{2a+3b}{2} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{a-2b}{3a+2} = 1$$

したがって　　$2a+3b=-5$，$a+b=-1$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-3}$

(答) キ. 2　ク. -3

(5) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}{\boldsymbol{3}}$$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{3} \div \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{2}}}{\boldsymbol{4}}$

(答) ケ. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　コ. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

[2] (1) 2 辺の長さを x cm，y cm とする．

周の長さから　$x+y=8$

面積から　$xy=15$

x，y を解とする t に関する 2 次方程式は

$$t^2-(x+y)t+xy=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2-8t+15=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{t=3,\ 5}$

(答) サ．シ．3，5

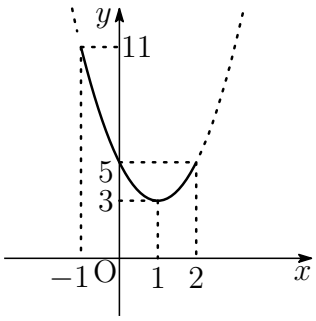
(2) $y=2x^2-4x+5$ を変形すると

$$y=2(x-1)^2+3$$

$-1 \leqq x \leqq 2$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x=-1$ で最大値 11 をとり，

$x=1$ で最小値 3 をとる．



(答) ス．11　セ．3

(3) 2 次方程式 $6x^2-x-1=0$ の解は　$\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$

この 2 数の逆数 2，-3 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\{2+(-3)\}x+2\cdot(-3)=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2+x-6=0$$

よって，係数を比較して　$\boldsymbol{a=1,\ b=-6}$

(答) ソ．1　タ．-6

(4) ℓ は，点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ を通り，傾き $\pm\tan 60^\circ$ の直線であるから

$$y=\pm\sqrt{3}(x+2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\pm\sqrt{3}\,x\pm 2\sqrt{3}} \quad \text{(複号同順)}$$

(答) チ．$\pm\sqrt{3}$　ツ．$\pm 2\sqrt{3}$　(複号同順)

直線 ℓ は，2 本存在するので，センター試験のように

$$y=\square x+\square, \quad y=-\square x-\square$$

とすべきであった．

(5) 六角形の内角の和は　　$(6-2)\times 180^\circ = \mathbf{720^\circ}$

正六角形の中心を O とすると，△OAB は正三角形であるから，求める垂線の長さは

$$2\sin 60^\circ = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(答) テ. 720　ト. $\sqrt{3}$

[3] 与式を整理すると　$x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2-4y^2+3=0$

ゆえに　　$(x^2-y^2)^2+4(x^2-y^2)+3=0$

$x^2-y^2=t$ とおくと　　$\boldsymbol{t^2+4t+3=0}$

これを解いて　　$\boldsymbol{t=-1,-3}$

したがって　　$(x+y)(x-y)=-1,-3$

x，y は負でない整数であるから，$x+y\geqq 0$ に注意して

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

第 2 式は $x=-1$ となり，不適．したがって，第 1，第 3 式を解いて

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ 1),\ (1,\ 2)}$$

(答) ナ. t^2+4t+3　ニ. ヌ. $-1,-3$　ネ. ノ. $(0,\ 1),\ (1,\ 2)$

［**4**］余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ により

$$(\sqrt{7})^2 = c^2 + (\sqrt{3})^2 - 2c\cdot\sqrt{3}\cos 30^\circ \quad \text{すなわち} \quad c^2 - 3c - 4 = 0$$

$c > 0$ に注意して，これを解くと　$c = 4$　ゆえに　$\mathbf{AB = 4}$

したがって，△ABC の面積 S_1 は

$$S_1 = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\sin 30^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$\mathrm{BD} = x$ とすると，△DBE の面積 S_2 は

$$S_2 = \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BE}\sin B = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 30^\circ = \frac{x}{2\sqrt{3}}$$

上の諸式を $\dfrac{1}{3}S_1 < S_2 < \dfrac{1}{2}S_1$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{x}{2\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{2 < x < 3}$$

(答) ハ. 4　ヒ. $\sqrt{3}$　フ. 2　ヘ. 3

9.26　平成 24 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ の分母を有理化すると［ア］だから，その整数部分は［イ］である。

(2) 2 次方程式 $x^2+(2a+1)x+a^2-1=0$ が実数解を持つとき，a の範囲は $a \geqq$［ウ］である。とくに重解を持つならば，その解は［エ］である。

(3) $2|x-2| < x+3$ が成り立つ x の範囲は［オ］$< x <$［カ］である。

(4) 2 次関数 $y=2x^2-3x+2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，2 点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 0)$ を通る。このとき，$p=$［キ］，$q=$［ク］である。

(5) 半径 $\sqrt{2}$ の円に内接する三角形 ABC において $\angle \mathrm{A} = 135^\circ$ ならば $\mathrm{BC} =$［ケ］である。さらに，$\angle \mathrm{B} = 30^\circ$ ならば，$\mathrm{AB} =$［コ］である。

[2] (1) $2(a+1)x^2+(2a^2-a+1)x-2a^2+3a-1$ を因数分解すると，［サ］$\times$［シ］である。

(2) 2 つの 2 次関数 $y=x^2+ax+2a$，$y=x^2-ax+a^2-3$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，それぞれ 2 個である。このとき a の範囲は［ス］$< x <$［セ］である。

(3) $a>0$ とする。2 次関数 $y=x^2-6x+11$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値が 11，最小値が 2 ならば，a の値の範囲は［ソ］$\leqq a \leqq$［タ］である。

(4) △ABC において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{AC}=8$ のとき，$\angle \mathrm{A} =$［チ］$^\circ$ である。また，△ABC の面積は［ツ］である。

(5) 高さが 4cm の円柱がある。その表面積は，半径 4cm の球の表面積に等しい。このとき円柱の表面積は［テ］cm^2 であり，その底面の半径は［ト］cm である。

[3] 2 次曲線 $C_1 : y=-x^2+2x$ の x 軸との 2 交点は原点 O と A(［ナ］, 0) である。C_1 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線を C_2 とする。C_2 と x 軸との 2 交点を P，Q とすると，P と Q の間の距離は q を用いると［ニ］である。従って P と Q の距離が 4 であるならば，$q=$［ヌ］である。このとき P，Q の一方が O，A の間にあるのは［ネ　$< p <$　］または［ノ　$< p <$　］のときである。

[4] △ABC は，辺 AC と BC の長さが 2 である二等辺三角形で，$90^\circ < \angle \mathrm{C} < 180^\circ$ とする。$\sin\angle \mathrm{A}$，$\cos\angle \mathrm{A}$ は，2 次方程式 $2x^2-(1+\sqrt{3})x+k=0$ の解であるとき，$k=$［ハ］であり，$\angle \mathrm{A} =$［ヒ］$^\circ$ である。このとき，$\mathrm{AB} =$［フ］であり，△ABC の面積［ヘ］である。

解答例

［1］(1) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{4(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \dfrac{4(5+\sqrt{3})}{25-3} = \boldsymbol{\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}}$

ここで　　$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$，$3 < \sqrt{12} < 4$

したがって　　$\dfrac{10+3}{11} < \dfrac{10+2\sqrt{3}}{11} < \dfrac{10+4}{11}$

よって，その整数部分は　$\mathbf{1}$

(答) ア. $\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}$　イ. 1

(2) 2 次方程式 $x^2+(2a+1)x+a^2-1=0$ の判別式 D は

$$D = (2a+1)^2 - 4\cdot 1\cdot(a^2-1) = 4a+5$$

この 2 次方程式が実数解をもつとき，$D \geqq 0$ であるから

$$4a+5 \geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a \geqq -\dfrac{5}{4}}$$

とくに重解をもつとき　　$D=0$　すなわち　$a = -\dfrac{5}{4}$

したがって，その重解は

$$x = -\frac{2a+1}{2\cdot 1} = -\frac{1}{2}(2a+1)$$
$$= -\frac{1}{2}\left\{2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+1\right\} = \boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(答) ウ. $-\dfrac{5}{4}$　エ. $\dfrac{3}{4}$

(3) 与えられた不等式から　$|2x-4| < x+3$

したがって　　$-(x+3) < 2x-4 < x+3$

これを解いて　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3} < x < 7}$

(答) オ. $\dfrac{1}{3}$　カ. 7

(4) 放物線 $y = 2x^2 - 3x + 2 \cdots ①$ を平行移動した放物線の方程式は

$$y = 2x^2 + bx + c$$

とおける．これが，2 点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 0)$ を通るから

$$6 = 2{\cdot}1^2 + b{\cdot}1 + c, \quad 0 = 2{\cdot}3^2 + b{\cdot}3 + c$$

すなわち　　$b + c = 4$，$3b + c = -18$

これを解いて　　$b = -11$，$c = 15$

ゆえに，平行移動後の放物線の方程式は

$$y = 2x^2 - 11x + 15 \cdots ②$$

放物線 ① の頂点の座標は

$$\left(-\frac{-3}{2{\cdot}2}, -\frac{(-3)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}2}{4{\cdot}2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right)$$

また，放物線 ② の頂点の座標は

$$\left(-\frac{-11}{2{\cdot}2}, -\frac{(-11)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}15}{4{\cdot}2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{11}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

よって　　$p = \dfrac{11}{4} - \dfrac{3}{4} = \mathbf{2}$,　　$q = -\dfrac{1}{8} - \dfrac{7}{8} = \mathbf{-1}$

(答) キ. 2　ク. -1

(5) 正弦定理により　　$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2{\cdot}\sqrt{2}$

ゆえに　$a = 2\sqrt{2}\sin 135^\circ = \mathbf{2}$，$b = 2\sqrt{2}\sin 30^\circ = \sqrt{2}$

第 1 余弦定理により

$$c = a\cos B + b\cos A = 2\cos 30^\circ + \sqrt{2}\cos 135^\circ = \boldsymbol{\sqrt{3} - 1}$$

(答) ケ. 2　コ. $\sqrt{3} - 1$

第 1 余弦定理

$a = b\cos C + c\cos B$，$b = c\cos A + a\cos C$，$c = a\cos B + b\cos A$

なお，余弦定理とは，第 2 余弦定理のことである．

［2］ (1) $2(a+1)x^2+(2a^2-a+1)x-2a^2+3a-1$

$=2(a+1)x^2+(2a^2-a+1)x-(a-1)(2a-1)$

$=\{2x+(2a-1)\}\{(a+1)x-(a-1)\}$

$=\boldsymbol{(2x+2a-1)(ax+x-a+1)}$

$$\begin{array}{ccccc} 2 & & 2a-1 & \longrightarrow & 2a^2+a-1 \\ & \times & & & \\ a+1 & & -(a-1) & \longrightarrow & -2a+2 \\ \hline 2(a+1) & & -(a-1)(2a-1) & & 2a^2-a+1 \end{array}$$

(答) サ. シ. $2x+2a-1$，$ax+x-a+1$

(2) 2 つの 2 次関数 $y=x^2+ax+2a$，$y=x^2-ax+a^2-3$ がともに x 軸と異なる 2 点で交わるので，係数について

$$a^2-4\cdot1\cdot2a>0 \quad \text{かつ} \quad (-a)^2-4\cdot1\cdot(a^2-3)>0$$

したがって，連立不等式 $\begin{cases} a^2-8a>0 \\ a^2-4<0 \end{cases}$ の解を求めればよい.

第 1 式から　　$a<0,\ 8<a$　$\cdots$①

第 2 式から　　$-2<a<2$　$\cdots$②

よって，①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-2<a<0}$

(答) ス. -2　セ. 0

(3) $y=x^2-6x+11$ の右辺を変形すると

$$y=(x-3)^2+2$$

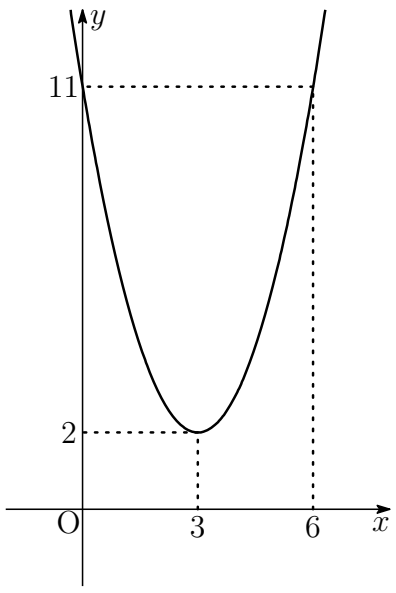
$y=11$ となるときの x の値は

$$x=0,\ 6$$

$0\leqq x\leqq a$ において，この 2 次関数の最大値が 11，最小値が 2 であるための a の値の範囲は，右のグラフから

$$\boldsymbol{3\leqq a\leqq 6}$$

(答) ソ. 3　タ. 6



(4) $a=7$，$b=8$，$c=5$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　　$\boldsymbol{A=60^\circ}$

また，△ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sin 60^\circ=\boldsymbol{10\sqrt{3}}$$

(答) チ. 60　ツ. $10\sqrt{3}$

(5) 半径 4cm の球の表面積は　　$4\pi\cdot 4^2=\boldsymbol{64\pi}$ $[\mathrm{cm}^2]$

円柱の半径を r cm とすると，その表面積は

$$2\times\pi r^2+2\pi r\cdot 4=(2r^2+8r)\pi \ \ [\mathrm{cm}^2]$$

球と円柱の表面積が等しいので

$$(2r^2+8r)\pi=64\pi \quad \text{すなわち} \quad r^2+4r-32=0$$

$r>0$ に注意して，これを解くと　　$\boldsymbol{r=4}$

(答) テ. 64π　ト. 4

［**3**］C_1 と x 軸との共有点の x 座標は

$$-x^2+2x=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ \mathbf{2}$$

$C_1 : y=-(x-1)^2+1$ であるから，これを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものが

$$C_2 : y-q=-(x-p-1)^2+1$$

であるから，C_2 と x 軸との交点 P，Q の x 座標は

$$-q=-(x-p-1)^2+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x-p-1)^2=q+1$$

ゆえに　　$x=p+1\pm\sqrt{q+1}$　$\cdots$①

これが，P，Q の x 座標であるから，

$$\mathrm{PQ}=(p+1+\sqrt{q+1})-(p+1-\sqrt{q+1})=2\sqrt{q+1}$$

PQ=4 のとき　　$2\sqrt{q+1}=4$　これを解いて　$\boldsymbol{q=3}$

このとき，① より，P，Q の x 座標は　$p-1,\ p+3$

したがって，P，Q の一方が O，A の間にあるのは

$$p-1<0<p+3<2 \quad \text{または} \quad 0<p-1<2<p+3$$

ゆえに　　$\boldsymbol{-3<p<-1}$　または　$\boldsymbol{1<p<3}$

(答) ナ. 2　ニ. $2\sqrt{q+1}$　ヌ. 3　ネ. ノ. $-3<p<-1,\ 1<p<3$

［**4**］$a=b=2$ の二等辺三角形であるから　$A=B$

ゆえに　　$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-2A$　$\cdots$①

$90^\circ<C<180^\circ$ であるから

$$90^\circ<180^\circ-2A<180^\circ \quad \text{ゆえに} \quad 0^\circ<A<45^\circ \quad \cdots②$$

$\sin A$，$\cos A$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$(x-\sin A)(x-\cos A)=0$$

すなわち　　$x^2-(\sin A+\cos A)x+\sin A\cos A=0$

これが，$2x^2-(1+\sqrt{3})x+k=0\cdots$③ に一致するので，$x^2$ の係数に注意して

$$\sin A+\cos A=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\quad \sin A\cos A=\frac{k}{2}$$

上の 2 式を $(\sin A+\cos A)^2-2\sin A\cos A=1$ に代入すると

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{k}{2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

これを ③ に代入して整理すると　$(2x-1)(x-\sqrt{3})=0$

したがって，この方程式の解は　　$\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

② により　$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$\boldsymbol{A=30^\circ}$

これを ① に代入して　　$C=120^\circ$

正弦定理より　$\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 120^\circ}$　これを解いて　$\mathrm{AB}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

また，△ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 120^\circ=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(答) ハ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ヒ. 30　フ. $2\sqrt{3}$　ヘ. $\sqrt{3}$

9.27 平成 24 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx-3$ を $(x-1)^2$ で割った余りが 2 ならば $a=$ ア, $b=$ イ である。

(2) 方程式 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$ は，中心が ウ ，半径が エ の円を表す。

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin 2\theta=$ オ ，$\cos 2\theta=$ カ である。

(4) 方程式 $2^{x-1}-3(\sqrt{2})^{x-2}-2=0$ は $y=(\sqrt{2})^x$ とおいて y の方程式になおすと キ $=0$ となる。従って解は $x=$ ク である。

(5) 関数 $f(x)=x^3+3x^2-24x+30$ の極小値は ケ ，極大値は コ である。

[2] (1) a を実数とする。方程式 $x^3-2(a+1)x^2+5ax-2a=0$ の実数解が $x=2$ だけであるとき，a の値の範囲は サ $<a<$ シ である。

(2) 2 点 $\mathrm{A}(2,-1)$，$\mathrm{B}(3,\ 2)$ を通る直線の方程式は $y=$ ス である。$\mathrm{C}(-2,\ 3)$ とすると，△ABC の面積は セ である。

(3) △ABC において $\angle\mathrm{C}=2\angle\mathrm{B}$ で $\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\sqrt{3}:1$ であるなら，$\angle\mathrm{B}=$ ソ $^\circ$ で BC は AC の タ 倍である。

(4) 関数 $y=\left(\log_3\dfrac{x}{9}\right)\left(\log_3\dfrac{x}{3}\right)$ の $3\leqq x\leqq 9$ における最大値は チ ，最小値は ツ である。

(5) 放物線 $C_1: y=x^2-4x+5$ と直線 $y=2$ で囲まれる部分の面積 S_1 は テ である。それらの 2 交点を通る放物線 $C_2: y=ax^2-4ax+3a+2$ $(a>1)$ と C_1 で囲まれる部分の面積が，S_1 の $\dfrac{1}{2}$ 倍ならば，$a=$ ト である。

[3] 点 $(1,\ 1)$ から，放物線 $C: y=3x^2-x+2$ に引いた接線の接点を P，Q とすると，P，Q の座標は ナ ，ニ である。このとき，2 点 P，Q を通る直線は $y=$ ヌ であり，この直線と放物線 C で囲まれる部分の面積は ネ である。

[4] 直線 $\ell_1: y=\dfrac{3}{4}x$ と x 軸の両方に接する半径 1 の円を C_1 とし，C_1 の中心 A の x 座標を a $(a>0)$，ℓ_1 と C_1 の接点を P とする。$\angle\mathrm{POA}=\theta$ とおくと，$\tan\theta$ は a を用いて $\tan\theta=$ ノ と書ける。これを用いると，a の値は ハ となる。次に，点 P で ℓ_1 に接する円 C_2 の中心 B が x 軸上にあるとすると，円 C_2 の半径 PB は ヒ で B の x 座標は フ である。

解答例

［**1**］(1) $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を，x の 1 次式 $Q(x)$ とおくと

$$x^3+ax^2+bx-3=(x-1)^2Q(x)+2$$

ゆえに　$x^3+ax^2+bx-5=(x^2-2x+1)Q(x)$

x^3 の係数と定数項を比較して，$Q(x)=x-5$ となるから

$$\begin{aligned}(x^2-2x+1)Q(x)&=(x^2-2x+1)(x-5)\\&=x^3-7x^2+11x-5\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a=-7,\ b=11}$

(答) ア. -7　イ. 11

(2) 方程式 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$ を変形すると

$$(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)=-8+1+9$$

ゆえに　$(x+1)^2+(y-3)^2=2$

よって，中心 $\boldsymbol{(-1,\ 3)}$，半径 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ の円を表す.

(答) ウ. $(-1,\ 3)$　エ. $\sqrt{2}$

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

したがって

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{8}}$$

$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

(答) オ. $\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　エ. $\dfrac{7}{8}$

(4) 与えられた方程式の両辺に 2 をかけると

$$2^x - 3(\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

$y = (\sqrt{2})^x \cdots$① とおくと

$$\boldsymbol{y^2 - 3y - 4 = 0} \quad \text{ゆえに} \quad (y+1)(y-4) = 0$$

① より，$y > 0$ であるから　$y = 4$

したがって　$(\sqrt{2})^x = 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 4}$

(答) キ. $y^2 - 3y - 4$　ク. 4

(5) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -4,\ 2$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 110	↘	極小 2	↗

よって，**$x = -4$ のとき極大値 110，$x = 2$ のとき極小値 2** をとる.

(答) ケ. 2　コ. 110

[2] (1) $P(x) = x^3 - 2(a+1)x^2 + 5ax - 2a$ とおくと　$P(2) = 0$

$P(x)$ は $x - 2$ を因数にもつので

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 2ax + a)$$

$P(x) = 0$ の実数解が $x = 2$ だけであるのは，次の i)，ii) の場合である.

i) $x^2 - 2ax + a = 0$ が重解 $x = 2$ をもつとき

$$-\frac{-2a}{2\cdot 1} = 2 \quad \text{かつ} \quad (-a)^2 - 1\cdot a = 0$$

このとき，これを満たす a はない.

ii) $x^2 - 2ax + a = 0$ が虚数解をもつとき

$$(-a)^2 - 1\cdot a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-1) < 0$$

よって　$\boldsymbol{0 < a < 1}$

(答) サ. 0　シ. 1

(2) 2 点 A$(2, -1)$，B$(3,\ 2)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{3-2}(x-2)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=3x-7}$$

AB 間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$

点 C$(-2,\ 3)$ から直線 $3x-y-7=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-3-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{16}{\sqrt{10}}$$

したがって，△ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{16}{\sqrt{10}}=\boldsymbol{8}$$

(答) ス. $3x-7$　セ. 8

(3) 正弦定理により　$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\sin C:\sin B$

ゆえに　　$\sin C:\sin B=\sqrt{3}:1$

すなわち　　$\sin C=\sqrt{3}\sin B$

$C=2B$ により

$$\sin 2B=\sqrt{3}\sin B\quad \text{ゆえに}\quad 2\sin B\cos B=\sqrt{3}\sin B$$

$\sin B\neq 0$ であるから　　$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$\boldsymbol{B=30^\circ}$，$C=60^\circ$

$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$

正弦定理により，$\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\sin A:\sin B$ であるから

$$\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\sin 90^\circ:\sin 30^\circ=2:1$$

よって，BC は AC の **2 倍**

(答) ソ. 30　タ. 2

(4) $t = \log_3 x$ とおくと，$3 \leqq x \leqq 9$ より　$1 \leqq t \leqq 2$

$$\left(\log_3 \frac{x}{9}\right)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right) = (\log_3 x - 2)(\log_3 x - 1)$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= (t-2)(t-1) \quad (1 \leqq t \leqq 2) \\ &= t^2 - 3t + 2 = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ゆえに　　$-\dfrac{1}{4} \leqq y \leqq 0$

よって，求める関数の最大値は $\mathbf{0}$，最小値は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}}$

(答) チ. 0　ツ. $-\dfrac{1}{4}$

(5) 放物線 $C_1 : y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - 4x + 5 = 2 \quad \text{これを解いて} \quad x = 1,\ 3$$

よって，求める図形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^2 \{2 - (x^2 - 4x + 5)\}\, dx \\ &= -\int_1^3 (x-1)(x-3)\, dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \boldsymbol{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

$C_1 : y = x^2 - 4x + 5$ と $C_2 : y = ax^2 - 4ax + 3a + 2$ $(a > 1)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^3 \{(x^2 - 4x + 5) - (ax^2 - 4ax + 3a + 2)\} dx \\ &= -(a-1)\int_1^3 (x-1)(x-3)\, dx \\ &= -(a-1) \times \left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \frac{4}{3}(a-1) \end{aligned}$$

$S_2 = \dfrac{1}{2} S_1 = \dfrac{2}{3}$ であるから，上式により　　$\boldsymbol{a = \dfrac{3}{2}}$

(答) テ. $\dfrac{4}{3}$　ト. $\dfrac{3}{2}$

［**3**］$y = 3x^2 - x + 2$ を微分すると　$y' = 6x - 1$

接点の座標を $(a,\ 3a^2 - a + 2)$ とすると，この点における接線の傾きは $6a - 1$ であるから，接線の方程式は

$$y - (3a^2 - a + 2) = (6a - 1)(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad y = (6a - 1)x - 3a^2 + 2$$

これが点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$1 = (6a - 1)\cdot 1 - 3a^2 + 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 0,\ 2$$

ゆえに，接点の座標は　　$\boldsymbol{(0,\ 2)}$，$\boldsymbol{(2,\ 12)}$

この 2 点を通る直線の方程式は

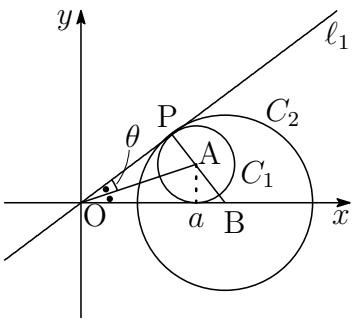
$$y - 2 = \frac{12 - 2}{2 - 0}(x - 0) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 5x + 2}$$

この直線と放物線 $C : y = 3x^2 - x + 4$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(5x + 2) - (3x^2 - x + 2)\}dx \\ &= -3\int_0^2 x(x - 2)dx = -3\left(-\frac{1}{6}\right)(2 - 0)^3 = \mathbf{4} \end{aligned}$$

(答) ナ. ニ. $(0,\ 2)$，$(2,\ 12)$　ヌ. $5x + 2$　ネ. 4

［**4**］$\angle\mathrm{AOB} = \theta$ であるから，A の y 座標は $a\tan\theta$，円 C_1 の半径が 1 であるから



$$a\tan\theta = 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\tan\theta = \frac{1}{a}}$$

$\tan 2\theta = \dfrac{3}{4}$ であるから

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{3}{4}$$

ゆえに $\quad (\tan\theta + 3)(3\tan\theta - 1) = 0$

$\tan\theta > 0$ であるから $\quad \tan\theta = \dfrac{1}{3}$

したがって $\quad \boldsymbol{a = 3}$

$\mathrm{OP} = a$ であるから

$$\mathrm{PB} = \mathrm{OP}\tan 2\theta = 3 \times \frac{3}{4} = \boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

また，B の x 座標は

$$\sqrt{\mathrm{OP}^2 + \mathrm{PB}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{15}{4}}$$

(答) ノ. $\dfrac{1}{a}$ ハ. 3 ヒ. $\dfrac{9}{4}$ フ. $\dfrac{15}{4}$

9.28　平成 23 年度推薦前期試験 (90 分)

［1］(1) $(x^2+2x-1)(x^2+2x+2)$ を展開すると x^3 の係数は［ア］，x^2 の係数は［イ］となる。

(2) $(n+m\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$ をみたす整数 m，n は $m=$［ウ］，$n=$［エ］である。

(3) 連立不等式 $5x+3 \leqq 2x+4$，$2x-3 \leqq 4x+5$ をみたす x の範囲は［オ］$\leqq x \leqq$［カ］である。

(4) 2 点 A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 4)$ に対して，x 軸に関して点 A と対称な点 C の座標は［キ］で，2 点 B，C を通る直線と x 軸との交点の座標は［ク］である。

(5) $a>0$ のとき，放物線 $y=-ax^2+4ax-3a+3$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は［ケ］である。このとき，最小値が -3 であるならば $a=$［コ］である。

［2］(1) x^2-y^2+6y-9 を因数分解すると (［サ］) × (［シ］) となる。

(2) △ABC において，$\angle \mathrm{B}=45^\circ$，$\angle \mathrm{C}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ であるならば，$\mathrm{CA}=$［ス］，$\mathrm{BC}=$［セ］である．

(3) 曲線 $C_1: y=2x^2-3x-2$ を x 軸方向に a だけ平行移動した曲線を C_2 とする。C_1 と x 軸との交点を左から P，Q とし，C_2 と x 軸との交点を左から R，S とすると，S の x 座標は［ソ］であるから，$\mathrm{PS}=5$ となる正数 a の値は［タ］である。

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y=-\sin^2\theta+2\cos\theta-1$ の最大値は［チ］，最小値は［ツ］である。

(5) 川幅が $100\sqrt{3}$ m で両岸が平行な川の両岸にそれぞれ点 P，Q を，線分 PQ が岸に直交するようにとる。点 Q のある岸の Q の下流に $\angle \mathrm{QPR}=60^\circ$ である目印の点 R をとると $\mathrm{QR}=$［テ］m である。流れが岸に平行であるとするとき，川の中央における流速を調べるため PQ の中央 A から流した物体が PR の中点 B を通るまでに要した時間が 25 分であった。このとき流速は分速［ト］m である。

［3］A，B，C の玉 1 個の重さは，それぞれ 1g，5g，10g である。これらの玉を取り混ぜ，合計 100 個，重さの合計が 730g にしたい，ただし選ばない種類の玉があってもよいとする。A 玉を x 個，B 玉を y 個，C 玉を z 個選んだとき，与えられた条件を式で表すと［ナ］$=100$，［ニ］$=730$ である。C 玉の個数 z の最大値は［ヌ］であり，そのとき $x=$［ネ］，$y=$［ノ］である。

［**4**］$\angle \mathrm{C} = 90^\circ$ である直角三角形 ABC において，$\mathrm{AB} = 8$，$\mathrm{AC} = a$ とすると $\mathrm{BC} =$ ハ である。辺 BC 上の中点 M より辺 AB に下ろした垂線の足を N とすると $\mathrm{BN} =$ ヒ である。特に $\mathrm{AN} : \mathrm{BN} = 3 : 1$ であるならば $a =$ フ で，$\cos \mathrm{A} =$ ヘ である。

解答例

［**1**］(1) $x^2 + 2x = t$ とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (t-1)(t+2) = t^2 + t - 2 \\ &= (x^2+2x)^2 + (x^2+2x) - 2 \\ &= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) + x^2 + 2x - 2 \\ &= x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2\end{aligned}$$

(答) ア. 4　イ. 5

(2) 与式の両辺を $1 + \sqrt{3}$ で割ると

$$\begin{aligned}n + m\sqrt{3} &= \frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{-6+4\sqrt{3}}{3-1} = -3 + 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

m，n は有理数であるから　　$\boldsymbol{m = 2,\ n = -3}$

(答) ウ. 2　エ. -3

(3) $5x + 3 \leqq 2x + 4$ を解いて　$x \leqq \dfrac{1}{3}$　　$\cdots$①

$2x - 3 \leqq 4x + 5$ を解いて　$x \geqq -4$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-4 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}}$

(答) オ. -4　カ. $\dfrac{1}{3}$

(4) x 軸に関して点 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$ と対称な点 C の座標は　$\boldsymbol{(-1, -2)}$

2 点 $\mathrm{B}(3,\ 4)$，$\mathrm{C}(-1, -2)$ を通る直線の方程式は　$y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2}$

この直線の x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{3}$$

よって，2 点 B，C を通る直線の x 軸との交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)}$

(答) キ. $(-1, -2)$　ク. $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

(5) $y=-ax^2+4ax-3a+3$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y&=-a(x^2-4x)-3a+3\\ &=-a\{(x-2)^2-2^2\}-3a+3\\ &=-a(x-2)^2+a+3 \end{aligned}$$

x^2 の係数について $-a<0$ であるから，$1\leqq x\leqq 4$ において，
y は $x=2$ で最大値 $\boldsymbol{a+3}$ をとり，$x=4$ で最小値 $-3a+3$ をとる．
最小値が -3 であるとき

$$-3a+3=-3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2}$$

(答) ケ. $a+3$　コ. 2

[2] (1) $x^2-y^2+6y-9=x^2-(y-3)^2$

$$\begin{aligned} &=\{x+(y-3)\}\{x-(y-3)\}\\ &=\boldsymbol{(x+y-3)(x-y+3)} \end{aligned}$$

(答) サ. シ. $x+y-3,\ x-y+3$

(2) $c=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，$B=45°$，$C=60°$．正弦定理により　$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
$b\sin C=c\sin B$ であるから

$$b\sin 60°=\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin 45° \quad \text{ゆえに} \quad b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを解いて　　$b=\boldsymbol{\sqrt{3}}$
第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} a&=b\cos C+c\cos B=\sqrt{3}\cos 60°+\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 45°\\ &=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

(答) ス. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　セ. $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

第 1 余弦定理

$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$

なお，余弦定理とは，第 2 余弦定理のことである．

(3) $y = 2x^2 - 3x - 2$ より　$y = (x-2)(2x+1)$

したがって　　$\mathrm{P}(-\frac{1}{2},\ 0)$，$\mathrm{Q}(2,\ 0)$

Q を x 軸方向に a だけ平行移動した点が S であるから　$\mathrm{S}(\boldsymbol{2+a},\ 0)$

$a > 0$ に注意して　$\mathrm{PS} = (2+\mathrm{a}) - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \mathrm{a} + \dfrac{5}{2}$

$\mathrm{PS} = 5$ のとき　$a + \dfrac{5}{2} = 5$　ゆえに　$\boldsymbol{a = \dfrac{5}{2}}$

(答) ソ. $2+a$　タ. $\dfrac{5}{2}$

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta = x$ とすると　$-1 \leqq x \leqq 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$ であるから，関数は

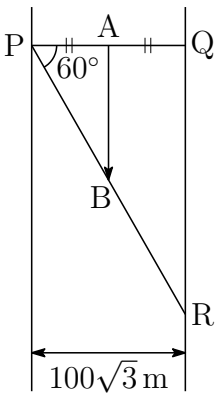
$$\begin{aligned} y &= -(1-x^2) + 2x - 1 \\ &= x^2 + 2x - 2 \\ &= (x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

したがって　$x = 1$　　すなわち　$\theta = 0^\circ$ のとき　　最大値 $\boldsymbol{1}$

$x = -1$　すなわち　$\theta = 180^\circ$ のとき　最小値 $\boldsymbol{-3}$

(答) チ. 1　ツ. -3

(5) 右の図より



$$\begin{aligned} \mathrm{QR} &= \mathrm{PQ}\tan 60^\circ \\ &= 100\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{300}\ [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

$\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{QR}$ であるから

$$\mathrm{AB} = \frac{1}{2} \times 300 = 150\ [\mathrm{m}]$$

よって，求める流速は　$\dfrac{150}{25} = \boldsymbol{6}$ [m/分]

(答) テ. 300　ト. 6

［**3**］題意より　$\boldsymbol{x+y+z=100}$，$\boldsymbol{x+5y+10z=730}$

上の 2 式より　$\begin{cases} x+y=100-z & \cdots ① \\ x+5y=730-10z & \cdots ② \end{cases}$

② − ① より

$$4y=630-9z \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{9(70-z)}{4} \quad \cdots ③$$

① × 5 − ② より

$$4x=5z-230 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{5(z-46)}{4} \quad \cdots ④$$

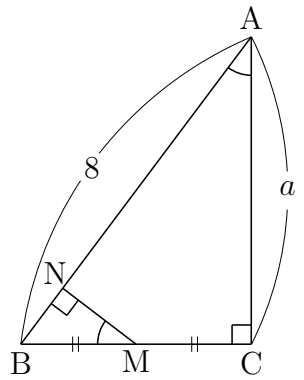
$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ であるから，③，④ より

$$70-z \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad z-46 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 46 \leqq z \leqq 70$$

よって，z の最大値は，③，④ に注意して $\boldsymbol{70}$，このとき　$\boldsymbol{x=30,\ y=0}$

(答) ナ. $x+y+z$　ニ. $x+5y+10z$　ヌ. 70　ネ. 30　ノ. 0

［**4**］三平方の定理を △ABC に適用すると



$$\begin{aligned} \mathrm{BC} &= \sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AC}^2} \\ &= \boldsymbol{\sqrt{64-a^2}} \end{aligned}$$

したがって　$\mathrm{BM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{64-a^2}$

$$\sin A=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{64-a^2}}{8}$$

$\angle \mathrm{BMN}=A$ であるから

$$\mathrm{BN}=\mathrm{BM}\sin\angle \mathrm{BMC}=\frac{1}{2}\sqrt{64-a^2}\times\frac{\sqrt{64-a^2}}{8}=\boldsymbol{\frac{64-a^2}{16}}$$

$\mathrm{AN}:\mathrm{BN}=3:1$ であるから，$\mathrm{AB}=8$ より　$\mathrm{BN}=2$

したがって　$\dfrac{64-a^2}{16}=2$　$a>0$ であるから　$\boldsymbol{a=4\sqrt{2}}$

$$\cos A=\frac{4\sqrt{2}}{8}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(答) ハ. $\sqrt{64-a^2}$　ヒ. $\dfrac{64-a^2}{16}$　フ. $4\sqrt{2}$　ヘ. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

9.29 平成 23 年度推薦後期試験 (90 分)

[1] (1) 勝手な x に対して，$(2x-a)(x+2) = 2x^2+bx-6$ が成り立つならば $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$ の根号をはずし簡単にすると ウ $a-$ エ となる。ただし，$1<a<3$ とする。

(3) 放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点が $(2,-4)$ であるとき，$a=$ オ，$b=$ カ である。

(4) $6x^2+ax-2=0$ の 1 つの解が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，$a=$ キ であり，もう 1 つの解は $x=$ ク である。

(5) △ABC において，$\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=3\sqrt{3}$，$\mathrm{CA}=\sqrt{57}$ ならば，$\cos\angle\mathrm{B}=$ ケ であるので，△ABC の面積は コ である。

[2] (1) $2x^2-5xy-3y^2+11x+9y-6$ を因数分解すると (サ) × (シ) である。

(2) 2 次関数 $y=2x^2-8x+k$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値が 5 であるとき，$k=$ ス であり，最小値は セ である。

(3) すべての実数 x に対して 2 次不等式 $x^2+2(k+1)x+4>0$ が成り立つような定数 k の範囲は ソ $<k<$ タ である。

(4) △ABC において，$\mathrm{AB}=1+\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=2$ とする。$\angle\mathrm{B}=60^\circ$ のとき，$\mathrm{AC}=$ チ，$\angle\mathrm{A}=$ ツ $^\circ$ である。

(5) 半径 4cm の鉄球がある。この鉄球を溶かして 8 個の鉄球をつくるとき，その半径は テ cm である。新しくできた鉄球の表面積の合計は，もと鉄球の ト 倍である。

[3] 長方形 ABCD において，2 点 A，B が x 軸上にあり，2 点 C，D が放物線 Γ : $y=-2x^2-4x+10$ 上にあるとする。ただし点 B の x 座標が点 A の x 座標より大きいとする。このとき，$\mathrm{AB}=a$ とすると，点 B の x 座標は ナ であるから，長方形 ABCD の面積は ニ である。また Γ の頂点を E とすると，△EDC の面積は ヌ である。従って長方形 ABCD の面積が △EDC の面積より大きくなるのは $0<a<$ ネ のときである。

[4] △ABC において，∠A の 2 等分線と BC の交点を D とし，$\angle\mathrm{A}=60^\circ$，$\mathrm{DC}=2$ とする．$\theta=\angle\mathrm{C}$ とおくと，$0<\sin\theta \leqq$ ノ であるので，AD の長さは $\theta=$ ハ $^\circ$ のとき最大値 ヒ をとる。このとき，BD = フ，AB = ヘ である。

解答例

［1］(1) 等式の左辺を展開し，x について整理すると

$$2x^2+(-a+4)x-2a=2x^2+bx-6$$

上式は，x に関する恒等式であるから，同じ次数の項の係数は等しいから

$$-a+4=b,\quad -2a=-6$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=3,\ b=1}$

(答) ア. 3　イ. 1

(2) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}=|a-1|-|a-3|$

$1<a<3$ であるから

$$|a-1|=a-1,\quad |a-3|=-(a-3)=-a+3$$

よって　　(与式) $=(a-1)-(-a+3)=\boldsymbol{2a-4}$

(答) ウ. 2　エ. 4

(3) 放物線の頂点の座標が $(2,-4)$ であるから，x^2 の係数に注意して

$$y=(x-2)^2-4\quad \text{ゆえに}\quad y=x^2-4x$$

上式と $y=x^2+ax+b$ の係数を比較して　$\boldsymbol{a=-4,\ b=0}$

(答) オ. -4　カ. 0

(4) $x=\dfrac{1}{2}$ は方程式 $6x^2+ax-2=0$ の解であるから

$$6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+a\times\frac{1}{2}-2=0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a=1}$$

このとき，方程式は $6x^2+x-2=0$ であるから

$$(2x-1)(3x+2)=0\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{1}{2},-\frac{2}{3}$$

よって，もう 1 つの解は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{2}{3}}$

(答) キ. 1　ク. $-\dfrac{2}{3}$

(5) $a=3\sqrt{3}$，$b=\sqrt{57}$，$c=2\sqrt{3}$ であるから，余弦定理により

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{57})^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}}$$
$$=\frac{12+27-57}{36}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

したがって　　$B=120^\circ$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(答) ケ. $-\dfrac{1}{2}$　コ. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

[2] (1) (x に注目する)

$$\begin{aligned}&2x^2-5xy-3y^2+11x+9y-6\\=&2x^2+(-5y+11)x-3(y-1)(y-2)\\=&\{x-3(y-2)\}\{2x+(y-1)\}\\=&\boldsymbol{(x-3y+6)(2x+y-1)}\end{aligned}$$

(答) サ. シ. $x-3y+6$，$2x+y-1$

(2) $y=2x^2-8x+k$ を変形すると　$y=2(x-2)^2+k-8$

$0\leqq x\leqq 3$ において，

$x=0$ で最大値 k，$x=2$ で最小値 $k-8$

をとる.

したがって，最大値が 5 であるから　$\boldsymbol{k=5}$

最小値は　$k-8=5-8=\boldsymbol{-3}$

(答) ス. 5　セ. -3

(3) すべての x について $x^2+2(k+1)x+4>0$ が成り立つとき，x^2 の係数が正であるから，係数について $D/4<0$ をみたすので

$$(k+1)^2-1\cdot 4<0\quad\text{ゆえに}\quad(k+3)(k-1)<0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-3<k<1}$

(答) ソ. -3　タ. 1

(4) $c = 1 + \sqrt{3}$，$a = 2$，$B = 60^\circ$ であるから，余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ &= (1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2 \times \frac{1}{2} \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 4 - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$b > 0$ であるから　$b = \boldsymbol{\sqrt{6}}$　すなわち　$\mathrm{AC} = \sqrt{6}$

正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{6}\sin A = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　　$\sin A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$B = 60^\circ$ より，$A < 120^\circ$ であるから　$A = 45^\circ$

(答) チ. $\sqrt{6}$　ツ. 45°

(5) 元の鉄球と溶かしてできた鉄球 1 個の体積比は

$$1 : \frac{1}{8} = 1 : \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

よって，元の鉄球と溶かしてできた鉄球 1 個の相似比は

$$1 : \frac{1}{2}$$

溶かしてできた鉄球 1 個の半径は　　$4 \times \frac{1}{2} = \boldsymbol{2}$ [cm]

したがって，元の鉄球と溶かしてできた鉄球 1 個の表面積の比は

$$1 : \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

したがって，新しくできた鉄球の表面積の合計は元の鉄球の表面積の

$$8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boldsymbol{2}\ \text{倍}$$

(答) テ. 2　ト. 2

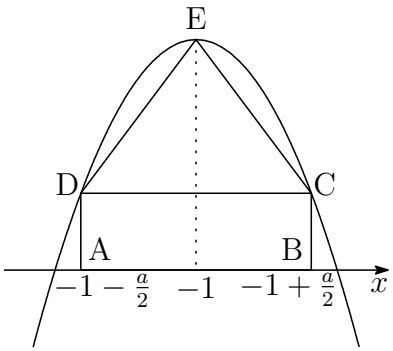
［3］$\Gamma : y = -2x^2 - 4x + 10$ を変形すると

$$y = -2(x+1)^2 + 12$$

ゆえに，Γ の頂点は　E$(-1,\ 12)$

AB $= a$ のとき，右の図のように，

B の x 座標は　$\boldsymbol{-1 + \dfrac{a}{2}}$



C の y 座標は

$$y = -2\left(-1 + \frac{a}{2} + 1\right)^2 + 12 = -\frac{a^2}{2} + 12$$

よって，長方形 ABCD の面積は　$\boldsymbol{a\left(-\dfrac{a^2}{2} + 12\right)}$

△EDC の面積は　$\dfrac{1}{2}a\left\{12 - \left(-\dfrac{a^2}{2} + 12\right)\right\} = \boldsymbol{\dfrac{a^3}{4}}$

長方形 ABCD の面積が △EDC の面積より大きくなるとき，上の 2 式より

$$a\left(-\frac{a^2}{2} + 12\right) > \frac{a^3}{4} \quad \text{ゆえに} \quad a(a+4)(a-4) < 0$$

このとき，$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{0 < a < 4}$

(答) ナ. $-1 + \dfrac{a}{2}$　ニ. $a\left(-\dfrac{a^2}{2} + 12\right)$　ヌ. $\dfrac{a^3}{4}$　ネ. 4

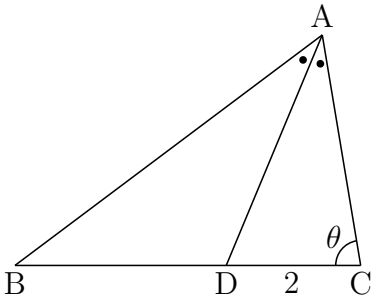
［4］△ADC に正弦定理を適用すると

$$\frac{\text{AD}}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

ゆえに　$\text{AD} = 4\sin\theta$

また，$\boldsymbol{0 < \sin\theta \leqq 1}$ であるから

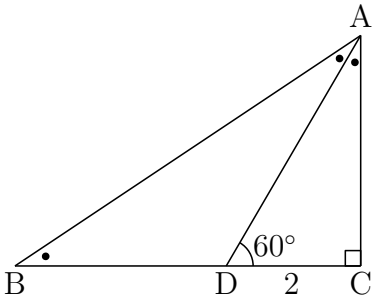
AD は $\boldsymbol{\theta = 90^\circ}$ のとき最大値 **4** をとる.



このとき，BD = AD の二等辺三角形であるから　$\boldsymbol{\text{BD} = 4}$

△ABD に正弦定理を適用すると

$$\frac{\text{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\text{AB} = 4\sqrt{3}}$$



(答) ノ. 1　ハ. 90　ヒ. 4　フ. 4　ヘ. $4\sqrt{3}$

9.30　平成 23 年度一般試験 (90 分)

［1］(1) $f(x)=x^3+(a+1)x^2+(2a+b)x+1$ が $x+1$ で割り切れ，$x-2$ で割った余りが 3 であれば $a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) 方程式 $x^2+2(a-1)x+y^2-2(2a-3)y+6a^2-15a+8=0$ が円を表すとき，a の値の範囲は ウ $<a<$ エ である。

(3) $0 \leqq x < \pi$ のとき，$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす x の値は $x=$ オ，カ である。

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 4\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,2^x$ をみたす x の値の範囲は キ $<x<$ ク である。

(5) $F(x)=\displaystyle\int_0^x (t^2-3t+2)dt$ とおくとき，$F(x)$ の値は ケ $<x<$ コ の範囲で減少する。

［2］(1) $x=2-\sqrt{3}i$ の共役な複素数を y とするとき，$x^2+y^2=$ サ，$x^3+y^3=$ シ である。

(2) 条件 $y \geqq x$，$y \leqq 2x$，$y \leqq -2x+4$ の下で $x+y$ は，$(x,\ y)=$ ス のとき最大値 セ をとる。

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲における $2\sqrt{3}\cos 2x+4\sin x\cos x$ の最大値は ソ，最小値は タ である。

(4) $\log_3(x-3) < 2+\log_{\frac{1}{3}}(x-5)$ をみたす x の値の範囲は チ $<x<$ ツ である。

(5) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+4a$ が，$x=1$ で極値 10 をとるとき，$a=$ テ，$b=$ ト である。

［3］放物線 $C: y=-2x^2+\dfrac{1}{3}$ の頂点 P を通り，x 軸の正方向とのなす角が $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ の直線 ℓ_1 と x 軸の交点を Q とすると，Q の座標は $m=\tan\theta$ を用いると，(ナ , 0) である。Q を通り，x 軸の正方向とのなす角が 2θ である直線を ℓ_2 とすると，ℓ_2 の方程式は m を用いると $y=$ ニ である。特に，ℓ_2 が C に接するならば $m=$ ヌ で，接点の x 座標は ネ である。

［4］放物線 $y=x^2-2x-2$ を C_1，放物線 $y=2x^2$ を C_2 とする。C_2 上の点 $\mathrm{P}(a,\ 2a^2)$ における接線 ℓ は $y=$ ノ である。C_1 と ℓ との交点の x 座標を $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ とすると，$\beta-\alpha=$ ハ である。C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表すと，$S=$ ヒ である。点 P が C_2 上を動くとき，S は $a=$ フ で最小値 ヘ をとる。

解答例

［1］(1) $f(x)$ は $x+1$ で割り切れ，$x-2$ で割った余りが 3 であるから

$$f(-1)=0,\quad f(2)=3$$

ゆえに $\quad (-1)^3+(a+1)\cdot(-1)^2+(2a+b)\cdot(-1)+1=0$

$\qquad 2^3+(a+1)\cdot2^2+(2a+b)\cdot2+1=3$

整理すると $\quad a+b=1,\ 4a+b=-5$

これを解いて $\quad \boldsymbol{a=-2,\ b=3}$

(答) ア. -2 イ. 3

(2) 方程式 $x^2+2(a-1)x+y^2-2(2a-3)y+6a^2-15a+8=0$ を変形すると

$$x^2+2(a-1)x+y^2-2(2a-3)y=-6a^2+15a-8$$
$$\{x+(a-1)\}^2+\{y-(2a-3)\}^2=-6a^2+15a-8+(a-1)^2+(2a-3)^2$$
$$(x+a-1)^2+(y-2a+3)^2=-a^2+a+2$$

これが，円を表すから $\quad -a^2+a+2>0$

ゆえに $\quad a^2-a-2<0$

したがって $\quad (a+1)(a-2)<0$

よって $\quad \boldsymbol{-1<a<2}$

(答) ウ. -1 エ. 2

(3) $0\leqq x<\pi$ より $\quad \dfrac{\pi}{3}\leqq 2x+\dfrac{\pi}{3}<2\pi+\dfrac{\pi}{3}$

このとき，$\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす x は

$$2x+\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=\frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi}$$

(答) オ. カ. $\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{2}{3}\pi$

(4) 与式を変形すると　　$2^{-\frac{1}{2}} < 2^{2-\frac{1}{2}x} < 2^{x-\frac{1}{2}}$

底 2 は 1 より大きいから　$-\frac{1}{2} < 2-\frac{1}{2}x < x-\frac{1}{2}$

これを解いて　　$\boldsymbol{\frac{5}{3} < x < 5}$

(答) ケ. $\frac{5}{3}$　コ. 5

(5) $F(x)=\int_0^x (t^2-3t+2)dt$ を x について微分すると

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x (t^2-3t+2)dt = x^2-3x+2$$

$F(x)$ が減少するのは，$F'(x)<0$ となる x の値の範囲であるから

$x^2-3x+2<0$　これを解いて　$\boldsymbol{1<x<2}$

(答) ケ. 1　コ. 2

[2] (1) y は x と共役であるから　$y=2+\sqrt{3}i$

$$x+y=(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)=4$$
$$xy=(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=7$$

したがって

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\cdot 7=\boldsymbol{2}$$
$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot 7\cdot 4=\boldsymbol{-20}$$

(答) サ. 2　シ. -20

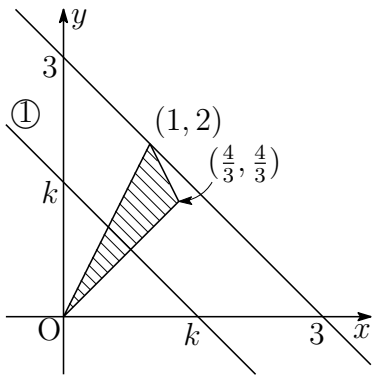
(2) 与えられた連立不等式の表す領域は，3 点

$(0,0)$，$(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3})$，$(1,\ 2)$

を頂点とする三角形の周および内部である．

$$x+y=k \quad \cdots ①$$

とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す．直線 ① がこの領域と共有点をもつときの k の値の最大値を求めればよい．



したがって，直線 ① が点 $(1,\ 2)$ を通るとき k は最大値 3 をとる．

よって，$x+y$ は，$(x,\ y)=\boldsymbol{(1,\ 2)}$ のとき，最大値 **3** をとる．

(答) ス. $(1,\ 2)$　セ. 3

(3) 与式を変形すると

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}\cos 2x + 4\sin x\cos x &= 2\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x \\ &= 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ であるから

$2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 **4**，$2x + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}$ のとき最小値 **2** をとる.

(答) ソ. 4　タ. 2

(4) 真数は正であるから

$$x - 3 > 0,\quad x - 5 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 5 \quad \cdots ①$$

$\log_3(x-3) < 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-5)$ を変形すると

$$\begin{aligned} \log_3(x-3) + \log_3(x-5) &< 2 \\ \log_3(x-3)(x-5) &< \log_3 9 \end{aligned}$$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-3)(x-5) < 9$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{5 < x < 4 + \sqrt{10}}$

(答) チ. 5　ツ. $4 + \sqrt{10}$

(5) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4a$ を微分すると　$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(1) = 10$，$f'(1) = 0$ であるから

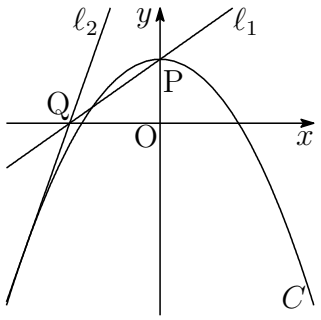
$$1^3 + a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + 4a = 10,\quad 3\cdot 1^2 + 2a\cdot 1 + b = 0$$

整理すると　　$5a + b = 9$，$2a + b = -3$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 4,\ b = -11}$

(答) テ. 4　ト. -11

［3］ℓ_1 は傾き m，y 切片が $\dfrac{1}{3}$ の直線であるから



$$y = mx + \frac{1}{3}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$mx + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{1}{3m}$$

したがって，Q の座標は　$\left(-\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{3m}},\ 0\right)$

ℓ_2 の傾きは　$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2m}{1-m^2}$

ゆえに，直線 ℓ_2 の方程式は

［1］$m \neq 1$ のとき

$$y = \frac{2m}{1-m^2}\left(x + \frac{1}{3m}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{2m}{1-m^2}x + \frac{2}{3(1-m^2)}}$$

［2］$m = 1$ のとき　　$\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{3}}$

ℓ_2 と C が接するのは，［1］の場合であり，C と ℓ_2 から y を消去すると

$$-2x^2 + \frac{1}{3} = \frac{2m}{1-m^2}x + \frac{2}{3(1-m^2)}$$

すなわち　　$2x^2 + \dfrac{2m}{1-m^2}x + \dfrac{1+m^2}{3(1-m^2)} = 0 \quad \cdots ①$

① の方程式の係数について

$$D/4 = \left(\frac{m}{1-m^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1+m^2}{3(1-m^2)} = \frac{(2m^2-1)(m^2+1)}{3(1-m^2)^2}$$

ℓ_2 が C に接するとき，$D = 0$ であるから　$2m^2 - 1 = 0$

$m = \tan\theta\ \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ であるから，$m > 0$ に注意して　$\boldsymbol{m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

また，接点の x 座標は，① および m の値により

$$-\frac{\frac{2m}{1-m^2}}{2\cdot 2} = -\frac{m}{2(1-m^2)} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(答) ナ. $-\dfrac{1}{3m}$　ニ. $\dfrac{2m}{1-m^2}x + \dfrac{2}{3(1-m^2)}$　ヌ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　ネ. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

作問ミス

$y=$ ニ に適する式は，$m\neq 1$ のときであり，$m=1$ のときは，$x=-\dfrac{1}{3}$ となり，ニ に適用することができない．
本来であれば，$m>0$ であるから

$m\neq 1$ のとき $y=$ ［　　］，$m=1$ のとき $x=$ ［　　］

などとすべきところであった．

［**4**］$y=2x^2$ を微分すると　　$y'=4x$

P における接線の傾きは $4a$ であるから，ℓ の方程式は

$$y-2a^2=4a(x-a)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=4ax-2a^2}$$

C_1 と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2-2x-2=4ax-2a^2\quad \text{すなわち}\quad x^2-2(2a+1)x+2a^2-2=0$$

この方程式の解が $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2(2a+1),\quad \alpha\beta=2a^2-2\quad \cdots ①$$

このとき　　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4(2a^2+4a+3)$

$\beta-\alpha>0$ であるから　$\boldsymbol{\beta-\alpha=2\sqrt{2a^2+4a+3}}$

C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S は，①，② に注意して

$$\begin{aligned}S&=\int_{\alpha}^{\beta}\{(4ax-2a^2)-(x^2-2x-2)\}dx\\&=-\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-2(2a+1)x+2a^2-2\}dx\\&=-\int_{\alpha}^{\beta}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx\\&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}(2a^2+4a+3)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

上式から　　$S=\dfrac{4}{3}\{2(a+1)^2+1\}^{\frac{3}{2}}$

ゆえに，S は $\boldsymbol{a=-1}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる．

(答) ノ．$4ax-2a^2$　ハ．$2\sqrt{2a^2+4a+3}$　ヒ．$\dfrac{4}{3}(2a^2+4a+3)^{\frac{3}{2}}$

フ．-1　ヘ．$\dfrac{4}{3}$

9.31　平成 22 年度推薦前期試験 (90 分)

［1］(1) $(2x-3y+3)(2x+3y-3)$ を展開すると $4x^2-$ ア y^2+ イ $y-9$ となる。

(2) a が 2 と異なる正の整数のとき $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$ を有理数に直すと ウ である。特にその有理数が 4 となるのは $a=$ エ のときである。

(3) 不等式 $3|x-2|<2x+1$ をみたす x の範囲は オ $<x<$ カ である。

(4) 2 次不等式 $ax^2+bx+3>0$ の解が $-1<x<3$ であるとき，$a=$ キ，$b=$ ク である。

(5) $y=3x^2-6x+5$ のグラフの頂点は ケ で，軸は直線 $x=$ コ である。

［2］(1) $y=-2x^2+12x-14$ の $2 \leqq x \leqq 5$ における最大値は サ，最小値は シ である。

(2) △ABC において AB = 2，BC = $\sqrt{6}$，∠C = 45° とする。このとき △ABC の外接円の半径は ス である。また，$0<\angle A<90°$ ならば，∠A = セ ° である。

(3) $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ $(90°<\theta<180°)$ のとき，$\cos\theta=$ ソ，$\tan\theta=$ タ である。

(4) 四角形 ABCD において BC = 4，CD = 2，AD = $\sqrt{3}$，∠ABD = 30°，∠C = 60° ならば BD = チ，AB = ツ である。

(5) 四面体 P と四面体 Q は相似で，相似比は 2 : 1 である。P の体積が 20cm^3，表面積が 8cm^2 のとき，Q の体積は テ cm^3，表面積は ト cm^2 である。

［3］2 次関数 $y=-2x^2+12x$ のグラフ C_1 と x 軸との交点は O(0, 0) と A(ナ , 0) である。C_1 を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフを C_2 とする。C_2 も O を通るなら，a と b は関係式 $b=$ ニ をみたす。このとき，C_2 と x 軸の O 以外の交点の座標は B(ヌ , 0) であるから，OA : AB = 3 : 2 となるのは $a=$ ネ のときである。ただし $a>0$ とする。

［4］△ABC において，AB = 4，AC = 5 とする。$\angle A=\theta$ は $0°<\theta<90°$ であり，さらに等式 $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$ をみたすとする。このとき $\theta=$ ノ ° であり，BC = ハ である。また，△ABC の面積は ヒ となる。BC 上の点 D を △ABD の面積が △ABC の面積の半分になるように定めるとき AD = フ である。

解答例

［1］(1) $(2x-3y+3)(2x+3y-3)=\{2x-(3y-3)\}\{2x+(3y-3)\}$

$=(2x)^2-(3y-3)^2$

$=4x^2-(9y^2-18y+9)$

$=\boldsymbol{4x^2-9y^2+18y-9}$

(答) ア. 9　イ. 18

(2) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})}=\boldsymbol{\dfrac{2(a+2)}{a-2}}$

特にこの値が 4 のとき

$$\frac{2(a+2)}{a-2}=4 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=6}$$

(答) ウ. $\dfrac{2(a+2)}{a-2}$　エ. 6

(3) $3|x-2|<2x+1$ から　$|3(x-2)|<2x+1$

したがって　$-(2x+1)<3(x-2)<2x+1$

ゆえに　$\begin{cases} -(2x+1)<3(x-2) \\ 3(x-2)<2x+1 \end{cases}$

第 1 式から　$-2x-1<3x-6$

すなわち　$x>1$　$\cdots$①

第 2 式から　$3x-6<2x+1$

すなわち　$x<7$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1<x<7}$

(答) オ. 1　カ. 7

(4) $-1 < x < 3$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x+1)(x-3) < 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 2x - 3 < 0$$

求める 2 次不等式は，定数項に注意して　$-x^2 + 2x + 3 > 0$

よって　　$\boldsymbol{a = -1,\ b = 2}$

(答) キ. -1　ク. 2

(5) $y = 3x^2 - 6x + 5$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 5 &= 3(x^2 - 2x) + 5 \\ &= 3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 5 \\ &= 3(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

よって，グラフの頂点は $\boldsymbol{(1,\ 2)}$，軸は $\boldsymbol{x = 1}$

(答) ケ. (1, 2)　コ. 1

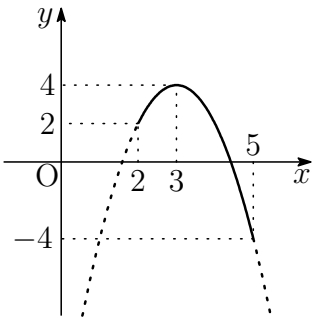
［2］ (1) $y = -2x^2 + 12x - 14$ を変形すると

$$y = -2(x-3)^2 + 4$$

$2 \leqq x \leqq 5$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x = 3$ で**最大値 4** をとり，

$x = 5$ で**最小値 −4** をとる．



(答) サ. 4　シ. -4

(2) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ} = 2R$$

ゆえに　$R = \dfrac{1}{\sin 45^\circ} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

また　　$\sin A = \dfrac{\sqrt{6}\sin 45^\circ}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < \angle \mathrm{A} < 90^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\angle \mathrm{A} = 60^\circ}$

(答) ス. $\sqrt{2}$　セ. 60

(3) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

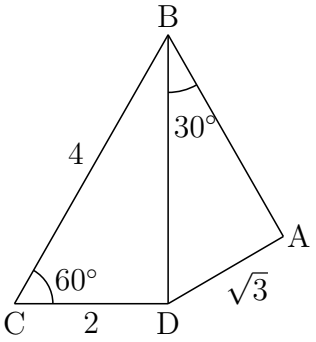
$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}{\boldsymbol{3}}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\sqrt{2}}}$

(答) ソ. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　タ. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(4) △BCD において



$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \cos C=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

であるから，$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$．よって

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

また，△ABD において

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2},\quad \sin B=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

であるから，$\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$．よって

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BD}\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{3}$$

(答) チ. $2\sqrt{3}$　ツ. 3

(5) P と Q の相似比より，体積比は $2^3:1$，表面積の比は $2^2:1$ であるから

P の体積が $20\mathrm{cm}^3$ であるから，Q の体積は　　$20\times\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}}\ \mathrm{cm}^3$

P の表面積が $8\mathrm{cm}^2$ であるから，Q の表面積は　　$8\times\dfrac{1}{2^2}=\boldsymbol{2}\ \mathrm{cm}^2$

(答) テ. $\dfrac{5}{2}$　ト. 2

［**3**］放物線 $C_1 : y = -2x^2 + 12x$ の x 軸との共有点の x 座標は

$$-2x^2 + 12x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0,\ 6$$

求める共有点の座標は　$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(\mathbf{6},\ 0)$

C_1 を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動した放物線 C_2 の方程式は

$$y - b = -2(x - a)^2 + 12(x - a) \quad \cdots ①$$

これが，原点 O を通るので

$$0 - b = -2(0 - a)^2 + 12(0 - a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b = 2a^2 + 12a} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入して整理すると　$y = -2x(x - 2a - 6)$

これから，C_2 と x 軸の O 以外の共有点の座標は　$\mathrm{B}(\boldsymbol{2a + 6},\ 0)$

OA，AB は，$a > 0$ であるから

$$\mathrm{OA} = 6 - 0 = 6, \quad \mathrm{AB} = (2a + 6) - 6 = 2a$$

$\mathrm{OA} : \mathrm{AB} = 3 : 2$ より

$$6 : 2a = 3 : 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 2}$$

(答) ナ. 6　ニ. $2a^2 + 12a$　ヌ. $2a + 6$　ネ. 2

［**4**］$2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ を変形すると

$$2(1-\cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$$

整理して $\quad 2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

ゆえに $\quad (\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$0° < \theta < 90°$ より $0 < \cos\theta < 1$ であることに注意して

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\theta = 60°}$$

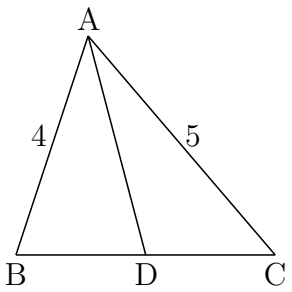
余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\theta \\ &= 4^2 + 5^2 - 2\cdot 4\cdot 5 \times \frac{1}{2} \\ &= 21 \end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ より $\quad \mathbf{BC = \sqrt{21}}$

また $\quad \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin 60° = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{5\sqrt{3}}$

△ABD の面積は，△ABC の面積の半分であるから，D は BC の中点である．



ゆえに $\quad \mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

$\mathrm{AD} = x$ とおき，これらを中線定理

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2)$$

に代入すると

$$4^2 + 5^2 = 2\left(x^2 + \frac{21}{4}\right) \quad \text{すなわち} \quad x^2 = \frac{61}{4}$$

$\mathrm{AD} > 0$ であるから $\quad \mathbf{AD = \dfrac{\sqrt{61}}{2}}$

(答) ノ. 60　ハ. $\sqrt{21}$　ヒ. $5\sqrt{3}$　フ. $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$

9.32　平成 22 年度推薦後期試験 (90 分)

［1］(1) $(a-b-c+1)(a+1)+bc$ を因数分解すると $\left(\boxed{\text{ア}}\right)\times\left(\boxed{\text{イ}}\right)$ である。

(2) $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$，$y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ のとき，$x+y=\boxed{\text{ウ}}$，$x^2+y^2=\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 不等式 $|x+2|>2|x-1|$ を解くと $\boxed{\text{オ}}<x<\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 2 次方程式 $(3a-10)x^2+4ax+a+1=0$ $\left(a\neq\dfrac{10}{3}\right)$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $a<\boxed{\text{キ}}$ または $a>\boxed{\text{ク}}$ のときである。

(5) 2 次関数 $y=3(x+a)^2+b$ のグラフと，y 軸との交点の座標が $(0,-9)$ で，x 軸との交点の 1 つが $(1,\ 0)$ であるなら $a=\boxed{\text{ケ}}$，$b=\boxed{\text{コ}}$ である。

［2］(1) 2,000 円以内で，1 本 150 円のジュースと 1 本 120 円の水を合計 15 本買うとき，ジュースをなるべく多く買うためには，ジュースを $\boxed{\text{サ}}$ 本，水を $\boxed{\text{ス}}$ 本買えばよい。

(2) 2 次関数 $y=-2x^2-6x+3$ の $-2\leqq x\leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ス}}$，最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) △ABC において $\angle\mathrm{A}=45^\circ$，$\angle\mathrm{B}=30^\circ$，$\mathrm{BC}=4$ ならば $\mathrm{CA}=\boxed{\text{ソ}}$ で，3 点 A，B，C を通る円の半径は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $90^\circ<\theta<180^\circ$ で $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ が成り立つとき，$\sin^3\theta+\cos^3\theta=\boxed{\text{チ}}$，$\sin\theta-\cos\theta=\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $y=\cos^2\theta+\sin\theta$ の $0^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ における最大値は $\boxed{\text{テ}}$，最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。

［3］x，y が $x^2-2xy+2y^2=2$ をみたすとする。このとき，x のとり得る範囲は $\boxed{\text{ナ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{ニ}}$ で，$4x^2+4xy-4y^2-2x+3$ の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$，最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

［4］△ABC において $\mathrm{AB}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，$\angle\mathrm{B}=30^\circ$，$\angle\mathrm{C}=90^\circ$ とする。長方形 PQRS の頂点 P，Q が辺 AB 上に，R が辺 BC 上に，S が辺 CA 上にあるとする。$\mathrm{QR}=x$ とおくと，x を用いて，$\mathrm{AP}=\boxed{\text{ノ}}$，$\mathrm{QB}=\boxed{\text{ハ}}$ であるから $\mathrm{PQ}=\boxed{\text{ヒ}}$ である。また x の範囲は $0<x<\boxed{\text{フ}}$ である。したがって長方形 PQRS の面積が最大となるのは $x=\boxed{\text{ヘ}}$ のときで，そのときの面積は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

解答例

［**1**］(1) $a+1=x$ とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x-b-c)x+bc \\ &= x^2-(b+c)x+bc \\ &= (x-b)(x-c) \\ &= \boldsymbol{(a-b+1)(a-c+1)}\end{aligned}$$

(答) ア. イ. $a-b+1$, $a-c+1$

(2) $$x+y=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\boldsymbol{6}$$

$$xy=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=1$$

したがって $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot1=\boldsymbol{34}$

(答) ウ. 6　エ. 34

(3) $|x+2|>2|x-1|\geqq 0$ であるから

$$|x+2|^2>(2|x-1|)^2$$

ゆえに $(x+2)^2>4(x-1)^2$

整理すると $x^2-4x<0$

したがって $x(x-4)<0$

よって $\boldsymbol{0<x<4}$

(答) オ. 0　カ. 4

(4) $a\neq\dfrac{10}{3}$ より x^2 の係数について $3a-10\neq0$

与えられた 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつとき $D/4>0$

ゆえに $(2a)^2-(3a-10)(a+1)>0$

整理して $a^2+7a+10>0$

したがって $(a+5)(a+2)>0$

よって $\boldsymbol{a<-5,\ -2<a}$

(答) キ. -5　ク. -2

(5) 2 次関数 $y=3(x+a)^2+b$ のグラフについて

点 $(0,-9)$ を通るから　　$3a^2+b=-9$　　$\cdots$①

点 $(1,\ 0)$ を通るから　　$3(1+a)^2+b=0$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-12}$

(答) ケ. 1　コ. -12

［2］(1) ジュースを x 本買うとすると，水は $(15-x)$ 本買うことになる．

条件から　　$150x+120(15-x)\leqq 2000$

ゆえに　　$x\leqq \dfrac{20}{3}$

$\dfrac{20}{3}=6.6\cdots$ で，x は整数であるから　$x\leqq 6$

よって，ジュースを **6** 本，水を **9** 本買えばよい．

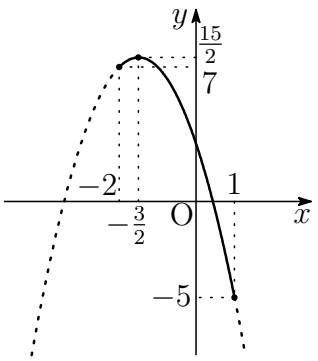
(答) サ. 6　シ. 9

(2) $y=-2x^2-6x+3$ を変形すると

$$y=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$$

$-2\leqq x\leqq 1$ でのグラフは，

右の図の実線部分である．



よって，y は

$x=-\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$ をとり，

$x=1$ で最小値 $\boldsymbol{-5}$ をとる．

(答) ス. $\dfrac{15}{2}$　セ. -5

(3) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\frac{\mathrm{CA}}{\sin B}=2R$$

よって $\quad \mathrm{CA}\sin 45^\circ=4\sin 30^\circ$

$$\mathrm{CA}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4\times\frac{1}{2}$$

ゆえに $\quad \mathrm{CA}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

また $\quad R=\dfrac{\mathrm{BC}}{2\sin A}=\dfrac{4}{2\sin 45^\circ}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$

(答) ソ. $2\sqrt{2}$　タ. $2\sqrt{2}$

(4) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

ゆえに $\quad 1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{4}$

したがって $\quad \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{3}{8}$

よって $\quad \sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=\boldsymbol{\frac{11}{16}}$$

また $\quad (\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$$=1-2\sin\theta\cos\theta$$

$$=1-2\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\sin\theta>0$，$\cos\theta<0$ であるから　$\sin\theta-\cos\theta>0$

よって $\quad \sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\dfrac{7}{4}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

(答) チ. $\dfrac{11}{16}$　ツ. $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(5) $\cos^2\theta+\sin\theta=-\sin^2\theta+\sin\theta+1$ であるから
$\sin\theta=x$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq45^\circ$ より

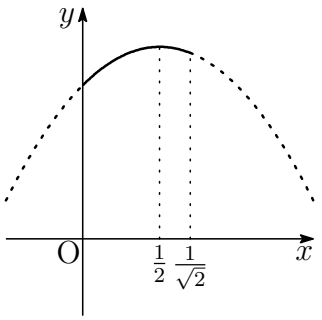
$$y=-x^2+x+1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\quad\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって

$x=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\theta=30^\circ$ のとき　**最大値 $\dfrac{5}{4}$**

$x=0$　すなわち　$\theta=0^\circ$ のとき　**最小値 1**

(答) テ. $\dfrac{5}{4}$　ト. 1



[3] $x^2-2xy+2y^2=2$ を y について整理すると　$2y^2-2xy+x^2-2=0$

y は実数であるから，y に関する 2 次方程式の係数について

$$(-2x)^2-4\cdot2(x^2-2)\geqq0$$

整理すると　$x^2-4\leqq0$

ゆえに　$(x+2)(x-2)\leqq0$

したがって　$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq2}$

$x^2-2xy+2y^2=2$ から　$2xy-2y^2=x^2-2\quad\cdots①$

① から　$4x^2+4xy-4y^2-2x+3=4x^2+2(2xy-2y^2)-2x+3$

$=4x^2+2(x^2-2)-2x+3$

$=6x^2-2x-1$

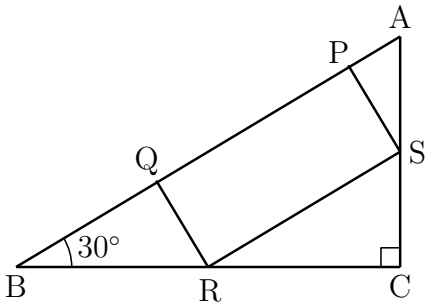
$=6\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{7}{6}$

したがって，$-2\leqq x\leqq2$ において，上式は

$x=\dfrac{1}{6}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{7}{6}}$ をとり，$x=-2$ で最大値 **27** をとる.

(答) ナ. -2　ニ. 2　ヌ. $-\dfrac{7}{6}$　ネ. 27

［**4**］QR = PS = x であるから，直角三角形 APS および直角三角形 BQR について



$$\mathrm{AP} = \mathrm{PS}\tan\angle\mathrm{ASP} = x\tan 30^\circ = x \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$$\mathrm{QB} = \mathrm{QR}\tan\angle\mathrm{BRQ} = x\tan 60^\circ = x \times \sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}\,x}$$

ゆえに　$\mathrm{PQ} = \mathrm{AB} - (\mathrm{AP} + \mathrm{QB}) = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} - \left(\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,x\right) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}(2-x)}{3}}$

AP > 0，PQ > 0 であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3} > 0 \qquad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < x < 2} \quad \cdots ①$$

長方形 PQRS の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{QR} \times \mathrm{PQ} \\ &= x \times \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3} \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(x^2 - 2x) \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

① において，S は $\boldsymbol{x = 1}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$ をとる．

(答) ノ. $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$　ハ. $\sqrt{3}\,x$　ヒ. $\dfrac{4\sqrt{3}(2-x)}{3}$　フ. 2　ヘ. 1　ホ. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

9.33　平成 22 年度一般試験 (90 分)

［1］(1) 等式

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx}{x^2+2x+2}$$

が x についての恒等式であるとき，$a =$ ア，$b =$ イ である。

(2) 中心が $(-1,\ 3)$ で半径が 2 の円を x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動した円の方程式は $x^2 + y^2 -$ ウ $x - 2y +$ エ $= 0$ である。

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき $y = 3\sin x - 4\cos x$ の最大値は オ，最小値は カ である。

(4) 非公開 (作問ミス)

(5) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ は $x =$ ケ で極大値，$x =$ コ で極小値をとる。

［2］(1) 直線 $3x-2y+6=0$ に関して，点 $(-5,\ 2)$ と対称な点の座標は (サ , シ) である。

(2) △ABC において AB : BC : CA $= 2 : a : 3$ ならば，a を用いて $\cos\angle\mathrm{A} =$ ス と書ける。特に $\angle\mathrm{A} = 60^\circ$ ならば，$a =$ セ である。

(3) $\log_4 x - \log_2 x^2 = 3$ のとき，$\log_2 x =$ ソ だから $x =$ タ である。

(4) 不等式 $3^{2x+1} - 28 \times 3^x + 9 < 0$ をみたす x の範囲は チ $< x <$ ツ である。

(5) 関数 $f(a) = \displaystyle\int_0^1 (2ax^2 + a^2x)\,dx$ は，$a =$ テ のとき，最小値 ト をとる。

［3］放物線 $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ は点 $(1,\ 1)$ を通り，直線 $y = x + 3$ に接する。このとき $a =$ ナ，$b =$ ニ である。この放物線と直線 $y = x - 3$ との交点を A，B とすると，AB の長さは ヌ である。O を原点とするとき △OAB の面積は ネ である。

［4］放物線 $C : y = -x^2 + 4$ と x 軸で囲まれる部分を D_1 とすると，D_1 の面積は ノ である。x 軸に平行な直線 $\ell : y = k$ と C の交点の座標は $x =$ ハ，ヒ であるから，ℓ と C で囲まれる部分を D_2 とすると D_2 の面積は フ である。D_2 の面積が D_1 の面積の $\dfrac{1}{8}$ となるのは $k =$ ヘ のときである。

解答例

［**1**］(1) 等式の両辺に $(x-1)(x^2+2x+2)$ をかけると，次の等式が得られる．

$$3x+2=a(x^2+2x+2)+bx(x-1)$$

右辺を整理すると

$$3x+2=(a+b)x^2+(2a-b)x+2a$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0=a+b,\quad 3=2a-b,\quad 2=2a$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-1}$

(答) ア. 1　イ. -1

(2) 平行移動後の円の中心は　$(-1+3,\ 3-2)$　すなわち　$(2,\ 1)$
半径は 2 であるから，円の方程式は

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2^2\quad \text{ゆえに}\quad x^2+y^2-\mathbf{4}x-2y+\mathbf{1}=0$$

(答) ウ. 4　エ. 1

(3) $\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$ を満たす角 α をとると

このとき　$y=3\sin x-4\cos x$

$$=5\left(\frac{3}{5}\sin x-\frac{4}{5}\cos x\right)$$

$$=5(\sin x\cos\alpha-\cos x\sin\alpha)$$

$$=5\sin(x-\alpha)$$

$0\leqq x<2\pi$ のとき　$-1\leqq\sin(x-\alpha)\leqq 1$　ゆえに　$-5\leqq y\leqq 5$

よって，y の最大値は **5**，最小値は **−5**

(答) オ. 5　カ. -5

(4) 作問ミスのため，問題は非公開．

(5) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = -1,\ 2$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大 12	↘	極小 -15	↗

よって，$\boldsymbol{x = -1}$ で極大値，$\boldsymbol{x = 2}$ で極小値をとる．

(答) ケ. -1　コ. 2

[2] (1) 直線 $3x - 2y + 6 = 0$ を l，点 $(-5,\ 2)$ を A とし，l に関して A と対称な点を B$(p,\ q)$ とする．

[1] l の傾きは $\dfrac{3}{2}$，直線 AB の傾きは $\dfrac{q-2}{p+5}$ である．$l \perp$ AB であるから

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{q-2}{p+5} = -1 \quad \text{すなわち} \quad 2p + 3q + 4 = 0 \quad \cdots ①$$

[2] 線分 AB の中点 $\left(\dfrac{p-5}{2},\ \dfrac{q+2}{2}\right)$ が l 上にあるから

$$3\cdot\frac{p-5}{2} - 2\cdot\frac{q+2}{2} + 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3p - 2q - 7 = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$p = 1$，$q = -2$　よって　$\boldsymbol{(1, -2)}$

(答) サ. 1　シ. -2

(2) AB : BC : CA $= 2 : a : 3$ であるから，定数 k を用いて $(k \neq 0)$

$$\mathrm{AB} = 2k, \quad \mathrm{BC} = ak, \quad \mathrm{CA} = 3k$$

とおくと，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{A} = \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (ak)^2}{2\cdot 3k\cdot 2k} = \boldsymbol{\frac{13 - a^2}{12}}$$

特に $\angle\mathrm{A} = 60^\circ$ のとき $\cos\angle\mathrm{A} = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\frac{13 - a^2}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 7$$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = \sqrt{7}}$

(答) ス. $\dfrac{13 - a^2}{12}$　セ. $\sqrt{7}$

(3) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x^2 > 0$

ゆえに $x > 0 \quad \cdots ①$

$\log_2 x = t$ とおくと，① に注意して

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}, \quad \log_2 x^2 = 2\log_2 x = 2t$$

方程式は $\dfrac{t}{2} - 2t = 3$ これを解いて $t = -2$

したがって $\log_2 x = \boldsymbol{-2}$ よって $x = 2^{-2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

(答) ソ. -2 タ. $\dfrac{1}{4}$

(4) $3^x = t$ とおくと $t > 0 \quad \cdots ①$

不等式は $3t^2 - 28t + 9 < 0$

ゆえに $(3t - 1)(t - 9) < 0$

① に注意して $\dfrac{1}{3} < t < 9$

したがって $\dfrac{1}{3} < 3^x < 9$ よって $\boldsymbol{-1 < x < 2}$

(答) チ. -1 ツ. 2

(5) 右辺を変形すると

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 (2ax^2 + a^2 x)\, dx \\ &= \left[\frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2 x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(a + \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{2}{9} \end{aligned}$$

よって $\boldsymbol{a = -\dfrac{2}{3}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{2}{9}}$ をとる．

(答) テ. $-\dfrac{2}{3}$ ト. $-\dfrac{2}{9}$

［**3**］放物線 $y = ax^2 + x + b$ は点 $(1,\ 1)$ を通るので

$$1 = a\cdot 1^2 + 1 + b \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 0 \quad \cdots ①$$

$y = ax^2 + x + b$ と $y = x + 3$ から y を消去すると

$$ax^2 + x + b = x + 3 \quad \text{ゆえに} \quad ax^2 = 3 - b$$

これが重解をもつので　$3 - b = 0$　$\cdots ②$

①，② を解いて　$\boldsymbol{a = -3,\ b = 3}$

放物線 $y = -3x^2 + x + 3$ と直線 $y = x - 3$ の共有点 A，B の座標は

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 3),\ (\sqrt{2},\ \sqrt{2} - 3)$$

したがって，AB の長さは

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} &= \sqrt{\{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\}^2 + \{(\sqrt{2} - 3) - (-\sqrt{2} - 3)\}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= \mathbf{4} \end{aligned}$$

原点 O から直線 $y = x - 3$ $(x - y - 3 = 0)$ までの距離 d は

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

よって　$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot d = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{3\sqrt{2}}$

(答) ナ. -3　ニ. 3　ヌ. 4　ネ. $3\sqrt{2}$

［**4**］放物線 C と x 軸との共有点の x 座標は，$-x^2+4=0$ を解いて　$x=\pm 2$

$-2 \leqq x \leqq 2$ では $y \geqq 0$ であるから，D_1 の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^{2} (-x^2+4)\,dx \\ &= -\int_{-2}^{2} (x+2)(x-2)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-2)\}^3 = \frac{32}{3} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

C と ℓ の共有点の x 座標は

$$-x^2+4=k \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=\pm\sqrt{4-k}}$$

$\sqrt{4-k}=\alpha \cdots ②$ とおくと，$-\alpha \leqq x \leqq \alpha$ では $-x^2+4 \geqq k$ であるから，

D_2 の面積 S_2 は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \{(-x^2+4)-k\}\,dx \\ &= -\int_{-\alpha}^{\alpha} \{x^2-(4-k)\}\,dx \\ &= -\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2-\alpha^2)\,dx \\ &= -\int_{-\alpha}^{\alpha} (x+\alpha)(x-\alpha)\,dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)\{\alpha-(-\alpha)\} = \frac{4}{3}\alpha^3 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

このとき　$S_2=\dfrac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}(4-k)\sqrt{4-k}}$

D_2 の面積が D_1 の面積の $\dfrac{1}{8}$ となるとき

$$S_2 = S_1 \times \frac{1}{8} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{3}$$

これを ③ に代入すると　$\dfrac{4}{3}\alpha^3=\dfrac{4}{3}$　ゆえに　$\alpha=1$

② より　　$\sqrt{4-k}=1$　よって　$\boldsymbol{k=3}$

(答) ノ. $\dfrac{32}{3}$　ハ. ヒ. $\pm\sqrt{4-k}$　フ. $\dfrac{4}{3}(4-k)\sqrt{4-k}$　ヘ. 3

9.34　平成 21 年度推薦前期試験 (90 分)

［1］(1) $(ax+b)^3$ を展開したときの x^2 の係数が 12，x の係数が 6 ならば，$a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) $x=\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ の分母を有理化すると，$x=$ ウ で x の整数部分は エ である。

(3) 2 次不等式 $2x^2+x-6<0$ を満たす x の範囲は オ $<x<$ カ である。

(4) $2|x+1|-|x-2|=2$ を満たす x の値は $x=$ キ，ク である。

(5) $90^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta=$ ケ，$\sin\theta=$ コ である。

［2］(1) 頂点が $(-2,\ 3)$ で x 軸との共有点の 1 つが $(-3,\ 0)$ である放物線 C をグラフとする 2 次関数は $y=$ サ で，C と x 軸とのもう 1 つの共有点は (シ , 0) である。

(2) 2 次関数 $y=-2x^2+6x-\dfrac{7}{2}$ の定義域が $1\leqq x\leqq 3$ ならば，値域は ス $\leqq y\leqq$ セ である。

(3) $y=2x^2-8x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最大値が 12 であるならば，$c=$ ソ で最小値は タ である。

(4) $y=x^2+ax+b$ のグラフが点 $(3,\ 6)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるならば，$a=$ チ，$b=$ ツ である。

(5) △ABC において AB = 15，BC = 18，AC = 12 とする。線分 BC 上の点 D を BD : DC = AB : AC となるように定める。このとき DC = テ，AD = ト である。

［3］放物線 $C: y=-ax^2+a$ $(a>1)$ と x 軸との交点を M，N とする。x 軸上の 2 点 $\mathrm{P}(-b,\ 0)$，$\mathrm{Q}(b,\ 0)$ $(0<b<1)$ と放物線 C 上の 2 点 R，S を，四辺形 PQRS が長方形となるようにとり，その長方形の 4 辺の長さの和を ℓ とすると，ℓ は a，b を用いて ナ と書ける。従って，ℓ は $b=$ ニ のとき最大となり，その最大値を m とすると，$m=$ ヌ である。特に $m=4\mathrm{MN}$ となるのは $a=$ ネ のときである。

［4］△ABC において AB : AC : BC = 4 : 5 : 6 であるとき，$\cos A=$ ノ，$\sin A=$ ハ である。更に，△ABC の外接円の半径が $\dfrac{16}{7}$ であるとき，BC = ヒ，△ABC の面積は フ である。

解答例

［**1**］(1) $(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$ より，x^2 と x の係数について

$$3a^2b = 12,\quad 3ab^2 = 6$$

であるから

$$a^2b = 4,\quad ab^2 = 2$$

を得る．上の 2 式から

$$\frac{(a^2b)^2}{ab^2} = \frac{4^2}{2}$$

ゆえに　$a^3 = 8$

よって　$\boldsymbol{a = 2}$

これを第 1 式に代入して　$2^2b = 4$　よって　$\boldsymbol{b = 1}$

(答) ア. 2　イ. 1

(2) $x = \dfrac{4}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{4(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \boldsymbol{\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}}$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$，$3 < \sqrt{12} < 4$ であるから

$$\frac{10+3}{11} < x < \frac{10+4}{11}$$

ゆえに，x の整数部分は　$\boldsymbol{1}$

(答) ウ. $\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}$　エ. 1

(3)　$2x^2 + x - 6 < 0$

ゆえに　$(x+2)(2x-3) < 0$

よって　$\boldsymbol{-2 < x < \dfrac{3}{2}}$

(答) オ. -2　カ. $\dfrac{3}{2}$

(4)　［1］$x < -1$ のとき　$|x+1| = -x-1$，$|x-2| = -x+2$ であるから
方程式は　$2(-x-1) - (-x+2) = 2$
これを解くと　$x = -6$
これは，$x < -1$ を満たすから，解である．
［2］$-1 \leqq x < 2$ のとき　$|x+1| = x+1$，$|x-2| = -x+2$ であるから
方程式は　$2(x+1) - (-x+2) = 2$
これを解くと　$x = \dfrac{2}{3}$
これは，$-1 \leqq x < 2$ を満たすから，解である．
［3］$2 \leqq x$ のとき　$|x+1| = x+1$，$|x-2| = x-2$ であるから
方程式は　$2(x+1) - (x-2) = 2$
これを解くと　$x = -2$
これは，$2 \leqq x$ に反するから，解ではない．

以上から，方程式の解は　$\boldsymbol{x = -6,\ \dfrac{2}{3}}$

(答) キ. ク. $-6,\ \dfrac{2}{3}$

(5)　$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{16}{25}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{5}}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = -\dfrac{3}{4} \times \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{\boldsymbol{3}}{\boldsymbol{5}}$

(答) ケ. $-\dfrac{4}{5}$　コ. $\dfrac{3}{5}$

［**2**］(1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x+2)^2 + 3$$

の形に表される．グラフが点 $(-3,\ 0)$ を通るから

$$0 = a(-3+2)^2 + 3$$
$$a = -3$$

よって　　$\boldsymbol{y = -3(x+2)^2 + 3}$

x 軸との共有点の x 座標は，$y = 0$ を代入して

$$0 = -3(x+2)^2 + 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = -3, -1$$

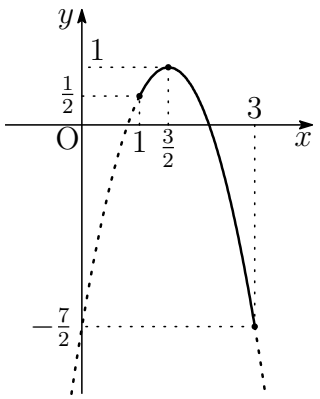
よって，x 軸とのもう 1 つの共有点は　$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$

(答) サ. $-3(x+2)^2+3$　シ. -1

(2) $y = -2x^2 + 6x - \dfrac{7}{2}$ を変形すると

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

$1 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは，右の図の実線部分である．



よって，値域は

$$\boldsymbol{-\frac{7}{2} \leqq y \leqq 1}$$

(答) ス. $-\dfrac{7}{2}$　セ. 1

(3) $y = 2x^2 - 8x + c$ を変形すると　$y = 2(x-2)^2 + c - 8$

放物線は下に凸であり，定義域 $1 \leqq x \leqq 4$ の中央 $\dfrac{5}{2}$ は，放物線の軸 $x = 2$ より右側にあるから，この関数は $x = 4$(定義域の右端) で最大値 12 をとる．

ゆえに　$2{\cdot}4^2 - 8{\cdot}4 + c = 12$　これを解いて　$\boldsymbol{c = 12}$

このとき，$y = 2(x-2)^2 + 4$ となるから，$x = 2$ で最小値 **4** をとる．

(答) ソ. 12　タ. 4

(4) $y = x^2 + ax + b$ のグラフが点 $(3,\ 6)$ を通るから

$$6 = 3^2 + a\cdot 3 + b$$

ゆえに　　$b = -3a - 3 \quad \cdots ①$

式を変形すると　$y = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{4}$

放物線の頂点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ b - \dfrac{a^2}{4}\right)$ が直線 $y = 2x + 1$ 上にあるから

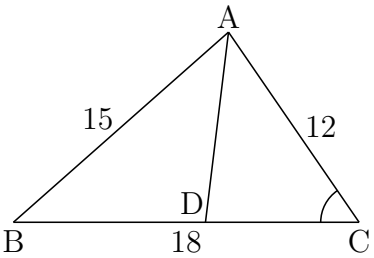
$$b - \frac{a^2}{4} = 2 \times \left(-\frac{a}{2}\right) + 1$$

ゆえに　　$b = \dfrac{a^2}{4} - a + 1 \quad \cdots ②$

①，② を解いて　$\boldsymbol{a = -4,\ b = 9}$

(答) チ. -4　ツ. 9

(5) $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 15 : 12 = 5 : 4$ より



$$\mathrm{DC} = \mathrm{BC} \times \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD} + \mathrm{DC}} = 18 \times \frac{4}{5+4} = \boldsymbol{8}$$

△ABC に余弦定理を適用して

$$\cos C = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}} = \frac{18^2 + 12^2 - 15^2}{2\cdot 18\cdot 12} = \frac{9}{16}$$

これらの結果を △ADC に適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{DC}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2\mathrm{DC}\cdot\mathrm{CA}\cos C \\ &= 8^2 + 12^2 - 2\cdot 8\cdot 12 \times \frac{9}{16} \\ &= 100\end{aligned}$$

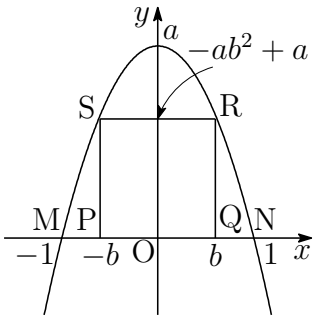
$\mathrm{AD} > 0$ であるから　$\boldsymbol{\mathrm{AD} = 10}$

(答) テ. 8　ト. 10

[3] $\ell = 2(\mathrm{PQ} + \mathrm{QR})$

$= 2\{2b + (-ab^2 + a)\}$

$= \boldsymbol{-2ab^2 + 4b + 2a}$



上式から

$$\ell = -2a\left(b^2 - \frac{2}{a}b\right) + 2a$$

$$= -2a\left\{\left(b - \frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2\right\} + 2a$$

$$= -2a\left(b - \frac{1}{a}\right)^2 + \frac{2}{a} + 2a$$

$a > 1$ より $0 < \dfrac{1}{a} < 1$ であるから

ℓ は，$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{a}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{m = \dfrac{2}{a} + 2a}$

$m = 4\mathrm{MN}$ となるのは，$y = -a(x+1)(x-1)$ より，$\mathrm{MN} = 2$ であるから

$$\frac{2}{a} + 2a = 4{\cdot}2 \quad \text{すなわち} \quad a^2 - 4a + 1 = 0$$

$a > 1$ に注意して，これを解くと $\boldsymbol{a = 2 + \sqrt{3}}$

(答) ナ. $-2ab^2 + 4b + 2a$　ニ. $\dfrac{1}{a}$　ヌ. $\dfrac{2}{a} + 2a$　ネ. $2 + \sqrt{3}$

［4］AB : AC : BC = 4 : 5 : 6 であるから，実数 k を用いて

$$\mathrm{AB}=4k,\ \mathrm{AC}=5k,\ \mathrm{BC}=6k \quad \cdots ①$$

とおくことができる．これを余弦定理に適用すると

$$\cos A=\frac{(5k)^2+(4k)^2-(6k)^2}{2\cdot 5k\cdot 4k}=\boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

さらに　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=2R$

ゆえに　　$\mathrm{BC}=2R\sin A$

$$=2\times\frac{16}{7}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\boldsymbol{\frac{12\sqrt{7}}{7}}$$

これを ① に代入して　$k=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

ゆえに　$\mathrm{AB}=\dfrac{8\sqrt{7}}{7}$，$\mathrm{AC}=\dfrac{10\sqrt{7}}{7}$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin A$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{7}}{7}\times\frac{10\sqrt{7}}{7}\times\frac{3\sqrt{7}}{8}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{7}}$$

(答) ノ. $\dfrac{1}{8}$　ハ. $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$　ヒ. $\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$　フ. $\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$

9.35 平成 21 年度推薦後期試験 (90 分)

［1］(1) $2a^2+ab+5ac-b^2-bc+2c^2$ を因数分解すると $\boxed{\text{ア}} \times \boxed{\text{イ}}$ となる。

(2) a を有理数とするとき，$x=\dfrac{\sqrt{3}+a}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ が有理数となる a の値は $a=\boxed{\text{ウ}}$ で，そのときの x の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $y=-x^2+4x+3$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフは $y=-x^2-\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $90^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$\dfrac{3}{2}\tan\theta=\cos\theta$ のとき，$\sin\theta=\boxed{\text{キ}}$ で $\theta=\boxed{\text{ク}}^\circ$ である。

(5) 半径が r cm の球の体積が，底面の直径 8cm で高さ $\dfrac{2}{3}$cm の円柱の体積と等しいならば，$r=\boxed{\text{ケ}}$cm で球の表面積は $\boxed{\text{コ}}$cm^2 である。

［2］(1) $y=x^2-2mx+2m^2-m$ のグラフと x 軸との共有点の個数は 2 で，共有点の x 座標が正であるならば，定数 m の範囲は $\boxed{\text{サ}}<m<\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+y=1$ のとき，$2x^2+y^2$ の最小値は $\boxed{\text{ス}}$，最大値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次方程式 $-2x^2-4x+p-1=0$ の 1 つの解が -2 以下で，もう 1 つの解が 1 以下であるならば，定数 p の範囲は $\boxed{\text{ソ}}\leqq p\leqq\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $\cos 160^\circ+\sin 70^\circ$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ であり，$\cos 135^\circ\times\sin 120^\circ$ の値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) △ABC において $\angle\mathrm{B}=45^\circ$，$\angle\mathrm{C}=60^\circ$ ならば，AB : BC : CA = $\boxed{\text{テ}}$: $\boxed{\text{ト}}$: 1 である。

［3］関数 $y=(2x^2+4x)^2+3(2x^2+4x)+1+a$ において，$t=2x^2+4x+1$ とおき，y を t の式で表わすと $y=\boxed{\text{ナ}}$ である。y の最小値が $\dfrac{3}{4}$ であるならば $a=\boxed{\text{ニ}}$ である。この a の値に対して，$-1\leqq x\leqq 1$ における y の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$，最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

［4］半径 2 の円周上に 3 点 A，B，C がある。点 A は固定され，2 点 B，C は $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ の関係を保ちながら円周上を動くとする。このとき，BC = $\boxed{\text{ノ}}$ である。AB = AC となるときの △ABC の面積を S_1 とすると $S_1=\boxed{\text{ハ}}$ となる。また，AC = kAB となるとき，AB^2 は k を用いて AB^2 = $\boxed{\text{ヒ}}$ と書けるから，このときの △ABC の面積 S_2 は $S_2=\boxed{\text{フ}}$ である。とくに，$k=2$ ならば，$S_2=\boxed{\text{ヘ}}\times S_1$ である。

解答例

［**1**］(1) a について整理して因数分解する．

$$
\begin{aligned}
&2a^2+ab+5ac-b^2-bc+2c^2\\
=&2a^2+(b+5c)a-(b^2+bc-2c^2)\\
=&2a^2+(b+5c)a-(b+2c)(b-c)\\
=&\{a+(b+2c)\}\{2a-(b-c)\}\\
=&\boldsymbol{(a+b+2c)(2a-b+c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & & b+2c & \longrightarrow & 2b+4c\\
2 & & -(b-c) & \longrightarrow & -b+c\\
\hline
2 & & -(b+2c)(b-c) & & b+5c
\end{array}
$$

(答) ア．イ．$(a+b+2c)$，$(2a-b+c)$

(2) 分母を有理化して整理する．

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{\sqrt{3}+a}{\sqrt{3}-1}+\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+a)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\frac{(3-\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}\\
&=\frac{a+7}{2}+\frac{a-1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{a+7}{2}$，$\dfrac{a-1}{2}$ は有理数であるから

x が有理数であるとき　$\dfrac{a-1}{2}=0$　これを解いて　$\boldsymbol{a=1}$

このとき　$\boldsymbol{x=4}$

(答) ウ．1　エ．4

(3) $y=-x^2+4x+3$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフは

$$y-2=-(x+3)^2+4(x+3)+3$$

よって　　$y=-x^2-\boldsymbol{2}x+\boldsymbol{8}$

(答) オ．2　カ．8

(4) $\dfrac{3}{2}\tan\theta=\cos\theta$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
3\sin\theta&=2\cos^2\theta\\
2\sin^2\theta+3\sin\theta-2&=0\\
(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)&=0
\end{aligned}
$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$0<\sin\theta<1$ であるから

$$\sin\theta=\boldsymbol{\frac{1}{2}}\quad\text{ゆえに}\quad\theta=\boldsymbol{150^\circ}$$

(答) キ．$\dfrac{1}{2}$　ク．150°

(5) 題意から $\dfrac{4}{3}\pi r^3 = \pi\cdot 4^2 \times \dfrac{2}{3}$

整理して $r^3 = 8$ これを解いて $\boldsymbol{r = 2}$ (cm)

ゆえに，球の表面積は $4\pi\cdot 2^2 = \boldsymbol{16\pi}$ (cm^2)

(答) ケ. 2 コ. 16π

[2] (1) $y = x^2 - 2mx + 2m^2 - m$ を変形すると $y = (x-m)^2 + m^2 - m$

グラフは，下に凸の放物線で，x 軸との共有点の個数が 2 個であるから

$$m^2 - m < 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 < m < 1 \quad \cdots ①$$

共有点の x 座標が正であるから $m > 0$ $\cdots ②$

①，② の共通部分を求めて $\boldsymbol{0 < m < 1}$

(答) サ. 0 シ. 1

(2) $y = 1 - 2x \cdots ①$ であるから，$y \geqq 0$ より

$$1 - 2x \geqq 0$$

$x \geqq 0$ に注意して $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ $\cdots ②$

① より $2x^2 + y^2 = 2x^2 + (1-2x)^2$

$$= 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \quad \cdots ③$$

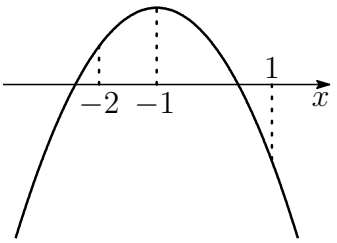
③ は ② において，$x = \dfrac{1}{3}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ をとり，$x = 0$ で最大値 $\boldsymbol{1}$ をとる.

(答) ス. $\dfrac{1}{3}$ セ. 1

(3) $f(x) = -2x^2 - 4x + p - 1$ とおくと

$$f(x) = -2(x+1)^2 + p + 1$$

1 つの解が -2 以下で，もう 1 つの解が 1 以下であるから，右のグラフから



$$f(-2) \geqq 0, \quad f(1) \leqq 0$$

ゆえに $\begin{cases} -2(-2)^2 - 4(-2) + p - 1 \geqq 0 \\ -2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + p - 1 \leqq 0 \end{cases}$

これを解いて $\boldsymbol{1 \leqq p \leqq 7}$

(答) ソ. 1 タ. 7

(4) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$，$\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ であるから

$$\cos 160^\circ + \sin 70^\circ = (-\cos 20^\circ) + \cos 20^\circ = \mathbf{0}$$

また　　$\cos 135^\circ \times \sin 120^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{6}}}{\boldsymbol{4}}$

(答) チ. 0　ツ. $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(5) $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

正弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} &= \sin C : \sin A : \sin B \\ &= \sin 60^\circ : \sin 75^\circ : \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} : \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2} : \frac{\sqrt{3}+1}{2} : 1} \end{aligned}$$

(答) テ. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　ト. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

[3] $t = 2x^2 + 4x + 1$ より，$t = 2(x+1)^2 - 1$　$\cdots$①

ゆえに　　$t \geqq -1$　$\cdots$②

$2x^2 + 4x = t - 1$ であるから

$$\begin{aligned} y &= (2x^2 + 4x)^2 + 3(2x^2 + 4x) + 1 + a \\ &= (t-1)^2 + 3(t-1) + 1 + a \\ &= \boldsymbol{t^2 + t - 1 + a} \\ &= \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + a \end{aligned}$$

y の最小値が $\dfrac{3}{4}$ であるから，② に注意して

$$-\frac{5}{4} + a = \frac{3}{4}　\text{これを解いて}　\boldsymbol{a = 2}$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ において，① から　　$-1 \leqq t \leqq 7$

また，$y = t^2 + t + 1$ であるから，このとき

$$t = -1 \text{ で最小値 } \mathbf{1}，\ t = 7 \text{ で最大値 } \mathbf{57}$$

をとる.

(答) ナ. $t^2 + t - 1 + a$　ニ. 2　ヌ. 1　ネ. 57

［**4**］正弦定理により $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = 2R$

ゆえに $\mathrm{BC} = 2R\sin\angle\mathrm{BAC}$

$= 2\cdot 2\sin 60^\circ$

$= 2\cdot 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ となるとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ は一辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$$

余弦定理により $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC}$

ゆえに $(2\sqrt{3})^2 = \mathrm{AB}^2 + (k\mathrm{AB})^2 - 2\mathrm{AB}\cdot k\mathrm{AB}\cos 60^\circ$

したがって $12 = (1 + k^2 - k)\mathrm{AB}^2$

よって $\mathrm{AB}^2 = \dfrac{\boldsymbol{12}}{\boldsymbol{k^2 - k + 1}} \quad \cdots ①$

このとき $S_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot k\mathrm{AB}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}k\mathrm{AB}^2}{4}$

① より $= \dfrac{\boldsymbol{3\sqrt{3}k}}{\boldsymbol{k^2 - k + 1}}$

$k = 2$ のとき，$S_2 = 2\sqrt{3}$ であるから $S_2 = \dfrac{\boldsymbol{2}}{\boldsymbol{3}} \times S_1$

(答) ノ．$2\sqrt{3}$　ハ．$3\sqrt{3}$　ヒ．$\dfrac{12}{k^2 - k + 1}$　フ．$\dfrac{3\sqrt{3}k}{k^2 - k + 1}$　ヘ．$\dfrac{2}{3}$

9.36　平成 21 年度一般試験 (90 分)

［1］(1) △ABC において，AB = 2，BC = 5，CA = 4 ならば，$\cos\angle ABC =$ ア で，△ABC の面積は イ である。

(2) 方程式 $x^3 = 8$ の虚数解の一つを ω とするとき，$\omega^2 + 2\omega + 4 =$ ウ，$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 =$ エ である。

(3) 点 P(2, 1) から直線 $2x + 3y = 20$ におろした垂線を PH とする。このとき，H の座標は オ であり，2 点 P，H の距離は カ である。

(4) $2^{x+2} - 33 + 2^{3-x} < 0$ をみたす x の範囲は キ $< x <$ ク である。

(5) 長方形 ABCD において，AB = 2km，BC = 3km とする。時刻 0 で，点 P が A を出発し B に向かって時速 2km で，点 Q が B を出発して C に向かって時速 3km で動くとする。このとき，出発して ケ 時間までは 2 点 P，Q の距離は減少し，P が B に到着するまでの P，Q の最短距離は コ km である。

［2］(1) 整式 $P(x)$ を x^2-x-2 で割った余りが $-2x+3$ で x^2-2x-3 で割った余りが $x+2$ とする。このとき，$P(x)$ を x^2-5x+6 で割った余りは サ $x+$ シ である。

(2) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ が $x = -1$ を解にもち，それ以外の解を α，β とするとき，$\alpha + \beta = 3$ ならば，$a =$ ス，$b =$ セ である。

(3) 原点 O を通る直線 $y = mx$ $(m > 0)$ と円 $(x-4)^2 + y^2 = 4$ の 2 交点を P，Q とする。OP : OQ = 2 : 3 ならば，点 P の x 座標は ソ で $m =$ タ である。

(4) $\log_{10} 2 = 0.3010$ とするとき，8^{10} は チ 桁の数であり，5^{10} は ツ 桁の数である。

(5) 放物線 $y = x^2 - x$ と直線 $y = ax$ $(a \geqq 0)$ で囲まれる部分を D とすると，D の面積は テ である。x 軸より上にある D の部分の面積と x 軸より下にある D の部分の面積が等しいならば a の値は ト である。

［3］放物線 $C : y = ax^2$ と，原点 O を通り x 軸の正の部分とのなす角が θ の直線との交点を P，O を通り x 軸の正方向とのなす角が 2θ の直線との交点を Q とする。ただし $0 < a$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$m = \tan\theta$ とおくと，P の x 座標は a と m を用いて ナ と書ける。また C 上の点 R を，R の x 座標が P の x 座標の 2 倍であるようにとると，2 点 P，R を通る直線の傾きは ニ である。2 点 P，R を通る直線が 2 点 O，Q を通る直線と平行であるあるならば $m =$ ヌ であるから，$\theta =$ ネ で Q の x 座標は P の x 座標の ノ 倍である。

［**4**］$x = \sin\theta - \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，$x = \sqrt{2}\sin(\theta - \boxed{\text{ハ}})$ と表すことができるので，x のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ヒ}} \leqq \theta \leqq \boxed{\text{フ}}$ となる。このとき関数 $y = 5x^3 + 6x^2 - 6$ は $\theta = \boxed{\text{ヘ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{ホ}}$ をとる。

解答例

［**1**］(1) $a = 5$，$b = 4$，$c = 2$ であるから，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2\cdot 2\cdot 5} = \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{20}}$$

$\sin\angle\mathrm{ABC} > 0$ であるから　　$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{13}{20}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{231}}{20}$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}ca\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 5 \times \dfrac{231}{20} = \dfrac{\mathbf{\sqrt{231}}}{\mathbf{4}}$

(答) ア. $\dfrac{13}{20}$　イ. $\dfrac{\sqrt{231}}{4}$

(2) ω はこの方程式の解であるから

$$\omega^3 = 8 \qquad \text{ゆえに} \qquad (\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4) = 0$$

ω は虚数であるから，$\omega - 2 \neq 0$ より　　$\omega^2 + 2\omega + 4 = \mathbf{0}$

$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 = \omega^2(\omega^2 + 2\omega + 4) + \omega^3$ であるから，上の結果を代入して

$$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 = \omega^2 \times 0 + 8 = \mathbf{8}$$

(答) ウ. 0　エ. 8

(3) 点 $\mathrm{P}(2,\ 1)$ を通り直線 $2x + 3y = 20 \cdots$ ① に垂直な直線の方程式は

$$3(x - 2) - 2(y - 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x - 2y = 4 \cdots ②$$

H の座標は ①，② の連立方程式の解であるから　　$\mathbf{H(4,\ 4)}$

よって　　$\mathrm{PH} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-1)^2} = \mathbf{\sqrt{13}}$

(答) オ. $(4,\ 4)$　カ. $\sqrt{13}$

(4) 方程式を変形すると　　$4(2^x)^2 - 33\cdot 2^x + 8 < 0$

ゆえに　　$(2^x - 8)(4\cdot 2^x - 1) < 0$

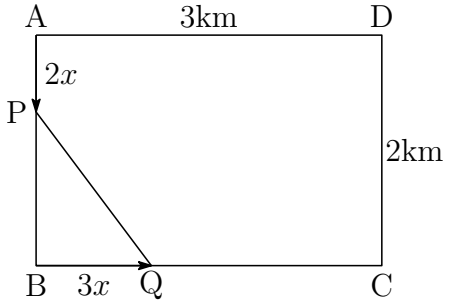
したがって　　$\dfrac{1}{4} < 2^x < 8$

底 2 は 1 より大きいので　　$\boldsymbol{-2 < x < 3}$

(答) キ. -2　ク. 3

(5) x 時間後の AP，BQ の距離は $(0 < x < 1)$，それぞれ $2x$ km，$3x$ km であるから，△PBQ を三平方定理に適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{PB}^2 + \mathrm{BQ}^2 \\ &= (2-2x)^2 + (3x)^2 \\ &= 13x^2 - 8x + 4 \\ &= 13\left(x - \frac{4}{13}\right)^2 + \frac{36}{13} \end{aligned}$$



したがって，$\boldsymbol{\dfrac{4}{13}}$ 時間まで 2 点 P，Q の距離は減少し，

P が B に到着するまでの P，Q の最短距離は　$\sqrt{\dfrac{36}{13}} = \boldsymbol{\dfrac{6\sqrt{13}}{13}}$ (km)

(答) ケ. $\dfrac{4}{13}$　コ. $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

［**2**］(1) $P(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割った余りを $ax + b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

この等式より　　$P(2) = 2a + b$，$P(3) = 3a + b$

また，$P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，$x^2 - 2x - 3$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると，条件から

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q_1(x) - 2x + 3$$
$$P(x) = (x+1)(x-3)Q_2(x) + x + 2$$

第 1 式に $x = 2$，第 2 式に $x = 3$ を代入すると

$$P(2) = -1,\ P(3) = 5$$

したがって　　$2a + b = -1$，$3a + b = 5$

これを解くと　　$a = 6$，$b = -13$

よって，求める余りは　　$\boldsymbol{6x - 13}$

(答) サ. 6　シ. -13

(2) $x=-1$ は 3 次方程式 $x^3+ax^2+3x+b=0$ の解であるから

$$(-1)^3+a(-1)^2+3(-1)+b=0 \quad \text{すなわち} \quad a+b=4 \quad \cdots ①$$

この 3 次方程式の解と係数の関係により $\alpha+\beta+(-1)=-\dfrac{a}{1}$

$\alpha+\beta=3$ をこれに代入して $\boldsymbol{a=-2}$ $\cdots ②$

② を ① に代入して $\boldsymbol{b=6}$

(答) ス. -2 セ. 6

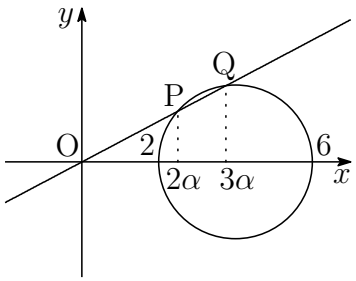
3 次方程式の解と係数の関係

3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α，β，γ とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

(3) OP : OQ = 2 : 3 であるから，2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ 2α，3α とおける．

$y=mx$ $(m>0)$ を $(x-4)^2+y^2=4$ に代入して整理すると



$$(m^2+1)x^2-8x+12=0$$

このとき，解と係数の関係から

$$2\alpha+3\alpha=-\frac{-8}{m^2+1} \qquad 2\alpha\cdot 3\alpha=\frac{12}{m^2+1}$$

ゆえに $\dfrac{5\alpha}{8}=\dfrac{1}{m^2+1}$ $\dfrac{\alpha^2}{2}=\dfrac{1}{m^2+1}$

上の 2 式から $\alpha=\dfrac{5}{4}$，$\boldsymbol{m=\dfrac{\sqrt{7}}{5}}$

ゆえに，点 P の x 座標は $2\alpha=2\times\dfrac{5}{4}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

(答) ソ. $\dfrac{5}{2}$ タ. $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$

(4)　$\log_{10} 8^{10} = \log_{10} 2^{30} = 30\log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$

$\log_{10} 5^{10} = 10\log_{10} \dfrac{10}{2} = 10(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 10(1 - 0.3010) = 6.99$

$9 < \log_{10} 8^{10} < 10$，$6 < \log_{10} 5^{10} < 7$ であるから

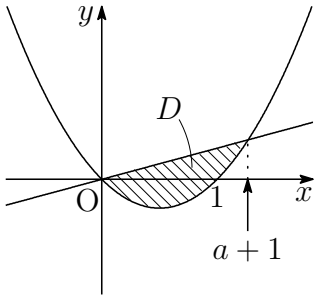
$$10^9 < 8^{10} < 10^{10},\ 10^6 < 5^{10} < 10^7$$

よって，8^{10} は **10** 桁の数であり，5^{10} は **7** 桁の数である．

(答) チ. 10　ツ. 7

(5) 方程式 $x^2 - x = ax$ を解くと

$$x^2 - (a+1)x = 0 \text{ より} \quad x = 0,\ a+1$$



よって，D の面積 S_1 は，図から

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{a+1} \{ax - (x^2 - x)\}dx \\ &= -\int_0^{a+1} x\{x - (a+1)\}dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(a+1)^3} \end{aligned}$$

この放物線と x 軸の交点の x 座標は

$$x^2 - x = 0 \text{ より} \quad x = 0,\ 1$$

よって，x 軸より下にある D の部分の面積 S_2 は，図から

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 \{-(x^2 - x)\}dx \\ &= -\int_0^1 x(x-1)dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

x 軸より上にある D の部分の面積と x 軸より下にある D の部分の面積が等しいとき，$S_1 = 2S_2$ が成り立つので

$$\frac{1}{6}(a+1)^3 = 2 \times \frac{1}{6} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = \sqrt[3]{2} - 1}$$

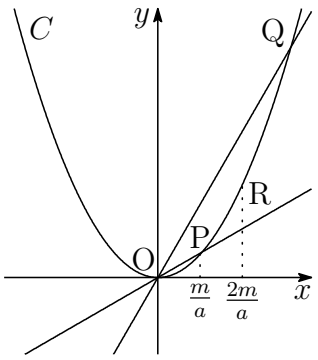
(答) テ. $\dfrac{1}{6}(a+1)^3$　ト. $\sqrt[3]{2} - 1$

［**3**］直線 OP の傾きは m であるから，

その方程式は　$y = mx$

P の座標は $(x \neq 0)$，$y = ax^2$ と $y = mx$ を解いて

$$\mathrm{P}\left(\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{a}},\ \frac{m^2}{a}\right)$$



C 上の点 R の x 座標は $\dfrac{2m}{a}$ であるから

$$\mathrm{R}\left(\frac{2m}{a},\ \frac{4m^2}{a}\right)$$

よって，直線 PR の傾きは　$\dfrac{\dfrac{4m^2}{a} - \dfrac{m^2}{a}}{\dfrac{2m}{a} - \dfrac{m}{a}} = \boldsymbol{3m}$

また，直線 OQ の傾きは　$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \dfrac{2m}{1 - m^2}$

2 直線 PR，OQ が平行であるとき　$3m = \dfrac{2m}{1 - m^2}$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$m = \tan\theta > 0$ に注意して，この方程式を解くと

$$\boldsymbol{m = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

したがって，直線 OQ の傾きは　$\tan 2\theta = \tan\left(2 \times \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

このとき，P の x 座標は $(x \neq 0)$，$ax^2 = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ を解いて　$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}\,a}$

Q の x 座標は $(x \neq 0)$，$ax^2 = \sqrt{3}\,x$ を解いて　$x = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{a} \div \dfrac{1}{\sqrt{3}\,a} = 3$ より，Q の x 座標は P の x 座標の **3** 倍である．

(答) ナ. $\dfrac{m}{a}$　ニ. $3m$　ヌ. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ネ. $\dfrac{\pi}{6}$　ノ. 3

[4]　　$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$$x = \sqrt{2}\sin\left(\theta - \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}\right), \quad \boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}$$

$y = 5x^3 + 6x^2 - 6$ を微分して　$y' = 15x^2 + 12x = 3x(5x+4)$

$y' = 0$ とすると　$x = -\dfrac{4}{5},\ 0$

y の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{4}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	↗	極大 $-\frac{118}{25}$	↘	極小 -6	↗	$6+10\sqrt{2}$

よって，この関数は

$x = 0$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{\pi}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-6}$ をとる．

(答) ハ. $\dfrac{\pi}{4}$　ヒ. -1　フ. $\sqrt{2}$　ヘ. $\dfrac{\pi}{4}$　ホ. -6

9.37 平成 20 年度推薦前期試験 (90 分)

[1] (1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したときの x^2 の係数は［ア］，x の係数は［イ］である。

(2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると (［ウ］) × (［エ］) となる。

(3) $y=2x^2-4x+5$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動させると $y=2x^2-8x+13$ となった。このとき，$p=$［オ］，$q=$［カ］である。

(4) 2 次不等式 $x^2+ax+b \leqq 0$ の解が $2 \leqq x \leqq 4$ であるとき，$a=$［キ］，$b=$［ク］である。

(5) $\tan\theta=2$ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ ならば，$\cos\theta=$［ケ］，$\sin\theta=$［コ］である。

[2] (1) $x-3+2|x-2|<0$ となる x の範囲は［サ］$<x<$［シ］である。

(2) 2 次関数のグラフが 3 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(0,\ 6)$ を通るとき，その 2 次関数は $y=$［ス］であり，そのグラフの頂点は［セ］である。

(3) 2 次関数 $y=-3x^2+12x-4$ の定義域が $1 \leqq x \leqq 4$ であるとき，最大値は［ソ］，最小値は［タ］である。

(4) 両岸が平行な川がある。現在いる点 O と対岸の点 P を結ぶ直線が川と直角であるとする。点 O を通り川に平行な直線上の $\angle\mathrm{PQO}=60^\circ$ となる点 Q は，$\mathrm{OQ}=60\sqrt{3}\mathrm{m}$ の点であった。このとき，$\mathrm{OP}=$［チ］m である。線分 OQ の延長線上にあり $\angle\mathrm{PRO}=30^\circ$ となる点 R は $\mathrm{OR}=$［ツ］m の点である。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{A}=45^\circ$，$\angle\mathrm{B}=15^\circ$，$\mathrm{BC}=3\sqrt{2}$ ならば，$\angle\mathrm{C}=$［テ］$^\circ$ で，$\mathrm{AB}=$［ト］である。

[3] 2 次関数 $y=x^2-3x+4$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値を b とする。b を a で表すと $a \leqq$［ナ］のときは $b=$［ニ］，a がそれ以外の範囲にあるときは $b=$［ヌ］である。また，b は，$a=$［ネ］のとき最小値［ノ］をとる。

[4] 四角形 ABCD において，$\mathrm{AB}=20$，$\mathrm{BC}=25$，$\mathrm{CD}=30$，$\mathrm{DA}=15$ で $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ ならば，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は［ハ］で $\mathrm{AC}=$［ヒ］となる。$\angle\mathrm{CDA}=\theta$ とおくと $\cos\theta=$［フ］であるから，$\sin\theta=$［ヘ］となり，$\triangle\mathrm{ACD}$ の面積は［ホ］となる。

解答例

［**1**］(1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したとき

x^2 の項は　$2x \times 4x + 1 \times 3x^2 = 11x^2$

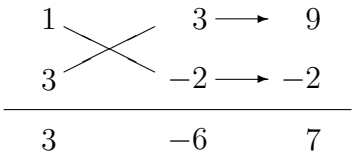
x の項は　$2x \times 2 + 1 \times 4x = 8x$

したがって，x^2 の係数は **11**，x の係数は **8** である。

(答) ア. 11　イ. 8

(2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると

$$\boldsymbol{(x+3)(3x-2)}$$



(答) ウ. エ. $x+3$，$3x-2$

(3) $y = 2x^2 - 4x + 5$ を変形すると　$y = 2(x-1)^2 + 3$

$y = 2x^2 - 8x + 13$ を変形すると　$y = 2(x-2)^2 + 5$

よって，頂点は $(1,\ 3)$ から $(2,\ 5)$ に移動する．

したがって，第 2 式は，第 1 式を

x 軸方向に　$p = 2 - 1 = \mathbf{1}$，　y 軸方向に　$q = 5 - 3 = \mathbf{2}$

だけ平行移動したものである．

(答) オ. 1　カ. 2

(4) $2 \leqq x \leqq 4$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$(x-2)(x-4) \leqq 0$　すなわち　$x^2 - 6x + 8 \leqq 0$

したがって，$x^2 + ax + b \leqq 0$ の係数と比較して　$a = \mathbf{-6}$，$b = \mathbf{8}$

(答) キ. -6　ク. 8

(5) $1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

$0° < \theta < 90°$ より　$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) ケ. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　コ. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

［2］(1) ［1］$x \geqq 2$ のとき $|x-2| = x-2$ であるから

不等式は $x - 3 + 2(x-2) < 0$

これを解いて $x < \dfrac{7}{3}$

$x \geqq 2$ に注意して $2 \leqq x < \dfrac{7}{3}$

［2］$x < 2$ のとき $x - 2 = -(x-2) = -x+2$ であるから

不等式は $x - 3 + 2(-x+2) < 0$

これを解いて $x > 1$

$x < 2$ に注意して $1 < x < 2$

したがって，求める解は $\boldsymbol{1 < x < \dfrac{7}{3}}$

【別解】 $x - 3 + 2|x-2| < 0$ から $|x-2| < \dfrac{3-x}{2}$

したがって $-\dfrac{3-x}{2} < x-2 < \dfrac{3-x}{2}$

$-\dfrac{3-x}{2} < x-2$ を解いて $x > 1$ $\cdots$①

$x - 2 < \dfrac{3-x}{2}$ を解いて $x < \dfrac{7}{3}$ $\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて $\boldsymbol{1 < x < \dfrac{7}{3}}$

(答) サ. 1　シ. $\dfrac{7}{3}$

(2) x 軸と 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$y = a(x-1)(x-3)$

の形で表される．このグラフが点 $(0,\ 6)$ を通るから

$6 = a\cdot(-1)\cdot(-3)$　ゆえに　$a = 2$

よって　$y = 2(x-1)(x-3)$　すなわち　$y = \boldsymbol{2x^2 - 8x + 6}$

また，$2x^2 - 8x + 6 = 2(x-2)^2 - 2$ であるから，頂点の座標は $\boldsymbol{(2, -2)}$

(答) ス. $2x^2 - 8x + 6$　セ. $(2, -2)$

(3) $y = -3x^2 + 12x - 4$ を変形すると

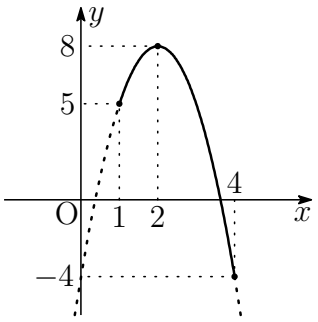
$y = -3(x-2)^2 + 8$

$1 \leqq x \leqq 4$ は，右の図の実線部分である．

よって，y は

$x = 2$ で最大値 $\boldsymbol{8}$ をとり，

$x = 4$ で最小値 $\boldsymbol{-4}$ をとる．



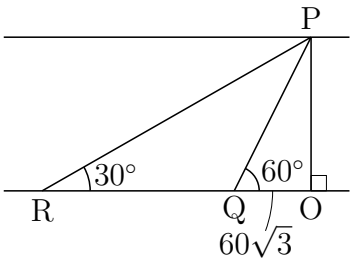
(答) ソ. 8　タ. -4

(4) △OPQ において

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}\tan 60^\circ$$
$$= 60\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \mathbf{180}\ (\mathrm{m})$$

△OPR において

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OP}\tan\angle\mathrm{OPR}$$
$$= 180\tan 60^\circ = \mathbf{180\sqrt{3}}\ (\mathrm{m})$$



(答) チ. 180　ツ. $180\sqrt{3}$

(5) $C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = \mathbf{120^\circ}$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

よって　$\mathrm{AB}\sin 45^\circ = 3\sqrt{2}\sin 120^\circ$

$$\mathrm{AB} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　$\mathrm{AB} = \mathbf{3\sqrt{3}}$

(答) テ. 120　ト. $3\sqrt{3}$

[3] $y = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$ であるから，与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は $x = \dfrac{3}{2}$ である．$a \leqq x \leqq a+1$ の中央は　$x = \dfrac{2a+1}{2}$

[1] $\dfrac{2a+1}{2} < \dfrac{3}{2}$　すなわち　$a < 1$ のとき

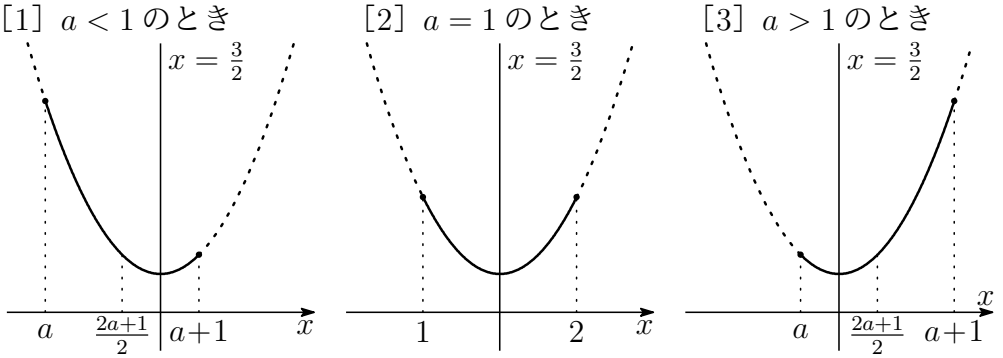
$x = a$ で最大値をとるから　$b = a^2 - 3a + 4$

[2] $\dfrac{2a+1}{2} = \dfrac{3}{2}$　すなわち　$a = 1$ のとき

$x = 1,\ 2$ で最大値をとるから　$b = 2$

[3] $\dfrac{3}{2} < \dfrac{2a+1}{2}$　すなわち　$a > 1$ のとき

$x = a+1$ で最大値をとるから　$b = (a+1)^2 - 3(a+1) + 4 = a^2 - a + 2$



したがって，$a \leqq 1$ のとき

$$b = \boldsymbol{a^2 - 3a + 4}$$

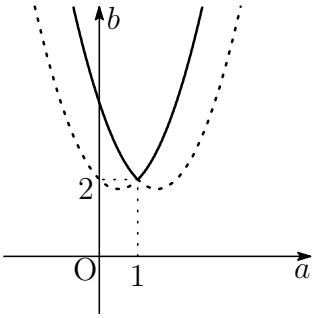
a がそれ以外の範囲にあるとき

$$b = \boldsymbol{a^2 - a + 2}$$

である．

また，グラフは右の図の実線部分である．

よって，b は，$a = \mathbf{1}$ のとき最小値 $\mathbf{2}$ をとる．

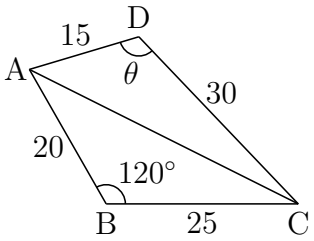


［4］△ABC の面積は

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 25\sin 120^\circ = \boldsymbol{125\sqrt{3}}$$

△ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B \\ &= 20^2 + 25^2 - 2\cdot 20\cdot 25\cos 120^\circ \\ &= 1525\end{aligned}$$



$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathrm{AC} = \sqrt{1525} = \boldsymbol{5\sqrt{61}}$

△ACD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}} \\ &= \frac{30^2 + 15^2 - 1525}{2\cdot 30\cdot 15} = \boldsymbol{-\frac{4}{9}}\end{aligned}$$

$\sin\theta > 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{9}}$

したがって，△ACD の面積は

$$\triangle \mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{65}}{9} = \boldsymbol{25\sqrt{65}}$$

(答) ハ. $125\sqrt{3}$　ヒ. $5\sqrt{61}$　フ. $-\frac{4}{9}$　ヘ. $\frac{\sqrt{65}}{9}$　ホ. $25\sqrt{65}$

9.38　平成 20 年度推薦後期試験 (90 分)

［1］(1) $(2x-3y)(x-y)(3x-2y)$ を展開すると $\boxed{\text{ア}}x^3-\boxed{\text{ア}}y^3-\boxed{\text{イ}}x^2y+\boxed{\text{イ}}xy^2$ である。

(2) 放物線 $y=2x^2-12x+22$ を平行移動して放物線 $y=2x^2+4x-3$ と重ねるためには x 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動すればよい。

(3) 2 次関数 $y=a(x-2)^2+b$ $(a<0)$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 3 で最小値が 1 であるならば $a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 連立 2 次不等式 $\begin{cases} x^2-4x+3 \leqq 0 \\ x^2-2x-1 \leqq 0 \end{cases}$ の解は $\boxed{\text{キ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta=\boxed{\text{ケ}}$，$\tan\theta=\boxed{\text{コ}}$ である。

［2］(1) $x^2+3xy+2y^2+2x+y-3$ を因数分解すると，$\left(\boxed{\text{サ}}\right)\times\left(\boxed{\text{シ}}\right)$ である。

(2) 2 次関数 $y=x^2-4x+a$ の定義域が $0 \leqq x \leqq 3$ で，その最大値と最小値の和が -2 であるとき，$a=\boxed{\text{ス}}$，最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0$ は $a=\boxed{\text{ソ}}$ のとき，ただ 1 つの実数解を持つ。また，すべての解が 3 より小さいのは $a>\boxed{\text{タ}}$ のときである。

(4) 長さ 3 のひもを長方形の形にしたときの短辺の長さを a，長辺の長さを b とすると，$a+b=\boxed{\text{チ}}$ である。このとき，長方形の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以下であるなら，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $a=\cos 10^\circ$，$b=\sin 20^\circ$ を用いると
$\sin 160^\circ+\cos 170^\circ=\boxed{\text{テ}}$，　$\sin 80^\circ+\cos 110^\circ=\boxed{\text{ト}}$　と表される。

［3］O を原点，放物線 $y=-\sqrt{3}(4x^2-1)$ の頂点の座標を P とすると，PO の長さは $\boxed{\text{ナ}}$ である。x 軸上の 2 点 A，B を △PAB が正三角形となるようにとるとき，辺 AB の長さは $\boxed{\text{ニ}}$ である。次に放物線上の点 Q と x 軸上の点 C，D を △QCD が正三角形となるようにとる。Q の x 座標を a $\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$ とすると，辺 CD の長さは a を用いて $\boxed{\text{ヌ}}$ と表せる。したがって，CD の長さが AB の長さの $\dfrac{1}{2}$ となるのは，$a=\boxed{\text{ネ}}$ のときである。

［4］面積が 24 である △ABC の辺 AB，BC，CA 上にそれぞれ D，E，F を AD : DB = 1 : 3，BE : EC = 1 : 1，CF : FA = 2 : 1 となるようにとる。このとき △ADF，△BED，△CFE の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，$S_1=\boxed{\text{ノ}}$，$S_2=\boxed{\text{ハ}}$，$S_3=\boxed{\text{ヒ}}$ である。また，△DEF の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

［**1**］(1) $(2x-3y)(x-y)(3x-2y)$
$=(x-y)\times(2x-3y)(3x-2y)$
$=(x-y)(6x^2-13xy+6y^2)$
$=x(6x^2-13xy+6y^2)-y(6x^2-13xy+6y^2)$
$=\mathbf{6}x^3-\mathbf{6}y^3-\mathbf{19}x^2y+\mathbf{19}xy^2$

(答) ア. 6　イ. 19

(2) $y=2x^2-12x+22$ を変形すると　$y=2(x-3)^2+4$
$y=2x^2+4x-3$ を変形すると　　$y=2(x+1)^2-5$
よって，頂点は $(3,\ 4)$ から $(-1,-5)$ に移動する．
したがって，第 2 式は，第 1 式を
　　x 軸方向に　$-1-3=\mathbf{-4}$，　y 軸方向に　$-5-4=\mathbf{-9}$
だけ平行移動したものである．

(答) ウ. -4　エ. -9

(3) $a<0$ であるから，$1\leqq x\leqq 4$ において，2 次関数 $y=a(x-2)^2+b$ は，$x=2$ で最大値 b，$x=4$ で最小値 $4a+b$ をとるので
$$b=\mathbf{3},\ 4a+b=1 \quad \text{ゆえに} \quad a=\mathbf{-\frac{1}{2}}$$

(答) オ. $-\dfrac{1}{2}$　カ. 3

(4) 第 1 式から　$(x-1)(x-3)\leqq 0$　ゆえに　$1\leqq x\leqq 3$　$\cdots$①
2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{2}$ であるから
第 2 式の解は　　$1-\sqrt{2}\leqq x\leqq 1+\sqrt{2}$　$\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて　$\mathbf{1}\leqq x\leqq \mathbf{1+\sqrt{2}}$

(答) キ. 1　ク. $1+\sqrt{2}$

(5) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$
$90^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より　$\cos\theta\leqq 0$ であるから
$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\mathbf{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$
また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\mathbf{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

(答) ケ. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　コ. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

［2］(1) x について整理して因数分解する．

$$
\begin{aligned}
&x^2+3xy+2y^2+2x+y-3\\
=&x^2+(3y+2)x+(2y^2+y-3)\\
=&x^2+(3y+2)x+(y-1)(2y+3)\\
=&\{x+(y-1)\}\{x+(2y+3)\}\\
=&\boldsymbol{(x+y-1)(x+2y+3)}
\end{aligned}
$$

1	$y-1$	$\longrightarrow$	$y-1$
1	$2y+3$	$\longrightarrow$	$2y+3$
1	$(y-1)(2y+3)$		$3y+2$

(答) サ．シ．$x+y-1$，$x+2y+3$

(2) $y=x^2-4x+a$ を変形して　$y=(x-2)^2+a-4$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，$x=2$ で最小値 $a-4$ をとり，$x=0$ で最大値 a をとる．最大値と最小値の和が -2 であるから

$$a+(a-4)=-2 \quad \text{これを解いて} \quad a=\mathbf{1}$$

したがって，最小値は　$a-4=1-4=\mathbf{-3}$

(答) ス．1　セ．-3

(3) 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0\cdots(*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=a^2-3(2a-3)=(a-3)^2 \quad \cdots①$$

$(*)$ がただ 1 つの実数解をもつとき，$D=0$ であるから　$a=\mathbf{3}$

$f(x)=3x^2+2ax+2a-3$ とおくと

$y=f(x)$ の軸の方程式は　$x=-\dfrac{a}{3}$

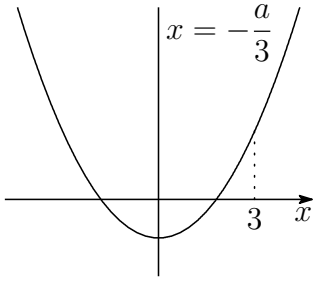
このとき　$-\dfrac{a}{3}<3$　ゆえに　$a>-9$　$\cdots②$

$f(3)>0$ であるから，$3\cdot3^2+2a\cdot3+2a-3>0$

これを解いて　$a>-3\cdots③$

① より，常に $D \geqq 0$ であるから

②，③ の共通範囲を求めて　$a>\mathbf{-3}$



(答) ソ．3　タ．-3

[別解] 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0$ の左辺を因数分解すると

$$(x+1)(3x+2a-3)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=-1,\ 1-\frac{2a}{3}$$

これらの解が 3 より小さいので

$$1-\frac{2a}{3}<3 \quad \text{これを解いて} \quad a>-3$$

(4) 周の長さから $2a+2b=3$ ゆえに $a+b=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

このとき，$0<a<b$，$b=\frac{3}{2}-a$ であるから $0<a<\frac{3}{4}$ $\cdots$①

長方形の面積が $\frac{1}{2}$ 以下であるから $ab \leqq \frac{1}{2}$

すなわち $a\left(\frac{3}{2}-a\right) \leqq \frac{1}{2}$

ゆえに $(a-1)(2a-1) \geqq 0$

① に注意して $0<a \leqq \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(答) チ. $\frac{3}{2}$ ツ. $\frac{1}{2}$

(5) $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ = b$，$\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ = -a$ であるから

$\sin 160^\circ + \cos 170^\circ = \boldsymbol{-a+b}$

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ = a$，$\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ = -\sin 20^\circ = -b$ であるから

$\sin 80^\circ + \cos 110^\circ = \boldsymbol{a-b}$

(答) テ. $-a+b$ ト. $a-b$

[3] 放物線の方程式は $y=-4\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}$

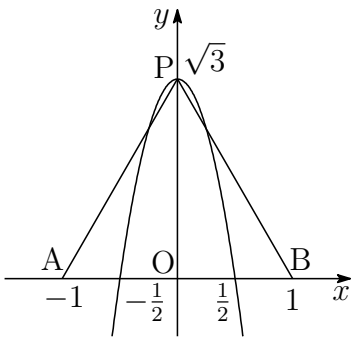
頂点 P の座標は $(0,\ \sqrt{3})$ であるから PO $=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

△PAB が正三角形であるから PA = PB

このとき，直角三角形 PAO と直角三角形 PBO は合同で，$\angle$PAO $=\angle$PBO $=60^\circ$ であるから

AO = BO $=1$ ゆえに AB $=\boldsymbol{2}$

$0<a<\frac{1}{2}$ であるから，Q は x 軸の上側の点であり，Q から x 軸に下ろした垂線の長さを h とすると $h=-\sqrt{3}(4a^2-1)$ $\cdots$①



△QCD と △PAB は合同であるから

$$\mathrm{CD} : h = \mathrm{AB} : \mathrm{PO} = 2 : \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{CD} = \frac{2}{\sqrt{3}}h \quad \cdots②$$

①，② より CD $=\boldsymbol{2(1-4a^2)}$

CD $=\frac{1}{2}$AB のとき $2(1-4a^2)=\frac{1}{2}\times 2$

$0<a<\frac{1}{2}$ に注意して $a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

(答) ナ. $\sqrt{3}$ ニ. 2 ヌ. $2(1-4a^2)$ ネ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

［**4**］BC $= a$，CA $= b$，AB $= c$ とおくと

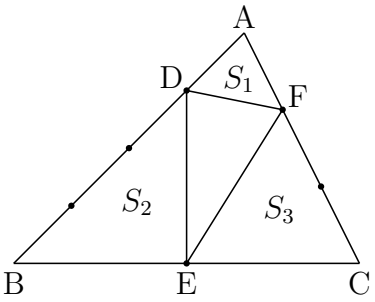
$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C = 24$$

であるから

$$\triangle\mathrm{ADF} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}c\times\frac{1}{3}b\sin A = \frac{1}{12}\times\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{12}\times 24 = \mathbf{2}$$
$$\triangle\mathrm{BED} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{4}c\times\frac{1}{2}a\sin B = \frac{3}{8}\times\frac{1}{2}ca\sin B = \frac{3}{8}\times 24 = \mathbf{9}$$
$$\triangle\mathrm{CFE} = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{2}{3}b\sin C = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{3}\times 24 = \mathbf{8}$$

したがって，△DEF の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DEF} &= 24 - (S_1 + S_2 + S_3)\\ &= 24 - (2 + 9 + 8) = \mathbf{5}\end{aligned}$$



(答) ノ．2　ハ．9　ヒ．8　フ．5

9.39 平成 20 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) $x = 2+\sqrt{3}$ のとき，x^2-4x+1 の値は［ア］である。このとき x^3-2x^2-7x+7 の値は［イ］である。

(2) 放物線 $C : y = -2x^2 - 2x + 2$ を平行移動して，x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるようにするためには，C を x 軸方向に［ウ］，y 軸方向に［エ］だけ平行移動すればよい。

(3) $x = 1 + 2i$ が方程式 $x^3 - 4x^2 + ax + b = 0$ の解であるとき，実数の係数 a，b の値は，$a =$［オ］，$b =$［カ］である。

(4) 方程式 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 + 3 = 0$ の解は $x =$［キ］, ［ク］である。

(5) △ABC において AB = 2，BC = $\sqrt{7}$，CA = 1 ならば，∠BAC =［ケ］$^\circ$ で △ABC の面積は［コ］である。

[2] (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 8$ が $(x-2)^2$ で割り切れるならば，$a =$［サ］で，$f(x) = 0$ の $x = 2$ 以外の解は $x =$［シ］である。

(2) x が $\log_2\left(\dfrac{1}{2} - 2^{x-1}\right) = 2x$ をみたすとき，$2^x =$［ス］であるから，$x =$［セ］である。

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ の解は $x =$［ソ］, ［タ］である。

(4) x，y が 3 つの不等式 $y - 2x \leqq 4$，$y \geqq x + 1$，$x \leqq 0$ を同時にみたすとき，$2y - x$ の最大値は［チ］，最小値は［ツ］となる。

(5) 関数 $y = x^3 - 2x$ のグラフと直線 $y = x + a$ の共有点の個数が 3 であるのは，a が［テ］$< a <$［ト］の範囲にあるときである。

[3] △ABC の重心を G とする。2 点 G，A を通る直線が $x - 2y + 1 = 0$，2 点 G，B を通る直線が $x + y + 4 = 0$ であるとき，点 G の座標は［ナ］である。さらに，点 C の座標が $(-3, -7)$ であるなら，点 A の座標は［ニ］，点 B の座標は［ヌ］である。2 点 A，B を通る直線と点 C の距離は［ネ］であるので，△ABC の面積は［ノ］である。

［4］原点 O から，x 軸の正方向とのなす角が θ の方向に投げられた質点の描く軌跡は，$m = \tan\theta$ とおくとき，放物線 $C : y = -\dfrac{1}{4}(1+m^2)x^2 + mx$ であるとする。ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$。このとき，$C$ と x 軸との，O 以外の交点 P の x 座標を $\sin 2\theta$ を用いて表すと［ ハ ］と書けるから，線分 OP の長さは $\theta =$［ ヒ ］のとき最大となる。また，C と線分 OP で囲まれる部分の面積 S は，m を用いて表すと［ フ ］，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表すと［ ヘ ］となるから，$\theta = \dfrac{\pi}{8}$ のときの S の値は［ ホ ］である。

解答例

［**1**］(1) $x - 2 = \sqrt{3}$ であるから

両辺を 2 乗して　　$(x-2)^2 = 3$

よって　　$x^2 - 4x + 1 = \mathbf{0}$

また，右の割り算から

$$x^3-2x^2-7x+7 = (x^2-4x+1)(x+2)+5$$

$$\begin{array}{r} x\quad +2 \\ \hline x^2-4x+1\,)\,x^3-2x^2-7x+7 \\ x^3-4x^2\quad +x \\ \hline 2x^2-8x+7 \\ 2x^2-8x+2 \\ \hline 5 \end{array}$$

これに上の結果を代入して

$$x^3 - 2x^2 - 7x + 7 = 0 \times (x+2) + 5 = \mathbf{5}$$

(答) ア. 0　イ. 5

(2) 放物線 $C : y = -2x^2 - 2x + 2$ を平行移動して，x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わる放物線を C' とすると，C' は x^2 の係数に注意して

$$y = -2(x+1)(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = -2x^2 + 2x + 4$$

C，C' をそれぞれ変形すると

$$C : y = -2x^2 - 2x + 2 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$$C' : y = -2x^2 + 2x + 4 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}$$

よって，頂点は点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$ から点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$ に移動する．ゆえに，C を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものが C' であれば，C，C' の頂点の座標から

$$-\frac{1}{2} + p = \frac{1}{2},\ \frac{5}{2} + q = \frac{9}{2} \qquad \text{よって} \qquad p = \mathbf{1},\ q = \mathbf{2}$$

(答) ウ. 1　エ. 2

(3) $1+2i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+2i)^3-4(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$$

整理して $\quad (a+b+1)+(2a-18)i=0$

a，b は実数であるから

$$a+b+1=0,\ 2a-18=0$$

これを解くと $\quad \boldsymbol{a=9,\ b=-10}$

(答) オ. 9　カ. -10

(4) 方程式を変形すると $\quad (\log_3 x)^2-4\log_3 x+3=0$
ゆえに $\quad (\log_3 x-1)(\log_3 x-3)=0$
したがって $\quad \log_3 x=1,\ 3$
よって $\quad x=3,\ 27$

(答) キ. ク 3, 27

(5) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot 1\cdot 2}=-\frac{1}{2}$$

したがって，$\cos A=-\dfrac{1}{2}$ を満たす A は $\quad \boldsymbol{A=120^\circ}$
よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin 120^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(答) ケ. 120　コ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

［**2**］(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+8$ は $(x-2)^2=x^2-4x+4$ で割り切れるので，$f(x)$ の x^3 の係数および定数項に注意して

$$x^3+ax^2+bx+8=(x^2-4x+4)(x+2) \quad \cdots ①$$

とかける．右辺を展開すると

$$x^3+ax^2+bx+8=x^3-2x^2-4x+8$$

x^2 の項を係数を比較して　$\boldsymbol{a=-2}$

① より $f(x)=(x-2)^2(x+2)$ であるから，$f(x)=0$ の $x=2$ 以外の解は

$$\boldsymbol{x=-2}$$

(答) サ. -2　シ. -2

(2) $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-2^{x-1}\right)=2x$ から　$\dfrac{1}{2}-2^{x-1}=2^{2x}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot 2^x=(2^x)^2$

$2^x=t$ とおくと $(t>0)$　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t=t^2$

整理して　$2t^2+t-1=0$

左辺を因数分解して　$(t+1)(2t-1)=0$

$t>0$ に注意して　$t=\dfrac{1}{2}$

したがって，$\boldsymbol{2^x=\dfrac{1}{2}}$ であるから　$\boldsymbol{x=-1}$

(答) ス. $\dfrac{1}{2}$　セ. -1

(3) 左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{2}$$

よって $\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \cdots ①$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{6} \leqq x+\frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

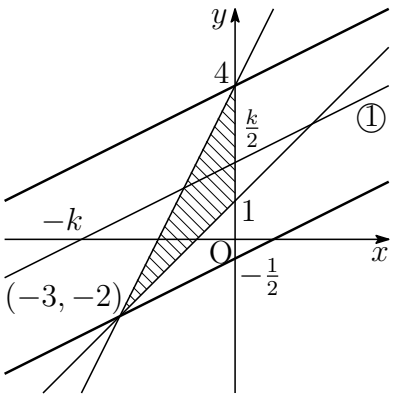
であるから，この範囲で ① を解くと

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi \quad \text{または} \quad x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{4}\pi$$

したがって $\quad \boldsymbol{x=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi}$

(答) ソ．タ．$\frac{13}{12}\pi$，$\frac{19}{12}\pi$

(4) 与えられた連立不等式の表す領域は 3 点 $(-3,-2)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする三角形の周および内部である．



$$2y-x=k \quad \cdots ①$$

とおくと，これは傾きが $\frac{1}{2}$，y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す．

図から，直線 ① が

点 $(0,\ 4)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ は最大

点 $(-3,-2)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ は最小

である．したがって，$2y-x$ は

$x=0$，$y=4$ のとき最大値 $\boldsymbol{8}$ をとり，

$x=-3$，$y=-2$ のとき最小値 $\boldsymbol{-1}$ をとる．

(答) チ．8　ツ．-1

(5) 与えられた関数のグラフと直線の共有点の個数は，方程式

$$x^3 - 2x = x + a \quad \text{すなわち} \quad x^3 - 3x = a$$

の実数解の個数である．

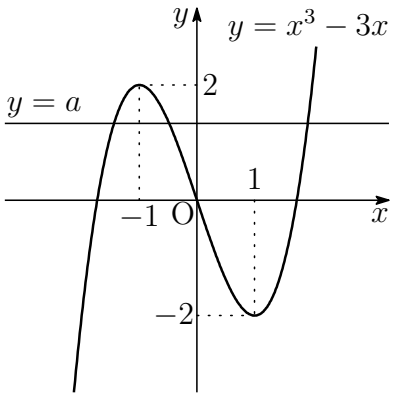
関数 $y = x^3 - 3x$ について

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 3x \\ &= 3x(x-1) \end{aligned}$$

y の増減表は，右のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 2	↘	極小 -2	↗

よって，$y = x^3 - 3x$ のグラフは，右の図のようになる．



求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-2 < a < 2}$$

(答) テ. -2　ト. 2

［**3**］2 点 G，A を通る直線を ① とし，2 点 G，B を通る直線を ② とすると，G は ① および ② 上の点であるから，G は連立方程式

$$\begin{cases} x-2y+1=0 & \cdots ① \\ x+y+4=0 & \cdots ② \end{cases}$$

の解であり，これを解いて　$\mathbf{G(-3,\,-1)}$

また，A，B の y 座標を，それぞれ s，t とすると，①，② から

$$\mathrm{A}(2s-1,\ s),\ \mathrm{B}(-t-4,\ t)$$

$\mathrm{C}(-3,\,-7)$ のとき，△ABC の重心が $\mathrm{G}(-3,\,-1)$ であることから

$$\frac{(2s-1)+(-t-4)+(-3)}{3}=-3,\quad \frac{s+t+(-7)}{3}=-1$$

整理して　　$2s-t=-1$，$s+t=4$

ゆえに　　$s=1$，$t=3$

よって　　$\mathbf{A(1,\ 1)}$，$\mathbf{B(-7,\ 3)}$

2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-7,\ 3)$ を通る直線 ℓ は

$$y-1=\frac{3-1}{-7-1}(x-1)\qquad \text{すなわち}\qquad x+4y-5=0$$

点 $\mathrm{C}(-3,\,-7)$ と直線 ℓ の距離 d は

$$d=\frac{|-3+4\cdot(-7)-5|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{\mathbf{36}}{\sqrt{\mathbf{17}}}$$

△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times d$$

であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-7-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{17}\times\frac{38}{\sqrt{17}}=\mathbf{36}$$

(答) ナ. $(-3,\,-1)$　ニ. $(1,\ 1)$　ヌ. $(-7,\ 3)$　ネ. $\dfrac{36}{\sqrt{17}}$　ノ. 36

［4］放物線 C は

$$y = -\frac{1+m^2}{4}x\left(x - \frac{4m}{1+m^2}\right)$$

であるから，C と x 軸との共有点で，O 以外の点 P の x 座標は　$\dfrac{4m}{1+m^2}$

これに $m = \tan\theta$ を代入して

$$\frac{4m}{1+m^2} = \frac{4\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{4\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \boldsymbol{2\sin 2\theta} \quad \cdots ①$$

よって，OP の長さ $2\sin 2\theta$ は，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ のとき最大となる．

また，C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{6}\left(-\frac{1+m^2}{4}\right)\left(\frac{4m}{1+m^2}-0\right)^3 \\ &= \frac{1}{24}(1+m^2)\left(\frac{4m}{1+m^2}\right)^3 \qquad \cdots ② \\ &= \frac{\boldsymbol{8m^3}}{\boldsymbol{3(1+m^2)^2}} \qquad \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで

$$1+m^2 = 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{2}{1+\cos 2\theta} \quad \cdots ④$$

であるから，①，④ を ② に代入して

$$S = \frac{1}{24}\times\frac{2}{1+\cos 2\theta}\times(2\sin 2\theta)^3 = \frac{\boldsymbol{2\sin^3 2\theta}}{\boldsymbol{3(1+\cos 2\theta)}} \quad \cdots ⑤$$

$\theta = \dfrac{\pi}{8}$ のとき，$2\theta = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，⑤ より

$$S = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{3(\sqrt{2}+1)} = \frac{\boldsymbol{\sqrt{2}-1}}{\boldsymbol{3}}$$

(答) ハ. $2\sin 2\theta$　ヒ. $\dfrac{\pi}{4}$　フ. $\dfrac{8m^3}{3(1+m^2)^2}$　ヘ. $\dfrac{2\sin^3 2\theta}{3(1+\cos 2\theta)}$　ホ. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$

9.40 平成 19 年度推薦試験 (90 分)

[1] (1) 1 個 240 円の菓子 A と 1 個 150 円の菓子 B がある。A，B あわせて 15 個を 3,000 円以内で買うとき，A は最大 ア 個買える。

(2) x^3+5x^2+8x+4 を因数分解すると，(イ) × (ウ)^2 である。

(3) $z=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，分母を有理化すると，$z=$ エ で $z+\dfrac{1}{z}=$ オ である。

(4) 点 $(1,-2)$ を通る放物線 $y=-x^2+ax+b$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動したとき，移動後の放物線は，点 $(-1,-2)$ を通る。このとき $a=$ カ，$b=$ キ である。

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ であるとき，$y=\cos^2\theta+\sin\theta$ の最大値は ク，最小値は ケ である。

[2] (1) $\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}$ (ただし, $1<a<2$) の根号をはずし，簡単にすると コ $a+$ サ となる。

(2) 2 次関数 $y=2x^2+4x-1$ の $-2 \leqq x \leqq 0$ における最小値は シ であり，この 2 次関数の表すグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフの表す 2 次関数の $-2 \leqq x \leqq 0$ における最小値は ス である。

(3) 2 次関数 $y=(a-2)x^2+2a^2x+b$ の値が正となる範囲が $-1<x<3$ であるならば，$a=$ セ，$b=$ ソ である。ただし，$a>0$ とする。

(4) △ABC において，AB $=\sqrt{3}-1$，BC $=2$，AC $=\sqrt{6}$ のとき，∠A $=$ タ$^\circ$，∠B $=$ チ$^\circ$ である。

(5) $4\sin^2\theta+6\tan^2\theta=3$ を満たし，$0^\circ<\theta<180^\circ$ の範囲にある θ は，$\theta=$ ツ$^\circ$, テ$^\circ$ である。

[3] $P=2x^2+12xy+21y^2+12y+14$ は，$(x,\ y)=$ ト で，最小値 ナ をとる。また，x，y を整数とするとき，$P=5$ を満たす x，y は，$(x,\ y)=$ ニ, ヌ である。

[4] 直径が 3 の円周上に 4 点 A，B，C，D が，時計の回る方向にこの順番に並んでいる。AB $=2$，∠DAB $=90^\circ$ であるとき，$\sin\angle$ADB $=$ ネ で，△ABD の面積は ノ である。さらに，CB $=\dfrac{3}{2}$ とすると，CA $=$ ハ で △ABC の面積は ヒ となる。

解答例

［**1**］(1) 菓子 A を x 個買うとすると，菓子 B は $(15-x)$ 個買うことになるから

$$240x+150(15-x) \leqq 3000$$

整理すると　　$90x \leqq 750$

よって　　$x \leqq \dfrac{25}{3}$

$\dfrac{25}{3}=8.3\cdots$ で，x は整数であるから　$x \leqq 8$

したがって，**A は最大 8 個買える。**

(答) ア. 8

(2) $P(x)=x^3+5x^2+8x+4$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3+5\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)+4=0$$

よって，$P(x)$ は $x+1$ を因数にもつ.

右の割り算から

$$x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x^2+4x+4)$$

したがって

$$x^3+5x^2+8x+4=\boldsymbol{(x+1)(x+2)^2}$$

$$\begin{array}{r|l} & x^2+4x+4 \\ \hline x+1 & x^3+5x^2+8x+4 \\ & x^3+x^2 \\ \hline & 4x^2+8x \\ & 4x^2+4x \\ \hline & 4x+4 \\ & 4x+4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

(答) イ. $x+1$　ウ. $x+2$

問題点

同校入試課に本問題は因数定理を用いるため，数学 II の問題ではないかと問い合わせたところ，$x^3+5x^2+8x+4=(x+a)(x+b)^2$ のように x の恒等式と考えて解く問題であるという回答があった．しかし，この解法も数学 II の「式と証明」で扱う内容であると説明したところ，今後問題作成には細心の注意を払うという回答を得た.

(3) $z=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}=\boldsymbol{5+2\sqrt{6}}$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})}{3-2}=\boldsymbol{10}$$

(答) エ. $5+2\sqrt{6}$　オ. 10

(4) 放物線 $y=-x^2+ax+b$ 上の点 $(p,\ q)$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した点を $(-1,-2)$ とすると

$$p-3=-1,\quad q+1=-2 \quad \text{ゆえに} \quad p=2,\quad q=-3$$

2 点 $(1,-2)$，$(2,-3)$ は放物線 $y=-x^2+ax+b$ 上の点であるから

$$-2=-1^2+a\cdot 1+b$$
$$-3=-2^2+a\cdot 2+b$$

式を整理すると

$$a+b=-1,\quad 2a+b=1$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

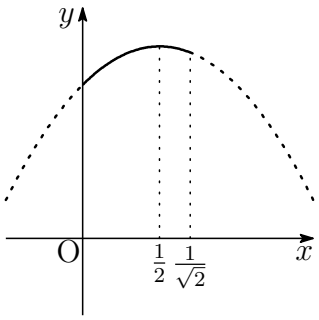
(答) カ. 2　キ. -3

(5) $\cos^2\theta+\sin\theta=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta$
$$=-\sin^2\theta+\sin\theta+1$$

$\sin\theta=x$ とおくと，$0^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ のとき
$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり

$$y=-x^2+x+1$$

すなわち　$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$



よって　$x=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\theta=30^\circ$ のとき　**最大値 $\dfrac{5}{4}$**
$x=0$　すなわち　$\theta=0^\circ$ のとき　**最小値 1**

(答) ク. $\dfrac{5}{4}$　ケ. 1

［**2**］(1) $\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}=\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a+1)^2}$
$=|\,a-2\,|-|\,a+1\,|$

$1<a<2$ のとき，$a-2<0$，$a+1>0$ であるから

$$|\,a-2\,|=-(a-2)=-a+2$$
$$|\,a+1\,|=a+1$$

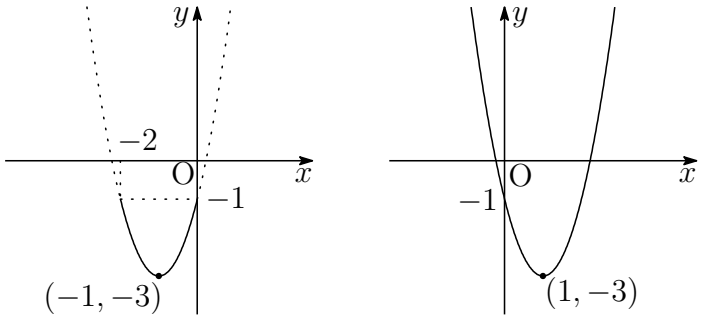
したがって　$|\,a-2\,|-|\,a+1\,|=-a+2-(a+1)=-2a+1$

よって　　$\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}=\boldsymbol{-2a+1}$

(答) コ. -2　サ. 1

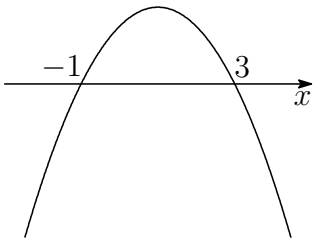
(2)　$y=2x^2+4x-1$
$=2(x+1)^2-3$

であるから，2 次関数 $y=2x^2+4x-1$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ は，
$x=-1$ で**最小値 -3** をとる (左図)．
この 2 次関数のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフ (右図) の表す 2 次関数の $-2\leqq x\leqq 0$ における最小値は，$x=0$ で**最小値 -1** をとる．



(答) シ. -3　ス. -1

(3) 条件から，2 次関数 $y=(a-2)x^2+2a^2x+b$ のグラフは，$-1<x<3$ のときだけ x 軸の上側にある．



すなわち，上に凸の放物線で 2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通るから

$$a-2<0$$
$$(a-2)\cdot(-1)^2+2a^2\cdot(-1)+b=0$$
$$(a-2)\cdot3^2+2a^2\cdot3+b=0$$

$a>0$ であるから，第 1 式より　$0<a<2$　$\cdots$①

第 2 式より　$b=2a^2-a+2$　$\cdots$②

第 3 式より　$b=-6a^2-9a+18$　$\cdots$③

②，③ から　$2a^2-a+2=-6a^2-9a+18$

整理して　$a^2+a-2=0$

すなわち　$(a-1)(a+2)=0$

① より　$\boldsymbol{a=1}$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{b=3}$

(答) セ. 1　ソ. 3

(4) $a=2$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}-1$

余弦定理により

$$\cos A=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{\angle A=45^\circ}$，$\boldsymbol{\angle B=120^\circ}$

(答) タ. 45°　チ. 120°

(5) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，与えられた式は

$$4\sin^2\theta + \frac{6\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 3$$

すなわち　$4\sin^2\theta\cos^2\theta + 6\sin^2\theta = 3\cos^2\theta$

$$4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) + 6\sin^2\theta = 3(1-\sin^2\theta)$$

整理して　$4\sin^4\theta - 13\sin^2\theta + 3 = 0$

よって　$(\sin^2\theta - 3)(4\sin^2\theta - 1) = 0$

$\sin^2\theta - 3 \neq 0$ であるから

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

さらに，$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $0 < \sin\theta \leqq 1$ であるから

$$\sin\theta = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta = 30^\circ,\ 150^\circ}$$

(答) ツ．テ. $30^\circ,\ 150^\circ$

［3］　$P = 2x^2 + 12xy + 21y^2 + 12y + 14$

$= 2(x^2 + 6xy) + 21y^2 + 12y + 14$

$= 2\{(x+3y)^2 - (3y)^2\} + 21y^2 + 12y + 14$

$= 2(x+3y)^2 + 3y^2 + 12y + 14$

$= 2(x+3y)^2 + 3(y^2 + 4y) + 14$

$= 2(x+3y)^2 + 3\{(y+2)^2 - 2^2\} + 14$

$= 2(x+3y)^2 + 3(y+2)^2 + 2$

P は

$$x + 3y = 0 \text{ かつ } y + 2 = 0$$

すなわち　$\boldsymbol{(x,\ y) = (6, -2)}$ **のとき，最小値 2 をとる．**

$P = 5$ のとき　$2(x+3y)^2 + 3(y+2)^2 = 3 \quad \cdots ①$

整数 x，y について，$2(x+3y)^2$ および $3(y+2)^2$ のとる値は，それぞれ

$$2(x+3y)^2 = 0,\ 2\cdot1,\ 2\cdot4,\ 2\cdot9, \cdots$$
$$3(y+2)^2 = 0,\ 3\cdot1,\ 3\cdot4,\ 3\cdot9, \cdots$$

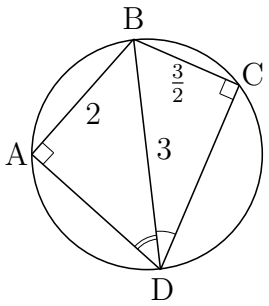
このとき，① を満たすものは　$2(x+3y)^2 = 0$ かつ $3(y+2)^2 = 3\cdot1$

すなわち　$x + 3y = 0,\ y + 2 = \pm1$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (3, -1),\ (9, -3)}$

(答) ト．$(6, -2)$　ナ．2　ニ．ヌ．$(3, -1),\ (9, -3)$

［**4**］$\angle \mathrm{DAB} = 90^\circ$ であるから　$\mathrm{BD} = 3$ (直径)



したがって　$\sin\angle \mathrm{ADB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

また　$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{BD}^2 - \mathrm{AB}^2}$

$= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

ゆえに　$\triangle \mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

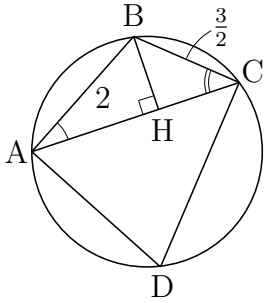
さらに　$\cos\angle \mathrm{BDA} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

BD は直径であるから，直角三角形 BCD において

$$\sin\angle \mathrm{BDC} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{3}{2} \div 3 = \frac{1}{2}$$

すなわち　$\angle \mathrm{BDC} = 30^\circ$

△ABC において，B から CA に垂線 BH を引く．



$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角により

$\angle \mathrm{BAH} = \angle \mathrm{BDC}$

ゆえに　$\angle \mathrm{BAH} = 30^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角により

$\angle \mathrm{BCH} = \angle \mathrm{BDA}$

ゆえに　$\cos\angle \mathrm{BCH} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって　$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\cos\angle \mathrm{BAH} = 2\cos 30^\circ = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\mathrm{CH} = \mathrm{BC}\cos\angle \mathrm{BCH} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

したがって　$\mathrm{CA} = \mathrm{AH} + \mathrm{CH} = \boldsymbol{\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

また　$\mathrm{BH} = \mathrm{AB}\sin\angle \mathrm{BAH} = 2\sin 30^\circ = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

よって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{BH} = \dfrac{1}{2} \times \left(\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \times 1 = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{4}}$

(答) ネ．$\dfrac{2}{3}$　ノ．$\sqrt{5}$　ハ．$\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　ヒ．$\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{4}$

9.41　平成 19 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) 整式 x^3+4x^2+3x+3 を，整式 $x+2$ で割ると，商が x^2+2x+a，余りが b であった。このとき，$a=$ ア，$b=$ イ である。

(2) 2 次関数 $y=2x^2+4x+3$ のグラフ C の頂点の座標は ウ であり，C を x 軸方向に エ，y 軸方向に オ だけ平行移動すれば $y=2x^2-2x+1$ のグラフと一致する。

(3) 3 次方程式 $x^3+x^2-ax-4=0$ の 1 つの解が $x=-2$ であるならば，$a=$ カ で，残りの解は $x=$ キ，ク である。

(4) $3\cos 2\theta+5\sin\theta+1=0$ が成り立つとき，$\sin\theta=$ ケ となるから，$-90^\circ<\theta<90^\circ$ とすると $\theta=$ コ $^\circ$ である。

(5) 関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が，$f'(1)=0$，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=-3$ を満たすとき，$a=$ サ，$b=$ シ である。

[2] (1) A$(0,\ 4)$，B$(4,\ 2)$ とする。このとき，A，B 間の距離は ス で，線分 AB の垂直二等分線は，$y=$ セ である。

(2) $b>0$ のとき，関数 $y=(2x-1)(x^2+bx+9)$ のグラフと x 軸との共有点の個数が 2 個ならば，$b=$ ソ である。このとき，この関数は タ $<x<$ チ の範囲で減少する。

(3) $0<x<\pi$，$\tan x=-2\sqrt{2}$ のとき，$\cos x=$ ツ，$\cos\dfrac{x}{2}=$ テ である。

(4) $3^{3x}-3^{2x+2}-3^x+9=0$ を満たす x は，$x=$ ト，ナ である。

(5) 2 曲線 $C_1: y=-2x^2+x+2$ と $C_2: y=x^2-2x-4$ の交点の x 座標は $x=$ ニ，ヌ であり，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は ネ である。

[3] 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(2,\ 3)$，C$(1,\ 5)$ について，点 A と直線 BC の距離は ノ である。また，△ABC の面積は ハ である。直線 BC に平行な直線 ℓ が，△ABC の面積を 2 等分するとき，点 A と直線 ℓ の距離は ヒ である。また，直線 ℓ と y 軸との交点の y 座標は フ である。

[4] 2 次曲線 $C: y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+x-6)$ 上の点 P$(-1,\ \sqrt{3})$ における C の接線と x 軸のなす角を θ とすると $\tan\theta=$ ヘ である。P を通り，x 軸とのなす角が $\theta+\dfrac{\pi}{6}$ である直線 ℓ の傾きは ホ であるから，ℓ の方程式は $y=$ マ である。また，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は ミ である。

解答例

［**1**］(1) 右の割り算から

$$\boldsymbol{a=-1,\ b=5}$$

$$\begin{array}{r} x^2\ +2x\ -1 \\ \hline x+2\,)\,x^3+4x^2+3x+3 \\ x^3+2x^2 \\ \hline 2x^2+3x \\ 2x^2+4x \\ \hline -x+3 \\ -x-2 \\ \hline 5 \end{array}$$

(別解) 与えられた条件から，等式

$$x^3+4x^2+3x+3=(x+2)(x^2+2x+a)+b$$

が成り立つ．右辺を整理すると

$$x^3+4x^2+3x+3=x^3+4x^2+(a+4)x+(2a+b)$$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$$3=a+4,\ 3=2a+b$$

これを解いて $\boldsymbol{a=-1,\ b=5}$

(答) ア. -1　イ. 5

(2) $y=2x^2+4x+3\cdots$① を変形すると　$y=2(x+1)^2+1$

ゆえに，① の頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1,-1)}$

$y=2x^2-2x+1\cdots$② を変形すると　$y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$

よって，頂点は点 $(-1,\ 1)$ から点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に移動する．ゆえに ① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して ② のグラフに一致するとすれば，①，② の頂点の座標から

$$-1+p=\frac{1}{2},\ 1+q=\frac{1}{2}$$

これを解いて　$p=\boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ q=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(答) ウ. $(-1,\ 1)$　エ. $\dfrac{3}{2}$　オ. $-\dfrac{1}{2}$

(3) $x=-2$ が，この方程式の解であるから

$$(-2)^3+(-2)^2-a\cdot(-2)-4=0$$

整理して　$2a-8=0$

ゆえに　$\boldsymbol{a=4}$

よって，方程式は

$$\begin{aligned} x^3+x^2-4x-4&=0\\ x^2(x+1)-4(x+1)&=0\\ (x+1)(x^2-4)&=0\\ (x+1)(x+2)(x-2)&=0 \end{aligned}$$

したがって，残りの解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

(答) カ. 4　キ. ク. $-1,\ 2$

(4) 左辺を変形すると　$3(1-2\sin^2\theta)+5\sin\theta+1=0$

整理すると　$6\sin^2\theta-5\sin\theta-4=0$

ゆえに　$(2\sin\theta+1)(3\sin\theta-4)=0$

$-90^\circ<\theta<90^\circ$ より $-1<\sin\theta<1$ であるから　$\boldsymbol{\sin\theta=-\dfrac{1}{2}}$

この範囲で解いて　$\boldsymbol{\theta=-30^\circ}$

(答) ケ. $-\dfrac{1}{2}$　コ. -30

(5) $f(x)$ を微分して　$f'(x)=2x+a$

$f'(1)=0$ より　$2\cdot1+a=0$

よって　$\boldsymbol{a=-2}$

$f(x)=x^2-2x+b$ であるから

条件より　$\displaystyle\int_0^3(x^2-2x+b)\,dx=-3$

$$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+bx\right]_0^3=-3$$

$$\frac{1}{3}\cdot3^3-3^2+b\cdot3=-3$$

整理して　$3b=-3$

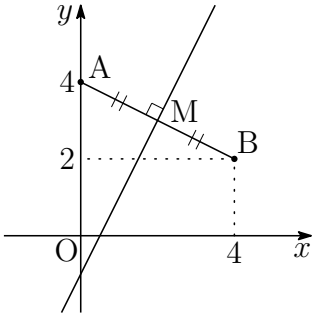
よって　$\boldsymbol{b=-1}$

(答) サ. -2　シ. -1

［2］ (1) A，B 間の距離は $\sqrt{(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

線分 AB の中点 M の座標は

$$\left(\frac{0+4}{2},\ \frac{4+2}{2}\right) \quad \text{より} \quad (2,\ 3)$$



線分 AB の傾きは $\dfrac{2-4}{4-0}=-\dfrac{1}{2}$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$$-\frac{1}{2}m=-1 \quad \text{ゆえに} \quad m=2$$

よって，求める直線の方程式は

$$y-3=2(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=2x-1}$$

(答) ス. $2\sqrt{5}$　セ. $2x-1$

(2) $y=(2x-1)(x^2+bx+9)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$x=\dfrac{1}{2}$ および 2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ の解である．このグラフと x 軸との共有点の個数が 2 個であるのは，次の［1］,［2］の場合である。

［1］2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ が $\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{2}$ 以外の解をもつ場合

$x=\dfrac{1}{2}$ がこの 2 次方程式の解であるから

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\cdot\frac{1}{2}+9=0 \quad \text{これを解いて} \quad b=-\frac{37}{2}$$

これは，$b>0$ に反するので不適．

［2］2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ が $\dfrac{1}{2}$ 以外の重解をもつ場合

$$D=b^2-4\cdot1\cdot9=0 \qquad b>0 \text{ より} \qquad \boldsymbol{b=6}$$

このとき，2 次方程式 $x^2+6x+9=0$ は，重解 $x=-3$ $\left(\neq\dfrac{1}{2}\right)$ をもつ．

よって　$y=(2x-1)(x^2+6x+9)$

$=2x^3+11x^2+12x-9$

微分して　$y'=6x^2+22x+12$

$=2(x+3)(3x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ -\dfrac{2}{3}$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

増減表は，右のとおりである．よって，$\boldsymbol{-3<x<-\dfrac{2}{3}}$ の範囲で減少する．

(答) ソ. 6　タ. -3　チ. $-\dfrac{2}{3}$

(3) $0 < x < \pi$，$\tan x = -2\sqrt{2} < 0$ より　$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$　$\cdots$①

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+(-2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9}$$

① より $\cos x < 0$ であるから　$\boldsymbol{\cos x = -\dfrac{1}{3}}$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

① より $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$\cos\dfrac{x}{2} > 0$

ゆえに　$\boldsymbol{\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(答) ツ. $-\dfrac{1}{3}$　テ. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $3^{3x} = (3^x)^3$，$3^{2x+2} = 3^{2x}\cdot 3^2 = 9\cdot(3^x)^2$ であるから，$3^x = t \cdots$① とおくと，方程式は

$$t^3 - 9t^2 - t + 9 = 0$$
$$t^2(t-9) - (t-9) = 0$$
$$(t-9)(t^2-1) = 0$$
$$(t-9)(t+1)(t-1) = 0$$

① より $t > 0$ であるから　$t = 9,\ 1$

ゆえに　$3^x = 9$ を解いて　$x = 2$

　　$3^x = 1$ を解いて　$x = 0$

よって，求める解は　$\boldsymbol{x = 2,\ 0}$

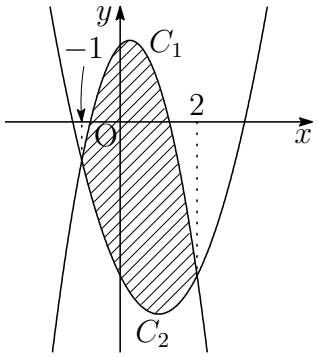
(答) ト. ナ. $2,\ 0$

(5) 2 つの放物線の共有点の x 座標は，方程式

$$-2x^2+x+2=x^2-2x-4$$

を解いて　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

右の図から，求める図形の面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}\{(-2x^2+x+2)-(x^2-2x-4)\}\,dx\\&=-3\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx\\&=-3\times\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{27}{2}}\end{aligned}$$

(答) ニ．ヌ．$-1,\ 2$　ネ．$\dfrac{27}{2}$

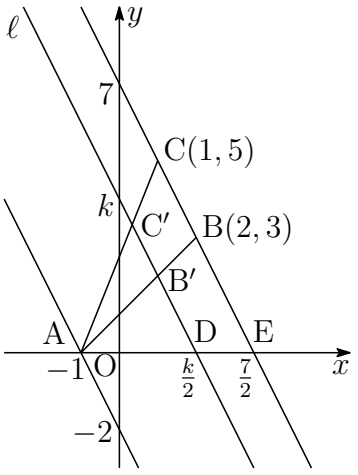
[3] 2 点 B$(2,\ 3)$，C$(1,\ 5)$ を通る直線の方程式は

$$y-3=\frac{5-3}{1-2}(x-2)$$

ゆえに　$2x+y-7=0$

点 A と直線 BC の距離 d は

$$d=\frac{|\,2\cdot(-1)+0-7\,|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\boldsymbol{\frac{9}{\sqrt{5}}}$$



また　$\mathrm{BC}=\sqrt{(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

ℓ と AB，AC の交点をそれぞれ B′，C′ とする．

$\triangle\mathrm{AB'C'}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積比が $1:2$ であるから，相似比は $1:\sqrt{2}$

ゆえに，点 A と直線 ℓ の距離は　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{9}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{9}{\sqrt{10}}}$

直線 ℓ の y 切片を k とすると，その方程式は　$y=-2x+k$

ℓ，直線 BC の x 軸との交点をそれぞれ，D，E とすると，D，E の x 座標は，それぞれ $\dfrac{k}{2}$，$\dfrac{7}{2}$ である．このとき，$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AE}$ であるから

$$\frac{k}{2}-(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{7}{2}-(-1)\right\}\quad\text{ゆえに}\quad k=\boldsymbol{\frac{9}{2}\sqrt{2}-2}$$

(答) ノ．$\dfrac{9}{\sqrt{5}}$　ハ．$\dfrac{9}{2}$　ヒ．$\dfrac{9}{\sqrt{10}}$　フ．$\dfrac{9}{2}\sqrt{2}-2$

［4］ $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+x-6)$ を微分して　$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(2x+1)$

P における接線の傾き $\tan\theta$ は

$x=-1$ のとき　$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\{2\cdot(-1)+1\}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　ゆえに　$\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$

ℓ の傾きは　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}}$

したがって，ℓ の方程式は

$$y-\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{5}\{x-(-1)\}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=\frac{3\sqrt{3}}{5}x+\frac{8\sqrt{3}}{5}}\quad \cdots①$$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は，① に $y=0$ を代入して　$\boldsymbol{x=-\dfrac{8}{3}}$

(答) へ．$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　ホ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$　マ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}x+\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$　ミ．$-\dfrac{8}{3}$

9.42 平成 18 年度推薦試験 (90 分)

[1] (1) $x=\dfrac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ の分母を有理化すると $x=$ ア となる。このとき, x^2+2x+1 の値は イ である。

(2) $2x^2-xy-y^2+3x+1=0$ を満たす y を x で表すと $y=$ ウ , エ である。

(3) 関数 $y=-3x^2+6x+a$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値が 7 であるとする。このとき, $a=$ オ であり, $0 \leqq x \leqq 3$ における y の最小値は カ となる。

(4) 関数 $y=|2x-1|$ の定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ であるならば値域は キ $\leqq y \leqq$ ク である。

(5) $0^\circ<\theta<90^\circ$ で, $\tan\theta=2$ のとき, $\sin\theta=$ ケ , $\cos\theta=$ コ である。

[2] (1) すべての x に対して, $-2x^2+(a+3)x+\dfrac{a}{2}<0$ であるならば, サ $<a<$ シ である。

(2) 2 次関数 $y=x^2$ の表すグラフを x 軸方向に ス , y 軸方向に セ だけ平行移動した曲線の式は, $y=x^2+4x-2$ となる。

(3) 3 点 $(1,\ 1)$, $\left(\dfrac{1}{2},-2\right)$, $(-2,\ 3)$ を通る 2 次関数は, $y=$ ソ x^2+ タ $x+$ チ である。

(4) $0^\circ<\theta<180^\circ$ で, $2\sin^2\theta-3\sqrt{3}\cos(90^\circ-\theta)+3=0$ が成り立つとき, $\theta=$ ツ $^\circ$ または $\theta=$ テ $^\circ$ である。

(5) $\triangle$ABC において, AB $=10$, BC $=5$, $\angle$B $=60^\circ$ のとき, AC $=$ ト , $\angle$A $=$ ナ $^\circ$ である。

[3] 不等式 $|x+1| \geqq 2|x|$ を満たす x の値の範囲は ニ $\leqq x \leqq$ ヌ である。この範囲の x に対して, $y=3x^2+4x-1$ の最小値は ネ , 最大値は ノ である。

［4］2 点 A$(a,\ 0)$, B$(b,\ 0)$ を通る放物線 $C : y = 2(x-a)(x-b)$ を考える。ただし, $a < b$ とする。A, B の中点を M とし, 2 点 A, M を通る放物線の頂点 P が C 上にあるとするとき, P の座標を a, b を用いて表すと, (ハ , ヒ) となる。2 点 M, B を通り, C 上に頂点をもつ放物線の頂点 Q は, P を x 軸方向に フ だけ平行移動した点であるから, Q の座標は a, b を用いて, (ヘ , ホ) と書ける。さらに, $\angle \mathrm{PMQ} = 90^\circ$ とすると, $b - a =$ マ となる。

［5］円に内接する四角形 ABCD において, AB = 4, BC = 4, CD = 1, DA = 5 のとき, $\angle \mathrm{A} =$ ミ °, $\angle \mathrm{C} =$ ム °, BD = メ である。また, この四角形の面積は モ である。

解答例

［1］(1) $x = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \dfrac{(4+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$

$$= \frac{4\times 2 + 4\times(-\sqrt{2}) + \sqrt{2}\times 2 + \sqrt{2}\times(-\sqrt{2})}{2^2 - (\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{8 - 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 2}{4-2} = \frac{6-2\sqrt{2}}{2} = \boldsymbol{3-\sqrt{2}}$$

また

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= (x+1)^2 = \{(3-\sqrt{2})+1\}^2 \\ &= (4-\sqrt{2})^2 \\ &= 4^2 - 2\cdot 4\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = \boldsymbol{18 - 8\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(答) ア. $3-\sqrt{2}$　イ. $18-8\sqrt{2}$

(2) 左辺を因数分解すると (x について整理)

$$\begin{aligned} & 2x^2 - xy - y^2 + 3x + 1 \\ =\ & 2x^2 + (-y+3)x - (y^2-1) \\ =\ & 2x^2 + (-y+3)x - (y+1)(y-1) \\ =\ & \{x-(y-1)\}\{2x+(y+1)\} \\ =\ & (x-y+1)(2x+y+1) \end{aligned}$$

1	╲	$-(y-1)$	$\longrightarrow\ -2y+2$
2	╱	$y+1$	$\longrightarrow\ y+1$
2		$-(y+1)(y-1)$	$-y+3$

したがって, $(x-y+1)(2x+y+1) = 0$ から

$$x - y + 1 = 0 \quad \text{または} \quad 2x + y + 1 = 0$$

これを y について解いて　$\boldsymbol{y = x+1,\ -2x-1}$

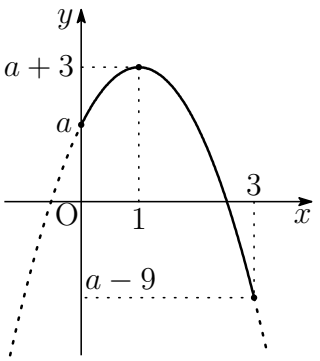
(答) ウ. エ. $x+1$, $-2x-1$

(3) $-3x^2+6x+a=-3(x^2-2x)+a$
$=-3\{(x-1)^2-1^2\}+a$
$=-3(x-1)^2+a+3$

よって $y=-3(x-1)^2+a+3$

$0 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは右の図の実線部分である. よって, y は

$x=1$ で最大値 $a+3$ をとり,
$x=3$ で最小値 $a-9$ をとる.



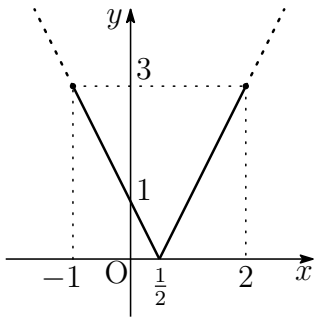
したがって $a+3=7$ を解いて $\boldsymbol{a=4}$
このとき, 最小値は $4-9=\boldsymbol{-5}$
(答) オ. 4 カ. -5

(4) $|2x-1|=\begin{cases} 2x-1 & (x \geqq \frac{1}{2}) \\ -(2x-1) & (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$ であるから

$-1 \leqq x \leqq 2$ での $y=|2x-1|$ のグラフは右の図の実線部分である. よって, 値域は

$$\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 3}$$

(答) キ. 0 ク. 3



(5) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+2^2}=\frac{1}{5}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より $\cos\theta>0$ である.

よって $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

また $\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=2\times\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) ケ. $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ コ. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

［**2**］(1)　$-2x^2+(a+3)x+\dfrac{a}{2}$ の x^2 の係数は負であり, すべての x に対して,
$-2x^2+(a+3)x+\dfrac{a}{2}<0$ であるためには, $D<0$ を満たせばよいから

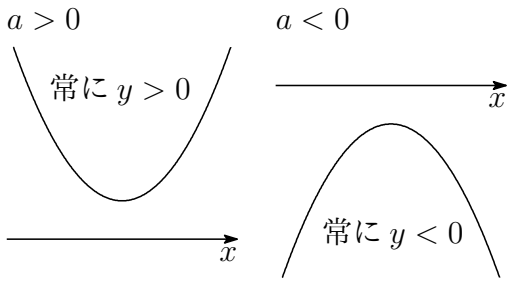
$$\begin{aligned}(a+3)^2-4\cdot(-2)\cdot\frac{a}{2}&<0\\ a^2+10a+9&<0\\ (a+1)(a+9)&<0\\ \boldsymbol{-9<a<-1}&\end{aligned}$$

(答) サ. -9　シ. -1

研究

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ は, $D<0$ のとき x 軸との共有点は存在しないことから, y の値は定符号となる. このとき a の符号により

$$\begin{aligned}a>0,\ D<0 &\iff \text{常に } y>0\\ a<0,\ D<0 &\iff \text{常に } y<0\end{aligned}$$



2 次式の定符号

$$\begin{aligned}\text{常に } ax^2+bx+c>0 &\iff a>0,\ D<0\\ \text{常に } ax^2+bx+c<0 &\iff a<0,\ D<0\end{aligned}$$

［補足］
$$\begin{aligned}\text{常に } ax^2+bx+c\geqq 0 &\iff a>0,\ D\leqq 0\\ \text{常に } ax^2+bx+c\leqq 0 &\iff a<0,\ D\leqq 0\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} x^2+4x-2 &= (x+2)^2-2^2-2 \\ &= (x+2)^2-6 \end{aligned}$$

よって, $y=x^2$ の頂点は $(0,0)$, $y=x^2+4x-2$ の頂点は $(-2,-6)$ であるから, $y=x^2$ を $\boldsymbol{x}$ **軸方向に** $\boldsymbol{-2}$, $\boldsymbol{y}$ **軸方向に** $\boldsymbol{-6}$ だけ平行移動したものが $y=x^2+4x-2$ である**.**

(答) ス. -2　セ. -6

(3) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする**.**

グラフが 3 点 $(1,1)$, $\left(\dfrac{1}{2},-2\right)$, $(-2,3)$ を通るから

$$\begin{aligned} 1 &= a+b+c && \cdots ① \\ -2 &= \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c && \cdots ② \\ 3 &= 4a-2b+c && \cdots ③ \end{aligned}$$

③ − ① から　$3a-3b=2$　$\cdots ④$

① − ② から　$\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{2}b=3$　すなわち　$3a+2b=12$　$\cdots ⑤$

④, ⑤ を解くと　$a=\dfrac{8}{3}$, $b=2$

これらを ① に代入して　$c=-\dfrac{11}{3}$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=\dfrac{8}{3}x^2+2x-\dfrac{11}{3}}$

(答) ソ. $\dfrac{8}{3}$　タ. 2　チ. $-\dfrac{11}{3}$

(4) 方程式を変形すると　$2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$

因数分解すると　　$(\sin\theta - \sqrt{3})(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

$0° < \theta < 180°$ より　$0 < \sin\theta < 1$ であるから　　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

この範囲で $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと　　$\boldsymbol{\theta = 60°,\ 120°}$

(答) ツ. テ. 60, 120

［別解］$2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$ を解の公式に適用すると

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{-(-3\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 - 4\cdot2\cdot3}}{2\cdot2} \\ &= \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4},\ \frac{2\sqrt{3}}{4} \\ &= \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0 < \sin\theta < 1$ に注意して　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= 10^2 + 5^2 - 2\cdot10\cdot5\cos60° \\ &= 100 + 25 - 2\cdot10\cdot5\cdot\frac{1}{2} \\ &= 75\end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathrm{AC} = \sqrt{75} = \boldsymbol{5\sqrt{3}}$

正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin A} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sin60°}$

よって　　$\sin A = \dfrac{5}{5\sqrt{3}}\sin60° = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$

$A + C = 120°$ より　$A < 120°$ であるから　$\boldsymbol{A = 30°}$

(答) ト. $5\sqrt{3}$　ナ. 30

[3] $|x+1| = \begin{cases} x+1 & (x \geqq -1) \\ -x-1 & (x < -1) \end{cases}$, $|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ であるから

$\underline{x < -1 \text{ のとき}}$

$-x-1 \geqq 2(-x)$ を解いて $x \geqq 1$

このとき $x \geqq 1$ は不適.

$\underline{-1 \leqq x < 0 \text{ のとき}}$

$x+1 \geqq 2(-x)$ を解いて $x \geqq -\dfrac{1}{3}$

このときの x の値の範囲は $-\dfrac{1}{3} \leqq x < 0$ $\cdots$①

$\underline{x \geqq 0 \text{ のとき}}$

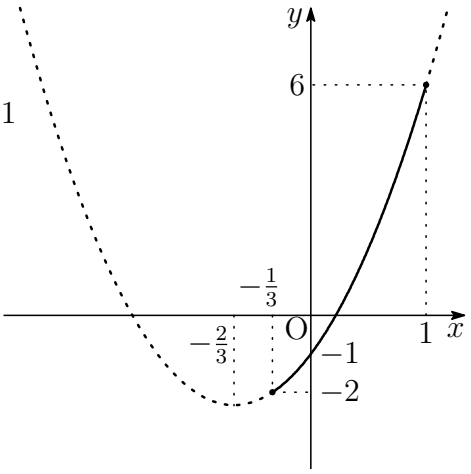
$x+1 \geqq 2x$ を解いて $x \leqq 1$

このときの x の値の範囲は $0 \leqq x \leqq 1$ $\cdots$②

①, ② より，求める x の値の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1}$

$$\begin{aligned} 3x^2+4x-1 &= 3\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)-1 \\ &= 3\left\{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-1 \\ &= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1 \\ &= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3} \end{aligned}$$

よって $y = 3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$



$-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ でのグラフは右の図の実線部分である. よって, y は

$x = -\dfrac{1}{3}$ で**最小値 −2** をとり,

$x = 1$ で**最大値 6** をとる.

(答) ニ. $-\frac{1}{3}$　ヌ. 1　ネ. −2　ノ. 6

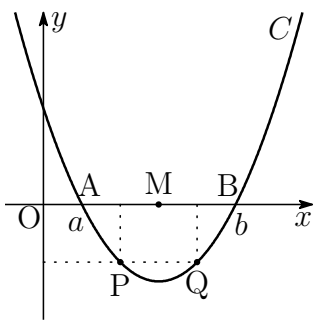
［**4**］M は A, B の中点であるから, M の x 座標は

$$x = \frac{a+b}{2}$$

2 点 A, M を通る放物線の軸は, A, M の中点を通るから P の x 座標は

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a+b}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{3a+b}{4}}$$

であり, P の y 座標は



$$\begin{aligned} y &= 2\left(\frac{3a+b}{4} - a\right)\left(\frac{3a+b}{4} - b\right) \\ &= 2 \times \frac{b-a}{4} \times \frac{3a-3b}{4} = \boldsymbol{-\frac{3}{8}(b-a)^2} \end{aligned}$$

P と Q は放物線 C の軸 $x = \dfrac{a+b}{2}$ に関して対称であり, $\mathrm{PQ} = \dfrac{1}{2} \times \mathrm{AB}$ であるから, Q は P を x 軸方向に $\boldsymbol{\dfrac{b-a}{2}}$ だけ平行移動したものである.

したがって, Q の座標は

$$\left(\frac{3a+b}{4} + \frac{b-a}{2},\ -\frac{3}{8}(b-a)^2\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\boldsymbol{\frac{a+3b}{4}},\ \boldsymbol{-\frac{3}{8}(b-a)^2}\right)$$

$\angle \mathrm{PMQ} = 90^\circ$ のとき, A, M の中点を R とするとき，△RPM は直角二等辺三角形であるから $\mathrm{PR} = \mathrm{RM}$ より

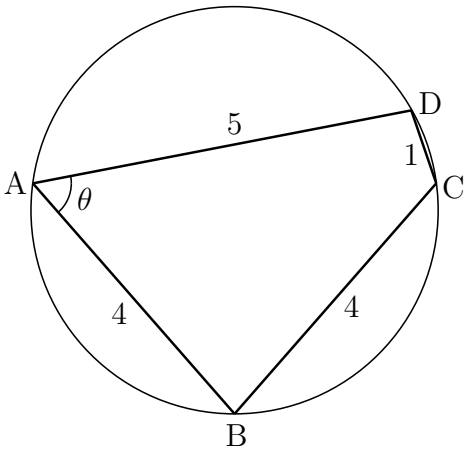
$$\frac{3}{8}(b-a)^2 = \frac{b-a}{4}$$

$b - a \neq 0$ であるから　$\boldsymbol{b-a = \frac{2}{3}}$

(答)　ハ. $\dfrac{3a+b}{4}$　ヒ. $-\dfrac{3}{8}(b-a)^2$　フ. $\dfrac{b-a}{2}$

へ. $\dfrac{a+3b}{4}$　ホ. $-\dfrac{3}{8}(b-a)^2$　マ. $\dfrac{2}{3}$

[5] $\angle A = \theta$ とする.



△ABD において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cos\theta \\ &= 41 - 40\cos\theta \end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle C = 180^\circ - \theta$$

△BCD において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 1^2 - 2\cdot 4\cdot 1\cos(180^\circ - \theta) \\ &= 17 - 8(-\cos\theta) \\ &= 17 + 8\cos\theta \end{aligned}$$

よって　$41 - 40\cos\theta = 17 + 8\cos\theta$　これを解いて　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

また　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta = 60^\circ$

したがって　$\angle A = \mathbf{60^\circ}$,　$\angle C = 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$

このとき　$BD^2 = 21$ となるから　$\mathbf{BD = \sqrt{21}}$

四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\sin 120^\circ \\ &= 10\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = \mathbf{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(答) ミ. 60　ム. 120　メ. $\sqrt{21}$　モ. $6\sqrt{3}$

9.43　平成 18 年度一般試験 (90 分)

[1] (1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解を α, β とし, $\alpha+1$, $\beta+1$ を解とする 2 次方程式を $x^2+x-4=0$ とする。このとき $a=$ ア, $b=$ イ である。

(2) 円 $(x-1)^2+y^2=5$ と直線 $y=x+k$ が 2 点で交わるとき, k の値の範囲は ウ $<k<$ エ である。

(3) $180^\circ<\theta<270^\circ$, $\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ であるとき, $\sin 2\theta=$ オ, $\cos 2\theta=$ カ である。

(4) $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ を用いると, 2^{20} は キ 桁, 3^{10} は ク 桁の数である。

(5) 曲線 $y=2x^3-3x^2-12x-a$ と x 軸との交点の数は, $a=5$ のとき ケ 個, $a=8$ のとき コ 個である。

[2] (1) 直線 $\ell: y=2x+3$ と点 $(1,\ 5)$ で接する半径 $\sqrt{5}$ の円で，ℓ の下方にある円の中心の座標は (サ, シ) である。

(2) x, y が 4 つの不等式 $x+2y\leqq 3$, $3x+y\leqq 4$, $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ を同時に満たすとき, $2x+3y$ は $x=$ ス, $y=$ セ で最大値 ソ をとる。

(3) 不等式 $\log_2(2x+3)\leqq\log_4(-4x-3)$ を満たす x の範囲は タ $<x\leqq$ チ である。

(4) $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ の範囲で $2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta$ が最大となるのは, $\theta=$ ツ $^\circ$ のときで, 最大値は テ である。

[3] 放物線 $C: y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(3,-2)$ における C の接線をそれぞれ ℓ, m とする。ℓ, m の交点の座標が $(2,\ 1)$ であるとき, $a=$ ト, $b=$ ナ, $c=$ ニ である。このとき, C と ℓ, m で囲まれる部分の面積は ヌ である。

[4] 原点 O を通り, x 軸の正方向とのなす角が θ $(0^\circ<\theta<90^\circ)$ である直線を ℓ とする。2 点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ と $\mathrm{Q}(0,\ 2-t)$ を結ぶ直線が ℓ と直交するとき, $\tan\theta$ を t の式で表すと, $\tan\theta=$ ネ である。ただし, $0<t<2$ とする。また, このとき線分 PQ と ℓ の交点を R とすると, 線分 QR の長さは t と $\cos\theta$ を用いて ノ と書ける。線分 PR の長さが線分 QR の長さの 3 倍であれば, $t=$ ハ であり, $\theta=$ ヒ $^\circ$ である。

解答例

［**1**］(1) 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=b$$

2 次方程式 $x^2+x-4=0$ の解と係数の関係から

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=-1,\quad (\alpha+1)(\beta+1)=-4$$

すなわち　$(\alpha+\beta)+2=-1,\quad \alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-4$

よって　$-a+2=-1,\quad b+(-a)+1=-4$

これらを解いて　$\boldsymbol{a=3,\ b=-2}$

(答) ア. 3　イ. -2

(2) $(x-1)^2+y^2=5$ と $y=x+k$ から y を消去して整理すると

$$2x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$$

が 2 点で交わるのは, $D>0$ のときであるから

$$\begin{aligned}\{2(k-1)\}^2-4\cdot2\cdot(k^2-4)&>0\\ -4k^2-8k+36&>0\\ k^2+2k-9&<0\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{-1-\sqrt{10}<k<-1+\sqrt{10}}$

(答) ウ. $-1-\sqrt{10}$　エ. $-1+\sqrt{10}$

【別解】 点 $(1,\ 0)$ と直線 $x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$$

$d<\sqrt{5}$ より　$|k+1|<\sqrt{10}$

よって　$-\sqrt{10}<k+1<\sqrt{10}$

したがって　$\boldsymbol{-1-\sqrt{10}<k<-1+\sqrt{10}}$

(3) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ より $\sin\theta < 0$ であるから

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

したがって　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) \times \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \mathbf{\dfrac{24}{25}}$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \mathbf{\frac{7}{25}}$$

(答) オ. $\dfrac{24}{25}$　カ. $\dfrac{7}{25}$

(4)　$\log_{10} 2^{20} = 20\log_{10} 2 = 20 \times 0.3010 = 6.020$

$6 < \log_{10} 2^{20} < 7$ であるから

$$\log_{10} 10^6 < \log_{10} 2^{20} < \log_{10} 10^7$$

よって　$10^6 < 2^{20} < 10^7$

したがって, **2^{20} は 7 桁の数**である.

$$\log_{10} 3^{10} = 10\log_{10} 3 = 10 \times 0.4771 = 4.771$$

$4 < \log_{10} 3^{10} < 5$ であるから

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} 3^{10} < \log_{10} 10^5$$

よって　$10^4 < 3^{10} < 10^5$

したがって, **3^{10} は 5 桁の数**である.

(答) キ. 7　ク. 5

(5) 曲線 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - a$ と x 軸との共有点の個数は, 方程式

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - a = 0$$

の実数解の個数である. すなわち $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べればよい.

関数 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ について

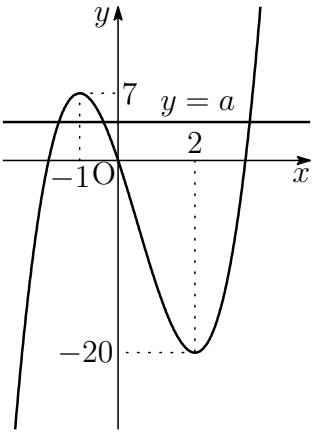
$$\begin{aligned} y' &= 6x^2 - 6x - 12 \\ &= 6(x+1)(x-2) \end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 7	$\searrow$	極小 -20	$\nearrow$

y の増減表は, 右のようになる.
よって, $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$ のグラフは, 右の図のようになる.
したがって, 求める共有点の個数は

$a = 5$ のとき　3 個

$a = 8$ のとき　1 個



(答) ケ. 3　コ. 1

[2] (1) 点 (1, 5) を P とし, 円の中心の座標を C$(a,\ b)$ とすると　$b < 5$

直線 ℓ の傾きは 2, 直線 PC の傾きは　$\dfrac{b-5}{a-1}$

PC$\perp\ell$ であるから

$$2 \cdot \frac{b-5}{a-1} = -1 \quad \text{すなわち} \quad a - 1 = -2(b-5) \quad \cdots ①$$

PC $= \sqrt{5}$　すなわち　PC$^2 = 5$ より

$$(a-1)^2 + (b-5)^2 = 5 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入して

$$4(b-5)^2 + (b-5)^2 = 5$$

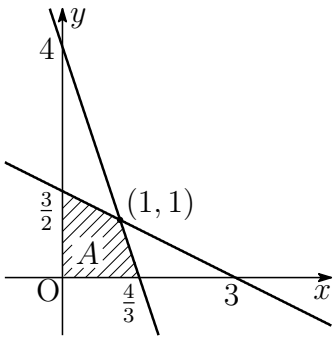
したがって　$(b-5)^2 = 1$

$b - 5 < 0$ であるから　$b - 5 = -1$

よって　$b = 4$　これを ① に代入して　$a = 3$　ゆえに　**中心 (3, 4)**

(答) サ. 3　シ. 4

(2) 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．



領域 A は 4 点

$$(0,0),\ \left(\frac{4}{3},\ 0\right),\ (1,\ 1),\ \left(0,\ \frac{3}{2}\right)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．

$$2x+3y=k \quad \cdots ①$$

とおいて，直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値を調べる．

$(0,0)$ を通るとき　$k=0$,　　$\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$ を通るとき　$k=\frac{8}{3}$

$(1,1)$ を通るとき　$k=5$,　　$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ を通るとき　$k=\frac{9}{2}$

これ以外で領域 A の点を通るとき　　$0<k<5$

したがって，$2x+3y$ は

$$\boldsymbol{x=1,\ y=1}\ \textbf{のとき最大値}\ \boldsymbol{5}\ \textbf{をとる．}$$

(答) ス. 1　セ. 1　ソ. 5

(3) $\log_2(2x+3)=\log_4(2x+3)^2$ より　$\log_4(2x+3)^2 \leqq \log_4(-4x-3)$

したがって

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ (2x+3)^2 \leqq -4x-3 \end{cases}$$

が求める x の値の範囲である．

第 1 式から　　$x>-\dfrac{3}{2}$　　$\cdots ①$

第 2 式から　　$4x^2+16x+12 \leqq 0$

すなわち　　$(x+1)(x+3) \leqq 0$

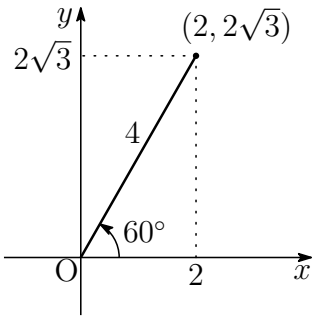
したがって　　$-3 \leqq x \leqq -1$　　$\cdots ②$

よって, ① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\dfrac{3}{2}<x \leqq -1}$

(答) タ. $-\dfrac{3}{2}$　チ. -1

(4) $2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta = 4\sin(\theta+60^\circ)$ であるから

$\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$ のとき最大値 4 をとる.



(答) ツ. 30　テ. 4

[3] 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ は, P$(1, 0)$, Q$(3, -2)$ を通るから

$$0 = a + b + c \qquad \cdots ①$$
$$-2 = 9a+3b+c \quad \cdots ②$$

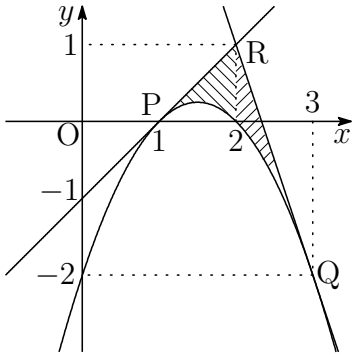
点 $(2, 1)$ を R とすると

直線 PR の傾きは $\dfrac{1-0}{2-1} = 1$,　　直線 RQ の傾きは $\dfrac{-2-1}{3-2} = -3$

$y = ax^2 + bx + c$ を微分すると　$y' = 2ax + b$

直線 PR および直線 RQ の傾きは, P および Q の接線の傾きに等しいから

$$2a + b = 1 \qquad \cdots ③$$
$$6a + b = -3 \qquad \cdots ④$$



③, ④ より　$a = -1, b = 3$

これらを ① に代入して　$c = -2$

$a = -1, b = 3, c = -2$ は ② を満たす.

したがって, $\boldsymbol{a = -1,\ b = 3,\ c = -2}$

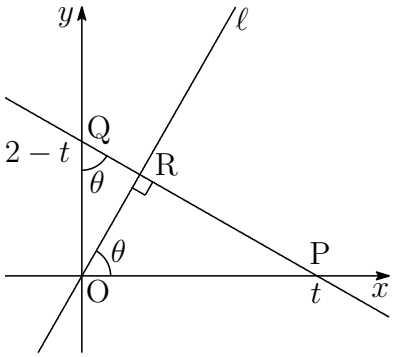
直線 PR の方程式は $y = x - 1$, 直線 RQ の方程式は $y = -3x + 7$ であるから

求める面積 S は

$$S = \int_1^2 \{(x-1) - (-x^2+3x-2)\}\,dx + \int_2^3 \{(-3x+7) - (-x^2+3x-2)\}\,dx$$
$$= \int_1^2 (x-1)^2\,dx + \int_2^3 (x-3)^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_2^3 = \frac{1}{3}(2-1)^3 - 0 + \left\{0 - \frac{1}{3}(2-3)^3\right\}$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(答) ト. -1　ナ. 3　ニ. -2　ヌ. $\dfrac{2}{3}$

［4］直線 PQ の傾きは　$\dfrac{0-(2-t)}{t-0}=\dfrac{t-2}{t}$



PQ⊥ℓ であるから

$$\frac{t-2}{t}\tan\theta=-1$$

すなわち　$\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{t}{2-t}}$　$\cdots$①

$\angle \mathrm{OQR}=\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\mathrm{OQ}\cos\theta\\&=\boldsymbol{(2-t)\cos\theta}\end{aligned}\quad\cdots②$$

$\mathrm{PR}=\mathrm{OP}\sin\theta$ であるから　$\mathrm{PR}=t\sin\theta$　$\cdots$③

線分 PR の長さが線分 QR の長さの 3 倍であれば, $\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=3$ となるから

②, ③ より

$$\frac{t\sin\theta}{(2-t)\cos\theta}=3$$

$$\frac{t}{2-t}\tan\theta=3$$

① より　　$\tan^2\theta=3$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より $\tan\theta>0$ であるから

$\tan\theta=\sqrt{3}$　これを満たす θ は　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

このとき, $\dfrac{t}{2-t}=\sqrt{3}$ であるから

$$t=\sqrt{3}(2-t)$$

$$(\sqrt{3}+1)t=2\sqrt{3}$$

$$t=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=\boldsymbol{3-\sqrt{3}}$$

(答) ネ. $\dfrac{t}{2-t}$　ノ. $(2-t)\cos\theta$　ハ. $3-\sqrt{3}$　ヒ. 60

第 10 章　ポリテクカレッジ川内 (数学)

10.1　平成 29 年度推薦試験 (50 分)

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 - x - 2$，$B = 2x^2 + x - 1$，$C = x^2 - 2$ のとき，$2A - B + 2C$ を計算しなさい。

(2) $6x^2 + xy - 2y^2$ を因数分解しなさい.

(3) $\sqrt{2} = 1.41$，$\sqrt{3} = 1.73$ とするとき，$\sqrt{12} + \sqrt{32} - \sqrt{27}$ の値を計算しなさい.

(4) 20 の約数の集合を A，24 の約数の集合を B とするとき，$A \cap B$ を求めなさい。

(5) 次のデータは，バスケットボール部の選手 5 人の身長である。平均値を求めなさい.

$$182, \quad 190, \quad 175, \quad 178, \quad 184 \quad (\text{cm})$$

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $0.2x - 0.07 \geqq 0.04x + 0.17$ を解きなさい。

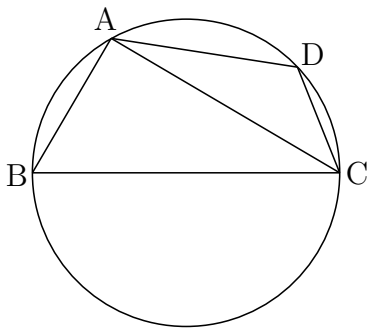
(2) 駅から学校までの距離は 1000m である。駅から，はじめ分速 50m で歩き，途中から分速 75m の小走りで学校まで行く。出発してから 15 分以内に学校に着くためには，分速 50m で歩く道のりを何 m 以下にすればよいか，答えなさい。

問題 3 次の問いに答えなさい。

(1) 2 次関数 $y = 2x^2 - 4x + 4$ のグラフを x 軸方向に 2，y 軸方向へ 1 だけそれぞれ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めなさい。

(2) 定義域が $-1 \leqq x \leqq 5$ のとき，(1) で求めた 2 次関数の最大値，最小値を求めなさい。

問題 4 右図の四角形 ABCD は円に内接している。
AB = 6，BC = 10，∠ABC = 60° のとき，
次の問いに答えなさい。



(1) ∠ADC の角度を求めなさい。

(2) △ABC の面積を求めなさい。

(3) AC の長さを求めなさい。

解答例

問題 1 (1)　$2A - B + 2C$
$= 2(x^2 - x - 2) - (2x^2 + x - 1) + 2(x^2 - 2)$
$= 2x^2 - 2x - 4 - 2x^2 - x + 1 + 2x^2 - 4$
$= \boldsymbol{2x^2 - 3x - 7}$

(2) $6x^2 + xy - 2y^2 = \boldsymbol{(2x - y)(3x + 2y)}$

(3) $\sqrt{12} + \sqrt{32} - \sqrt{27} = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{2} - \sqrt{3}$
$= 4 \times 1.41 - 1.73 = \boldsymbol{3.91}$

(4) $A = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 10,\ 20\}$，$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$ より

$$\boldsymbol{A \cap B = \{1,\ 2,\ 4\}}$$

(5) 求める平均値は

$$\frac{182 + 190 + 175 + 178 + 184}{5} = 180 + \frac{2 + 10 + (-5) + (-2) + 4}{5}$$
$$= 180 + 1.8 = \boldsymbol{181.8} \quad (\mathrm{cm})$$

問題 2 (1)　$0.2x - 0.07 \geqq 0.04x + 0.17$
$20x - 7 \geqq 4x + 17$
$16x \geqq 24$
よって　　$\boldsymbol{x \geqq \dfrac{3}{2}}$

(2) 分速 50m で歩く道のりを x m とすると

$$\frac{x}{50} + \frac{1000 - x}{75} \leqq 15 \quad \text{これを解いて} \quad x \leqq 250$$

よって，**250m 以下.**

問題 3 (1) 2 次関数 $y = 2x^2 - 4x + 4$，すなわち，$y = 2(x-1)^2 + 2$ の頂点が $(1,\ 2)$ であるから，これを x 軸方向に 2，y 軸方向に 1 だけ平行移動した 2 次関数は　$\boldsymbol{y = 2(x-3)^2 + 3}$

(2) (1) の結果から，$-1 \leqq x \leqq 5$ のとき，
$x = -1$ で最大値 **35**，$x = 3$ で最小値 **3**

問題 4 (1) 四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle \mathrm{ADC} = 180^\circ - \angle \mathrm{ABC} = 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$$

(2) $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \sin 60^\circ = \mathbf{15\sqrt{3}}$

(3) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cos 60^\circ = 76$$

よって　$\mathbf{AC = 2\sqrt{19}}$

10.2　平成 28 年度推薦試験 (50 分)

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 - 2x + 4$，$B = 2x^2 - x + 5$，$C = x - 4$ のとき，$(A + B) - 2(A + C)$ を計算しなさい。

(2) $ac - bc - ad + bd$ を因数分解しなさい。

(3) $(3 - \sqrt{5})^2 - 6(3 - \sqrt{5})$ を計算しなさい。

(4) 20 以下の自然数の集合を全体集合とし，偶数の集合を A，3 の倍数の集合を B とする。このとき，$A \cap B$ を求めなさい。

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $\dfrac{4x + 5}{3} < \dfrac{5x - 6}{2}$ を解きなさい。

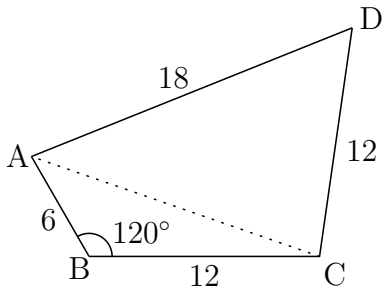
(2) 一度に 1500kg までの荷物を運ぶことができる荷物運搬専用エレベーターがある。このエレベーターで，50kg の箱 8 個のほかに，35kg の荷物を何個まで運ぶことができるか答えなさい。

問題 3 次の問いに答えなさい。

(1) 2 次関数 $y = (2 + x)(x + 2a) - 4a$ の軸が $x = -2$ となるとき，定数 a の値を求めなさい。ただし $a > 0$ とする。

(2) (1) の 2 次関数の頂点を求めなさい。

問題 4 右の図の四角形 ABCD において，AB = 6，BC = 12，CD = 12，DA = 18，∠B = 120° とする。このとき，次の各値を求めなさい。



(1) AC の長さ

(2) ∠ADC

(3) 四角形 ABCD の面積

問題 5 次のデータについて，各問いに答えなさい。

16　　18　　18　　24

(1) 平均値を求めなさい。

(2) 分散を求めなさい。

(3) 標準偏差を求めなさい。

解答例

問題 1 (1) $(A+B)-2(A+C)$
$=-A+B-2C$
$=-(x^2-2x+4)+(2x^2-x+5)-2(x-4)$
$=\boldsymbol{x^2-x+9}$

(2) $ac-bc-ad+bd$
$=c(a-b)-d(a-b)$
$=\boldsymbol{(a-b)(c-d)}$

(3) $(3-\sqrt{5})^2-6(3-\sqrt{5})$
$=9-6\sqrt{5}+5-18+6\sqrt{5}$
$=\boldsymbol{-4}$

(4) $A=\{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20\}$, $B=\{3,6,9,12,15,18\}$ より

$$\boldsymbol{A\cap B=\{6,12,18\}}$$

問題 2 (1) 与えられた不等式から

$$2(4x+5)<3(5x-6)\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{x>4}$$

(2) 35kg の荷物を x 個運ぶとすると

$$35x+50\times 8\leqq 1500\quad \text{ゆえに}\quad x<\frac{220}{7}$$

$\dfrac{220}{7}=31.4\cdots$ であるから，**31 個**まで運ぶことができる.

問題 3 (1) $y=(2+x)(x+2a)-4a$
$=x^2+2(a+1)x$
$=(x+a+1)^2-(a+1)^2\quad \cdots ①$
この 2 次関数の軸の方程式が $x=-2$ であるから

$$-a-1=-2\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=1}$$

(2) $a=1$ を ① に代入すると $y=(x+2)^2-4$
よって，頂点の座標は $\boldsymbol{(-2,-4)}$

問題 4 (1) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= 6^2 + 12^2 - 2\cdot 6\cdot 12\cos 120^\circ \\ &= 6^2(1^2 + 2^2 + 1\cdot 2) = 6^2\cdot 7 \end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{AC = 6\sqrt{7}}$

(2) △ACD に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{ADC} = \frac{12^2 + 18^2 - 6^2\cdot 7}{2\cdot 12\cdot 18} = \frac{2^2 + 3^2 - 7}{2\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{2}$$

よって　　$\mathbf{\angle ADC = 60^\circ}$

(3) 四角形 ABCD の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12\sin 120^\circ + \frac{1}{2}\cdot 12\cdot 18\sin 60^\circ &= 18\sqrt{3} + 54\sqrt{3} \\ &= \mathbf{72\sqrt{3}} \end{aligned}$$

問題 5 (1) 平均値は　$\dfrac{16 + 18 + 18 + 24}{4} = \mathbf{19}$

(2) 分散 σ^2 は

$$\sigma^2 = \frac{(16-19)^2 + (18-19)^2 + (18-19)^2 + (24-19)^2}{4} = \mathbf{9}$$

(3) よって標準偏差 σ は，(2) の結果から　$\boldsymbol{\sigma = 3}$

10.3 平成 27 年度推薦試験 (50 分)

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = -x^2+4x-4$，$B = -2x^2+5x$，$C = 3x^2-x+6$ のとき，$3A-2B+C$ を計算しなさい。

(2) $\dfrac{1}{4}x^4y^6 \div \left(-\dfrac{1}{3}x^2y^2\right)^2$ を計算しなさい。

(3) $\sqrt{2} = 1.41$，$\sqrt{3} = 1.72$ とするとき，$\sqrt{32} - \sqrt{75} + 2\sqrt{48}$ の値を計算しなさい。

(4) 24 の正の約数の集合 A，集合 $B = \{3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16\}$ について，$A \cap B$ を求めなさい。

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $4(x+3) > -2(3x-5)$ を解きなさい。

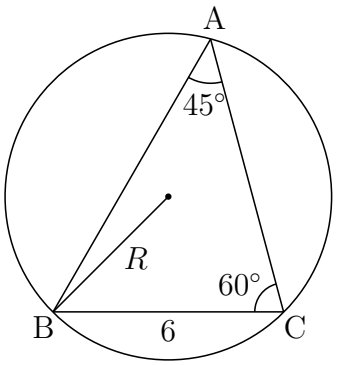
(2) ある製品の組み立てを 8 時間で行う。当初 1 個あたり 5 分で組み立て，途中から作業を早め，4 分で組み立てるようにする。8 時間の作業時間内で 100 個以上の製品を組み立てるには，4 分での組み立てを何分以上行わなければならないか答えなさい。

問題 3 次の問いに答えなさい。

(1) グラフが点 $(2, -2)$ を頂点とし，点 $(4,\ 0)$ を通る放物線になるような 2 次関数を求めなさい。

(2) 定義域が $-4 \leqq x \leqq 4$ のとき，(1) の 2 次関数の最大値，最小値を求めなさい。

問題 4 右の図の △ABC において，∠BAC ＝ 45°，∠ACB = 75°，BC = 6 とする。このとき，次の各値を求めなさい。求めなさい。



(1) ∠ABC

(2) AC の長さ

(3) △ABC の外接円の半径 R

問題 5 次のデータについて，次の各問いに答えなさい。

40　40　40　40　30

(1) 平均値を求めなさい。

(2) 分散を求めなさい。

(3) 標準偏差を求めなさい。

解答例

問題 1 (1)　$3A - 2B + C$
$= 3(-x^2 + 4x - 4) - 2(-2x^2 + 5x) + (3x^2 - x + 6)$
$= \boldsymbol{4x^2 + x - 6}$

(2) $\dfrac{1}{4}x^4y^6 \div \left(-\dfrac{1}{3}x^2y^2\right)^2 = \dfrac{1}{4}x^4y^6 \div \dfrac{1}{9}x^4y^4 = \boldsymbol{\dfrac{9}{4}y^2}$

(3) $\sqrt{32} - \sqrt{75} + 2\sqrt{48} = 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 2{\cdot}4\sqrt{3}$
$= 4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$
$= 4 \times 1.41 + 3 \times 1.73 = \boldsymbol{10.83}$

(4) $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 12,\ 24\}$,
$B = \{3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12,\ 16\}$
したがって　　$A \cap B = \boldsymbol{\{3,\ 6,\ 12\}}$

問題 2 (1) $4(x + 3) > -2(3x - 5)$　ゆえに　$10x > -2$　よって　$\boldsymbol{x > -\dfrac{1}{5}}$

(2) 4 分での組み立てを x 分行うとすると，5 分での組み立てを $8 \times 60 - x$ 分間行うことになるから

$$\frac{x}{4} + \frac{8 \times 60 - x}{5} \geqq 100 \quad \text{これを解いて} \quad x \geqq 80$$

よって，80 分以上.

問題 3 (1) 点 $(2, -2)$ を頂点とする 2 次関数を

$$y = a(x-2)^2 - 2$$

とおく。これが点 $(4,\ 0)$ を通るから

$$0 = a(4-2)^2 - 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = \frac{1}{2}$$

よって，求める 2 次関数は $\quad \boldsymbol{y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2}$

(2) (1) の結果から

$\boldsymbol{x = -4}$ のとき最大値 $\mathbf{16}$，$\boldsymbol{x = 2}$ のとき最小値 $\mathbf{-2}$

問題 4 (1) $180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = \mathbf{60^\circ}$

(2) 正弦定理により $\quad \dfrac{6}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\sin 60^\circ} \quad$ よって $\quad \mathrm{AC} = \dfrac{6\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \mathbf{3\sqrt{6}}$

(3) 正弦定理により $\quad 2R = \dfrac{6}{\sin 45^\circ} \quad$ よって $\quad R = \dfrac{3}{\sin 45^\circ} = \mathbf{3\sqrt{2}}$

問題 5 (1) $\dfrac{40+40+40+40+50}{5} = \mathbf{42}$

(2) $\dfrac{1}{5}\{(40-42)^2 + (40-42)^2 + (40-42)^2 + (40-42)^2 + (50-42)^2\} = 16$

(3) (2) の結果から $\quad \sqrt{16} = \mathbf{4}$

10.4　平成 26 年度推薦試験 (45 分)

問題 1　次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 - 3x + 5$，$B = 2x^2 - x + 5$，$C = -5x^2 + 3$ のとき，$3A - 5B - 3C$ を計算しなさい。

(2) $a^2 + b^2 + 2ab - 2a - 2b - 8$ を因数分解しなさい。

(3) $\left(-\dfrac{1}{3}xy^3\right)^2 \div \dfrac{2x^2}{3y}$ を計算しなさい。

(4) $2\sqrt{50} \div \sqrt{20} \times 4\sqrt{40}$ の値を計算しなさい。

問題 2　次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $3(2x + 1) > 8x - 1$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $3x^2 - 4x - 4 = 0$ を解きなさい。

(3) 長さが 38cm の 1 本のロープがある。このロープを使って面積が 84cm^2 になるような長方形をつくる。このときの縦の長さを求めなさい。ただし，縦の長さは横の長さよりも長いものとする。

問題 3　次の問いに答えなさい。

(1) 頂点が点 $(1,\ 4)$ で，点 $(0,\ 3)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数を求めなさい。

(2) (1) のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に -3 だけ平行移動した放物線のグラフとする 2 次関数を求めなさい。

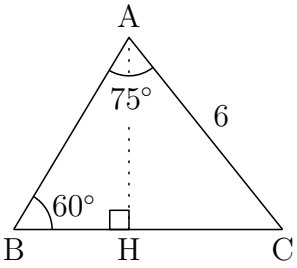
(3) 定義域が $-3 \leqq x \leqq 0$ のとき，(2) の 2 次関数の最大値，最小値を求めなさい。

問題 4 △ABC において，∠A = 75°，∠B = 60°，CA = 6 であるとき，次の各値を求めなさい。

(1) ∠C の大きさ

(2) AB の長さ

(3) BC の長さ



解答例

問題 1 (1) $3A-5B-3C$
$=3(x^2-3x+5)-5(2x^2-x+5)-3(-5x^2+3)$
$=\boldsymbol{8x^2-4x-19}$

(2) $a^2+b^2+2ab-2a-2b-8=(a+b)^2-2(a+b)-8$
$=\boldsymbol{(a+b+2)(a+b-4)}$

(3) $\left(-\dfrac{1}{3}xy^3\right)^2 \div \dfrac{2x^2}{3y}=\dfrac{1}{9}x^2y^6\times\dfrac{3y}{2x^2}=\boldsymbol{\dfrac{y^7}{3}}$

(4) $2\sqrt{50}\div\sqrt{20}\times 4\sqrt{40}=10\sqrt{2}\div 2\sqrt{5}\times 8\sqrt{10}$
$=\dfrac{10\sqrt{2}\times 8\sqrt{10}}{2\sqrt{5}}=\boldsymbol{80}$

問題 2 (1) $3(2x+1)>8x-1$ ゆえに $-2x>-4$ よって $\boldsymbol{x<2}$

(2) $3x^2-4x-4=0$
ゆえに $(x-2)(3x+2)=0$ よって $\boldsymbol{x=2,-\dfrac{2}{3}}$

(3) 縦の長さを $x$cm とすると，横の長さは $19-x$cm であるから，題意より

$$x>19-x,\quad x(19-x)=84$$

第 1 式から $x>\dfrac{19}{2}$, 第 2 式から $(x-7)(x-12)=0$
よって $\boldsymbol{x=12}$ (cm)

問題 3 (1) 点 $(1,\ 4)$ を頂点とする 2 次関数を

$$y = a(x-1)^2 + 4$$

とおく．これが点 $(0,\ 3)$ を通るから

$$3 = a(0-1)^2 + 4 \quad \text{これを解いて} \quad a = -1$$

よって，求める 2 次関数は　　$\boldsymbol{y = -(x-1)^2 + 4}$

(2) (1) のグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したグラフの頂点は

$$(1-2,\ 4-3) \quad \text{すなわち} \quad (-1,\ 1)$$

であるから，x^2 の係数に注意して　　$\boldsymbol{y = -(x+1)^2 + 1}$

(3) (2) の結果から

$\boldsymbol{x = -1}$ のとき最大値 $\mathbf{1}$，$\boldsymbol{x = -3}$ のとき最小値 $\mathbf{-3}$

問題 4 (1) $\angle \mathrm{C} = 180^\circ - (\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B}) = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = \mathbf{45^\circ}$

(2) $\mathrm{AH} = \mathrm{AC}\sin C = 6 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$

$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin B$ より

$$3\sqrt{2} = \mathrm{AB} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{よって} \quad \mathrm{AB} = \boldsymbol{2\sqrt{6}}$$

(3) $\mathrm{BH} = \mathrm{AB}\cos 60^\circ = 2\sqrt{6} \times \dfrac{1}{2} = \sqrt{6}$

$\mathrm{CH} = \mathrm{AH} = 3\sqrt{2}$

よって　$\mathrm{BC} = \mathrm{BH} + \mathrm{CH} = \boldsymbol{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}$

10.5 平成 25 年度推薦試験 (45 分)

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 - x - 6$，$B = -3x^2 - 9x - 6$，$C = 2x^2 - 2x - 4$ のとき，$3A + 2B - C$ を計算しなさい。

(2) $8x^2 + 14xy - 4y^2$ を因数分解しなさい。

(3) $\dfrac{1}{3}x^2y^3 \div \left(-\dfrac{1}{2}xy^2\right)^2$ を計算しなさい.

(4) $\sqrt{2} = 1.41$，$\sqrt{3} = 1.73$，$\sqrt{5} = 2.24$ とするとき，$2\sqrt{20} + \sqrt{8} + \sqrt{45}$ の値を計算しなさい。

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $7(x + 3) > -2(4x - 8)$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $6x^2 + 5x - 6 = 0$ を解きなさい。

(3) 税別 1 個 160 円のりんごと，税別 1 個 120 円のみかんがある。りんごとみかんを合わせて 20 個買いたい．支払い金額を 3000 円以下にする場合，りんごは最大何個まで買えるか答えなさい。ただし，消費税を 5%とする。

問題 3 次の問に答えなさい。

(1) 軸の直線が $x = -2$ で，2 点 $(0, -1)$，$(-3,\ 2)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数を求めなさい。

(2) (1) のグラフを x 軸方向に 4，y 軸方向に -2 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を求めなさい。

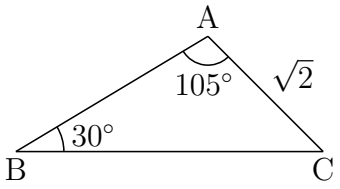
(3) 定義域が $0 \leqq x \leqq 3$ のとき，(2) の 2 次関数の最大値，最小値を求めなさい。

問題 4 △ABC において，∠A = 105°，∠B = 30°，AC = $\sqrt{2}$ であるとき，次の各値を求めなさい。

(1) ∠C の大きさ

(2) AB の長さ

(3) BC の長さ



解答例

問題 1 (1)　$3A + 2B - C$

$= 3(x^2 - x - 6) + 2(-3x^2 - 9x - 6) - (2x^2 - 2x - 4)$

$= 3x^2 - 3x - 18 - 6x^2 - 18x - 12 - 2x^2 + 2x + 4$

$= \boldsymbol{-5x^2 - 19x - 26}$

(2) $8x^2 + 14xy - 4y^2 = 2(4x^2 + 7xy - 2y^2)$

$= \boldsymbol{2(x + 2y)(4x - y)}$

(3) $\dfrac{1}{3}x^2y^3 \div \left(-\dfrac{1}{2}xy^2\right)^2 = \dfrac{1}{3}x^2y^3 \div \dfrac{1}{4}x^2y^4 = \boldsymbol{\dfrac{4}{3y}}$

(4) $2\sqrt{20} + \sqrt{8} + \sqrt{45} = 2{\cdot}2\sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$

$= 2\sqrt{2} + 7\sqrt{5}$

$= 2 \times 1.41 + 7 \times 2.24 = \boldsymbol{18.5}$

問題 2 (1) $7(x + 3) > -2(4x - 8)$

$7x + 21 > -8x + 16$

$15x > -5$

$\boldsymbol{x > -\dfrac{1}{3}}$

(2) $6x^2 + 5x - 6 = 0$　ゆえに　$(2x + 3)(3x - 2) = 0$

これを解いて　　$\boldsymbol{x = -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{2}{3}}$

(3) りんごを x 個買うとすると

$\{160x + 120(20 - x)\} \times 1.05 \leqq 3000$　ゆえに　$42x + 2520 \leqq 3000$

整理すると　$42x \leqq 480$　ゆえに　$x \leqq \dfrac{80}{7}$

$\dfrac{80}{7} = 11.4\cdots$ であるから　　**11 個**

問題 3 (1) 軸の方程式 $x=-2$ から，求める 2 次関数を $y=a(x+2)^2+q$ とおける．
これが 2 点 $(0,-1)$，$(-3,\ 2)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a+q=-1 \\ a+q=2 \end{cases} \quad \text{これを解いて} \quad a=-1,\ q=3$$

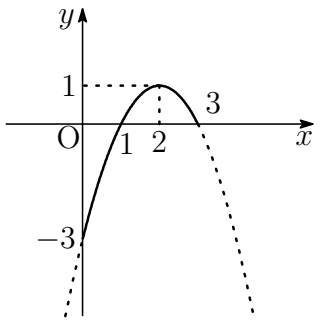
よって　　$\boldsymbol{y=-(x+2)^2+3}$

(2) (1) の頂点 $(-2,\ 3)$ を x 軸方向に 4，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$(-2+4,\ 3-2) \quad \text{すなわち} \quad (2,\ 1)$$

求める 2 次関数の x^2 の係数に注意して　$\boldsymbol{y=-(x-2)^2+1}$

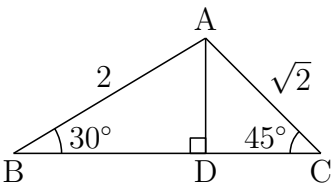
(3) 右の図から
よって　　$x=2$ のとき**最大値 1**
$x=0$ のとき**最小値 −3**



問題 4 (1) $\angle \mathrm{C}=180^\circ-(30^\circ+105^\circ)=\boldsymbol{45^\circ}$

(2) 正弦定理 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{c}{\sin 45^\circ}$ により　　$c=\dfrac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=\boldsymbol{2}$

(3) A から辺 BC に垂線 AD をおろすと
$\mathrm{BD}=\sqrt{3}$，$\mathrm{CD}=1$
よって　$\boldsymbol{\mathrm{BC}=\sqrt{3}+1}$



10.6　平成 24 年度推薦試験 (45 分)

問題 1　次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 + 5x - 3$，$B = 3x^2 - x + 4$，$C = -2x^2 + 5$ のとき，$4A - 5B - C$ を計算しなさい。

(2) $(x + y)^2 - 6(x + y) - 16$ を因数分解しなさい。

(3) $\left(\frac{1}{5}x^3y\right)^2 \div \frac{1}{5}x^2y$ を計算しなさい。

(4) $\sqrt{2} = 1.41$，$\sqrt{3} = 1.73$ とするとき，$2\sqrt{50} + \sqrt{12} - \sqrt{18}$ を計算しなさい。

問題 2　次の問いに答えなさい。

(1) 次の 2 つの不等式を同時に満たす整数 x の値をすべて求めなさい。

$$3(x - 2) < x - 2, \quad -\frac{x - 2}{3} \leqq x + 2$$

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2x - 2 = 0$ を解きなさい。

(3) 3000 円の予算で，税別 1 本 320 円のバラ何本かに，税別 1 本 220 円のカスミソウを 1 本そえて花束を作ってもらいたい。バラは何本まで買えるか答えなさい。ただし，消費税を 5%とする。

問題 3　直角をはさむ 2 辺の長さの和が 20cm であるような直角三角形がある。直角をはさむ 2 辺のうちの 1 辺の長さを $x$cm，直角三角形の面積を $y\,\mathrm{cm}^2$ として，次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

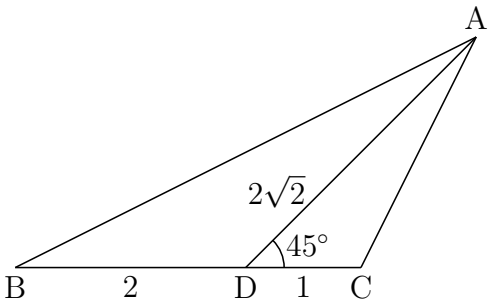
(2) 面積が最大となるときの x の値と面積の最大値を求めなさい。

(3) 面積が $32\mathrm{cm}^2$ 以上になる x の値の範囲を求めなさい。

問題 4 △ABC の辺 BC 上に D があり，BD = 2，DC = 1，AD = $2\sqrt{2}$，∠ADC = 45° である。このとき次の問いに答えなさい。

(1) 辺 AB および AC の長さを求めなさい。

(2) $\sin C$ を求めなさい。



解答例

問題 1 (1) $4A - 5B - C$
$= 4(x^2 + 5x - 3) - 5(3x^2 - x + 4) - (-2x^2 + 5)$
$= \boldsymbol{-9x^2 + 25x - 37}$

(2) $(x+y)^2 - 6(x+y) - 16 = \{(x+y)+2\}\{(x+y)-8\}$
$= \boldsymbol{(x+y+2)(x+y-8)}$

(3) $\left(\frac{1}{5}x^3y\right)^2 \div \frac{1}{5}x^2y = \frac{1}{25}x^6y^2 \div \frac{1}{5}x^2y = \boldsymbol{\frac{1}{5}x^4y}$

(4) $2\sqrt{50} + \sqrt{12} - \sqrt{18} = 2{\cdot}5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$
$= 7\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$
$= 7 \times 1.41 + 2 \times 1.73$
$= 9.87 + 3.46 = \boldsymbol{13.33}$

問題 2 (1) $3(x-2) < x - 2$ これを解いて $x < 2$ ⋯①
$-\frac{x-2}{3} \leqq x + 2$ これを解いて $x \geqq -1$ ⋯②
①，② の共通範囲を求めて $\boldsymbol{-1 \leqq x < 2}$

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2x - 2 = 0$ を解の公式に適用すると

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4{\cdot}1{\cdot}(-2)}}{2{\cdot}1} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2}$$
$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{-1 \pm \sqrt{3}}$$

(3) バラを x 個買うとすると

$$(320 \times x + 220) \times 1.05 \leqq 3000 \quad \text{ゆえに} \quad 336x + 231 \leqq 3000$$

整理すると $336x \leqq 2769$ ゆえに $x \leqq \frac{2769}{336}$

$\frac{2769}{336} = 8.2\cdots$ であるから **8 本**

問題 3 (1) 直角三角形の直角をはさむ二辺の長さの一方を $x\,\mathrm{cm}$ とすると，もう一方の辺の長さは $20-x\,\mathrm{cm}$ であるから

$$x>0 \quad \text{かつ} \quad 20-x>0 \quad \text{すなわち} \quad 0<x<20 \quad \cdots ①$$

したがって　$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{2}x(20-x)\quad (0<x<20)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}(x^2-20x) \\ &= -\frac{1}{2}\{(x-10)^2-100\} \\ &= -\frac{1}{2}(x-10)^2+50 \end{aligned}$$

上式および ① から　　$\boldsymbol{x=10}$ で**最大値 50** をとる.

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x(20-x) &\geqq 32 \\ x^2-20x+64 &\leqq 0 \\ (x-4)(x-16) &\leqq 0 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{x\leqq x\leqq 16}$

問題 4 (1) 余弦定理を △ABD に適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{AB}^2 &= 2^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot 2\cdot 2\sqrt{2}\cos 135^\circ \\ &= 4+8+8=20 \end{aligned}$$

$\mathrm{AB}>0$ であるから　　$\mathbf{AB=2\sqrt{5}}$

余弦定理を △ACD に適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= 1^2+(2\sqrt{2})^2-2\cdot 1\cdot 2\sqrt{2}\cos 45^\circ \\ &= 1+8-4=5 \end{aligned}$$

$\mathrm{AD}>0$ であるから　　$\mathbf{AC=\sqrt{5}}$

(2) 正弦定理を △ACD に適用して

$$\frac{\sqrt{5}}{\sin 45^\circ}=\frac{2\sqrt{2}}{\sin C} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\sin C=\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

10.7 平成 23 年度推薦試験 (45 分)

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 + 3y^2$，$B = 2x^2 - xy + 4y^2$，$C = 2xy - y^2$ のとき，$-A + 2B - 3C$ を計算しなさい。

(2) $x^2 + y^2 + 2xy + 3x + 3y + 2$ を因数分解しなさい。

(3) $(-3x^3y)^2 \times \left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^3$ を計算しなさい。

(4) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}} + \dfrac{4}{3+\sqrt{5}}$ を計算しなさい。

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $x - \dfrac{2x-3}{3} < \dfrac{2x+1}{2}$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $3x^2 - 2x - 8 = 0$ を解きなさい。

(3) 税別 480 円の粉末洗剤 2 箱と税別 140 円の石けんを税別 100 円の箱につめてギフトセットを作ってもらい，支払い金額が税込みで 2000 円以下になるようにしたい。石けんは何個まで買えるか答えなさい。ただし，消費税は 5%とする。

問題 3 長さ 24cm のひもを 2 つに切って，それぞれで正方形を作るとき，2 つの正方形の面積の和が 26cm^2 以下になるようにしたい。1 つの正方形の一辺の長さを x cm，2 つの正方形の面積の和を $y\,\text{cm}^2$ として，次の問いに答えなさい。

(1) y を x の式で表しなさい。

(2) x の値の範囲を求めなさい。

(3) y が最小となるときの x の値の最小値を求めなさい。

問題 4 △ABC において，AB = 4，CA = 3，∠A = 60° である。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，AD の長さを求めなさい。

解答例

問題 1 (1)　$-A+2B-3C$

$=-(x^2+3y^2)+2(2x^2-xy+4y^2)-3(2xy-y^2)$

$=\boldsymbol{3x^2-8xy+8y^2}$

(2) $x^2+y^2+2xy+3x+3y+2=(x+y)^2+3(x+y)+2$

$=\{(x+y)+1\}\{(x+y)+2\}$

$=\boldsymbol{(x+y+1)(x+y+2)}$

(3) $(-3x^3y)^2\times\left(\dfrac{1}{3}xy^2\right)^3=9x^6y^2\times\dfrac{1}{27}x^3y^6$

$=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}x^9y^8}$

(4) $\dfrac{8}{3-\sqrt{5}}+\dfrac{4}{3+\sqrt{5}}=\dfrac{8(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}+\dfrac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}$

$=2(3+\sqrt{5})+(3-\sqrt{5})$

$=\boldsymbol{9+\sqrt{5}}$

問題 2 (1)　$x-\dfrac{2x-3}{3}<\dfrac{2x+1}{2}$

両辺に 6 を掛けて　$6x-2(2x-3)>3(2x+1)$

整理すると　$-4x>-3$

両辺を -4 で割って　$\boldsymbol{x<\dfrac{3}{4}}$

(2) 2 次方程式 $3x^2-2x-8=0$ の左辺を因数分解すると

$(x-2)(3x+4)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=-\dfrac{4}{3},\ 2}$

(3) 石けんを x 個買うとすると

$(480\times2+140x+100)\times1.05\leqq2000$　ゆえに　$147x+1113\leqq2000$

整理すると　$147x\leqq887$　ゆえに　$x\leqq\dfrac{887}{147}$

$\dfrac{887}{147}=6.03\cdots$ であるから　**6 個**

問題 3 (1) 1 つの正方形の一辺の長さが x cm であるから，もう 1 つの正方形の一辺の長さは $6-x$ cm であるから

$$y = x^2 + (6-x)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 2x^2 - 12x + 36}$$

(2) 辺の長さは正であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad 6 - x > 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 < x < 6 \quad \cdots ①$$

面積の和が 26cm^2 以下であるから

$$2x^2 - 12x + 36 \leqq 26 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - 6x + 5 \leqq 0$$

① に注意しながら，これを解いて $0 < x \leqq 5$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned} y &= 2x^2 - 12x + 36 \\ &= 2(x^2 - 6x) + 36 \\ &= 2\{(x-3)^2 - 9\} + 36 \\ &= 2(x-3)^2 + 18 \end{aligned}$$

上式および ① から　　$\boldsymbol{x = 3}$ で**最小値 18** をとる．

問題 4 $x = \text{AD}$ とおく．$\triangle\text{ABD} + \triangle\text{ACD} = \triangle\text{ABC}$ であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 4 \cdot x \sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot 3 \cdot x \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot 4 \cdot 3 \sin 60^\circ$$

$$x + \frac{3}{4}x = 3\sqrt{3}$$

$$x = \frac{12\sqrt{3}}{7}$$

よって　　$\boldsymbol{\text{AD} = \dfrac{12\sqrt{3}}{7}}$

10.8　平成 22 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回

問題 1　次の問いに答えなさい。

(1) $A = -2x^2 + 3xy - y^2$，$B = x^2 - xy + 2y^2$，$C = -3xy - 4y^2$ のとき，$A - 2B - 2C - (2A + B - C)$ を計算しなさい。

(2) $x^2 + 4x - y^2 + 2y + 3$ を因数分解しなさい。

(3) $\left(\frac{3}{2}x^2y\right)^3 \times \left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^2 \times (-2x)^3$ を計算しなさい。

(4) $4\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{27}$ を計算しなさい。

問題 2　次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $\frac{7x-2}{3} < -\frac{2x-2}{2}$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $2x^2 + 5x + 2 = 0$ を解きなさい。

(3) 正方形の紙がある。この紙の横の長さを 2cm 短くしたら，面積が元の状態に比べ $\frac{2}{3}$ 倍になった。元の正方形の紙の 1 辺の長さを求めなさい。

問題 3　2 つの不等式 $x^2 + 3x - 10 < 0$ および $4x - x^2 < 0$ を同時に満たす x の範囲を求めたい。次の問いに答えなさい。

(1) $x^2 + 3x - 10 < 0$ を満たす x の範囲を求めなさい。

(2) $4x - x^2 < 0$ を満たす x の範囲を求めなさい。

(3) $x^2 + 3x - 10 < 0$ および $4x - x^2 < 0$ を同時に満たす x の範囲を求めなさい。

問題 4 △ABC において，AB = 12，BC = 8，CA = 10 であるとき，次の問いに答えなさい。辺 CA の中点を E とし，DE∥BC とする。

(1) $\cos A$ の値を求めなさい。

(2) $\sin A$ の値を求めなさい。

(3) △ABC の面積を求めなさい。

(4) △ADE の面積を求めなさい。

解答例

問題 1 (1)
$$\begin{aligned} & A-2B-2C-(2A+B-C) \\ =& -A-3B-C \\ =& -(-2x^2+3xy-y^2)-3(x^2-xy+2y^2)-(-3xy-4y^2) \\ =& \boldsymbol{-x^2+3xy-y^2} \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x^2+4x-y^2+2y+3 &= x^2+4x-(y+1)(y-3) \\ &= \{x+(y+1)\}\{x-(y-3)\} \\ &= \boldsymbol{(x+y+1)(x-y+3)} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{2}x^2y\right)^3\times\left(-\frac{1}{3}xy^2\right)^2\times(-2x)^3 &= \frac{27}{8}x^6y^3\times\frac{1}{9}x^2y^4\times(-8x^3) \\ &= \boldsymbol{-3x^{11}y^7} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} 4\sqrt{12}-2\sqrt{75}+3\sqrt{27} &= 4\cdot2\sqrt{3}-2\cdot5\sqrt{3}+3\cdot3\sqrt{3} \\ &= 8\sqrt{3}-10\sqrt{3}+9\sqrt{3} \\ &= \boldsymbol{7\sqrt{3}} \end{aligned}$$

問題 2 (1)
$$\frac{7x-2}{3}<-\frac{2x-2}{2}$$
右辺を整理して
$$\frac{7x-2}{3}<-x+1$$
両辺に 3 を掛けて
$$7x-2<-3x+3$$
整理すると
$$10x<5$$
両辺を 10 で割って
$$\boldsymbol{x<\frac{1}{2}}$$

(2) 2 次方程式 $2x^2+5x+2=0$ の左辺を因数分解すると
$$(x+2)(2x+1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=-2,-\frac{1}{2}}$$

(3) 正方形の 1 辺の長さを x とすると
$$x(x-2)=\frac{2}{3}x^2 \quad \text{これを解いて} \quad x=0,\ 6$$
$x>0$ であるから **6cm**

問題 3 (1) $x^2+3x-10<0$ の左辺を因数分解すると

$$(x+5)(x-2)<0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{-5<x<2}$$

(2) $x^2-4x>0$ であるから

$$x(x-4)>0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x<0,\ 4<x}$$

(3) (1)，(2) の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{-5<x<0}$

問題 4 (1) $a=8$，$b=10$，$c=12$ を余弦定理に適用すると

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{10^2+12^2-8^2}{2\cdot10\cdot12}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$$

(2) (1) の結果から

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

(3) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot12\times\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\boldsymbol{15\sqrt{3}}$

(4) $\triangle$ADE と $\triangle$ABC の相似比は $1:2$ であるから，その面積比は $1:2^2$ である．したがって

$$\triangle\mathrm{ADE}=15\sqrt{3}\times\frac{1}{2^2}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{3}}{4}}$$

10.9 平成 22 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 - 2xy + 3y^2$，$B = -2x^2 + xy + 2y^2$，$C = -3x^2 + 2xy$ のとき，$2A - B - 2C - (A - 3B - C)$ を計算しなさい。

(2) $4x^2 + 4x - y^2 + 4y - 3$ を因数分解しなさい。

(3) $(-3x)^2 \times \left(\frac{2}{3}xy^3\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2$ を計算しなさい。

(4) $-2\sqrt{32} - \sqrt{72} + 3\sqrt{50}$ を計算しなさい。

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $-\frac{3x-1}{2} > \frac{2x-1}{3}$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $4x^2 - 12x + 9 = 0$ を解きなさい。

(3) 周の長さが 40cm の長方形の紙がある。面積が 91cm^2 のとき，この長方形の紙の縦の長さを求めなさい。ただし，縦の長さは横の長さよりも短いとする。

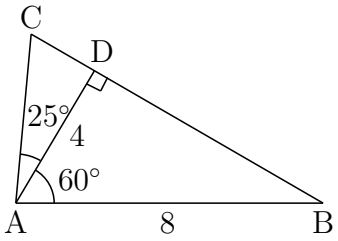
問題 3 方程式 $x^2 - px - 3 = 0$ の 2 つの解は，α と β である。このとき α と β には，$\alpha^2 + \beta^2 = 10$，$\alpha + \beta > 0$，$\alpha > \beta$ の関係がある。次の問いに答えなさい。

(1) $\alpha\beta$ の値を求めなさい。

(2) p の値を求めなさい。

(3) α および β の値をそれぞれ求めなさい。

問題 4　△ABC において，AB = 8，AD = 4，∠ADB = 90°，∠BAD = 60°，∠CAD = 25° であるとき，次の問いに答えなさい。辺 CA の中点を E とし，DE∥BC とする。



(1) ∠C の値を求めなさい。

(2) BD の長さを求めなさい。

(3) sin∠BAD の値を求めなさい。

(4) △ABD の面積を求めなさい。

解答例

問題 1 (1)　$2A-B-2C-(A-3B-C)$
$=A+2B-C$
$=(x^2-2xy+3y^2)+2(-2x^2+xy+2y^2)-(-3x^2+2xy)$
$=\boldsymbol{-2xy+7y^2}$

(2) $4x^2+4x-y^2+4y-3=4x^2+4x-(y-1)(y-3)$
$=\{2x+(y-1)\}\{2x-(y-3)\}$
$=\boldsymbol{(2x+y-1)(x-y+3)}$

(3) $(-3x)^2\times\left(\frac{2}{3}xy^3\right)^3\times\left(-\frac{1}{2}x^2y^3\right)^2=9x^2\times\frac{8}{27}x^3y^9\times\frac{1}{4}x^4y^6$
$=\boldsymbol{\frac{2}{3}x^9y^{15}}$

(4) $-2\sqrt{32}-\sqrt{72}+3\sqrt{50}=-2\cdot4\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\cdot5\sqrt{2}$
$=-8\sqrt{2}-6\sqrt{2}+15\sqrt{2}$
$=\boldsymbol{\sqrt{2}}$

問題 2 (1)　$-\frac{3x-1}{2}>\frac{2x-1}{3}$

両辺に 6 を掛けて　$-3(3x-1)>2(2x-1)$

整理すると　$-13x>-5$

両辺を −13 で割って　$\boldsymbol{x<\frac{5}{13}}$

(2) 2 次方程式 $4x^2-12x+9=0$ の左辺を因数分解すると

$(2x-3)^2=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=\frac{3}{2}}$

(3) 縦の長さを $x$cm とすると，横の長さは $(20-x)$cm である．
縦は横よりも短いので

$$x < 20 - x \quad \text{すなわち} \quad x < 10 \quad \cdots ①$$

長方形の面積が 91cm^2 であるから

$$x(20-x) = 91 \quad \text{ゆえに} \quad (x-7)(x-13) = 0$$

① に注意して　　$\boldsymbol{7\text{cm}}$

問題 3 (1) 解と係数の関係により　$\boldsymbol{\alpha\beta = -3}$

(2) 解と係数の関係により　$\alpha + \beta = p$　また　$p > 0$
この式の両辺を平方すると

$$(\alpha+\beta)^2 = p^2 \quad \text{ゆえに} \quad \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = p^2$$

したがって　　$10 + 2\cdot(-3) = p^2$
$p > 0$ に注意して　　$\boldsymbol{p = 2}$

(3) (3) の結果より　$x^2 - 2x - 3 = 0$
これを解いて　　$x - 1,\ 3$
$\alpha > \beta$ により　　$\boldsymbol{\alpha = 3,\ \ \beta = -1}$

問題 4 (1) $\angle\text{A} = 85°$, $\angle\text{B} = 30°$ であるから

$$\angle\text{C} = 180° - (85° + 30°) = \boldsymbol{65°}$$

(2) $\text{BD} = \boldsymbol{4\sqrt{3}}$

(3) $\sin\angle\text{BAD} = \sin 60° = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}$

(4) $\triangle\text{ABD} = \dfrac{1}{2}\text{AD}\cdot\text{BD} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3} = \boldsymbol{8\sqrt{3}}$

10.10　平成 21 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回

問題 1　次の問いに答えなさい。

(1) 整式 $-2x^2-3x+1$ にある整式 A を加えたら，$-3x^2+2x+4$ となった。整式 A を求めなさい。

(2) $4a^2-4ab+b^2-9c^2$ を因数分解しなさい。

(3) $(2x^2y)^2\times\left(-\dfrac{1}{2}xy^2\right)^3$ を計算しなさい。

(4) $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ とするとき，a^2b+ab^2 の値を求めなさい。

問題 2　次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $-5(x+2)<8(x+3)+5$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $2x^2+5x-7=0$ を解きなさい。

(3) 税別 1 個 180 円のケーキを，税別 100 円の箱 1 個にすべて詰めてもらい，支払い金額を税込み 2,800 円以下になるようにしたい。ケーキは何個まで買えるか答えなさい。

問題 3　長さ 40m のひもを用いて長方形を作る。できあがった長方形について，次の問いに答えなさい。

(1) 一辺の長さを x とするとき，面積を x の式で表しなさい。

(2) 面積が最大になる x の値を求めなさい。

(3) 面積の最大値を求めなさい。

問題 4 △ABC において，∠A = 30°，BC = 8，∠C = 30° であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) ∠B の値を求めなさい。

(2) $\cos B$ の値を求めなさい。

(3) $\sin B$ の値を求めなさい。

(4) △ABC の面積を求めなさい。

解答例

問題 1 (1) $(-2x^2-3x+1)+A=-3x^2+2x+4$ であるから

$$\begin{aligned} A &= -3x^2+2x+4-(-2x^2-3x-1) \\ &= \boldsymbol{-x^2+5x+5} \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} 4a^2-4ab+b^2-9c^2 &= (2a-b)^2-(3c)^2 \\ &= \{(2a-b)+3c\}\{(2a-b)-3c\} \\ &= \boldsymbol{(2a-b+3c)(2a-b-3c)} \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} (2x^2y)^2\times\left(-\frac{1}{2}xy^2\right)^3 &= 4x^4y^2\times\left(-\frac{1}{8}x^3y^6\right) \\ &= \boldsymbol{-\frac{1}{2}x^7y^8} \end{aligned}$$

(4) $$a+b=(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=2\sqrt{3}$$

$$ab=(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})=3-2=1$$

ゆえに $$a^2b+ab^2=ab(a+b)=1\cdot 2\sqrt{3}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

問題 2 (1) $$-5(x+2)<8(x+3)+5$$

展開して $$-5x-10<8x+24+5$$

整理すると $$-13x<39$$

両辺を -3 で割って $$\boldsymbol{x>-3}$$

(2) 2 次方程式 $2x^2+5x-7=0$ の左辺を因数分解すると

$$(x-1)(2x+7)=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x=1,\ -\frac{7}{2}}$$

(3) ケーキの個数を x 個とすると

$$(180x+100)\times 1.05 \leqq 2800$$

展開して $$189x+105\leqq 2800$$

整理すると $$189x\leqq 2695$$

ゆえに $$x\leqq\frac{2695}{189}$$

$\dfrac{2695}{189}=14.2\cdots$ であるから，ケーキは **14 個まで買える.**

問題 3 (1) 長方形の縦と横の長さの和は 20cm であるから，一辺の長さを x cm とすると，他の辺の長さは $(20-x)$cm であるから，面積を y とすると

$$\boldsymbol{y = x(20 - x)} \ \ [\mathrm{cm}^2]$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 20x \\ &= -(x^2 - 20x) \\ &= -\{(x-10)^2 - 10^2\} \\ &= -(x-10)^2 + 100 \end{aligned}$$

よって，$\boldsymbol{x = 10}$ cm で面積 y は最大となる

(3) (2) の結果から，面積の最大値は $\mathbf{100cm^2}$

問題 4 (1) $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$

(2) (1) の結果から　$\cos B = \cos 120^\circ = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(3) (1) の結果から　$\sin B = \sin 120^\circ = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(4) $C = A$ より　AB = BC　ゆえに　AB = 8

よって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{16\sqrt{3}}$

10.11 平成 21 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = -2x^2 + 6x - 1$，$B = x^2 - 4x + 2$ とするとき，$-2A - 3B$ を計算しなさい。

(2) $3ax^2 - 6x + 4ax - 8$ を因数分解しなさい。

(3) $16xy^2 \times \left(-\dfrac{1}{2}x^2y\right)^3$ を計算しなさい。

(4) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2} + \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$ を計算しなさい。

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $2(x+1) < 7x - 13$ を解きなさい。

(2) 2 次方程式 $2x^2 + x - 3 = 0$ を解きなさい。

(3) ある動物園の入場料は 1 人 500 円で，15 人以上であれば，15%の団体割引になる。このとき，15 人未満の団体でも，15 人の団体として入場したほうが得になるのは何人以上か答えなさい。

問題 3 2 つの変数 x と y に $x + y = 4$ の関係がある。このとき $x^2 + y^2$ の最小値を求めたい。次の問いに答えなさい。

(1) $x^2 + y^2$ だけを用いた式で表しなさい。

(2) 最小値をとるときの x と y の値をそれぞれ求めなさい。

(3) $x^2 + y^2$ の最小値を求めなさい。

問題 4　△ABC において，AB = 8，AC = 12，∠A = 60° であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\cos A$ の値を求めなさい。

(2) BC の長さを求めなさい。

(3) $\sin A$ の値を求めなさい。

(4) △ABC の面積を求めなさい。

解答例

問題 1　(1)
$$\begin{aligned} -2A-3B &= -2(-2x^2+6x-1)-3(x^2-4x+2) \\ &= 4x^2-12x+2-3x^2+12x-6 \\ &= \boldsymbol{x^2-4} \end{aligned}$$

(2) (次数の低い文字 a について整理すると)
$$\begin{aligned} 3ax^2-6x+4ax-8 &= ax(3x+4)-2(3x+4) \\ &= \boldsymbol{(3x+4)(ax-2)} \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} 16xy^2\times\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)^3 &= 16xy^2\times\left(-\frac{1}{8}x^6y^3\right) \\ &= \boldsymbol{-2x^7y^5} \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}+\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} &= \frac{(\sqrt{3}+2)^2+(\sqrt{3}-2)^2}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} \\ &= \frac{(3+4\sqrt{3}+4)+(3-4\sqrt{3}+4)}{3-4} \\ &= \frac{14}{-1} = \boldsymbol{-14} \end{aligned}$$

問題 2　(1)

$2(x+1) < 7x-13$

展開して　$2x+2 < 7x-13$

整理すると　$-5x < -15$

両辺を -5 で割って　$\boldsymbol{x > 3}$

(2) 2 次方程式 $2x^2+x-3=0$ の左辺を因数分解すると

$(x-1)(2x+3)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=1,-\frac{3}{2}}$

(3) 人数を x 人とすると

$500x \geqq 500\times 15\times(1-0.15)$

したがって　$x \geqq 15\times(1-0.15)$

ゆえに　$x \geqq 12.75$

よって　**13** 人以上

問題 3 (1) $x+y=4$ より　$y=4-x$　$\cdots$①

よって　$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2$

$=\boldsymbol{2x^2-8x+16}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}2x^2-8x+16&=2(x^2-4x)+16\\&=2\{(x-2)^2-2^2\}+16\\&=2(x-2)^2+8\end{aligned}\quad\cdots②$$

よって，$\boldsymbol{x=2}$ のとき最小値をとり，このとき ① より　$\boldsymbol{y=2}$

(3) ② より，x^2+y^2 の最小値は　$\boldsymbol{8}$

問題 4 (1) $\cos A=\cos 60^\circ=\dfrac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AC}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\cos A\\&=12^2+8^2-2\cdot12\cdot8\times\frac{1}{2}\\&=144+64-96\\&=112\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　$\mathrm{BC}=\sqrt{112}=\boldsymbol{4\sqrt{7}}$

(3) $\sin A=\sin 60^\circ=\dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{2}}$

(4) $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AB}\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot12\cdot8\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{24\sqrt{3}}$

10.12　平成 20 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回

問題 1　次の問いに答えなさい。

(1)　$(3x-2)(2x^2-3x-1)$ を展開しなさい。

(2)　$8x^3-(x-y)^3$ を因数分解しなさい。

(3)　$-18xy^3 \times \left(-\dfrac{1}{3}x^3y\right)^2$ を計算しなさい。

(4)　$\sqrt{3}=1.732$ とするとき，$\dfrac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ の値を計算しなさい。

問題 2　次の問いに答えなさい。

(1)　不等式 $\dfrac{5}{8}x-1>\dfrac{x}{4}+2$ を解きなさい。

(2)　連立不等式 $\begin{cases} 5x-2<x+3 \\ 8x+1<15x+8 \end{cases}$ を解きなさい。

(3)　1 個 130 円の菓子を何個か買って，1 つの箱に詰めてもらい，支払い金額が 3,000 円以下になるようにしたい。箱代を 200 円とすると，菓子は何個まで買えるか答えなさい。

問題 3　次の問いに答えなさい。

(1)　放物線 $y=x^2+ax+b$ の頂点が $(-1,-3)$ であるとき，定数 a，b を求めなさい。

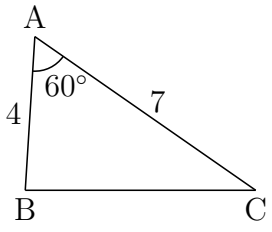
(2)　(1) で求めた放物線を x 軸方向に 3，y 軸方向に 8 だけ平行移動したときの放物線の方程式を $y=x^2+cx+d$ とする。定数 c，d の値を求めなさい。

問題 4　△ABC において，AB $=4$，AC $=7$，$\angle$A $=60^\circ$ であるとき，次の問いに答えなさい。

(1)　BC の長さを求めなさい。

(2)　$\sin A$ の値を求めなさい。

(3)　△ABC の面積を求めなさい。



解答例

問題 1 (1) $(3x-2)(2x^2-3x-1) = 3x(2x^2-3x-1) - 2(2x^2-3x-1)$

$= 6x^3 - 9x^2 - 3x - 4x^2 + 6x + 2$

$= \boldsymbol{6x^3 - 13x^2 + 3x + 2}$

(2) $8x^3 - (x-y)^3 = (2x)^3 - (x-y)^3$

$= \{2x - (x-y)\}\{(2x)^2 + 2x(x-y) + (x-y)^2\}$

$= \boldsymbol{(x+y)(7x^2 - 4xy + y^2)}$

(3) $-18xy^3 \times \left(-\dfrac{1}{3}x^3y\right)^2 = -18xy^3 \times \dfrac{1}{9}x^6y^2 = \boldsymbol{-2x^7y^5}$

(4) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 4\sqrt{3} - 6 = 4 \times 1.732 - 6 = \boldsymbol{0.928}$

問題 2 (1) $\dfrac{5}{8}x - 1 > \dfrac{x}{4} + 2$

両辺に 8 を掛けると $5x - 8 > 2x + 16$

整理すると $3x > 24$

両辺を 3 で割って $\boldsymbol{x > 8}$

(2) $5x - 2 < x + 3$ から $x < \dfrac{5}{4}$ $\cdots$①

$8x + 1 < 15x + 8$ から $x > -1$ $\cdots$②

① と ② の共通部分を求めて $\boldsymbol{-1 < x < \dfrac{5}{4}}$

(3) 菓子を x 個買うとすると，条件から

$130x + 200 \leqq 3000$

整理すると $130x \leqq 2800$

よって $x \leqq \dfrac{280}{13} = 21.5\cdots$

x は整数であるから，**21 個**まで買える．

問題 3　(1)　放物線 $y = x^2 + ax + b$ の頂点が $(-1, -3)$，x^2 の係数は 1 であるから

$$y = (x+1)^2 - 3 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 + 2x - 2$$

よって　　$\boldsymbol{a = 2,\ b = -2}$

(2)　(1) で求めた放物線を x 軸方向に 3，y 軸方向に 8 だけ平行移動すると

$$y - 8 = (x-3)^2 + 2(x-3) - 2 \quad \text{すなわち} \quad y = x^2 - 4x + 9$$

よって　　$\boldsymbol{c = -4,\ d = 9}$

問題 4　(1)　余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A \\ &= 4^2 + 7^2 - 2\cdot 4\cdot 7\cos 60^\circ \\ &= 16 + 49 - 2\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 37 \end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから　$\mathbf{BC = \sqrt{37}}$

(2)　$\sin A = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3)　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 7\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathbf{7\sqrt{3}}$

10.13 平成 20 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 - 5x + 1$，$B = -2x^2 + 3x - 3$ とするとき，$2A - 3B$ を計算しなさい。

(2) $2(x + y)^2 - x - y - 6$ を因数分解しなさい。

(3) $-54xy^2 \times \left(-\dfrac{1}{3}x^2y\right)^3$ を計算しなさい。

(4) $\sqrt{6} = 2.449$ とするとき，$(2\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ の値を計算しなさい。

問題 2 次の問いに答えなさい。

(1) 不等式 $2x - (5x + 2) < 10$ を解きなさい。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} -3x + 2 < x - 1 \\ 4x + 5 > x + 9 \end{cases}$ を解きなさい。

(3) 1 個 180 円のケーキと，1 個 90 円のまんじゅうを合わせて 10 個を 1,500 円以下で購入したい。ケーキは何個まで買えるか答えなさい。

問題 3 2 次関数 $y = 3x^2 - 6x - 24$ のグラフについて，次の問いに答えなさい。

(1) 頂点の座標を求めなさい。

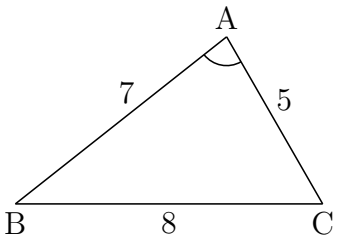
(2) x 軸との交点の座標を求めなさい。

問題 4 △ABC において，3 辺の長さが AB = 7，AC = 5，BC = 8 であるとき，次の問いに答えなさい。

(1) $\cos A$ の値を求めなさい。

(2) $\sin A$ の値を求めなさい。

(3) △ABC の面積を求めなさい。



解答例

問題 1 (1) $2A-3B=2(x^2-5x+1)-3(-2x^2+3x-3)$

$=2x^2-10x+2+6x^2-9x+9$

$=\boldsymbol{8x^2-19x+11}$

(2) $2(x+y)^2-x-y-6=2(x+y)^2-(x+y)-6$

$=\{(x+y)-2\}\{2(x+y)+3\}$

$=\boldsymbol{(x+y-2)(2x+2y+3)}$

(3) $-54xy^2\times\left(-\dfrac{1}{3}x^2y\right)^3=-54xy^2\times\left(-\dfrac{1}{27}x^6y^3\right)=\boldsymbol{2x^7y^5}$

(4) $(2\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})=1-\sqrt{6}=1-2.449=\boldsymbol{-1.449}$

問題 2 (1)　$2x-(5x+2)<10$

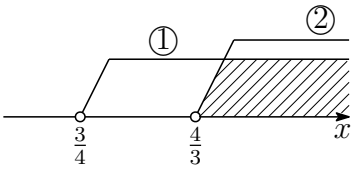
整理すると　$-3x<12$

両辺を -3 で割って　$\boldsymbol{x>-4}$

(2) $-3x+2<x-1$ から　$x>\dfrac{3}{4}$　$\cdots$①

$4x+5>x+9$ から　$x>\dfrac{4}{3}$　$\cdots$②

① と ② の共通部分を求めて　$\boldsymbol{x>\dfrac{4}{3}}$



(3) ケーキを x 個買うとすると，まんじゅうは $(10-x)$ 個買うことになる．条件から

$$180x+90(10-x)\leqq 1500$$

整理すると　$90x\leqq 600$

よって　$x\leqq\dfrac{600}{90}=6.6\cdots$

x は整数であるから　$x\leqq 6$　よって　**6 個**

問題 3 (1) $y = 3x^2 - 6x - 24$ を変形すると $y = 3(x-1)^2 - 27$

よって，頂点の座標は **$(1, -27)$**

(2) x 軸との共有点の x 座標は，$y = 0$ を代入して

$3x^2 - 6x - 24 = 0$ これを解いて $x = -2,\ 4$

よって，x 軸との共有点の座標は **$(-2,\ 0)$, $(4,\ 0)$**

問題 4 (1) 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \boldsymbol{\frac{1}{7}}$$

(2) $\sin A > 0$ であるから

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

(3) $\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} bc \sin A = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = \boldsymbol{10\sqrt{3}}$

10.14　平成 19 年度推薦試験 (45 分) 第 1 回

問題 1　次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^3 + 6x^2 - 2x + 3$，$B = -x^3 + 3x^2 + 4$ のとき，$A - 2B$ を計算しなさい。

(2) $ax - 3x - 4a + 12$ を因数分解しなさい。

(3) $a^2x^2 - 256$ を因数分解しなさい。

(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}$ を計算しなさい。

問題 2　次の方程式と不等式を解きなさい。

(1) $0.3x + 0.55 = 0.25x + 1.05$

(2) $3(x+1) = x(x+3)$

(3) $-6x > 12$

(4) $3x \leqq 0$

(5) $\dfrac{2}{5}x - \dfrac{2x-1}{4} < \dfrac{x+1}{2} - 1$

問題 3　毎秒 60m の速さで真上に打ち上げた物体の x 秒後の高さを y m とすると，y は $y = -5x^2 + 60x$ で表される。このとき，次の問いに答えなさい。

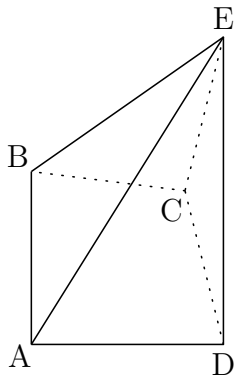
(1) この物体が最高点に達するのは，何秒後か求めなさい。また，そのときの高さは何 m か求めなさい。

(2) この物体の高さが，55m 以上，135m 以下であるような x の範囲を求めなさい。

問題 4 図のような四角錐 ABCDE がある。$\angle ADE = \angle BCE = 90°$，$\angle AED = 30°$，$\angle BEC = 45°$，$\angle AEB = 60°$，$DE = 3\sqrt{3}$，$CE = \sqrt{2}$ のとき，次の問いに答えなさい。

(1) AB の長さを求めなさい。

(2) △ABE の面積を求めなさい。



解答例

問題 1 (1) $A-2B=(x^3+6x^2-2x+3)-2(-x^3+3x^2+4)$
$=x^3+6x^2-2x+3+2x^3-6x^2-8$
$=3x^3-2x-5$

(2) $ax-3x-4a+12=x(a-3)-4(a-3)$
$=(a-3)(x-4)$

(3) $a^2x^2-256=(ax)^2-16^2$
$=(ax+16)(ax-16)$

(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{2}-1)+(3-\sqrt{3})(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$
$=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{3}+3\sqrt{2}+3-\sqrt{6}-\sqrt{3}}{2-1}$
$=3+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

問題 2 (1) $0.3x+0.55=0.25x+1.05$
両辺に 100 をかけて　$30x+55=25x+105$
移項して整理すると　$5x=50$
両辺を 5 で割って　$x=10$

(2) $3(x+1)=x(x+3)$
展開して　$3x+3=x^2+3x$
整理すると　$x^2=3$
ゆえに　$x=\pm\sqrt{3}$

(3) $-6x>12$
両辺を -6 で割って　$x<-2$

(4) $3x\leqq 0$
両辺を 3 で割って　$x\leqq 0$

(5) $\dfrac{2}{5}x-\dfrac{2x-1}{4}<\dfrac{x+1}{2}-1$
両辺に 20 をかけて　$8x-5(2x-1)<10(x+1)-20$
ゆえに　$8x-10x+5<10x+10-20$
移項して整理すると　$-12x<-15$
両辺を -12 で割って　$x>\dfrac{5}{4}$

問題 3 (1) $y = -5x^2 + 60x$

$= -5(x^2 - 12x)$

$= -5\{(x-6)^2 - 6^2\}$

$= -5(x-6)^2 + 180$

よって，6 秒後に最高点に達し，その高さは 180m

(2) $55 \leqq -5x^2 + 60x \leqq 135$ であるから，次の連立不等式を解く．

$$\begin{cases} -5x^2 + 60x \geqq 55 \\ -5x^2 + 60x \leqq 135 \end{cases}$$

第 1 式から $x^2 - 12x + 11 \leqq 0$

ゆえに $(x-1)(x-11) \leqq 0$

よって $1 \leqq x \leqq 11 \quad \cdots ①$

第 2 式から $x^2 - 12x + 27 \geqq 0$

ゆえに $(x-3)(x-9) \geqq 0$

よって $x \leqq 3,\ 9 \leqq x \quad \cdots ②$

① と ② の共通範囲を求めて $1 \leqq x \leqq 3$，$9 \leqq x \leqq 11$

問題 4 (1) $\angle AED = 30^\circ$ の直角三角形 AED において，$EA : DE = 2 : \sqrt{3}$

ゆえに $DE = 3\sqrt{3}$ より $EA = 6$

$\angle BEC = 45^\circ$ の直角三角形 BEC において，$EB : CE = \sqrt{2} : 1$

ゆえに $CE = \sqrt{2}$ より $EB = 2$

よって，△EAB に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} AB^2 &= EA^2 + EB^2 - 2 \cdot EA \cdot EB \cos \angle AEB \\ &= 6^2 + 2^2 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \times \cos 60^\circ \\ &= 36 + 4 - 2 \cdot 6 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 28 \end{aligned}$$

$AB > 0$ であるから $AB = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

(2) $\triangle EAB = \dfrac{1}{2} EA \cdot EB \sin \angle AEB$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \sin 60^\circ$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 6 \cdot 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

10.15　平成 19 年度推薦試験 (45 分) 第 2 回

問題 1　次の問いに答えなさい。

(1)　$(x-y)^2-5x+5y+4$ を因数分解せよ。

(2)　$(a-b-c)^2$ を展開しなさい。

(3)　$-8a^2b\times\left(\dfrac{1}{2}ab\right)^3$ を計算しなさい。

(4)　$\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ を計算しなさい。

問題 2　次の方程式と不等式を解きなさい。

(1)　$0.2x-0.55=0.25x-1.35$

(2)　$5(x+1)=x(x+5)$

(3)　$-3x<12$

(4)　$5x\geqq 0$

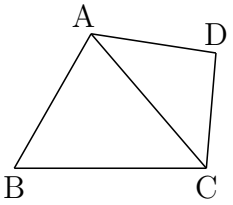
(5)　$\dfrac{2}{3}x-\dfrac{x-1}{5}<\dfrac{-3x+1}{15}-1$

問題 3　次の問いに答えなさい。

(1)　グラフが，x 軸と 2 点 $(-4,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わり，頂点の y 座標が 18 であるような 2 次関数を求めなさい。

(2)　放物線 $y=2x^2+3x-1$ を，x 軸方向に 3，y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めなさい。

問題 4　図のような四角形 ABCD がある。AB $=16$，BC $=20$，AD $=9\sqrt{2}$，$\angle$ABC $=60^\circ$，$\angle$CAD $=45^\circ$ のとき，次の問いに答えなさい。



(1)　AC の長さを求めなさい。

(2)　△ACD の面積を求めなさい。

解答例

問題 1 (1)
$$\begin{aligned}&(x-y)^2-5x+5y+4\\&=(x-y)^2-5(x-y)+4\\&=\{(x-y)-1\}\{(x-y)-4\}\\&=(x-y-1)(x-y-4)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}(a-b-c)&=\{(a-b)-c\}^2\\&=(a-b)^2-2(a-b)c+c^2\\&=a^2-2ab+b^2-2ca+2bc+c^2\\&=a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca\end{aligned}$$

(3)
$$-8a^2b\times\left(\frac{1}{2}ab\right)^3=-8a^2b\times\frac{1}{8}a^3b^3=-a^5b^4$$

(4)
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}&=\frac{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}\\&=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{3}+1}{3-1}=\frac{2}{2}=1\end{aligned}$$

問題 2 (1)
$$0.2x-0.55=0.25x-1.35$$
両辺に 100 をかけて
$$20x-55=25x-135$$
移項して整理すると
$$-5x=-80$$
両辺を -5 で割って
$$x=16$$

(2)
$$5(x+1)=x(x+5)$$
展開して
$$5x+5=x^2+5x$$
整理すると
$$x^2=5$$
ゆえに
$$x=\pm\sqrt{5}$$

(3)
$$-3x<12$$
両辺を -3 で割って
$$x>-4$$

(4)
$$5x\geqq 0$$
両辺を 5 で割って
$$x\geqq 0$$

(5)
$$\frac{2}{3}x-\frac{x-1}{5}<\frac{-3x+1}{15}-1$$
両辺に 15 をかけて
$$10x-3(x-1)<-3x+1-15$$
ゆえに
$$10x-3x+3<-3x+1-15$$
移項して整理すると
$$10x<-17$$
両辺を 10 で割って
$$x<-\frac{17}{10}$$

問題 3　(1)　グラフが x 軸と 2 点 $(-4,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$$y = a(x+4)(x-2)$$

と表される。これを変形すると

$$\begin{aligned} y &= a(x^2+2x-8) \\ &= a\{(x+1)^2-9\} \\ &= a(x+1)^2-9a \end{aligned}$$

頂点の y 座標が 18 であるから

$$-9a = 18 \quad \text{これを解いて} \quad a = -2$$

よって　　$y = -2(x+1)^2+18$

(2)　求める放物線の方程式は

$$y+2 = 2(x-3)^2+3(x-3)-1$$

よって　　$y = 2x^2-9x+6$

問題 4　(1)　△ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B \\ &= 16^2+20^2-2\cdot16\cdot20\cos 60^\circ \\ &= 256+400-2\cdot16\cdot20\times\frac{1}{2} \\ &= 336 \end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathrm{AC} = \sqrt{336} = 4\sqrt{21}$

(2)　$\triangle\mathrm{ACD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{AD}\sin\angle\mathrm{CAD}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\cdot4\sqrt{21}\cdot9\sqrt{2}\sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2}\cdot4\sqrt{21}\cdot9\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 18\sqrt{21} \end{aligned}$$

10.16 平成 18 年度推薦試験 (45 分)

問題 1 次の問いに答えなさい。

(1) $A = x^2 - 4x + 5$，$B = -2x^2 + x - 3$ のとき，$-A + 3B$ を計算しなさい。

(2) $2x^2 + 9xy + 4y^2 - 5x - 13y + 3$ を因数分解しなさい。

(3) $\sqrt{2} = 1.414$ とするとき，$\dfrac{3}{2\sqrt{2}}$ を有理化して計算しなさい。

(4) $x = 2 - \sqrt{3}$，$y = 2 + \sqrt{3}$ のとき，$x^2 - y^2$ の値を求めなさい。

問題 2 任意の 2 つの実数 a，b について，$a < b$ であるとき，次の$\square$に不等号を 1 つずつ入れて大小関係を示しなさい。ただし，判定不能 (不等号が複数入る場合等) なものには，$\times$ を入れなさい。

(1) $2a - 1 \square 2b - 1$

(2) $5 - a \square 5 - b$

(3) $a^4 \square b^4$

(4) $a(b-2) \square b(a-2)$

(5) $-0.4a \square -0.4b$

問題 3 放物線 $y = ax^2 + 2ax + a + 1$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に b だけ平行移動して得られたグラフがある。次の問いに答えなさい。ただし，$a > 0$ とする。

(1) 平行移動して得られたグラフを表わす 2 次関数を求めなさい。

(2) (1) で求めた 2 次関数が，$1 \leqq x \leqq 4$ の定義域で最大値 5，最小値 -2 をもつように定数 a，b の値を定めなさい。

問題 4 △ABC において，AB = 10，AC = 6，∠A = 120° とするとき，次の問いに答えなさい。

(1) 辺 BC の長さを求めなさい。

(2) △ABC の面積を求めなさい。

解答例

問題 1 (1) $-A+3B=-(x^2-4x+5)+3(-2x^2+x-3)$
$=-x^2+4x-5-6x^2+3x-9$
$=(-1-6)x^2+(4+3)x+(-5-9)$
$=-7x^2+7x-14$

(2) x について整理して因数分解する.

$2x^2+9xy+4y^2-5x-13y+3$
$=2x^2+(9y-5)x+(4y^2-13y+3)$
$=2x^2+(9y-5)x+(y-3)(4y-1)$
$=\{x+(4y-1)\}\{2x+(y-3)\}$
$=(x+4y-1)(2x+y-3)$

1	╲	$4y-1$	$\longrightarrow$ $8y-2$
2	╱	$y-3$	$\longrightarrow$ $y-3$
2		$(y-3)(4y-1)$	$9y-5$

(3) $\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}=\dfrac{3\times1.414}{4}=\dfrac{4.242}{4}=1.0605$

(4) $x^2-y^2=(2-\sqrt{3})^2-(2+\sqrt{3})^2$
$=(4-4\sqrt{3}+3)-(4+4\sqrt{3}+3)$
$=-8\sqrt{3}$

【別解】$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$
$=\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})\}\{(2-\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})\}$
$=4\times(-2\sqrt{3})=-8\sqrt{3}$

問題 2 (1)
$a<b$
両辺に 2 をかけて　$2a<2b$
両辺から 1 を引いて　$2a-1<2b-1$

(2)
$a<b$
両辺に -1 をかけて　$-a>-b$
両辺に 5 をたして　$5-a>5-b$

(3) $a=1$，$b=2$ のとき $a^4<b^4$
$a=-2$，$b=1$ のとき $a^4>b^4$

(4)
$a<b$
両辺に -2 をかけて　$-2a>-2b$
両辺に ab をたして　$ab-2a>ab-2b$
$a(b-2)>b(a-2)$

(5)
$a<b$
両辺に -0.4 をかけて　$-0.4a>-0.4b$

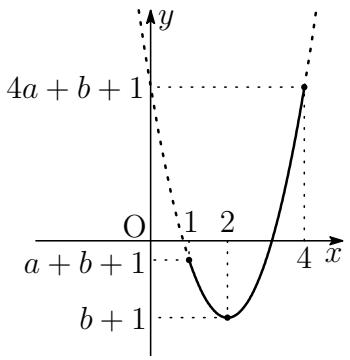
(答) (1) $<$　(2) $>$　(3) $\times$　(4) $>$　(5) $>$

問題 3 (1) $f(x)=ax^2+2ax+a+1$ とおくと，放物線 $y=f(x)$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に b だけ平行移動したものは，$y=f(x-3)+b$ である．

$$\begin{aligned} f(x-3)+b &= a(x-3)^2+2a(x-3)+a+1+b \\ &= ax^2-6ax+9a+2ax-6a+a+1+b \\ &= ax^2-4ax+4a+b+1 \end{aligned}$$

したがって，求める 2 次関数は　$y=ax^2-4ax+4a+b+1$

(2)
$$\begin{aligned} y &= ax^2-4ax+4a+b+1 \\ &= a(x^2-4x)+4a+b+1 \\ &= a\{(x-2)^2-2^2\}+4a+b+1 \\ &= a(x-2)^2-4a+4a+b+1 \\ &= a(x-2)^2+b+1 \end{aligned}$$



したがって，$1 \leqq x \leqq 4$ の範囲で

$x=4$ で最大値 $4a+b+1$ をとり，

$x=2$ で最小値 $b+1$ をとる．

このとき，$4a+b+1=5$，$b+1=-2$

これを解いて　$a=\dfrac{7}{4}$，$b=-3$

グラフの平行移動

一般に，関数 $y=f(x)$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，次の関数のグラフになる．

$$y=f(x-p)+q$$

たとえば，$f(x)=2x^2+3x+1$，$p=1$，$q=3$ のとき

$$\begin{aligned} f(x-1)+3 &= 2(x-1)^2+3(x-1)+1+3 \\ &= 2x^2-x+3 \end{aligned}$$

となるから，移動後の放物線は，次の 2 次関数のグラフになる．

$$y=2x^2-x+3$$

問題 4 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= 6^2 + 10^2 - 2{\cdot}6{\cdot}10\cos 120^\circ \\ &= 36 + 100 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 196 \end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから　$\mathrm{BC} = \sqrt{196} = 14$

(2) $\triangle$ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}{\cdot}6{\cdot}10\sin 120^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

第 11 章　崇城大学 (数学)

11.1　平成 31 年度推薦試験 (60 分)

1 次の問に答えよ.

(1) 放物線 $y = x^2 + ax + 3$ が点 $(1,\ 6)$ を通るとき，定数 a の値を求めよ．また，この放物線を x 軸方向に 3，y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ.

(2) $a = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のとき，$a^2 + a - 1$ の値を求めよ.

(3) △ABC において，AB $= 3$，BC $= 2$，AC $= 4$ であるとき，$\cos A$ の値と △ABC の面積を求めよ.

2 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + a + 4$ (a は定数) について，次の各問に答えよ.

(1) $a = -3$ のとき，この 2 次関数のグラフと x 軸との共有点の座標を求めよ.

(2) この 2 次関数の最小値が 2 以上になるように，a の値の範囲を求めよ.

3 AD//BC の台形 ABCD において，AB $= 5$，BC $= 6$，AD $= 3$，$\angle$ABC $= 60^\circ$ であるとき，次の各問に答えよ.

(1) 対角線 AC，BD の長さを求めよ.

(2) △ACD の面積を求めよ.

解答例

1　(1) 放物線 $y = x^2 + ax + 3$ が点 $(1,\ 6)$ を通るから

$$6 = 1^2 + a\cdot 1 + 3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 2}$$

放物線の方程式は，$y = x^2 + 2x + 3$ であるから

$$y = (x+1)^2 + 2 \quad \text{頂点の座標は} \quad (-1,\ 2)$$

平行移動後の頂点は $(-1+3, -1+2)$，すなわち，$(2,\ 1)$

よって，求める放物線の方程式は，x^2 の係数に注意して

$$\boldsymbol{y = (x-2)^2 + 1}$$

(2) $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より，$2a + 1 = \sqrt{5}$ の両辺を平方すると

$$(2a+1)^2 = 5 \quad \text{整理すると} \quad \boldsymbol{a^2 + a - 1 = 0}$$

(3) $a = 2$，$b = 4$，$c = 3$ より，△ABC に余弦定理を適用すると

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{4^2 + 3^2 - 2^2}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{21}{24} = \boldsymbol{\frac{7}{8}}$$

$\sin A > 0$ より　$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{8}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{8}$

よって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\cdot \dfrac{\sqrt{15}}{8} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{15}}{5}}$

2　(1) $a = -3$ のとき，2 次関数は　$y = x^2 + 6x + 1$

このグラフの x 軸との共有点の x 座標は，$x^2 + 6x + 1 = 0$ を解いて

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \boldsymbol{-3 \pm 2\sqrt{2}}$$

(2) $y = x^2 - 2ax + a + 4$ より　$y = (x-a)^2 - a^2 + a + 4$

この 2 次関数の最小値が 2 以上であるから

$$-a^2 + a + 4 \geqq 2 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - a - 2 \leqq 0$$

したがって　$(a+1)(a-2) \leqq 0$　よって　$\boldsymbol{-1 \leqq a \leqq 2}$

3 (1) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos 60^\circ = 5^2 + 6^2 - 2\cdot 5\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 31$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathbf{AC = \sqrt{31}}$

AD//BC，$\mathrm{ABC} = 60^\circ$ より，$\angle\mathrm{BAD} = 120^\circ$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos 120^\circ \\ &= 5^2 + 3^2 - 2\cdot 5\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 49\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathbf{BD = 7}$

(2) A から BC に下ろした垂線 AH を引くと

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\sin B = 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

よって　$\triangle\mathrm{ACD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{AH} = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{5\sqrt{3}}{2} = \mathbf{\dfrac{15}{4}\sqrt{3}}$

11.2　平成 30 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ．

(1) $(x+1)(x-3)(2x^2+x-1)$ を展開せよ．

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$ および $\sin\theta + \cos\theta$ を求めよ．

(3) $x+1=y$ のとき，$x(y+3)$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．また，$-4x^2+y^2$ の最大値とそのときの x の値を求めよ．

2 放物線 $y=x^2+(a+3)x+5$ (a は定数) について，次の各問に答えよ．

(1) $a=1$ のとき，この放物線を y 軸に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ．

(2) この放物線が x 軸と共有点をもたないような a の値の範囲を求めよ．

3 $\triangle$ABC において，$\mathrm{AB}=3\sqrt{2}$，$\mathrm{BC}=4$，$\angle\mathrm{B}=45^\circ$ である．次の各問に答えよ．

(1) 辺 AC の長さと $\triangle$ABC の面積を求めよ．

(2) 辺 BC 上に $\angle\mathrm{ADB}=120^\circ$ であるように点 D をとるとき，線分 AD の長さを求めよ．

解答例

1 (1) $(x+1)(x-3)(2x^2+x-1) = (x^2-2x-3)(2x^2+x-1)$
$= \boldsymbol{2x^4-3x^2-9x^2-x+3}$

(2) $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を平方すると

$$1-2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}}$$

上式および $\sin\theta > 0$ であるから，$\cos\theta > 0$

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = 1+2\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{2}$$

$\sin\theta+\cos\theta > 0$ であるから $\quad \boldsymbol{\sin\theta+\cos\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{2}}$

(3) $y = x+1$ より $\quad x(y+3) = x(x+4) = (x+2)^2-4$
よって，$\boldsymbol{x=-2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-4}$ をとる．

同様に $\quad -4x^2+y^2 = -4x^2+(x+1)^2 = -3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}$

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{3}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる．

2 (1) $a=1$ のとき，放物線の方程式は $\quad y = x^2+4x+5$
これを y 軸に関して対称移動した方程式は $\quad \boldsymbol{y = x^2-4x+5}$

(2) $y = x^2+(a+3)x+5$ が x 軸と共有点をもたないとき，係数について

$$(a+3)^2-4\cdot1\cdot5 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{-3-2\sqrt{5} < a < -3+2\sqrt{5}}$$

3 (1) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = (3\sqrt{2})^2+4^2-2\cdot3\sqrt{2}\cdot4\cos45^\circ = 10$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから $\quad \mathbf{AC = \sqrt{10}}$

$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot4\sin45^\circ = \mathbf{6}$

(2) △ABD に正弦定理を適用すると $\quad \dfrac{\mathrm{AD}}{\sin45^\circ} = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sin120^\circ}$

よって $\quad \mathrm{AD} = \dfrac{3\sqrt{2}\sin45^\circ}{\sin120^\circ} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$

11.3　平成 29 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ．

(1) 2 次関数 $y = 3x^2 + ax + b$ のグラフが 2 点 $(4,\ 3)$，$(5,\ 0)$ を通るとき，定数 a，b の値を求めよ．

(2) $x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 3y + 2$ を因数分解せよ．

(3) △ABC において，AB : BC : CA $= (1 + \sqrt{3}) : \sqrt{6} : 2$ のとき，∠A の大きさを求めよ．また，$\sin B$ の値を求めよ．

2 放物線 $y = x^2 + ax + b$ ($a,\ b$ は定数) について，次の各問に答えよ．

(1) この放物線の頂点の座標を求めよ．

(2) この放物線が点 $(-1,\ 2)$ を通り，頂点が $y = x + 1$ 上にあるような a，b の値を求めよ．

3 平行四辺形 ABCD において，AB $= 1$，BC $= 3$ であり，対角線 AC の長さが $2\sqrt{2}$ のとき，次の各問に答えよ．

(1) $\cos$∠ABC の値と，この平行四辺形の面積を求めよ．

(2) 対角線 BD の長さを求めよ．

解答例

1 (1) $y = 3x^2 + ax + b$ が 2 点 $(4,\ 3)$，$(5,\ 0)$ を通るから

$$3 = 3\cdot 4^2 + a\cdot 4 + b, \quad 0 = 3\cdot 5^2 + a\cdot 5 + b$$

整理すると　$4a + b = -45$，$5a + b = -75$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -30,\ b = 75}$

(2)　$x^2 + 2xy + 3x + y^2 + 3y + 2$

$= x^2 + (2y + 3)x + (y + 1)(y + 2)$

$= (x + y + 1)(x + y + 2)$

(3) $\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = (1 + \sqrt{3}) : \sqrt{6} : 2$ より，$\mathrm{AB} = (1 + \sqrt{3})k$，$\mathrm{BC} = \sqrt{6}k$，$\mathrm{CA} = 2k$ $(k > 0)$ とおくと

$$\cos A = \frac{(2k)^2 + \{(1 + \sqrt{3})k\}^2 - (\sqrt{6}k)^2}{2\cdot 2k\cdot (1 + \sqrt{3})k} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より　$\boldsymbol{A = 60^\circ}$

また，正弦定理により　$\dfrac{\sqrt{6}k}{\sin A} = \dfrac{2k}{\sin B}$

よって　$\sin B = \dfrac{2k}{\sqrt{6}k}\sin A = \dfrac{2}{\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

2 (1) $y = x^2 + ax + b$ を変形すると

$$y = x^2 + ax + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} + b$$
$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

よって．求める頂点の座標は　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{a}{2}, -\dfrac{a^2}{4} + b\right)}$

(2) 放物線が点 $(-1,\ 2)$ を通るから

$$2 = (-1)^2 + a\cdot(-1) + b \quad \text{ゆえに} \quad b = a + 1 \quad \cdots ①$$

(1) で求めた頂点が直線 $y = x + 1$ 上にあるから

$$-\frac{a^2}{4} + b = -\frac{a}{2} + 1 \quad \text{ゆえに} \quad b = \frac{a^2}{4} - \frac{a}{2} + 1 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$\boldsymbol{(a,\ b) = (0,\ 1),\ (6,\ 7)}$

3　(1)　△ABC に余弦定理を適用して

$$\cos\angle\mathrm{ABC}=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{1+9-8}{2\cdot1\cdot3}=\boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$$\sin\angle\mathrm{ABC}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{ABC}}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，平行四辺形 ABCD の面積は

$$\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin\angle\mathrm{ABC}=1\cdot3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\boldsymbol{2\sqrt{2}}$$

(2)　$\angle\mathrm{BCD}=180^\circ-\angle\mathrm{ABC}$ より

$$\cos\angle\mathrm{BCD}=\cos(180^\circ-\angle ABC)=-\cos\angle\mathrm{ABC}=-\frac{1}{3}$$

△BCD に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2&=\mathrm{BC}^2+\mathrm{CD}^2-2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\cos\angle\mathrm{BCD}\\&=9+1-2\cdot3\cdot1\left(-\frac{1}{3}\right)=12\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\mathrm{BD}=2\sqrt{3}}$

11.4 平成 28 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ.

(1) 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} 3x+\sqrt{2} \geqq -x+\sqrt{18} \\ x+\sqrt{80} \geqq 3x+\sqrt{45} \end{cases}$$

(2) 2 次関数 $y=x^2-4x+m^2-3m$ について，y の値がつねに正であるように，定数 m の値の範囲を定めよ.

(3) 平行四辺形 ABCD において，BC $=5$，CD $=3$，対角線 BD $=6$ のとき，$\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ.

2 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは，3 点 $(-1,\ 12)$，$(1,\ 0)$，$(2,-3)$ を通る．次の各問に答えよ.

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ.

(2) この 2 次関数の $0 \leqq x \leqq k+1$ における最小値が，定数 k の値によってどのように変わるか調べよ．ただし，$k>-1$ とする.

3 △ABC において，AB $=4$，AC $=3$，∠A $=60^\circ$ である．次の各問に答えよ.

(1) 辺 BC の長さと △ABC の面積を求めよ.

(2) ∠A の二等分線が辺 BC と交わる点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ.

解答例

1　(1) 第 1 式より　$4x \geqq 2\sqrt{2}$　ゆえに　$x \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　$\cdots$①

第 2 式より　$-2x \geqq -\sqrt{5}$　ゆえに　$x \leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

(2) $y = x^2 - 4x + m^2 - 3m$ より　$y = (x-2)^2 + m^2 - 3m - 4$

このグラフが常に x 軸より上側にあるから

$$m^2 - 3m - 4 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (m+1)(m-4) > 0$$

よって　　$\boldsymbol{m < -1,\ 4 < m}$

(3) $\angle \mathrm{A} = \angle \mathrm{C}$ であるから，余弦定理により

$$\cos A = \cos C = \frac{5^2 + 3^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \boldsymbol{-\frac{1}{15}}$$

また　　$\sin A = \sqrt{1 - \left(-\dfrac{1}{15}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{16}{15} \cdot \dfrac{14}{15}} = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{14}}{15}}$

2　(1) 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが，3 点 $(-1,\ 12)$，$(1,\ 0)$，$(2, -3)$ を通るから

$$\begin{cases} a - b + c = 12 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = -3 \end{cases}$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = -6,\ c = 5}$

(2) (1) の結果から，与えられた 2 次関数は　$y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$

$0 < k + 1 < 3$　すなわち　$-1 < k < 2$ のとき

$x = k + 1$ で最小値 $(k + 1 - 3)^2 - 4 = \boldsymbol{k^2 - 4k}$

$3 \leqq k + 1$　すなわち　$2 \leqq k$ のとき

$x = 3$ で最小値 $\boldsymbol{-4}$

3 (1) 余弦定理により　$\mathrm{BC}^2 = 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 60^\circ = 13$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから　$\mathrm{BC} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$

また　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin 60^\circ = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$

(2) $x = \mathrm{AD}$ とおくと，$\triangle \mathrm{ABD} + \triangle \mathrm{ACD} = \triangle \mathrm{ABC}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\sin 30^\circ + \frac{1}{2}\cdot 3\cdot x\sin 30^\circ = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3\sin 60^\circ$$

$$x + \frac{3}{4}x = 3\sqrt{3}$$

よって　　$\mathrm{AD} = x = \boldsymbol{\dfrac{12}{7}\sqrt{3}}$

11.5　平成 27 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ．

(1) $x = 3 + 2\sqrt{2}$，$y = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき，xy と $\dfrac{y}{x} + \dfrac{x}{y}$ の値を求めよ．

(2) 2 次関数 $y = -x^2 - 2x + 1$ の $-3 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値およびそのときの x の値を求めよ．

(3) △ABC において，$\angle \mathrm{A} = 135°$，$\angle \mathrm{B} = 15°$，$\mathrm{BC} = 6$ である．$\sin A$，$\cos A$ の値および辺 AB の長さを求めよ．

2 放物線 $y = ax^2 + ax + a - 2$ (a は定数) について，次の各問いに答えよ．

(1) この放物線の頂点の座標を求めよ．

(2) この放物線が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ．

3 平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{BC} = 5$，$\angle \mathrm{ABC} = 60°$ であるとき，次の各問に答えよ．

(1) 対角線 AC の長さと △ABD の面積を求めよ．

(2) $\sin \angle \mathrm{ABD}$ の値を求めよ．

解答例

1 (1) $x+y=(3+2\sqrt{2})+(3-2\sqrt{2})=6$

$xy=(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=3^2-(2\sqrt{2})^2=\mathbf{1}$

したがって $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=6^2-2\cdot 1=\mathbf{34}$

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{34}{1}=\mathbf{34}$$

(2) $y=-x^2-2x+1=-(x+1)^2+2$

$-3\leqq x\leqq 3$ より，$\boldsymbol{x=-1}$ のとき最大値 $\mathbf{2}$，$\boldsymbol{x=3}$ のとき最小値 $\mathbf{-14}$

(3) $\sin A=\sin 135^\circ=\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$, $\quad\cos A=\cos 135^\circ=-\dfrac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{2}}}$

$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-(135^\circ+15^\circ)=30^\circ$

正弦定理により $\quad\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$

したがって $\quad\dfrac{6}{\sin 135^\circ}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 30^\circ}\quad$ ゆえに $\quad\mathrm{AB}=\dfrac{6\sin 30^\circ}{\sin 135^\circ}=\mathbf{3\sqrt{2}}$

2 (1) $y=ax^2+ax+a-2$ より $\quad y=a\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}a-2$

よって，頂点の座標は $\quad\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}},\ \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}\boldsymbol{a}-\mathbf{2}\right)$

(2) (1) の結果から，$a<0$ のとき $\dfrac{3}{4}a-2<0$ より，x 軸との共有点はない．

$a>0$ のとき，放物線が x 軸の負の部分と異なる 2 点で交わるのは

$$\frac{3}{4}a-2>0\ \text{ かつ }\ a-2<0\quad\text{すなわち}\quad\mathbf{2<a<\frac{8}{3}}$$

3　(1) △ABC に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{AC}^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 60^\circ = 19$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　　$\boldsymbol{\mathrm{AC} = \sqrt{19}}$

また　$\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\sin 120^\circ = \boldsymbol{\dfrac{15\sqrt{3}}{4}}$

(2) △ABD に余弦定理を適用すると

$$\mathrm{BD}^2 = 3^2 + 5^2 - 2\cdot 3\cdot 5\cos 120^\circ = 49$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　　$\mathrm{BD} = 7$

$\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BD}\sin\angle\mathrm{ABD}$ であるから

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\sin\angle\mathrm{ABD}　\text{よって}　\sin\angle\mathrm{ABD} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

11.6 平成 26 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ.

(1) 2 つの 2 次方程式 $x^2+ax+2a=0$, $x^2+2ax+a+2=0$ のうち, 一方だけが実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ.

(2) 放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ を x 軸方向に a, y 軸方向に 2 だけ平行移動してできる放物線が点 $(2,\ 6)$ を通るとき, 定数 a の値を求めよ.

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする. $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき, $\sin\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ.

2 グラフが 3 点 $(-2,-1)$, $(2,\ 3)$, $(4,-1)$ を通る 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ について, 次の各問に答えよ.

(1) 定数 a, b, c の値を求めよ.

(2) この 2 次関数の $-2 \leqq x \leqq 3$ における最大値, 最小値とそのときの x の値を求めよ.

3 $\triangle$ABC において, AB $=1+\sqrt{3}$, AC $=\sqrt{2}$, $\angle$A $=45^\circ$ である. 次の各問に答えよ.

(1) 辺 BC の長さを求めよ.

(2) $\angle$B の大きさと $\triangle$ABC の面積を求めよ.

解答例

1　(1) 2 つの 2 次方程式 $x^2+ax+2a=$，$x^2+2ax+a+2$ の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$$D_1 = a^2 - 4\cdot1\cdot2a = a(a-8)$$
$$D_2/4 = a^2 - 1\cdot(a+2) = (a+1)(a-2)$$

「$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 < 0$」または「$D_1 < 0$ かつ $D_2 \geqq 0$」であるから

$$\begin{cases} a(a-8) \geqq 0 \\ (a+1)(a-2) < 0 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} a(a-8) < 0 \\ (a+1)(a-2) \geqq 0 \end{cases}$$

よって　　$\boldsymbol{-1 < a \leqq 0,\ \ 2 \leqq a < 8}$

(2) 点 $(2,\ 6)$ を x 軸方向 $-a$，y 軸方向に -2 だけ平行移動した点 $(2-a,\ 4)$ は，放物線 $y = \dfrac{1}{4}x^2$ 上にあるから

$$4 = \frac{1}{4}(2-a)^2 \quad \text{ゆえに} \quad (a-2)^2 = 16 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = -2,\ 6}$$

(3) $\cos\theta - \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4} \quad \sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}$$

$\sin\theta$，$-\cos\theta$ を解とする 2 次方程式は　$(x-\sin\theta)(x+\cos\theta) = 0$

ゆえに　　$x^2 + (\cos\theta - \sin\theta)x - \sin\theta\cos\theta = 0$

すなわち　　$x^2 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{8} = 0$　　これを解いて　$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{7}}{4}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ であるから　$\sin\theta \geqq 0$　　よって　$\boldsymbol{\sin\theta = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{4}}$

$$-\cos\theta = \frac{-1-\sqrt{7}}{4} \quad \text{すなわち} \quad \cos\theta = \frac{1+\sqrt{7}}{4}$$

また　　$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{-1+\sqrt{7}}{4} \div \dfrac{1+\sqrt{7}}{4} = \boldsymbol{\dfrac{4-\sqrt{7}}{3}}$

2 (1) $y = ax^2 + bx + c$ は，3 点 $(-2, -1)$，$(2,\ 3)$，$(4, -1)$ を通るから

$$4a - 2b + c = -1, \quad 4a + 2b + c = 3, \quad 16a + 4b + c = -1$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{2},\ b = 1,\ c = 3}$

(2) (1) の結果から　$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + 3 = -\dfrac{1}{2}(x-1)^2 + \dfrac{7}{2}$

$-2 \leqq x \leqq 3$ において

$$\boldsymbol{x = 1 \text{ のとき最大値} \dfrac{7}{2},\quad x = -2 \text{ のとき最小値 } -1}$$

3 (1) $b = \sqrt{2}$，$c = 1 + \sqrt{3}$，$A = 45^\circ$ を余弦定理に代入すると

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ &= (\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{3})^2 - 2\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= 2 + (4 + 2\sqrt{3}) - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= 4 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから　$a = 2$　よって　$\mathbf{BC = 2}$

(2) 正弦定理により　$\dfrac{2}{\sin 45^\circ} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sin B}$　ゆえに　$\sin B = \dfrac{1}{2}$

$A = 45^\circ$ より，$B < 135^\circ$ であるから　$\boldsymbol{B = 30^\circ}$

また　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot(1+\sqrt{3})\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}}$

11.7　平成 25 年度推薦試験 (60 分)

1 次の各問に答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2 - 4x + 1$ の頂点を通る傾きが 2 の直線と，この放物線との交点の座標を求めよ．

(2) 不等式 $x^2 - 3x - 7 < x + 5 \leqq x^2 - x + 2$ を満たす整数をすべて求めよ．

(3) △ABC において，$\angle \mathrm{A} = 30^\circ$，$\mathrm{AC} = 2\sqrt{2}$，$\mathrm{BC} = 2$ であるとき，$\angle \mathrm{B}$ の大きさと △ABC の外接円の半径を求めよ．

2 2 次関数 $y = x^2 + ax + a$ (a は定数) について，次の各問に答えよ．

(1) $a = 2$ のとき，この 2 次関数の最小値を求めよ．

(2) この 2 次関数の最小値が -1 以上となるような a の値の範囲を求めよ．

3 △ABC において，$\mathrm{AB} = 5$，$\mathrm{BC} = 8$，$\angle \mathrm{B} = 60^\circ$ である．次の各問に答えよ．

(1) 辺 AC の長さを求めよ．

(2) 頂点 A から辺 BC に引いた垂線を AD とするとき，△ADC の面積を求めよ．

解答例

1 (1) $y = x^2 - 4x + 1 \cdots ①$ を変形すると $y = (x-2)^2 - 3$
この放物線の頂点 $(2, -3)$ を通り，傾き 2 の直線の方程式は

$$y - (-3) = 2(x-2) \quad \text{すなわち} \quad y = 2x - 7 \quad \cdots ②$$

交点の座標は，①，② を解いて $\mathbf{(2, -3),\ (4,\ 1)}$

(2) 与えられた不等式から

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 7 < x + 5 \\ x + 5 \leqq x^2 - x + 2 \end{cases}$$

第 1 式から $x^2 - 4x - 12 < 0$
$(x+2)(x-6) < 0$
$-2 < x < 6 \quad \cdots ①$
第 2 式から $x^2 - 2x - 3 \geqq 0$
$(x+1)(x-3) \geqq 0$
$x \leqq -1,\ 3 \leqq x \quad \cdots ②$
①，② の共通範囲を求めて $-2 < x \leqq -1,\ 3 \leqq x < 6$
これを満たす整数は $\mathbf{-1,\ 3,\ 4,\ 5}$

(3) 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = 2R$ により

$$\frac{2}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{\sin B} = 2R$$

ゆえに $R = \dfrac{2}{2\sin 30^\circ} = \dfrac{2}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \mathbf{2}$

$$\sin B = \frac{2\sqrt{2}\sin 30^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$A = 30^\circ$ より $B < 150^\circ$ に注意して $\boldsymbol{B = 45^\circ,\ 135^\circ}$

2 (1) $a = 2$ のとき $y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$
よって，$x = -1$ のとき，最小値 **1** をとる．

(2) $y = x^2 + ax + a = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + a$

この最小値 $-\dfrac{a^2}{4} + a$ が -1 以上であるから

$$-\frac{a^2}{4} + a \geqq -1 \quad \text{ゆえに} \quad a^2 - 4a - 4 \leqq 0$$

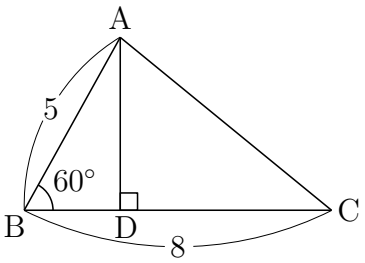
これを解いて $\mathbf{2 - 2\sqrt{2} \leqq 2 + 2\sqrt{2}}$

3　(1) 余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ &= 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cos 60^\circ \\ &= 49 \end{aligned}$$

$b > 0$ より　$\mathrm{AC} = b = \mathbf{7}$

(2) 右の図より



$$\mathrm{AD} = 5\sin 60^\circ = \frac{5}{2}\sqrt{3}$$

$$\mathrm{BD} = 5\cos 60^\circ = \frac{5}{2}$$

$$\mathrm{CD} = \mathrm{BC} - \mathrm{BD} = 8 - \frac{5}{2} = \frac{11}{2}$$

よって　　$\triangle \mathrm{ADC} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{11}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\sqrt{3} = \boldsymbol{\dfrac{55\sqrt{3}}{8}}$

11.8 平成 24 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $x^2-2ax+1-a=0$ が実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ $(90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ であるとき，$\cos\theta\sin\theta$ および $\cos\theta-\sin\theta$ の値を求めよ。

(3) △ABC において，$\angle A=90^\circ$，$AB=3$，$BC=\sqrt{13}$ である．3 辺 AB，BC，AC 上にそれぞれ点 P，Q，R があり，PQ は AC に平行であるとき，△PQR の面積が最大となる PQ の長さと，その面積を求めよ。

2 実数 x，y，z が $5x+2y-4z=3$，$3x+y-3z=2$ を満たすとき，次の各問に答えよ。

(1) x と y を z で表せ。

(2) $x^2+y^2+z^2$ の最小値とそのときの x，y，z の値を求めよ。

3 △ABC において，$AB=6$，$AC=4$，$\angle A=60^\circ$ である．辺 AC 上に $AD=1$ をとり，E を辺 BC 上の点とするとき，次の各問に答えよ。

(1) 辺 BC の長さと △ABC の面積を求めよ。

(2) 線分 DE が △ABC の面積を 2 等分するとき，線分 CE の長さを求めよ。

解答例

1　(1)　$D=(-2a)^2-4\cdot1\cdot(1-a)=4(a^2+a-1)$

$D\geqq 0$ であるから

$$a^2+a-1\geqq 0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a\leqq\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq a}$$

(2)　$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ の両辺を平方すると

$$1+2\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\cos\theta\sin\theta=-\frac{15}{32}}$$

したがって

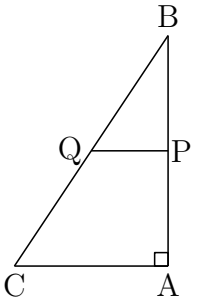
$$\begin{aligned}(\cos\theta-\sin\theta)^2&=1-2\sin\theta\cos\theta\\&=1-2\times\left(-\frac{15}{32}\right)\\&=\frac{31}{16}\end{aligned}$$

$90^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より $\cos\theta-\sin\theta\leqq0$ であるから

$$\cos\theta-\sin\theta=-\sqrt{\frac{31}{16}}=\boldsymbol{-\frac{\sqrt{31}}{4}}$$

(3)　$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{BC}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{13-9}=2$

$x=\mathrm{PQ}$ とすると $(0<x<2)$，$\mathrm{BP}=\dfrac{3}{2}x$



$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PQR}&=\frac{1}{2}\cdot x\left(3-\frac{3}{2}x\right)\\&=-\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{2}x\\&=-\frac{3}{4}(x^2-2x)\\&=-\frac{3}{4}(x-1)^2+\frac{3}{4}\end{aligned}$$

$x=1$ のとき最大値 $\dfrac{3}{4}$ をとる．

よって　　$\mathrm{PQ}=1$ のとき面積 $\dfrac{3}{4}$ をとる．

2 (1) $5x+2y-4z=3\cdots$①，$3x+y-3z=2\cdots$② とおく．

①$-$②$\times 2$ より

$$-x+2z=-1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{x=2z+1}$$

これを② に代入すると

$$3(2z+1)+y-3z=2 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=-3z-1}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (2z+1)^2+(-3z-1)^2+z^2 \\ &= 14z^2+10z+2 \\ &= 14\left(z^2+\frac{5}{7}z\right)+2 \\ &= 14\left\{\left(z+\frac{5}{14}\right)^2-\left(\frac{5}{14}\right)^2\right\}+2 \\ &= 14\left(z+\frac{5}{14}\right)^2+\frac{3}{14} \end{aligned}$$

$z=-\dfrac{5}{14}$ のとき最小値 $\dfrac{3}{14}$ をとるので，(1) の結果から

$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{7}}$，$\boldsymbol{y=\dfrac{1}{14}}$，$\boldsymbol{z=-\dfrac{5}{14}}$ のとき**最小値** $\boldsymbol{\dfrac{3}{14}}$ をとる．

3 (1) 余弦定理を △ABC に適用すると

$$\mathrm{BC}^2=6^2+4^2-2\cdot 6\cdot 4\cos 60^\circ=28$$

ゆえに $\qquad \boldsymbol{\mathrm{BC}=2\sqrt{7}}$

△ABC の面積 S は $\quad S=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\sin 60^\circ=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

(2) $\dfrac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}=k$ とおくと，$\dfrac{\mathrm{DC}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{3}{4}$ であるから

$$k\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{2}{3}$$

よって $\quad \mathrm{CE}=\mathrm{BC}\times\dfrac{2}{3}=2\sqrt{7}\times\dfrac{2}{3}=\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\sqrt{7}}$

11.9　平成 24 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 実数 x，y が $3x+y=5$ を満たすとき，xy の最大値とそのときの x，y の値を求めよ。

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

(3) 2 つの放物線 $y=-x^2+2x$ と $y=x^2+ax+b$ の頂点が一致するとき，定数 a，b の値を求めよ。

2 長さが 10 である線分 AB 上に点 P をとり，AP を直径とする円を S とし，BP を直径とする円を T とする．次の各問に答えよ。

(1) AP $=x$ として，円 S と円 T の面積をそれぞれ x を用いて表せ。

(2) この 2 つの円の面積の和を y とするとき，y の最小値とそのときの x の値を求めよ。

3 面積が 12 の $\triangle$ABC において，AB $=8$，$\angle$B $=45^\circ$ である。次の各問に答えよ。

(1) BC，AC の長さを求めよ。

(2) $\cos C$ の値を求めよ。

解答例

1 (1) $3x+y=5$ より $y=5-3x\cdots$① であるから

$$\begin{aligned} xy &= x(5-3x) \\ &= -3x^2+5x \\ &= -3\left(x^2-\frac{5}{3}x\right) \\ &= -3\left\{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right\} \\ &= -3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{25}{12} \end{aligned}$$

したがって，$x=\dfrac{5}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{25}{12}$

① より　　$\boldsymbol{x=\frac{5}{6}}$**，** $\boldsymbol{y=\frac{5}{2}}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{\frac{25}{12}}$

(2) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ であるから

$$1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2\theta}\quad \text{ゆえに}\quad \cos^2\theta=\frac{9}{25}$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$，$\tan\theta<0$ より $\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{\cos\theta=-\frac{3}{5}}$$

また　$\sin\theta=\cos\theta\tan\theta=-\dfrac{3}{5}\times\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{4}{5}}$

(3) $y=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，$y=x^2+ax+b=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)-\dfrac{a^2}{4}+b$

それぞれの頂点の座標は　$(1,\ 1)$，$\left(-\dfrac{a}{2},-\dfrac{a^2}{4}+b\right)$

これらの頂点の座標は一致するので

$$1=-\frac{a}{2},\ \ 1=-\frac{a^2}{4}+b\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{a=-2,\ b=2}$$

2　(1) AP $= x$ より，S の半径は $\dfrac{x}{2}$，T の半径は $\dfrac{10-x}{2}$ であるから

S の面積は　$\pi\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}x^2}$

T の面積は　$\pi\left(\dfrac{10-x}{2}\right) = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}(x^2-20x+100)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4}x^2 + \frac{\pi}{4}(x^2-20x+100) \\ &= \frac{\pi}{2}(x^2-10x+50) \\ &= \frac{\pi}{2}(x-5)^2 + \frac{25}{2}\pi \end{aligned}$$

$x = 5$ のとき y の最小値 $\dfrac{25}{2}\pi$

3　(1) $\dfrac{1}{2}$AB·BC$\sin B = 12$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot \mathrm{AB} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 12 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\mathrm{AB} = 3\sqrt{2}}$$

余弦定理により

$$\mathrm{AC}^2 = 8^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2\cdot 8\cdot 3\sqrt{2}\cos 45^\circ = 34$$

AC > 0 より　　**AC $= \sqrt{34}$**

(2) $a = 3\sqrt{2}$，$b = \sqrt{34}$，$c = 8$ を余弦定理に適用して

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{34})^2 - 8^2}{2\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{34}} = \boldsymbol{-\frac{1}{\sqrt{17}}}$$

11.10 平成 23 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ の 2 解を a，b $(a > b)$ とするとき，a，b および $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ の値を求めよ．

(2) 放物線 $y = x^2 - 2x + 3$ の頂点の座標を求めよ．また，この放物線を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したとき，移動後の放物線の方程式を求めよ．

(3) 連立不等式 $\begin{cases} |x| < 3 \\ x^2 - 3x - 4 < 0 \end{cases}$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

2 2 次関数 $y = x^2 + ax + b$ (a, b は定数) の表す放物線を C とする。C は点 $(3,\ 4)$ を通り，x 軸とは共有点をもたない。次の各問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq 5$ におけるこの関数の最小値が 1 であるとき，a の値を求めよ。

3 鋭角三角形 ABC において，$\mathrm{BC} = 4$，$\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 7 : 5$ で，△ABC の外接円の半径が $\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\cos A$ を求めよ。

(2) △ABC の面積を求めよ。

解答例

1　(1) 2 次方程式 $x^2-3x+1=0$ の解は

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$a,\ b\ (a>b)$ は，この 2 次方程式の解であるから

$$\boldsymbol{a=\frac{3+\sqrt{5}}{2},\quad b=\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}&=\frac{2}{3+\sqrt{5}}+\frac{2}{3-\sqrt{5}}\\&=\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}+\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}\\&=\frac{3-\sqrt{5}}{2}+\frac{3+\sqrt{5}}{2}=\boldsymbol{3}\end{aligned}$$

(2) $y=x^2-2x+3$ の右辺を変形すると　$y=(x-1)^2+2$
ゆえに，この放物線の頂点の座標は $(1,\ 2)$
この放物線を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の頂点の座標は　$(1+2,\ 2-1)$　すなわち　$(3,\ 1)$
よって，移動後の放物線の方程式は，x^2 の係数に注意して

$$\boldsymbol{y=(x-3)^2+1}$$

(3) $|x|<3$ から　$-3<x<3$　$\cdots$①
$x^2-3x-4<0$ から

$(x+1)(x-4)<0$　これを解いて　$-1<x<4$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-1<x<3}$

2 (1) $C : y = x^2 + ax + b$ は点 $(3,\ 4)$ を通るから

$$4 = 3^2 + a\cdot 3 + b \quad \text{ゆえに} \quad b = -3a - 5$$

放物線 $y = x^2 + ax - 3a - 5$ は，x 軸との共有点をもたないので

$$a^2 - 4\cdot 1\cdot(-3a - 5) \quad \text{ゆえに} \quad a^2 + 12a + 20 < 0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{-10 < a < -2}$

(2) 軸の方程式は $\quad x = -\dfrac{a}{2}$

(1) の結果から $\quad 1 < -\dfrac{a}{2} < 5$

$x^2 + ax - 3a - 5 = 1$ すなわち $x^2 + ax - 3a - 6 = 0$ は重解をもつので

$$a^2 - 4\cdot 1\cdot(-3a - 6) = 0 \quad a^2 + 12a + 24 = 0$$

(1) の結果に注意して $\quad \boldsymbol{a = -6 \pm 2\sqrt{3}}$

3 (1) $a = 4$，$R = \dfrac{7}{2\sqrt{3}}$ であるから，これを正弦定理 $2R = \dfrac{a}{\sin A}$ に適用すると

$$2 \times \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sin A} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}} \quad \cdots ①$$

△ABC は鋭角三角形より，$\cos A > 0$ であるから

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{4\sqrt{3}}{7}\right)^2} = \frac{1}{7}$$

(2) k を正の定数とし，$b = 5k$，$c = 7k$ とおく．

余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ により

$$4^2 = (5k)^2 + (7k)^2 - 2\cdot 5k\cdot 7k \times \frac{1}{7} \quad \text{ゆえに} \quad k^2 = \frac{1}{4}$$

$k > 0$ であるから $\quad k = \dfrac{1}{2} \quad$ ゆえに $\quad b = \dfrac{5}{2}$，$c = \dfrac{7}{2}$

よって $\quad \triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}bc\sin A = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{7}{2} \times \dfrac{4\sqrt{3}}{7} = \boldsymbol{\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$

11.11　平成 23 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) a を $\dfrac{10}{\sqrt{14}-2}$ をこえない最大の整数とし，$b=\dfrac{10}{\sqrt{14}-2}-a$ とする．a, $(b+3)^2$ の値を求めよ。

(2) x，y が $y=x^2+2x$ を満たす．$-1 \leqq x \leqq 3$ であるとき，$x+y$ の最大値および最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

(3) $\sin\theta=\dfrac{1}{7}$ $(90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ であるとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

2 連立不等式 $\begin{cases} x^2+5x-2<0 \\ |x+1|<2 \end{cases}$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

3 △ABC において，面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，AB $=3$，AC $=\sqrt{7}$ である。次の各問いに答えよ。

(1) $\sin A$ の値を求めよ。

(2) 角 A が鈍角のとき，BC の長さを求めよ。

解答例

1 (1) $a=\dfrac{10}{\sqrt{14}-2}=\dfrac{10(\sqrt{14}+2)}{(\sqrt{14}-2)(\sqrt{14}+2)}=\sqrt{14}+2$

$3<\sqrt{14}<4$ より　$5<\sqrt{14}+2<6$ であるから　$\boldsymbol{a=5}$

また　$b=(\sqrt{14}+2)-a$　ゆえに　$b+3=\sqrt{14}$

よって　　$\boldsymbol{(b+3)^2=14}$

(2) $y=x^2+2x\cdots$① より，$f(x)=x+y$ おくと

$$\begin{aligned} f(x)&=x+(x^2+2x)\\ &=x^2+3x\\ &=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\end{aligned}$$

$-1\leqq x\leqq 3$ において，最大値 $f(3)=18$, 最小値 $f(-1)=-2$

$\boldsymbol{x=3,\ y=15}$ **のとき最大値 18,**

$\boldsymbol{x=-1,\ y=-1}$ **のとき最小値 −2**

(3) $90^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $\cos\theta\leqq 0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}=\boldsymbol{-\frac{4\sqrt{3}}{7}}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{7}\div\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{4\sqrt{3}}}$

2 2 次方程式 $x^2+5x-2=0$ の解は　$x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2}$

2 次不等式 $x^2+5x-2<0$ の解は　$\dfrac{-5-\sqrt{33}}{2}<x<\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}$　$\cdots$①

$|x+1|<2$ から

$-2<x+1<2$　ゆえに　$-3<x<1$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{-3<x<\dfrac{-5+\sqrt{33}}{2}}$

3　(1)　$\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より

$$\frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{7}\sin A = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

(2)　角 A が鈍角より $\cos A < 0$ であるから，(1) の結果から

$$\cos A = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)^2} = -\frac{2}{\sqrt{7}}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A\\ &= 3^2 + (\sqrt{7})^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{7}\times\left(-\frac{2}{\sqrt{7}}\right)\\ &= 28\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから　　$\mathbf{BC = 2\sqrt{7}}$

11.12 平成 22 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) $x = 2$ で最小値 -4 をとる 2 次関数のグラフが点 $(3,\ 0)$ を通るとき，この 2 次関数を求めよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき，$\sqrt{a^2+2a+1} + |2a+1|$ を簡単にせよ。

(3) 2 直線 $y = \sqrt{3}x - 1$，$y = -x + 2 + \sqrt{3}$ の交点の座標および 2 直線のなす角 θ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ を求めよ。

2 点 $(1,\ 1)$ を通る放物線 $y = -x^2 + ax + b$ について，次の各問いに答えよ。

(1) 頂点の座標を a で表せ。

(2) 頂点の y 座標が最小となるような a の値を求めよ。

3 円に内接する四角形 ABCD において，AB $= 2$，BC $= 4$，$\angle$BCD $= 60^\circ$ であり，$\triangle$BCD の面積は $3\sqrt{3}$ である。次の各問いに答えよ。

(1) CD と BD の長さを求めよ。

(2) AD の長さを求めよ。

解答例

1　(1) 放物線の頂点の座標は $(2, -4)$ であるから，この 2 次関数を

$$y = a(x-2)^2 - 4$$

とおける．このグラフが点 $(3,\ 0)$ を通るから

$$0 = a(3-2)^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad a = 4$$

よって，求める 2 次関数は　　$\boldsymbol{y = 4(x-2)^2 - 4}$

(2) $\sqrt{a^2+2a+1} + |2a+1| = |a+1| + |2a+1|$

$-1 \leqq a \leqq -\dfrac{1}{2}$ より　$a+1 \geqq 0$，$2a+1 \leqq 0$

ゆえに　$|a+1| = a+1$，$|2a+1| = -(2a+1) = -2a-1$

よって　$\sqrt{a^2+2a+1} + |2a+1| = (a+1) + (-2a+1)$

$$= \boldsymbol{-a}$$

(3) $y = \sqrt{3}x - 1$ と $y = -x + 2 + \sqrt{3}$ から y を消去すると

$$\sqrt{3}x - 1 = -x + 2 + \sqrt{3}$$
$$(\sqrt{3}+1)x = 3 + \sqrt{3}$$
$$x = \sqrt{3}$$

これから　　$y = 2$

よって，求める交点の座標は　$\boldsymbol{(\sqrt{3},\ 2)}$

直線 $y = \sqrt{3}x - 1$ の x 軸の正の向きとなす角は　60°

直線 $y = -x + 2 + \sqrt{3}$ の x 軸の正の向きとなす角は　135°

ゆえに，この 2 直線のなす角は　$135^\circ - 60^\circ = \boldsymbol{75^\circ}$

2 (1) 点 (1, 1) を通るから

$$1 = -1^2 + a\cdot 1 + b \quad \text{ゆえに} \quad b = 2 - a$$

放物線 $y = -x^2 + ax + 2 - a$ の頂点の座標は

$$\left(-\frac{a}{2\cdot(-1)},\ -\frac{a^2 - 4\cdot(-1)\cdot(2-a)}{4\cdot(-1)}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \left(\boldsymbol{\frac{a}{2}},\ \boldsymbol{\frac{a^2 - 4a + 8}{4}}\right)$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{a^2 - 4a + 8}{4} = \frac{1}{4}\{(a-2)^2 + 4\} = \frac{1}{4}(a-2)^2 + 1$$

よって，y 座標が最小となるときの a の値は $\quad \boldsymbol{a = 2}$

3 (1) $\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CD}\sin\angle\mathrm{BCD} = 3\sqrt{3}$ であるから

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \mathrm{CD} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\mathrm{CD} = 3}$$

余弦定理を △BCD に適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 4^2 + 3^2 - 2\cdot 4\cdot 3\cos 60^\circ \\ &= 16 + 9 - 12 \\ &= 13\end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから $\quad \boldsymbol{\mathrm{BD} = \sqrt{13}}$

(2) $x = \mathrm{AD}$ とおいて，余弦定理を △ABD に適用すると

$$(\sqrt{13})^2 = 2^2 + x^2 - 2\cdot 2\cdot x\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x - 9 = 0$$

$x > 0$ であるから $\quad x = -1 + \sqrt{10}$

よって $\quad \boldsymbol{\mathrm{BD} = -1 + \sqrt{10}}$

11.13　平成 22 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 関数 $y = x^2 + 2x + a$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$ の最大値と最小値の積が -20 であるとき，定数 a の値を求めよ。

(2) $\dfrac{1}{3+\sqrt{6}} + \dfrac{1}{3+\sqrt{12}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}$ を計算せよ。

(3) △ABC において，$\mathrm{AB} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{BC} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$\angle \mathrm{ABC} = 45^\circ$ のとき，AC の長さと △ABC の外接円の半径を求めよ。

2 a を正の整数とする．関数 $y = ax^2 - ax + 1$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$ について，次の各問いに答えよ。

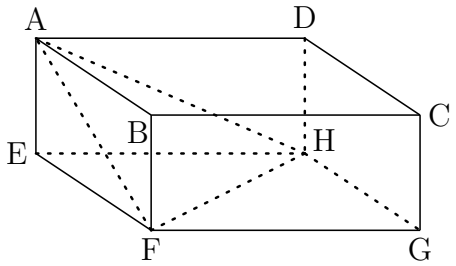
(1) この関数の最大値と最小値を a で表せ.

(2) 最大値と最小値の差が 20 以下となるような a の値を求めよ.

3 図のような直方体 ABCD-EFGH において，$\mathrm{AE} = 1$，$\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AD} = 3$ とする。次の各問に答えよ。

(1) $\cos \angle \mathrm{FAH}$ の値を求めよ。

(2) △AFH の面積を求めよ。



解答例

1 (1) $y=(x+1)^2+a-1$ $(-2 \leqq x \leqq 2)$

$x=-1$ で最小値 $a-1$ をとり，$x=2$ で最大値 $a+8$ をとる．最大値と最小値の積が -20 であるから

$$(a-1)(a+8)=-20 \quad \text{整理すると} \quad a^2+7a+12=0$$

これを解いて $\quad \boldsymbol{a=-4,-3}$

(2) (それぞれの分母を有理化する)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{3+\sqrt{6}}+\frac{1}{3+\sqrt{12}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} \\
=&\frac{3-\sqrt{6}}{(3+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})}+\frac{\sqrt{12}-3}{(\sqrt{12}+3)(\sqrt{12}-3)}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{(\sqrt{6}+\sqrt{3})(\sqrt{6}-\sqrt{3})} \\
=&\frac{3-\sqrt{6}}{3}+\frac{2\sqrt{3}-3}{3}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3} \\
=&\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}$$

(3) $c=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$B=45^\circ$.

これを余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ に適用すると

$$\begin{aligned}
b^2&=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\sin 45^\circ \\
&=1
\end{aligned}$$

$b>0$ であるから $\quad b=1 \quad$ よって $\quad \mathbf{AC=1}$

正弦定理 $2R=\dfrac{b}{\sin B}$ により

$$2R=1\div\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{R=\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

2　(1)　$y = ax^2 - ax + 1$ $(-1 \leqq x \leqq 3)$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= a(x^2 - x) + 1 \\ &= a\left\{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right\} + 1 \\ &= a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}a + 1 \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから，$x = \dfrac{1}{2}$ で**最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{4}a + 1}$，$x = 3$ で**最大値** $\boldsymbol{6a + 1}$

(2)　最大値と最小値の差が 20 以下であるから，(1) の結果より

$$(6a + 1) - \left(-\frac{1}{4}a + 1\right) \leqq 20 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq \frac{16}{5}$$

$\dfrac{16}{5} = 3.2$ であるから，求める正の整数 a は　**1，2，3**

3　(1)　$\mathrm{AF} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$，$\mathrm{AH} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$，$\mathrm{FH} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

△FAH に余弦定理を適用すると

$$\cos\angle\mathrm{FAH} = \frac{\mathrm{AF}^2 + \mathrm{AH}^2 - \mathrm{FH}^2}{2\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}} = \frac{5 + 10 - 13}{2\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}} = \boldsymbol{\frac{1}{5\sqrt{2}}}$$

(2)　(1) の結果により

$$\sin\angle\mathrm{AFH} = \sqrt{1 - \cos^2\angle\mathrm{AFH}} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

よって

$$\triangle\mathrm{AFH} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\mathrm{AH}\sin\angle\mathrm{FAH} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \times \frac{7}{5\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{7}{2}}$$

11.14 平成 21 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x + 1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) 連立不等式 $\begin{cases} x^2 + 2x - 2 \leqq 0 \\ 2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases}$ を解け。

(3) △ABC において，AB $= 2$，BC $= 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$，CA $= 2\sqrt{3} - 2$ であるとき，∠A の大きさを求めよ。

2 x についての 2 次方程式 $2x^2 + 2(m+1)x + m + \dfrac{1}{2} = 0$ について，次の各問に答えよ。

(1) この方程式を解け。

(2) 2 つの解の間に整数がちょうど 3 つあるような整数 m を求めよ。

3 △ABC において，∠A $= 45°$，∠B $= 60°$，BC $= a$ である。次の各問に答えよ。

(1) △ABC の外接円の半径を a で表せ。

(2) CA，AB の長さを a で表せ。

解答例

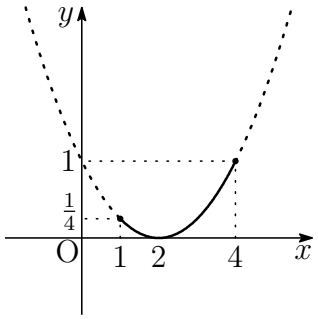
1　(1)　$y=\dfrac{1}{4}x^2-x+1$ を変形すると

$$y=\frac{1}{4}(x-2)^2$$

$1 \leqq x \leqq 4$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x=4$ で**最大値 1** をとり，

$x=2$ で**最小値 0** をとる．



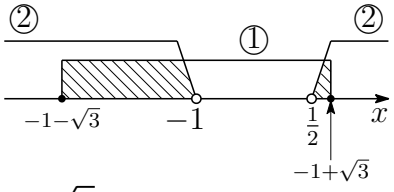
(2)　第 1 式から　$(x+1)^2-3 \leqq 0$

$(x+1+\sqrt{3})(x+1-\sqrt{3}) \leqq 0$

よって　$-1-\sqrt{3} \leqq x \leqq -1+\sqrt{3}$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+1)(2x-1)>0$

よって　$x<-1,\ \dfrac{1}{2}<x$　$\cdots$②



①，② の共通範囲を求めて

$$\boldsymbol{-1-\sqrt{3} \leqq x<-1,\ \frac{1}{2}<x \leqq -1+\sqrt{3}}$$

(3)　余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-\mathrm{BC}^2}{2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}}\\&=\frac{(2\sqrt{3}-2)^2+2^2-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{2(2\sqrt{3}-2)\cdot 2}\\&=\frac{4(\sqrt{3}-1)}{8(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{\angle \mathrm{A}=60^\circ}$

2 (1) 与えられた方程式から $x^2+(m+1)x+\dfrac{1}{2}\left(m+\dfrac{1}{2}\right)=0$

左辺を因数分解すると $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x+m+\dfrac{1}{2}\right)=0$

これを解いて $\boldsymbol{x=-\dfrac{1}{2},\ -m-\dfrac{1}{2}}$

(2) 2 つの解の間に整数がちょうど 3 つあるのは，m が整数であるから

3 つの整数が $-3,-2,-1$ のとき $-m-\dfrac{1}{2}=-3-\dfrac{1}{2}$

3 つの整数が $0,\ 1,\ 2$ のとき $-m-\dfrac{1}{2}=3-\dfrac{1}{2}$

よって $\boldsymbol{m=\pm 3}$

3 (1) 正弦定理により $2R=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}$

よって $R=\dfrac{a}{2\sin 45^\circ}=\boldsymbol{\dfrac{a}{\sqrt{2}}}$

(2) 正弦定理により $\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B}$

ゆえに $\dfrac{a}{\sin 45^\circ}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin 60^\circ}$ よって $\mathrm{CA}=\dfrac{a\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{2}a}$

第 1 余弦定理により $\mathrm{AB}=\mathrm{CA}\cos A+\mathrm{BC}\cos B$

よって $\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}a\cos 45^\circ+a\cos 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a+\dfrac{1}{2}a=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}a}$

11.15　平成 21 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} + a\sqrt{2} + b\sqrt{6}$ を満たす有理数 a，b を求めよ。

(2) 2 次方程式 $2x^2 + 8x + k(k+2) = 0$ が 2 つの異なる実数解をもつような定数 k の値の範囲を求めよ。

(3) △ABC において，AB $= 14$，CA $= 10$，$\angle$A $= 60^\circ$ であるとき，BC の長さと △ABC の面積を求めよ。

2 放物線 $y = 2x^2 - 4ax + a^2 + a + 2$ の頂点が第 1 象限にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。

3 円に内接する四角形 ABCD において，AB $= 2$，BC $= \sqrt{3}$，$\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\sin B$，$\cos D$ の値を求めよ。

(2) 円の半径を求めよ。

解答例

1 (1) $$\frac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\{(1-\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1-\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$$
$$=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1-\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$
$$=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{6}$$

よって，求める有理数 a，b は $\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{4}}$, $\boldsymbol{b=-\frac{1}{4}}$

(2) 2 次方程式 $2x^2+8x+k(k+2)=0$ の係数について

$$D/4=4^2-2\cdot k(k+2)=-2(k+4)(k-2)$$

異なる 2 つの実数解をもつための条件は，$D>0$ であるから

$$-2(k+4)(k-2)>0$$

ゆえに $\quad (k+4)(k-2)<0$

よって $\quad \boldsymbol{-4<k<2}$

(3) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{CA}^2+\mathrm{AB}^2-2\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\cos A\\&=10^2+14^2-2\cdot10\cdot14\cos60^\circ\\&=100+196-2\cdot10\cdot14\cdot\frac{1}{2}\\&=156\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ より $\quad \mathrm{BC}=\sqrt{156}=\boldsymbol{2\sqrt{39}}$

また，△ABC の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC}&=\frac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}\sin A\\&=\frac{1}{2}\cdot10\cdot14\sin60^\circ\\&=\frac{1}{2}\cdot10\cdot14\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{35\sqrt{3}}\end{aligned}$$

2　$y = 2x^2 - 4ax + a^2 + a + 2$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 2ax) + a^2 + a + 2 \\ &= 2\{(x-a)^2 - a^2\} + a^2 + a + 2 \\ &= 2(x-a)^2 - 2a^2 + a^2 + a + 2 \\ &= 2(x-a)^2 - a^2 + a + 2 \end{aligned}$$

この放物線の頂点 $(a, -a^2 + a + 2)$ が第 1 象限にあるので

$$\begin{cases} a > 0 & \cdots ① \\ -a^2 + a + 2 > 0 \end{cases}$$

第 2 式から　　$a^2 - a - 2 < 0$

ゆえに　　$(a+1)(a-2) < 0$

よって　　$-1 < a < 2 \quad \cdots ②$

①，② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{0 < a < 2}$

3　(1)　$\cos B = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より　　$\sin B = \sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{3}} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$

四角形 ABCD は円に内接するので　　$D = 180^\circ - B$

ゆえに　　$\cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B = \boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)　△ABC に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned} \mathrm{CA}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B \\ &= 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2\cdot 2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= 4 + 3 - 4 \\ &= 3 \end{aligned}$$

$\mathrm{CA} > 0$ より　　$\mathrm{CA} = \sqrt{3}$

正弦定理により　　$\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B} = 2R$

よって　　$R = \dfrac{1}{2} \times \sqrt{3} \div \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{4}}$

11.16 平成 20 年度推薦試験 (60 分) 第 1 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) $a = \dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$，$b = \dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ のとき，$a+b$，ab，a^2+b^2 を計算せよ。

(2) 2 次方程式 $x^2-4x-a^2+5a=0$ が重解をもつような定数 a の値を求めよ。

(3) 連立不等式 $\begin{cases} 2x-7 \leqq x-3 \\ x^2-3x \leqq 10 \end{cases}$ を解け。

2 △ABC において，AB $=3$，AC $=2\sqrt{5}$，$\tan A = -2$ である。次の各問に答えよ。

(1) $\cos A$，$\sin A$ の値を求めよ。

(2) BC の長さを求めよ。

3 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$3y^2+2x$ の最大値，最小値とそのときの x の値を求めよ。

解答例

1　(1) $a+b=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5-3}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$

$ab=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\dfrac{1\times 1}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

上の 2 式から　$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(\sqrt{5})^2-2\times\dfrac{1}{2}=\boldsymbol{4}$

(2) 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4&=(-2)^2-1\cdot(-a^2+5a)\\ &=a^2-5a+4\\ &=(a-1)(a-4)\end{aligned}$$

この 2 次方程式が実数解をもつのは，$D=0$ のときであるから

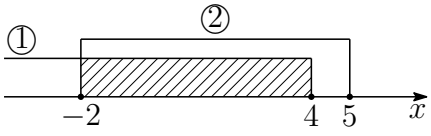
$(a-1)(a-4)=0$　ゆえに　$\boldsymbol{a=1,\ 4}$

(3) 第 1 式から　$2x-x\leqq -3+7$

ゆえに　$x\leqq 4$　$\cdots$①

第 2 式から　$(x+2)(x-5)\leqq 0$

ゆえに　$-2\leqq x\leqq 5$　$\cdots$②



① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-2\leqq x\leqq 4}$

2　(1) $1+\tan^2 A=\dfrac{1}{\cos^2 A}$ から

$\dfrac{1}{\cos^2 A}=1+(-2)^2=5$　ゆえに　$\cos^2 A=\dfrac{1}{5}$

$\tan A<0$ であるから A は鈍角で，$\cos A<0$ である．

よって　$\cos A=-\sqrt{\dfrac{1}{5}}=\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

また　$\sin A=\tan A\times\cos A=-2\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A\\ &=3^2+(2\sqrt{5})^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\\ &=41\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　$\mathrm{BC}=\boldsymbol{\sqrt{41}}$

3 条件より $y^2 = 1 - x^2 \cdots$ ① であるから $y^2 \geqq 0$

ゆえに $1 - x^2 \geqq 0$

$x^2 - 1 \leqq 0$

整理して $(x+1)(x-1) \leqq 0$

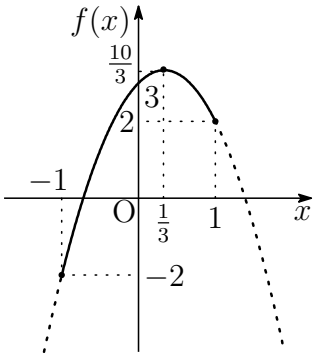
よって $-1 \leqq x \leqq 1 \quad \cdots$ ②

① から

$$\begin{aligned} 3y^2 + 2x &= 3(1 - x^2) + 2x \\ &= -3x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

これを $f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x^2 + 2x + 3 \\ &= -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 3 \\ &= -3\left\{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2\right\} + 3 \\ &= -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{10}{3} \end{aligned}$$



② において，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = \frac{1}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{10}{3}}$，$\boldsymbol{x = -1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{-2}$ をとる．

11.17　平成 20 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 3 点 $(0, -1)$，$(1,\ 2)$，$(2, -3)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数を求めよ。

(2) 不等式 $-9x^2 + 6x + 35 \geqq 0$ を満たす整数 x の値を求めよ。

(3) $\dfrac{\sin 60^\circ \cos 120^\circ}{\tan 135^\circ} + \dfrac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ}$ の値を求めよ。

2 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わり，y 軸と点 $(0, -3)$ で交わっている。次の各問に答えよ。

(1) 定数 a，b，c の値を求めよ。

(2) この 2 次関数の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値と最小値を求めよ。

3 辺 AD，BC が平行な台形 ABCD において，AB $=$ 3，AD $=$ 5，BC $=$ 10，$\angle$B $= 60^\circ$ である。次の各問に答えよ。

(1) 対角線 BD の長さを求めよ。

(2) 台形 ABCD の面積を求めよ。

解答例

1 (1) 求める 2 次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とする．
グラフが 3 点 $(0, -1)$，$(1,\ 2)$，$(2, -3)$ を通るから

$$-1 = c \qquad \cdots ①$$
$$2 = a + b + c \qquad \cdots ②$$
$$-3 = 4a + 2b + c \qquad \cdots ③$$

① を ② に代入して $\quad a + b = 3 \qquad \cdots ④$

① を ③ に代入して $\quad 4a + 2b = -2$

すなわち $\quad 2a + b = -1 \qquad \cdots ⑤$

④，⑤ を解いて $\quad a = -4$，$b = 7$

よって，求める 2 次関数は $\quad \boldsymbol{y = -4x^2 + 7x - 1}$

(2) $\quad -9x^2 + 6x + 35 \geqq 0$

両辺に -1 をかけて $\quad 9x^2 - 6x - 35 \leqq 0$

ゆえに $\quad (3x + 5)(3x - 7) \leqq 0$

よって $\quad -\dfrac{5}{3} \leqq x \leqq \dfrac{7}{3}$

したがって，この不等式の満たす整数 x は $\quad \boldsymbol{-1,\ 0,\ 1,\ 2}$

(3) $\dfrac{\sin 60^\circ \cos 120^\circ}{\tan 135^\circ} + \dfrac{\cos 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \div (-1) + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \div \dfrac{1}{2}$

$$= \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{4} + \sqrt{2}}$$

2 (1) $y = ax^2 + bx + c$ のグラフの x 軸との共有点の x 座標が 1，3 であるから，x^2 の係数に注意して

$$y = a(x - 1)(x - 3) \quad \cdots ①$$

とおける．これが点 $(0, -3)$ を通るから

$$-3 = a(0 - 1)(0 - 3) \qquad \text{ゆえに} \qquad a = -1$$

これを ① に代入すると

$$y = -(x - 1)(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = -x^2 + 4x - 3$$

よって $\quad \boldsymbol{a = -1,\ b = 4,\ c = -3}$

(2) (1) から　$y=-(x^2-4x)-3$

$=-\{(x-2)-2^2\}-3$

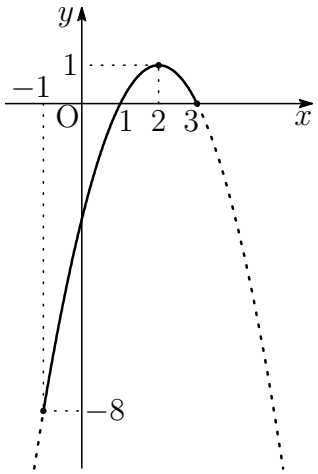
$=-(x-2)^2+1$

よって，$-1 \leqq x \leqq 3$ において，y は

$x=2$ で最大値 1，

$x=-1$ で最小値 -8

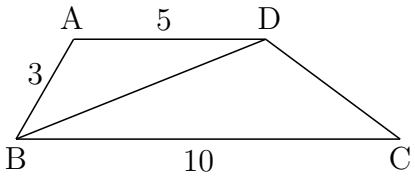
をとる．



3　(1) AD//BC であるから

$\angle \mathrm{B}=60^\circ$ より $\angle \mathrm{A}=120^\circ$

△ABD に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2+\mathrm{AD}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos A\\ &= 3^2+5^2-2\cdot3\cdot5\cos120^\circ\\ &= 9+25-2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 49\end{aligned}$$

$\mathrm{BD}>0$ であるから　**$\mathrm{BD}=7$**

(2) A から BC に下ろした垂線の長さ h は

$$h=\mathrm{AB}\sin60^\circ=3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

台形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}h(\mathrm{AD}+\mathrm{BC})=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times(5+10)=\boldsymbol{\frac{45}{4}\sqrt{3}}$$

11.18 平成19年度推薦試験 (60分) 第1日目

1 次の各問に答えよ。

(1) x の方程式 $x^2+2ax+5a^2+4a+1=0$ が実数解をもつとき，定数 a の値とその解を求めよ.

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -3 だけ平行移動したところ，放物線 $y=2x^2+x-1$ に重なった。定数 a，b，c の値を求めよ.

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta=-\dfrac{5}{4}$ のとき，$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の値を求めよ。

2 関数 $y=-x^2+ax+b$ の $x \leqq 0$ における最大値は 1 で，すべての x における最大値は 5 である。定数 a，b の値を求め，この関数のグラフをかけ。

3 △ABC において，$\angle A=60^\circ$，$AB=3+3\sqrt{3}$，$AC=6$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) BC の長さを求めよ。

(2) $\angle B$ の大きさを求めよ。

解答例

1　(1) 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D/4 &= a^2 - 1\cdot(5a^2+4a+1) \\ &= -4a^2-4a-1 = -(2a+1)^2 \end{aligned}$$

この 2 次方程式が実数解をもつのは，$D \geqq 0$ のときであるから

$$-(2a+1)^2 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a = -\frac{1}{2}}$$

このとき，2 次方程式は重解をもち，その解は

$$x = -\frac{2a}{2\cdot 1} = -a = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) 放物線 $y = ax^2+bx+c \cdots$ ① は放物線 $y = 2x^2+x-1 \cdots$ ② を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである．

放物線 ② を x 軸方向に -2，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものは

$$y-3 = 2(x+2)^2+(x+2)-1$$

整理して　　$y = 2x^2+9x+12$

よって，上式は ① に一致するから　$\boldsymbol{a=2,\ b=9,\ c=12}$

(3) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\left(-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{41}{16} \quad \text{ゆえに} \quad \cos^2\theta = \frac{16}{41}$$

$\tan\theta < 0$ であるから θ は鈍角で，$\cos\theta < 0$ である．

よって　　$\cos\theta = -\sqrt{\dfrac{16}{41}} = -\dfrac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{\sqrt{41}}}$

また　　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = -\dfrac{5}{4} \times \left(-\dfrac{4}{\sqrt{41}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{5}{\sqrt{41}}}$

2 $x=0$ のとき $y=1$ であるから　$\boldsymbol{b=1}$

$y=-x^2+ax+1$ と $y=5$ から y を消去して

$$-x^2+ax+1=5 \quad \text{すなわち} \quad x^2-ax+4=0 \quad \cdots ①$$

は，重解をもつので，係数について

$$(-a)^2-4\cdot1\cdot4=0$$

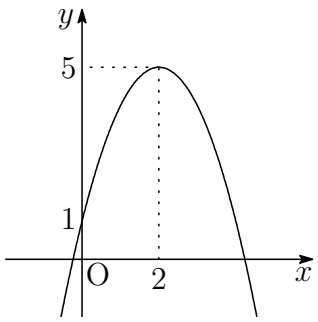
ゆえに　$a=\pm4 \quad \cdots ②$

重解は，① より　$x=-\dfrac{-a}{2\cdot1}=\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{2}>0$ であるから，② より　$\boldsymbol{a=4}$

$y=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$

よって，頂点の座標は　$(2,\ 5)$



3 (1) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A\\&=(3+3\sqrt{3})^2+6^2-2(3+3\sqrt{3})\cdot6\cdot\frac{1}{2}\\&=54\end{aligned}$$

$\mathrm{BC}>0$ であるから　$\mathrm{BC}=\sqrt{54}=\boldsymbol{3\sqrt{6}}$

(2) 余弦定理により

$$\cos B=\frac{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{AC}^2}{2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}}=\frac{(3+3\sqrt{3})^2+(3\sqrt{6})^2-6^2}{2(3+3\sqrt{3})\cdot3\sqrt{6}}$$

$$=\frac{54+18\sqrt{3}}{18(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{18\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{18(1+\sqrt{3})\sqrt{6}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす $\angle\mathrm{B}$ は　$\boldsymbol{\angle\mathrm{B}=45^\circ}$

11.19　平成 19 年度推薦試験 (60 分) 第 2 日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 放物線 $y = 4x^2 + ax + 5$ の頂点の y 座標が 2 のとき，定数 a の値を求めよ。

(2) 関数 $y = -x^2 + 4x + c$ $(0 \leqq x \leqq 6)$ の最小値が -11 のとき，定数 c の値およびこの関数の最大値を求めよ。

(3) 傾斜角が θ の坂道を 5km 進むと，垂直方向に 100m 登ったことになるとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

2 軸の方程式が $x = 1$ で，2 点 $(-1,\ 5)$，$(2, -1)$ を通る放物線について，次の各問に答えよ。

(1) この放物線の方程式を求めよ。

(2) この放物線が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

3 △ABC において，$\mathrm{BC} = 8\sqrt{5}$，$\cos C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，外接円の半径が $5\sqrt{5}$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) $\sin C$ の値を求めよ。

(2) AC の長さを求めよ。

解答例

1 (1) $y = 4x^2 + ax + 5$

$$= 4\left(x^2 + \frac{a}{4}x\right) + 5$$

$$= 4\left\{\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \left(\frac{a}{8}\right)^2\right\} + 5$$

$$= 4\left(x + \frac{a}{8}\right)^2 - \frac{a^2}{16} + 5$$

頂点の y 座標が 2 であるから

$$-\frac{a^2}{16} + 5 = 2$$

ゆえに $a^2 = 48$

よって $\boldsymbol{a = \pm 4\sqrt{3}}$

(2) $y = -x^2 + 4x + c$

$$= -(x-2)^2 + c + 4$$

$0 \leqq x \leqq 6$ であるから

$x = 2$ で最大値 $c + 4$，$x = 6$ で最小値 $c - 12$

をとる．最小値が -11 であるから

$c - 12 = -11$ ゆえに $\boldsymbol{c = 1}$

よって，最大値は $c + 4 = \mathbf{5}$

(3) $\sin\theta = \dfrac{100}{5000} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{50}}$

θ は鋭角であるから

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{50}\right)\left(1 - \frac{1}{50}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{51}{50} \times \frac{49}{50}} = \frac{\mathbf{7\sqrt{51}}}{\mathbf{50}}$$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{50} \div \dfrac{7\sqrt{51}}{50} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{7\sqrt{51}}}$

2　(1) 直線 $x=1$ を軸とするから，求める関数は $y=a(x-1)^2+q$ とおける．
このグラフが 2 点 $(-1,\ 5)$，$(2,-1)$ を通るから

$$5=4a+q,\quad -1=a+q \quad \text{これを解くと} \quad a=2,\ q=-3$$

よって　　$y=2(x-1)^2-3$　すなわち　$\boldsymbol{y=2x^2-4x-1}$

(2) 放物線と x 軸との共有点の座標は $2x^2-4x-1=0$ を解いて

$$x=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$$

よって，求める線分の長さは　　$\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}-\dfrac{2-\sqrt{6}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{6}}$

3　(1) $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(2) 正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=2R$ より $c=2R\sin C$ であるから

$$c=2\cdot 5\sqrt{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=20$$

余弦定理により　　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$20^2=(8\sqrt{5})^2+b^2-2\cdot 8\sqrt{5}b\times\frac{1}{\sqrt{5}}$$

整理して　　$b^2-16b-80=0$

$$(b+4)(b-20)=0$$

$b>0$ であるから　　$b=20$

よって　　$\mathbf{AC=20}$

11.20 平成18年度推薦試験 (60分) 第1日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = -x^2 - 6ax + 4$ の最大値が 5 以下となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{11}{2}$ と $y = 2x^2 + ax + b$ の頂点が一致するような定数 a，b の値を求めよ。

(3) x の整式 $(x + a)(x^2 + b)(x^3 + c)(x^4 + x^2 + d)$ を展開したとき，x^4 の係数を求めよ。

2 $\triangle$ABC において，$\mathrm{BC} = a$，$\mathrm{AB} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}a$，$\angle \mathrm{B} = 30^\circ$ のとき，次の各問に答えよ。

(1) CA を a で表せ。

(2) $\angle$A の大きさを求めよ。

3 2 次方程式 $x^2 - (a + 2)x + a^2 - 3a + 4 = 0$ の解を α，β とするとき，
$1 < \alpha < 2 < \beta$ を満たすような定数 a の値の範囲を求めよ。

解答例

1　(1) 2 次関数 $y=-x^2-6ax+4$ を変形すると

$$\begin{aligned} y&=-(x^2+6ax)+4\\ &=-\{(x+3a)^2-(3a)^2\}+4\\ &=-(x+3a)^2+9a^2+4 \end{aligned}$$

よって，2 次関数 $y=-x^2-6ax+4$ は $x=-3a$ で最大値 $9a^2+4$ をとる．
この 2 次関数の最大値は 5 以下であるから

$$9a^2+4 \leqq 5$$

整理して

$$9a^2-1 \leqq 0$$

$$(3a+1)(3a-1) \leqq 0$$

したがって

$$\boldsymbol{-\frac{1}{3} \leqq a \leqq \frac{1}{3}}$$

(2) $y=\dfrac{1}{2}x^2-3x+\dfrac{11}{2}\cdots$① を変形すると

$$\begin{aligned} y&=\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{11}{2}\\ &=\frac{1}{2}\{(x-3)^2-3^2\}+\frac{11}{2}\\ &=\frac{1}{2}(x-3)^2+1 \end{aligned}$$

したがって，放物線 ① の頂点の座標は $(3,\ 1)$
放物線 $y=2x^2+ax+b\cdots$② の頂点の座標の座標は $(3,\ 1)$ であるから，② の右辺は，x^2 の係数に注意して次のようにかける．

$$2x^2+ax+b=2(x-3)^2+1$$

整理すると

$$=2x^2-12x+19$$

上式の係数を比較して，$\boldsymbol{a=-12}$，$\boldsymbol{b=19}$

(3)　$(x+a)(x^2+b)=x^3+ax^2+bx+ab$
$(x^3+c)(x^4+x^2+d)=x^7+x^5+cx^4+dx^3+cx^2+cd$

であるから
$(x+a)(x^2+b)\times(x^3+c)(x^4+x^2+d)$ の x^4 の項は

$$ax^2\times cx^2,\ \ bx\times dx^3,\ \ ab\times cx^4$$

したがって，x^4 の係数は　　$\boldsymbol{ac+bd+abc}$

2 (1) 余弦定理 $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\ \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B$ により

$$\begin{aligned}\mathrm{CA}^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a\right)^2 + a^2 - 2\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}a\times a\cos 30^\circ \\ &= \frac{3+2\sqrt{3}+1}{4}a^2 + a^2 - (\sqrt{3}+1)a^2\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 + a^2 - \frac{3+\sqrt{3}}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2}a^2\end{aligned}$$

$\mathrm{CA} > 0$ であるから $\quad \boldsymbol{\mathrm{CA} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}a}$

(2) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{BC}^2}{2\cdot\mathrm{CA}\cdot\mathrm{AB}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}a\right)^2 - a^2}{2\times\frac{1}{\sqrt{2}}a\times\frac{\sqrt{3}+1}{2}a} \\ &= \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{2+\sqrt{3}}{2}a^2 - a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2 \div \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

したがって，$\cos A = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $\qquad A = 45^\circ$

【別解 (2)】 $b = \mathrm{CA}$，$c = \mathrm{AB}$ とおくと　正弦定理により $\quad \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

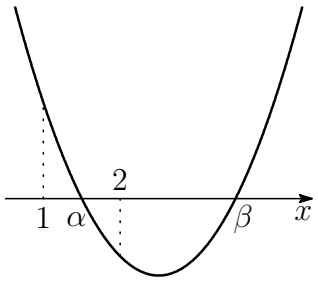
$$a\sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}a\sin A \quad \text{すなわち} \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを満たす A の値は　$A = 45^\circ,\ 135^\circ$

ここで，$b < a < c$ より $B < A < C$ であるから　$A = 135^\circ$ は不適.

よって $\qquad \boldsymbol{A = 45^\circ}$

3　$f(x)=x^2-(a+2)x+a^2-3a+4$ とおくと，x^2 の係数が正であるから $f(x)=0$ の解 α，β が $1<\alpha<2<\beta$ を満たすとき



$$f(1)>0 \quad \text{かつ} \quad f(2)<0$$

であればよいから

$$1^2-(a+2)\cdot 1+a^2-3a+4>0$$
$$2^2-(a+2)\cdot 2+a^2-3a+4<0$$

したがって，次の連立不等式を解けばよい．

$$\begin{cases} a^2-4a+3>0 \\ a^2-5a+4<0 \end{cases}$$

第 1 式から　$a<1,\ 3<a$　$\cdots$①

第 2 式から　$1<a<4$　　$\cdots$②

よって，① と ② の共通範囲を求めて　　$\boldsymbol{3<a<4}$

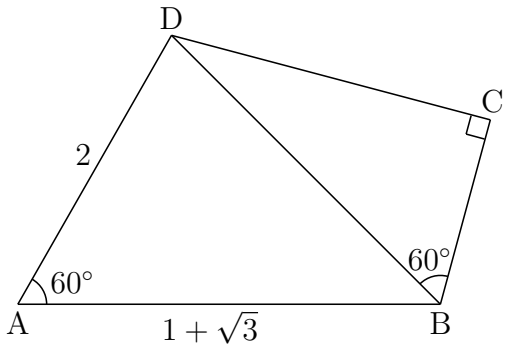
11.21 平成18年度推薦試験 (60分) 第2日目

1 次の各問に答えよ。

(1) 2 次関数 $y = ax^2 + x - 3$ の最大値が 2 であるような定数 a の値を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = 2x^2 - 12x + 17$ と $y = ax^2 + bx - 10$ の頂点が一致するような定数 a，b の値を求めよ。

(3) 右図において，辺 CD の長さを求めよ。



2 △ABC において，BC の中点を D とする。$\mathrm{AB} = \sqrt{3}$，$\angle \mathrm{B} = 30°$，$\angle \mathrm{BAD} = 90°$ であるとき，次の各問に答えよ。

(1) △ABC の面積を求めよ。

(2) CA の長さを求めよ。

3 関数 $y = -x^2 + 4x$ $(a \leqq x \leqq a + 4)$ の最大値と最小値を求めよ。ただし，定数 a は $|a| \leqq 2$ とする。

解答例

1　(1) 2 次関数 $y = ax^2 + x - 3$ において，$y = 2$ となる x の値は
$ax^2 + x - 3 = 2$ から，2 次方程式

$$ax^2 + x - 5 = 0$$

の解である．この方程式は重解をもつので，係数について

$$1^2 - 4a\cdot(-5) = 0$$

整理すると　　$1 + 20a = 0$

$a < 0$ に注意して　　$\boldsymbol{a = -\dfrac{1}{20}}$

(2) $y = 2x^2 - 12x + 17 \cdots$ ① を変形すると

$$\begin{aligned} y &= 2(x^2 - 6x) + 17 \\ &= 2\{(x-3)^2 - 3^2\} + 17 \\ &= 2(x-3)^2 - 1 \end{aligned}$$

したがって，放物線 ① の頂点の座標は $(3, -1)$
放物線 $y = y = ax^2 + bx - 10 \cdots$ ② の頂点の座標の座標は $(3, -1)$ であるから，② の右辺は，x^2 の係数に注意して次のようにかける．

$$ax^2 + bx - 10 = a(x-3)^2 - 1$$

整理すると　　$= ax^2 - 6ax + 9a - 1$

上式の係数を比較して　$b = -6a$，$-10 = 9a - 1$
これを解いて　　$\boldsymbol{a = -1}$，$\boldsymbol{b = 6}$

(3) △ABD に余弦定理を適用すると

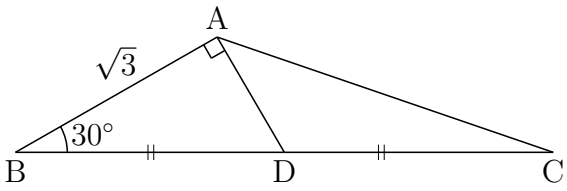
$$\begin{aligned} \mathrm{BD}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AD}^2 - 2\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}\cos A \\ &= (1+\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(1+\sqrt{3})\cdot 2\cos 60^\circ \\ &= (4 + 2\sqrt{3}) + 4 - 4(1+\sqrt{3}) \times \frac{1}{2} \\ &= 8 + 2\sqrt{3} - 2(1+\sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$\mathrm{BD} > 0$ であるから　$\mathrm{BD} = \sqrt{6}$
したがって　$\mathrm{CD} = \mathrm{BD}\sin 60^\circ = \sqrt{6} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

2 (1) 右の図より

BD = 2 であるから BC = 4

よって，△ABC の面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\mathrm{BA}\cdot\mathrm{BC}\sin B \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 4\sin 30^\circ \\ &= 2\sqrt{3}\times\frac{1}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(2) AD = 1，DC = 2，∠ADB = 120° であるから，余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{CA}^2 &= \mathrm{AD}^2 + \mathrm{DC}^2 - 2\cdot\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DC}\cos\angle\mathrm{ADC} \\ &= 1^2 + 2^2 - 2\cdot 1\cdot 2\cos 120^\circ \\ &= 1 + 4 - 4\times\left(-\frac{1}{2}\right) = 7 \end{aligned}$$

CA > 0 であるから　$\mathbf{CA = \sqrt{7}}$

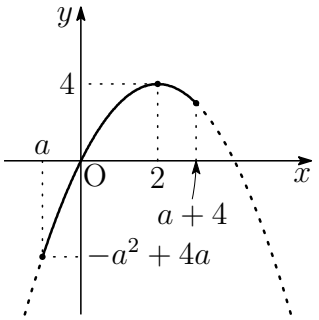
3 $|a| \leqq 2$ から　$-2 \leqq a \leqq 2$

$y = -x^2 + 4x$ を変形すると　$y = -(x-2)^2 + 4$

<u>$-2 \leqq a < 0$ のとき</u>

$x = 2$ で**最大値 4**

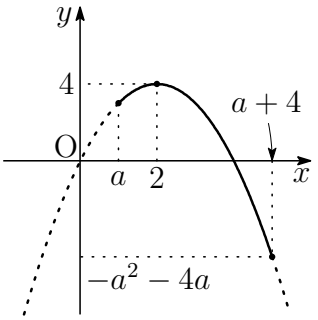
$x = a$ で**最小値 $-a^2 + 4a$**



<u>$0 \leqq a \leqq 2$ のとき</u>

$x = 2$ で**最大値 4**

$x = a + 4$ で**最小値 $-a^2 - 4a$**



［補足］$-2 \leqq a \leqq 0$ と $0 < a \leqq 2$ の場合に分けてもよい.