

高校生のための

就職への

数学

序

本書は，1995年に「球工生の就職のための数学」という書名で発行され，その後3版まで版を重ねてきたものを全面的に組み直し，就職を希望する高校生に広く活用されることを願いながら，「高校生のための就職への数学」と題して発行した電子ドキュメントである．

今回の改訂では， $\text{\LaTeX 2}\epsilon$ による組版を行い，品質及びファイルサイズに優れた結果が得られた．また時代の要請である情報化に即した電子ドキュメントであると考えている．

2001年4月 編者

旧版まえがき

高校卒業生に対する就職状況は、年毎に異常なほどの困難な時代を迎えています。ただ職にありつくことを目標にすれば、割に容易に解決できるようです。しかし、堅実で将来性のある職場、自分の才能や志望を満たす職種などと条件をつけて選ぶとすると、決して容易ではありません。

激変する社会状況のもとで、企業は、職場・職種のいかんを問わず、豊かな人間性、社会人としての一般教養、現場の専門職に準応できる柔軟な思考力、その素材となる基礎学力を要求してきていることを考え合わせると、自己の目標の実現の鍵は教科面での基礎学力を充実させておくことが必要です。目まぐるしく変化する情勢の中にあって、柔軟で精緻な思考力の母体となる数学的素養は、特に高く評価され、就職試験のみならず、大学入試等でも試験教科に課されています。

この本は、企業で要求される数学的基礎学力とはどのようなものかを紹介するとともに、就職希望者にとって効果的な学習の手助けになるようにと考えて編集したものです。なお、進学希望者にとってはこれらの内容は受験勉強のための必要条件となるものです。また、企業が行う基礎学力試験のねらいは、小学校高学年位の簡単な問題から高校卒業程度の高度な内容を同時に出題することにより、受験者の基礎学力の到達度を測ることです。そのため、簡単な問題は大半の受験生ができています。ですから試験の合否を決めるのは、高校数学までをしっかりと学習しておくかどうかです。

この本の編集にあたり、特に留意した点は次のことからです。

1. 各節は、計画的学習の便をはかって、単元区切りとした。
2. 例，問をかかげ、知識や公式の理解に効果があがるように工夫した。
3. 例題をかかげ、考え方、基本事項の使い方、答案の書き方を例示した。
4. 問題は、過去の受験報告書等をもとに、精選した。
5. 単元の配列は、問題の関連性を重視して行った。
6. ☆印のものはやや程度の高い問題で、応用力を養うのによいものです。

1995年12月 編者

目次

序	i
第1章 数の計算	1
実践問題1	12
第2章 割合	13
実践問題2	20
第3章 整式の計算	21
実践問題3	30
第4章 乗法公式	31
実践問題4	40
第5章 因数分解	41
第6章 約数・倍数	61
第7章 分数式	65
第8章 式の値	79
第9章 比例式	81
第10章 無理数	83
第11章 1次方程式	99
第12章 複素数	105
第13章 2次方程式	113
第14章 判別式	121
第15章 解と係数の関係	125
第16章 連立方程式	131
実践問題6	146

第 17 章 分数方程式	147
第 18 章 無理方程式	149
第 19 章 因数定理	151
実践問題 7	158
第 20 章 高次方程式	159
実践問題 8	162
第 21 章 1 次不等式	163
第 22 章 式と証明	167
実践問題 9	172
第 23 章 文章題	173
第 24 章 点と座標	193
第 25 章 直線の方程式	197
第 26 章 2 次関数	211
実践問題 10	230
第 27 章 2 次不等式	231
第 28 章 円の方程式	243
実践問題 11	252
第 29 章 不等式の表す領域	253
実践問題 12	260
第 30 章 微分	261
実践問題 13	274
第 31 章 積分	275
第 32 章 三角比	285
第 33 章 三角関数	299
第 34 章 指数	323
実践問題 14	330

第 35 章 対数	331
実践問題 1 5	340
第 36 章 個数の処理	341
実践問題 1 6	348
第 37 章 確率	349
実践問題 1 7	356
第 38 章 数列	357
実践問題 1 8	366
第 39 章 図形	367
実践問題 1 9	392
解答	393
三角比の表	449

第 1 章 数の計算

例 1.1 次の計算をせよ.

(NKK)

$$\begin{aligned} & 21 \times 31 + 38 \times 31 + 17 \times 31 + 24 \times 31 \\ &= (21 + 38 + 17 + 24) \times 31 \\ &= 100 \times 31 \\ &= 3100 \end{aligned}$$

1.1 次の計算をせよ.

- | | |
|---|----------|
| (1) $4261 - 2193 + 1029$ | (住友金属鉱山) |
| (2) $1222 - 514 + 1105$ | (住友金属鉱山) |
| (3) $4953 - 892 + 2015$ | (NKK) |
| (4) $45 + 25 \times 6 - 50 \div 2$ | (ダイハツ) |
| (5) $15 + 45 \times 5 - 30 + 12 \div 3$ | (ダイハツ) |
| (6) $16 + 4 \times 3 \div 6 - 20 \div 5$ | (凸版印刷) |
| (7) $273 + 35 \times 22 - 45 + 12 \div 4$ | (東武鉄道) |
| (8) $(6 + 48) \div 6$ | (ブラザー工業) |
| (9) $18 + 6 \times 3 - (20 - 4 \div 2)$ | (三洋電機) |
| (10) $48 - 3\{(26 - 8) \div 3 + 8\}$ | (トヨタ自動車) |
| (11) $49 \times 675 \div 63$ | (住友金属鉱山) |
| (12) $448 \div 168 \times 135$ | (住友金属鉱山) |

例 1.2 次の計算をせよ.

(ダイハツ)

$$\begin{aligned} & 0.64 + 1.5 \times 0.5 \\ &= 0.64 + 0.75 \\ &= 1.39 \end{aligned}$$

1.2 次の計算をせよ.

- | | |
|--|---------|
| (1) $0.6 - 0.079$ | (菱電運輸) |
| (2) $0.75 + 0.5 \times 0.5$ | (トヨタ車体) |
| (3) $(0.04 + 0.3 \times 0.2) \times 10$ | (トヨタ車体) |
| (4) $0.45 + 0.3 - 0.34 + 0.2$ | (ダイハツ) |
| (5) $0.64 + 1.2 \times 0.3$ | (ダイハツ) |
| (6) $2.6 \times 0.4 \div 0.8$ | (デンソー) |
| (7) $7.2 + 1.8 \div 0.03$ | (ダイハツ) |
| (8) $3.5 \times 0.11 \div 0.2 + 0.36$ | (東化工) |
| (9) $28.7 \div 1.4 + 7.15 \times 3.6$ | (日石三菱) |
| (10) $5.96 + 0.75 \times 4.6 - 17.44 \div 3.2$ | (日石三菱) |

例 1.3 次の計算をせよ.

(西日本鉄道)

$$\begin{aligned} & (-9) - (-8) \div 2 + 6 \times (-3) + 5 \\ &= -9 + 4 - 18 + 5 \\ &= -18 \end{aligned}$$

1.3 次の計算をせよ.

- | | |
|------------------------------------|----------|
| (1) $5 + 4 - (-12)$ | (ダイエー) |
| (2) $23 + 8 - (5 - 12) - 29$ | (デンソー) |
| (3) $-8 \div 4 - 5 \times (-2)$ | (アリエス) |
| (4) $2 - (-6) \div 3$ | (住友電気工業) |
| (5) $(-29) - 4 \times 7 \div (-1)$ | (ヤマハ) |

$$(6) \quad (-6) + (-2)(-4) - (-5) \times 3 \quad (\text{きんでん})$$

$$(7) \quad 9 - \{2 + (7 - 8 \div 2) \times (2 + 9 \div 3) - 9\} \quad (\text{三井東圧化学})$$

$$(8) \quad [(-3) + \{(-2) + 6\}] \div \{7 - (-2) \times (5 - 9)\} \quad (\text{ニチレイ})$$

$$(9) \quad 4 \times 2 + 6 \times (6 \div 3 - 8) - 65 + 3 \times \{(21 - 3) \times 2\} \quad (\text{東急車輛製造})$$

$$(10) \quad 4.36 + 2 \times 1.86 - 21.9 \quad (\text{富士通ビジネスシステム})$$

$$(11) \quad \{1 + (0.6 - 1.5)\} \times (-0.3) \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(12) \quad 2 - \{(2 \times 3 - 6 \div 1.5) \times (-1)\} \quad (\text{東京ガス})$$

$$(13) \quad -(-0.5) + (-2.4) \div (-0.8) \times (+1.5) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

例 1.4 次の計算をせよ. (セガミ)

$$\begin{aligned} & 4 - 2 \times (-3)^2 + 2 \times (-4)^2 \div (-2)^3 \\ &= 4 - 2 \times 9 + 2 \times 16 \div (-8) \\ &= 4 - 18 - 4 \\ &= -18 \end{aligned}$$

1.4 次の計算をせよ.

$$(1) \quad 0.25 \times 10^3 \quad (\text{ブラザー工業})$$

$$(2) \quad 2^3 \times 3^2 \quad (\text{スズキ自動車})$$

$$(3) \quad 5^3 + 3^4 - 2^5 \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(4) \quad 4^3 + 5^2 - 3^3 \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(5) \quad 3^{10} \times 3^5 \div 3^{12} \quad (\text{住友金属鉱山})$$

$$(6) \quad 5 + (-3)^2 - 7 \quad (\text{デンソー})$$

$$(7) \quad -3^2 + 7 - (-2)^2 \quad (\text{住友金属鉱山})$$

$$(8) \quad 5^2 + (-3)^3 - 8 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(9) \quad (-3)^2 - 4 \times (-2) \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(10) \quad 7 \times 3 - 4^2 + 6 \times 4 \div (-8) \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(11) \quad (-2)^3 + (-3)^3 - (-7) - (-2)^2 \quad (\text{川崎汽船})$$

- (12) $-1^2 - (4 - 1) \times (1 - 3) - (-2)^2$ (きんでん)
- (13) $(-4)^3 + 4 \times (-3)^2$ (ダイハツ)
- (14) $4 + 3(-2)^3 + (2^2)^2$ (旭化成)
- (15) $(-3^2)^2 \div 9 \times (-2)^3$ (デンソー)
- (16) $(-5)^3 \div (-5)^2 + 5 \times (-5)$ (トヨタ自動車)
- (17) $(-2)^3 \div (-4) \times 2 - (-5)$ (NEC)
- (18) $-3^2 \times (-2)^3 \times (-5) \div 6$ (NHK)
- (19) $(-2)^2 \times (-6) - 9 \times (-8) \div (-12)$ (デンソー)
- (20) $(-5)^2 - (-2)^3 \times (-4)^2 \div (-1)^6$ (住友倉庫)
- (21) $2 \times (-2)^3 \div 2 + 2 \div 2^2 \times (-2)$ (安川電機)
- (22) $(-0.1)^3 \times 10^4 + (-10)^2 \times 0.5$ (ニコン)

例 1.5 次の計算をせよ.

(きんでん)

- 1) $|4 - 5| - |2 - 3| + |5 + (-2)|$
 $= |-1| - |-1| + |3|$
 $= 1 - 1 + 3$
 $= 3$
- 2) 2時間47分49秒 $\times 5$
 $= (2\text{時間} + 47\text{分} + 49\text{秒}) \times 5$
 $= 2\text{時間} \times 5 + 47\text{分} \times 5 + 49\text{秒} \times 5$
 $= 10\text{時間} + 235\text{分} + 245\text{秒}$
 $= 10\text{時間} + 235\text{分} + 4\text{分}5\text{秒}$
 $= 10\text{時間} + 239\text{分} + 5\text{秒}$
 $= 10\text{時間} + 3\text{時間}59\text{分} + 5\text{秒}$
 $= 13\text{時間}59\text{分}5\text{秒}$

1.5 次の計算をせよ.

- (1) $|(-2)^3| - |(-1)^2| - |5 - (-2)|$ (きんでん)

(2) $320\text{cm} + 3.1\text{km} - 420\text{m}$ (mで示せ) (住友金属鉱山)

(3) $9800\text{g} + 79.8\text{kg} + 0.8974\text{t}$ (kgで示せ) (NKK)

(4) 3時間31分57秒 $\times 7$ (きんでん)

(5) 11時間25分13秒 $- 7$ 時間52分48秒 (NKK)

(6) 午前10時12分38秒から午後1時20分12秒までは()秒である。(トヨタ自動車)

1.6 次の数字と数字の間に $+$, $-$, $\times$, $\div$ を記入し, 正しい等式にしないさい。(ダイハツ)

(1) $15()3 = 36()3$

(2) $3()8 = 96()4$

(3) $15()3 = 1()5$

(4) $76()4 = 24()48$

(5) $16()5 = 22()2$

1.7 次の□の中に適当な数字を入れなさい。(トヨタ自動車)

(1)

$$\begin{array}{r} 6\square45 \\ +) \square76\square \\ \hline 9313 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{r} \square8\square \\ \times) \underline{\quad}3 \\ \hline \square313 \end{array}$$

1.8 次の式で正しいものには○, 間違っているものには×をつけよ。(愛知時計)

(1) 正数 $+$ 正数 $=$ 正数

(2) 正数 $-$ 正数 $=$ 正数

(3) 正数－負数＝正数

(4) 正数÷負数＝正数

(5) 負数×正数＝負数

(6) 負数÷正数＝負数

(7) 負数×負数＝負数

(8) 負数＋負数＝負数

例題 1.6 次の計算をせよ.

(1) $2\frac{7}{15} - 1\frac{5}{6}$ (日産自動車)

(2) $\frac{5}{12} \div 3\frac{1}{8} \div \frac{8}{15}$ (東武鉄道)

(3) $\frac{1}{5} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right)$ (新日鉄八幡)

(4) $3.5 \div 0.6 \times \frac{3}{7} \times 0.4$ (KDD)

(5) $\left(-\frac{8}{9}\right) \times \frac{1}{12} \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right)$ (デンソー)

【解】

(1)

$$\begin{aligned} & 2\frac{7}{15} - 1\frac{5}{6} \\ &= \frac{37}{15} - \frac{11}{6} = \frac{74}{30} - \frac{55}{30} = \frac{19}{30} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \frac{5}{12} \div 3\frac{1}{8} \div \frac{8}{15} \\ &= \frac{5}{12} \div \frac{25}{8} \div \frac{8}{15} = \frac{5}{12} \times \frac{8}{25} \times \frac{15}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{8} = \frac{8}{40} - \frac{5}{40} = \frac{3}{40} \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned} & 3.5 \div 0.6 \times \frac{3}{7} \times 0.4 \\ &= \frac{35}{10} \div \frac{6}{10} \times \frac{3}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{7}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{5} = 1 \end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{8}{9}\right) \times \frac{1}{12} \div \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= -\frac{8}{9} \times \frac{1}{12} \div \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = -\frac{8}{9} \times \frac{1}{12} \times \frac{9}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

1.9 次の計算をせよ.

$$(1) \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(2) \quad \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \quad (\text{きんでん})$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) \quad (\text{新日鉄八幡})$$

$$(4) \quad 1\frac{7}{8} + 4\frac{1}{6} - 2\frac{5}{12} \quad (\text{住友金属鉱山})$$

$$(5) \quad \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \div \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} \quad (\text{きんでん})$$

$$(6) \quad \frac{5}{12} \div \frac{3}{7} \times \frac{9}{14} \div 3\frac{1}{8} \quad (\text{徳山曹達})$$

$$(7) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(8) \quad \frac{5}{6} \div 1\frac{2}{3} - \frac{1}{5} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(9) \frac{7}{10} \div \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \quad (\text{新日鉄八幡})$$

$$(10) \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \right) \div \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) \quad (\text{安川電機})$$

$$(11) \frac{1}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \div \frac{1}{3} \quad (\text{きんでん})$$

$$(12) \frac{1}{8} \times \frac{1}{3} \div \frac{5}{12} - \frac{1}{5} \times \frac{9}{2} \quad (\text{住友金属鉱山})$$

$$(13) \frac{7}{12} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \div \frac{1}{2} \quad (\text{きんでん})$$

$$(14) \frac{3}{2} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{7}{12} \div \frac{1}{3} \quad (\text{京浜急行})$$

$$(15) \frac{7}{18} \div 0.6 \times 1\frac{2}{7} \div \frac{5}{6} \quad (\text{日本光学})$$

$$(16) 0.5 \times 0.3 \times \frac{1}{20} \div 3 \div 0.05 \quad (\text{住友倉庫})$$

$$(17) 4\frac{1}{2} - \left(1.25 - 1\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \right) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(18) \left(2\frac{7}{13} - 1\frac{4}{5} \right) \div (0.2 \div 1.25) \quad (\text{小田急})$$

$$(19) 1\frac{2}{5} + \frac{2}{3} - 2\frac{1}{2} \quad (\text{TOTO})$$

$$(20) (-4) \times \left(-\frac{1}{8} \right) \quad (\text{富士重工業})$$

$$(21) \left\{ \frac{2}{17} \div \left(-6\frac{1}{2} \right) \right\} \times \left(-9\frac{3}{4} \right) \div \frac{2}{34} \quad (\text{住友電工})$$

$$(22) \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3} \right) \times \frac{1}{2} \quad (\text{住友金属鉱山})$$

$$(23) \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \div \frac{3}{5} \quad (\text{東京ガス})$$

$$(24) \frac{14}{3} \div \frac{7}{2} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{4} \right) \quad (\text{ワシノ機械})$$

$$(25) \frac{1}{12} \times (-3) + 3 \div \left(-\frac{3}{2} \right) \quad (\text{NKK})$$

$$(26) \quad \frac{2}{9} + \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \right) \div \left(-\frac{3}{7} \right) \quad (\text{デンソー})$$

$$(27) \quad - \left(\frac{7}{11} - \frac{3}{22} \right) \times 4 \div \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \quad (\text{大同製鋼})$$

$$(28) \quad 1\frac{1}{2} \div \left(-\frac{1}{6} \right) \times \frac{1}{3} - 3 \times (-2) \quad (\text{いすゞ自動車})$$

$$(29) \quad \frac{7}{10} - \left[\frac{4}{15} \times \frac{5}{8} + \frac{1}{12} \div \left\{ \frac{3}{4} - \left(\frac{5}{6} - \frac{2}{3} \right) \div \frac{1}{9} \right\} \right] \quad (\text{コスモ石油})$$

$$(30) \quad \frac{1}{3} \left(-2\frac{1}{7} \right) \div 0.5 + (-5) \left(-\frac{3}{7} \right) \quad (\text{愛知時計})$$

$$(31) \quad 3 - \left(-2\frac{1}{7} \right) \div (-0.5) - \left\{ 1 - \frac{3}{4} \div \left(-1\frac{1}{6} \right) \right\} \left(-\frac{2}{3} \right) \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(32) \quad \left(-\frac{8}{9} \right) \times \frac{1}{12} \div \left(-\frac{2}{3} \right)^2 \quad (\text{NKK})$$

$$(33) \quad -2^3 + (-3)^2 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^2 \quad (\text{きんでん})$$

$$(34) \quad \{(-2)^2 + (-4)^2 - (-5)^2\} \div \left\{ \left(-\frac{1}{2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right\} \quad (\text{ブラザー工業})$$

$$(35) \quad \left(-\frac{3}{4} \right)^2 \div (-0.3)^2 \times \left(-4\frac{4}{5} \right) \quad (\text{住友金属鉱山})$$

$$(36) \quad 1.5 \div \left(-\frac{1}{6} \right)^2 - 2\frac{1}{4} \times (-2)^3 \quad (\text{日産ディーゼル})$$

$$(37) \quad 1\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right)^2 \div (-0.375) - 0.6 \times \left(-1\frac{2}{3} \right) \quad (\text{NKK})$$

例題 1.7 次の繁分数を簡単にせよ.

$$(1) \quad \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{4}} \quad (\text{大日本セロファン})$$

$$(2) \quad 1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \quad (\text{日本光学})$$

$$(3) \quad \frac{1}{3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} \quad (\text{スズキ自動車})$$

【解】

(1)

$$\frac{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}}{\frac{3}{5} + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{5}} \div \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{10} \div \frac{17}{20} = \frac{6}{17}$$

(2)

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - 1 \div \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 1 - 1 \div \frac{2}{3} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

(3)

$$\frac{1}{3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = 1 \div \left(3 - \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) = 1 \div \left\{ 3 - 1 \div \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right\} = 1 \div \left(3 - 1 \div \frac{1}{2} \right) = 1$$

1.10 次の繁分数を簡単にせよ.

$$(1) \frac{\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} \quad (\text{きんでん})$$

$$(2) \frac{\frac{\frac{3}{10} + \frac{1}{8}}{\frac{8}{5} + \frac{1}{2}} \times \frac{3}{5}}{\frac{8}{5} + \frac{1}{2}} \quad (\text{山下汽船})$$

$$(3) \frac{\frac{\frac{1}{5}}{1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}}}{1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{2}} \quad (\text{東洋高压})$$

$$(4) \frac{\frac{1}{6} - 3 + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \times 2 + \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} - 3 + \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \times 2 + \frac{1}{4}} \quad (\text{デンソー})$$

$$(5) \frac{\frac{8}{21} + \frac{1}{4 - 2\frac{1}{4}} \times \frac{5}{3}}{\frac{8}{21} + \frac{1}{4 - 2\frac{1}{4}} \times \frac{5}{3}} \quad (\text{キャノン})$$

$$(6) \frac{\frac{1 + \frac{3}{7}}{2 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}}}{2 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}}} \quad (\text{トーマン})$$

$$(7) \frac{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{3}}}{1 + \frac{1}{1-\frac{1}{3}}} \quad (\text{日石三菱})$$

$$(8) 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} \quad (\text{日石三菱})$$

$$(9) \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{\frac{1}{4}-1}} \quad (\text{住友倉庫})$$

実践問題 1

総合警備保障

(1) 次の計算をなさい.

$$\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \div \left(-\frac{3}{8}\right)$$

(2) 次の計算をなさい.

$$\frac{3}{2}(4x - 2) - \frac{2}{3}(3x + 9)$$

(3) 30で割っても, 18で割っても余りが10となる正の整数のうち, 最小のものを求めなさい.

(4) 分母と分子の和が61である分数がある. この分数の分母は, 分子の2倍より14小さい. この分数を求めなさい.

(5) 5枚の硬貨を投げたとき, 表・裏の出方は全部で何通りあるか求めなさい.

【答】

(1) 1 (2) $4x - 9$ (3) 100 (4) $\frac{25}{36}$ (5) 32通り

第 2 章 割合

例題 2.1 次の () の中に適当な数値を記入せよ.

(1) $\frac{3}{4}$ を歩合で表すと () であり, 百分率では () である. (大丸)

(2) () の 9 割 5 分は 190 である. (京浜急行電鉄)

(3) 465 人は () 人の 15 % である. (三共)

(4) 500 円の 20 % は () 円の $\frac{5}{8}$ である. (箱根登山鉄道)

【解】

(1) $\frac{3}{4} = 0.75$ なので, 歩合で 7 割 5 分, 百分率で 75 %.

(2) (未知数 $\rightarrow x$, の $\rightarrow \times$, は $\rightarrow =$) に直して方程式をつくる.

$$x \times 0.95 = 190$$

$$0.95x = 190$$

$$95x = 19000$$

$$x = 200$$

$$(3) \quad 465 = x \times 0.15$$

$$465 = 0.15x$$

$$x = 3100(\text{人})$$

$$(4) \quad 500 \times 0.2 = x \times \frac{5}{8}$$

$$100 = \frac{5}{8}x$$

$$x = 160(\text{円})$$

2.1 次の () の中に適当な数値を記入せよ.

(1) $\frac{2}{25}$ は () % である. (東京ガス)

- (2) 500 円の 20 % は () 円の $\frac{1}{4}$ である. (新阪急ホテル)
- (3) () の 5 分 5 厘は 6,380 である. (トヨタカローラ)
- (4) 1,200 の 3 割 2 分は () である. (トヨタカローラ)
- (5) 56 の 6.2 % は () の 2 % である. (日本鉄塔工業)
- (6) () の 1.2 % は 10.68 である. (TOTO)
- (7) $\frac{1}{6}$ の () % は $\frac{8}{15}$ である. (日本鉄塔工業)
- (8) 3 日の 16 % は () 時間 () 分 () 秒である. (丸物)
- (9) 165 人は () 人の 30 % である. (日本セメント)
- (10) 5kg は 80kg の () % である. (東武鉄道)
- (11) 160 人は 100 人の () % である. (京浜急行電鉄)

例題 2.2 次の () の中に適当な数値を記入せよ.

- (1) 780 円の 2 割 5 分引は () 円である. (日石三菱)
- (2) 9610 円は () 円の 2 割 4 分増である. (コカ・コーラボトリング)
- (3) 90 円は 120 円の () 割 () 分引にあたる. (雪印乳業)

【解】

(1) 2 割 5 分引 $\rightarrow 1 - 0.25 = 0.75$

$$\begin{aligned} 780 \times 0.75 &= x \\ x &= 585 \end{aligned}$$

(2) 2 割 4 分増 $\rightarrow 1 + 0.24 = 1.24$

$$\begin{aligned} 9610 &= x \times 1.24 \\ 1.24x &= 9610 \\ 124x &= 961000 \\ x &= 7750 \end{aligned}$$

- (3) 90円は120円の30円引であり、30円は120円の2割5分にあたるので、答は2割5分引。

2.2 次の()の中に適当な数値を記入せよ。

- (1) ()円の3割引は1050円である。 (ジュンテンドー)
- (2) 2,970円は()円の3割5分増である。 (日本スピンドル製造)
- (3) ()リットルの3割減が12.6リットルである。 (日産自動車)
- (4) 2,250円は()円の2割5分増である。 (三菱電機)
- (5) 900円の本を720円で売ると()割引になる。 (ダイエー)
- (6) 635円の()割引は508円である。 (大阪窯業セメント)
- (7) 900円の本を()割引で売ると765円になる。 (ワシノ機械)

2.3 次の空欄に適する語句や数字を記入して表を完成せよ。 (ダイエー)

小 数	分 数	百分率	歩 合
0.45			4割5分
	$\frac{5}{4}$		
		65%	
	$\frac{1}{1000}$		1厘

2.4 次の問いに答えよ。

- (1) 7リットルの30%は何ccか。 (TOTO)
- (2) 1000円の1割引はいくらか。 (高田工業所)
- (3) $\frac{1}{40}$ を百分率で表せ。 (豊生ブレーキ)
- (4) 378人は3643人の何%か。小数第2位を四捨五入して答えよ。 (ダイハツ)
- (5) 女子社員が144人で、総社員の1割2分である。総社員は何人か。 (日本鉄塔工業)
- (6) 受験者500名のうち200名が不合格となった。このときの合格率は何%か。 (TOTO)
- (7) ある町の総人口の60%は5,520人。残り40%は何人か。 (九州武蔵精密)

(8) a が b の20%であるとき、 b は a の何倍か. (ダイエー)

例題 2.3 仕入れ値段 A 円の品物を1割5の利益を見込み、 B 円で売った. B と A の関係式を求めよ. (日石三菱)

【解】 A 円の1割5分増が B 円なので、 $A \times 1.15 = B$. (答) $B = 1.15A$

例題 2.4 原価100円の品物に20%の利益を見込んで定価をつけたが売れなかったの
で、2割引とした. 損得はいくらか. (武蔵精密)

【解】 原価 $\xrightarrow{20\% \text{ 増}}$ 定価 $\xrightarrow{2 \text{ 割引}}$ 売価 なので、
 定価 = 原価の20%増 = $100 \text{ 円} \times 1.2 = 120 \text{ 円}$
 売価 = 定価の2割引 = $120 \text{ 円} \times 0.8 = 96 \text{ 円}$
 利益 = 売価 - 原価 = $96 \text{ 円} - 100 \text{ 円} = -4 \text{ 円}$ (答) 4円の損失

例題 2.5 定価1,200円の商品を1割引で売っても原価の2割の利益がある. 原価は
いくらか. (リコー厚木事業所)

【解】 原価を x 円とする. 売価 = 定価の1割引 = $1200 \text{ 円} \times 0.9 = 1080 \text{ 円}$.
 2割の利益があるので、売価は原価の2割増であるから

$$\begin{aligned} 1080 &= x \times 1.2 \\ 12x &= 10800 \\ x &= 900 \quad (\text{答}) 900 \text{ 円} \end{aligned}$$

例題 2.6 原価6,500円の品物を定価より1割5分引いて300円の利益を得たい. 定
価はいくらにすればよいか. (ビックカメラ)

【解】 定価を x 円とする. 売価 = 定価の1割5分引 = $x \times 0.85 = 0.85x$.
 利益 = 売価 - 原価であるので、

$$\begin{aligned} 300 &= 0.85x - 6500 \\ 0.85x &= 6800 \\ x &= 8000 \quad (\text{答}) 8,000 \text{ 円} \end{aligned}$$

2.5 次の問いに答えよ.

- (1) 原価1,600円の品物で20%の利益を得たい. 売価をいくらにすればよいか. (マツヤデンキ)
- (2) 定価900円の品物を2割引にして売ってもなお2割の利益がある. この品物の原
価と、定価は原価の何割増か. (横浜ゴム)

- (3) 原価の2割の利益を見込んで定価をつけた。この定価の1割引が10,800円だった。原価はいくらか。 (日本飛行機)
- (4) 原価の2割増で定価を決めましたが、実際には120円引いて1,680円となりました。原価はいくらですか。 (NKK京浜)
- (5) ある商品を利益3割5分の定価とし、定価の2割引でなお32円の利益がある。原価はいくらか。 (日本毛織)
- (6) 原価の2割の利益を見込んで定価をつけた商品を、定価の1割引で売り、240円の利益を得た。原価はいくらか。 (新阪急ホテル)
- (7) 原価800円の品物を定価の1割引で売っても、なお8分の利益があるようにするには、はじめの定価をいくらにつけたらよいか。 (ヤマハ)
- (8) 原価800円の品物を定価の2割引で売っても、なお3割の利益がある。定価はいくらか。 (松下電送機器)
- (9) 原価1,200円の商品を定価の20%引で売っても30%の利益がある商品の定価を求めなさい。 (九州武蔵精密)

例題 2.7 定価で売れば2割5分のもうけのある品物を、損得なしに売るには定価の何割引で売ればよいか。 (宝酒造)

【解】 原価を A 円、定価を B 円とする。
定価は原価の2割5分増なので、

$$B = A \times 1.25$$

となる。損得なしに売るので、売価は A 円。上式より

$$A = B \times 0.8$$

となるので、売価は定価の2割引。 (答)2割引

例題 2.8 定価の2割引で売っても2割の利益があるようにするには、定価は原価の何割増にすればよいか。 (ホテル日航福岡)

【解】 原価を A 円、定価を B 円、売価を C 円とする。
2割の利益 $\iff$ 売価は原価の2割増

$$C = A \times 1.2$$

売価は定価の2割引なので、

$$C = B \times 0.8$$

となる. 上の2式より

$$B \times 0.8 = A \times 1.2$$

$$B = A \times 1.5$$

であるから, 定価は原価の5割増. (答)5割増

2.6 次の問いに答えよ.

- (1) 原価の3割増の定価をつけた商品を定価の3割引で売った. 原価の何%の損失か.
(富士通ビジネスシステム)
- (2) 定価の2割引で売っても, なお1割2分の利益があるように定価をつけるは, 定価は原価の何割増につけておいたらよいか.
(国精工業)

例題 2.9 定価の1割引で売ると200円の利益がある. 定価の2割引で売ると100円の損失がある. 原価を求めよ.
(コカ・コーラボトリング)

【解】 原価を A 円, 定価を B 円とする.

売価を定価の1割引とするとき

$$0.9B - A = 200 \quad \Leftarrow \text{売価} - \text{原価} = \text{利益}$$

売価を定価の2割引とするとき

$$0.8B - A = -100 \quad \Leftarrow \text{売価} - \text{原価} = \text{利益}$$

上の2式より, $A = 2500$, $B = 3000$. (答)2500円

2.7 次の問いに答えよ.

- (1) ある商品を定価の5%引いて売る約束で3000円を受け取り, おつりとして625円渡すところを誤って725円渡した. 結局, 定価の何%引いて売ったことになるか.
(日本毛織)
- (2) ある商品が先月は定価で40個売れたが, 今月は定価の1割引にしたところ60個売れて, 売上金は先月よりも7000円増加した. この商品の定価はいくらか. (オカモト理研)
- (3) ある商品がある. この商品を定価で売れば70円の利益があるが, これを定価の1割引で売れば, 2割引で売ったときより3倍の利益があるという. この商品の原価を求めよ.
(日本特殊陶業)

- (4) Yシャツ 150 枚を仕入れ、原価の 2 割増 (定価) で 8 割売り、残りを定価の 1 割引で売ったら利益は 13,200 円であった。この Yシャツ 1 枚の原価はいくらか。(富士紡績)
- (5) ある人が、10,000 円で甲、乙 2 つの商品を仕入れ、どちらも 2 割の利益を見込んで定価をつけた。ところが買い手がなかったので、甲は定価の 2 割引、乙は定価の 1 割引で売った。それでも 440 円の利益があったという。甲、乙の原価を求めよ。(トヨタ自動車)

(日歩の計算)

◎日歩 a 銭……100 円につき 1 日の利子が a 銭

例) 0.04 円 = 4 銭, 0.123 円 = 12 銭 3 厘

例) A 円を日歩 2 銭で 60 日間借りたとき利子 (利息) は

$$A \times \frac{0.02}{100} \times 60 \text{ (円)}$$

◎日歩を年利に換算する方法

例) 日歩 2 銭 $\Rightarrow$ 1 年に 2 銭 $\times$ 365 (日) = 730 銭 = 7.3 円

$\Rightarrow$ 100 円につき 7.3 円の利子

$\Rightarrow$ 7.3 円 $\div$ 100 円 = 0.073 = 7 分 3 厘

例題 2.10 銀行から 10 万円を日歩 4 銭で 150 日借りると利息はどれだけか。(雪印乳業)

【解】 4 銭 = 0.04 円

$$\text{利息} = 100,000 \times \frac{0.04}{100} \times 150 = 6,000 \text{ 円}$$

2.8 次の問いに答えよ。

- (1) 元金 70,000 円を日歩 2 銭で 30 日預けたときの利息はいくらか。(コカ・コーラボトリング)
- (2) 元金 1,200,000 円を日歩 5 銭で 60 日間借りると利子はいくらか。(石原産業)
- (3) 80 万円を日歩 2 銭 5 厘で 65 日預けたときの元利合計を求めよ。(丸一鋼管)
- (4) 日歩 3 銭 2 厘は年利ではいくらか。(東芝)

実践問題 2

トヨタ車体

1 次の計算をしなさい.

(1) $(-2)^3 \div (-4) \times 2 - (-5)$

(2) $\sqrt{81} - 2\sqrt{8}$

(3)
$$\begin{cases} 3x + 2y = -9 \\ 9x - 8y = 15 \end{cases}$$

(4) $\{1 + (0.6 - 1.5)\} \times (-0.3)$

2 次の数列の空欄をうめなさい.

(1) 1, 4, 9, 16, (), 36, 49, ...

(2) $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, (), 1\frac{1}{2}, 1\frac{5}{6}, \dots$

(3) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, (), 4\sqrt{2}, \dots$

3 子供達に鉛筆を配るとき, 1 人に 6 本ずつ配ると 18 本余り, 9 本ずつ配ると 1 人には 3 本足りなくなる. 子供の人数を求めなさい.

【答】

1 (1) 9 (2) $9 - 4\sqrt{2}$ (3) $x = -1, y = -3$ (4) -0.03

2 (1) 25 (2) $1\frac{1}{6}$ (3) 4

3 7人

第 3 章 整式の計算

1つの整式の中に，文字の部分が同じであるとき，それらの項を**同類項**という．整式は，同類項があれば，それらを1つの項にまとめ，ふつう次数の高い項から順に並べて整理しておく．

例 3.1

$$\begin{aligned} & 2x^2 + 5 - 3x + x^2 + 7x - 6 \\ &= (2x^2 + x^2) + (-3x + 7x) + (5 - 6) \\ &= 3x^2 + 4x - 1 \end{aligned}$$

問 3.2 整式を整理せよ．

(1) $x - 4 + 3x - 1$

(2) $2x - 1 + x^2 - 3x + 8$

(3) $3x^2 + 5 - 2x^2 - x$

(4) $1 - 4x - x^2 - 7 + 5x - x^2$

【答】 (1) $4x - 5$ (2) $x^2 - x + 7$ (3) $x^2 - x + 5$ (4) $-2x^2 + x - 6$

整式の和や差を求めるときには，その整式の同類項をすべてまとめ，整理して1つの整式で表す．

例題 3.3 $A = x^2 + 3x - 2$, $B = 2x^2 - 5x + 7$ とするとき， $A + B$ と $A - B$ を計算せよ．

【解】

$$\begin{aligned}
 A + B &= (x^2 + 3x - 2) + (2x^2 - 5x + 7) \\
 &= x^2 + 3x - 2 + 2x^2 - 5x + 7 \\
 &= (x^2 + 2x^2) + (3x - 5x) + (-2 + 7) \\
 &= 3x^2 - 2x + 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A - B &= (x^2 + 3x - 2) - (2x^2 - 5x + 7) \\
 &= x^2 + 3x - 2 - 2x^2 + 5x - 7 \\
 &= (x^2 - 2x^2) + (3x + 5x) + (-2 - 7) \\
 &= -x^2 + 8x - 9
 \end{aligned}$$

例題 3.3 は、次のように計算してもよい.

$$\begin{array}{r}
 x^2 + 3x - 2 \\
 +) \quad 2x^2 - 5x + 7 \\
 \hline
 3x^2 - 2x + 5
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 3x - 2 \\
 -) \quad 2x^2 - 5x + 7 \\
 \hline
 -x^2 + 8x - 9
 \end{array}$$

問 3.4 次の各組の整式 A, B について, $A + B$ と $A - B$ を計算せよ.

- (1) $A = 4x^2 + 3x - 1, B = x^2 - x - 2$
 (2) $A = 6a^2 - 7a + 5, B = -2a^2 + 4a - 3$
 (3) $A = 3y^3 - y^2 + 8, B = 5y^3 + 2y^2 - 6y - 10$

【答】 (1) $A + B = 5x^2 + 2x - 3, A - B = 3x^2 + 4x + 1$ (2) $A + B = 4a^2 - 3a + 2, A - B = 8a^2 - 11a + 8$ (3) $A + B = 8y^3 + y^2 - 6y - 2, A - B = -2y^3 - 3y^2 + 6y + 18$

問 3.5 $A = x^2 + 4x - 2, B = -3x^2 + 5x + 1, C = 7x - 9$ とするとき, 次の計算をせよ.

- (1) $A + B$
 (2) $A - C$
 (3) $B - C$

【答】 (1) $-2x^2 + 9x - 1$ (2) $x^2 - 3x + 7$ (3) $-3x^2 - 2x + 10$

例題 3.6 $A = 4x^2 - x + 2, B = -3x^2 + 4x - 5$ とするとき, 次の計算をせよ.

- (1) $3A + 2B$

$$(2) 2A - 5B$$

【解】

$$(1)$$

$$\begin{aligned} 3A + 2B &= 3(4x^2 - x + 2) + 2(-3x^2 + 4x - 5) \\ &= 12x^2 - 3x + 6 - 6x^2 + 8x - 10 \\ &= 6x^2 + 5x - 4 \end{aligned}$$

$$(2)$$

$$\begin{aligned} 2A - 5B &= 2(4x^2 - x + 2) - 5(-3x^2 + 4x - 5) \\ &= 8x^2 - 2x + 4 + 15x^2 - 20x + 25 \\ &= 23x^2 - 22x + 29 \end{aligned}$$

問 3.7 $A = 2x^2 + 3x - 7$, $B = -4x^2 - x + 5$ とするとき, 次の計算をせよ.

$$(1) 3A + 2B$$

$$(2) 2A - 4B$$

$$(3) -2A + 3B$$

$$(4) -4A - 5B$$

【答】 (1) $-2x^2 + 7x - 11$ (2) $20x^2 + 10x - 34$ (3) $-16x^2 - 9x + 29$ (4) $12x^2 - 7x + 3$

問 3.8 $A = \frac{1}{3}a^2 - ab + b^2$, $B = 2a^2 + \frac{1}{2}ab - \frac{2}{3}b^2$ とするとき, 次の計算をせよ.

$$(1) 3A + 6B$$

$$(2) 6A - 4B$$

【答】 (1) $13a^2 - b^2$ (2) $-6a^2 - 8ab + \frac{26}{3}b^2$

例題 3.9 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{2a - b}{3} - \frac{3a - 2b}{5} \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(2) \{4a - (3b - 6)\} - \{2a - (-b + 1)\} \quad (\text{山陽電鉄})$$

【解】

(1)

$$\begin{aligned}
& \frac{2a-b}{3} - \frac{3a-2b}{5} \\
&= \frac{5(2a-b)}{5 \times 3} - \frac{3(3a-2b)}{3 \times 5} \\
&= \frac{10a-5b-9a+6b}{15} \\
&= \frac{a+b}{15}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
& \{4a - (3b - 6)\} - \{2a - (-b + 1)\} \\
&= (4a - 3b + 6) - (2a + b - 1) \\
&= 4a - 3b + 6 - 2a - b + 1 \\
&= 2a - 4b + 7
\end{aligned}$$

3.1 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{2}{3}ab - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{3}ab \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(2) (3x^2 - 5x + 2) + (x^2 + 3x - 4) \quad (\text{日本光学})$$

$$(3) (4x^2 - 6x + 3) + (2x^2 - 4 + 4x) \quad (\text{日石三菱})$$

$$(4) (5x + 7y - 4) - (5x - 7y + 2) \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(5) (ax - 3by + cz) - (2cz - 4by - 2ax) \quad (\text{大同製鋼})$$

$$(6) 3a^3 - 2a^2 + a - 6 - (a^3 - 2a^2 + 5) \quad (\text{雪印乳業})$$

$$(7) (5b - 6) - 3(b^2 + 2b - 3) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(8) \frac{5a-4b}{3} - \frac{a-2b}{6} + a \quad (\text{日産自動車})$$

$$(9) \frac{3a-b}{3} - a + \frac{a+2b}{2} \quad (\text{京阪鉄道})$$

$$(10) 5a - \frac{3a-2b}{6} - \frac{4a+b}{3} \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(11) 5 - [2k + 8 - \{6k + 2 + (2k - 1)\}] \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(12) \quad 2x - 3 \left[x + 5 \left\{ x - \frac{1}{15}(2x - 1) \right\} \right] \quad (\text{日産車体})$$

3.2 次の問いに答えよ.

(1) $A = x^3 - 2x + 3x^2 - 1$, $B = x^2 + 2x - 1$, $C = x - 3$ のとき, $A - (B - C)$ を求めよ. (富士電機)

(2) $5x^2 + 3x - (\quad) + 8x - 2 = 5x + 3$ の $(\quad)$ にあてはまる式を求めよ. (日石三菱)

$a \times a = a^2$, $a \times a \times a = a^3$ のように, a を n 個掛け合わせたものを a^n とかき, この n を a^n の**指数**という. 特に, a^1 は a と同じである.

$$a^2 \times a^3 = (a \times a) \times (a \times a \times a) = a^{2+3} = a^5$$

$$a^5 \div a^3 = \frac{a \times a \times a \times a \times a}{a \times a \times a} = a^{5-3} = a^2$$

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^{2 \times 3} = a^6$$

$$(ab)^3 = ab \times ab \times ab = (a \times a \times a) \times (b \times b \times b) = a^3 b^3$$

一般に, 次の**指数法則**が成り立つ.

(**指数法則**) m, n を正の整数とすると

$$1. a^m \times a^n = a^{m+n} \quad 2. a^m \div a^n = a^{m-n} \quad 3. (a^m)^n = a^{mn} \quad 4. (ab)^n = a^n b^n$$

例 3.10

$$1) \quad a^4 b \times a^2 b^2 = (a^4 \times a^2) \times (b \times b^2) = a^6 b^3$$

$$2) \quad (-2x^2 y)^3 = (-2)^3 \times (x^2)^3 \times y^3 = -8x^6 y^3$$

$$3) \quad 12a^7 b^5 \div (-2a^3 b)^2 = 12a^7 b^5 \div 4a^6 b^2 = 3ab^3$$

例題 3.11 次の計算をせよ.

$$(1) \quad 3x^2 \times (-5x^3 y)^2 \quad (\text{住友電工})$$

$$(2) \quad 2(a^2 b)^2 \div (2ab)^3 \times (2ab^2)^2 \quad (\text{安川電機})$$

【解】

(1)

$$\begin{aligned}
 & 3x^2 \times (-5x^3y)^2 \\
 &= 3x^2 \times 25x^6y^2 \\
 &= 75x^8y^2
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 & 2(a^2b)^2 \div (2ab)^3 \times (2ab^2)^2 \\
 &= 2a^4b^2 \div 8a^3b^3 \times 4a^2b^4 \\
 &= \frac{2a^4b^2 \times 4a^2b^4}{8a^3b^3} = \frac{8a^6b^6}{8a^3b^3} = a^3b^3
 \end{aligned}$$

3.3 次の計算をせよ.

$$(1) \quad x \times x^3 \times x^5 \quad (\text{日産自動車})$$

$$(2) \quad 8x^4y^3z^2 \div (-4xy^4z^2) \quad (\text{帝国石油})$$

$$(3) \quad 3ab^3 \div 6a^2b \times 4a^3b^2 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(4) \quad \frac{2}{3}x^2yz^2 \times \frac{3}{8}x^2y^8z^2 \div \frac{1}{2}xy^2z^3 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(5) \quad 144x^6y^2z^4 \div (-12x^3yz^2) \div (-5x^2yz) \quad (\text{日本光学})$$

$$(6) \quad (-2a^2b)^2 \times (-3a^2b^3) \quad (\text{葵精機})$$

$$(7) \quad 2a^2b \times (-ab^2)^3 \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(8) \quad (a^2b)^3 \times (ab^2)^2 \quad (\text{東洋高压})$$

$$(9) \quad (2x)^3 \times (-3x^2y)^2 \quad (\text{富士通ビジネスシステム})$$

$$(10) \quad (-x^2)^2(-x^3y)^3(x^2y^3) \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(11) \quad (-a^2) \times (-a^3)^2 \times (-a)^4 \quad (\text{ダイヘン})$$

$$(12) \quad (a^2bx^2)^5 \div a^4b^5x^{10} \quad (\text{愛知機械})$$

$$(13) \quad (-3x^2y^3)^3 \div (-3xy^2) \quad (\text{きんでん})$$

$$(14) \quad (4xy)(2xy)^3 \div 8x^2y^3 \quad (\text{デンソー})$$

$$(15) \quad (-2ax)^3 \div (4ax^3y)^2 \quad (\text{東京ガス})$$

$$(16) \left(-\frac{5}{8}x^2y^3\right)^2 \div \left(-\frac{5}{4}xy^2\right)^3 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(17) (-2a^2)^2 \times (3a^2b^3)^3 \div (6a^3b^2)^2 \quad (\text{豊和工業})$$

$$(18) \{(-a)^3(-a)^5\}^2 \div (-a)^8 \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(19) (-3x^2y)^2 \times (-2xy^2z)^3 \div (-6x^3y^2z)^2 \quad (\text{日本毛織})$$

$$(20) \frac{8a^3b}{15} \times \left(-\frac{ab^2}{6}\right)^2 \div \left(\frac{a^2b}{3}\right)^3 \quad (\text{住友金属鉱山})$$

例 3.12

1)

$$\begin{aligned} & 3x(x^2 - 2x + 4) \\ &= 3x \times x^2 + 3x \times (-2x) + 3x \times 4 \\ &= 3x^3 - 6x^2 + 12x \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & (a^2 + 3ab - 2b^2)(-4a) \\ &= a^2 \times (-4a) + 3ab \times (-4a) - 2b^2 \times (-4a) \\ &= -4a^3 - 12a^2b + 8ab^2 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & 2x(4x - 1) - 3(2x^2 - 3x + 1) \\ &= 8x^2 - 2x - 6x^2 + 9x - 3 \\ &= 2x^2 + 7x - 3 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} & (6a^3b - 4a^2b^2 + 2ab^3) \div 2ab \\ &= \frac{6a^3b}{2ab} - \frac{4a^2b^2}{2ab} + \frac{2ab^3}{2ab} \\ &= 3a^2 - 2ab + b^2 \end{aligned}$$

3.4 次の計算をせよ.

$$(1) \ x(2x - 5) - (x^2 + 2x - 1) \quad (\text{ワシノ機械})$$

$$(2) \ -2a(ab - c - abc) - (-a^2b + 2ac + a^2bc) \quad (\text{凸版印刷})$$

$$(3) \ 6(x + 2) - \{x(3 + 8x) - 2(4x^2 - 1) - 3\} - 18 \quad (\text{マツダ})$$

$$(4) \ 16\{(2x^2 + 3 + 6x) - 9x(6x - 2)\} - (12x - 3) \quad (\text{日本光学})$$

$$(5) \ (14x^2 - 7x) \div (-7) \quad (\text{中部電力})$$

$$(6) \ (15x^2y - 6xy^2) \div (-3xy) \quad (\text{いすゞ自動車})$$

$$(7) \ (abc^2 + ab^2c + a^2bc) \div abc \quad (\text{デンソー})$$

$$(8) \ (12x^3y - 24x^2y^2 + 36xy^3) \div 6xy \quad (\text{呉造船})$$

$$(9) \ (3abc - 3a^2b^2c + 5abc^2) \div (-3abc) \quad (\text{中部電力})$$

整式を整式で割る計算は、数の割り算にならって、次のように計算する. このとき、割る式も割られる式も次数の高い項の順に整理しておく.

例 3.13 次の計算をしてみよう.

$$1) \ (2x^2 + 7x + 13) \div (x + 2)$$

$$\begin{array}{r} \overline{2x+3} \cdots \text{商} \\ x+2 \overline{)2x^2+7x+13} \\ \underline{2x^2+4x} \cdots (x+2) \times 2x \\ 3x+13 \\ \underline{3x+6} \cdots (x+2) \times 3 \\ 7 \cdots \text{余り} \end{array}$$

【答】 商は $2x + 3$, 余りは 7

$$2) \ (3x^3 + 4x^2 + 6) \div (x^2 + 2x - 1)$$

$$\begin{array}{r} \overline{3x-2} \cdots \text{商} \\ x^2+2x-1 \overline{)3x^3+4x^2+6} \\ \underline{3x^3+6x^2-3x} \cdots (x^2+2x-1) \times 3x \\ -2x^2+3x+6 \\ \underline{-2x^2-4x+2} \cdots (x^2+2x-1) \times (-2) \\ 7x+4 \cdots \text{余り} \end{array}$$

【答】 商は $3x - 2$, 余りは $7x + 4$

数の割り算では、余りは割る数より小さい数となるが、整式の割り算では、余りは割る式よりも低い次数の式となる。また、余りが0ときは、数の割り算の場合と同様に、割り切れるという。

3.5 次の計算をせよ。

- (1) $(-6x^2 + 3x) \div (2x - 1)$ (九州電力)
- (2) $(2x^3 + 3x^2 + x + 4) \div (x + 2)$ (きんでん)
- (3) $(x^3 + 3x^2 - 2x - 1) \div (x - 3)$ (富士電機)
- (4) $(3x^3 - 4x^2 + 2x - 1) \div (x - 1)$ (大阪ガス)
- (5) $(p^3 + p^2 - 4p - 4) \div (p - 2)$ (日石三菱)
- (6) $(x^3 + x + 3) \div (x^2 + 2x - 1)$ (帝国産業)
- (7) $(8x^3 - 18x^2 + 11x - 8) \div (4x^2 - 3x + 1)$ (小田急)
- (8) $(8a^2 + a^3 - a^4 - 11a + 3) \div (3 - 2a - a^2)$ (NKK)
- (9) $(2x^3 - 3x^2y + 2xy^2 - 8y^3) \div (x - 2y)$ (NKK)

(割り算の等式) 整式 A を整式 B で割ったときの商を Q ，余りを R とすれば

$$A = BQ + R \qquad \begin{array}{r} Q \\ B \overline{) A} \\ \underline{\dots\dots} \\ R \end{array}$$

ただし、 R は0か B より次数は低い。

実践問題 3

住友金属

1 次の計算をしなさい.

(1) $4261 - 2193 + 1029$

(2) $448 \div 168 \times 135$ (割り切れない場合は分数にて解答のこと)

(3) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{2}$

(4) $-3^2 + 7 - (-2)^2$

(5) $\sqrt{42} \div \sqrt{6} \times 2\sqrt{7}$

(6) $5(x - 2) - 2(3x - 1)$

(7) $a^2b^3 \times a^3b^4 \times \frac{1}{ab^2}$

(8) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

(9) 次の式を因数分解しなさい.

$$x^2 + 5x + 6$$

(10) 次の式を因数分解しなさい.

$$3x^2 + 5x + 2$$

2 次の方程式を解きなさい.

(1) $3(x - 2) - 5 = -x + 1$

(2)
$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ x + 3y = 9 \end{cases}$$

(3) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

【答】

1 (1) 3097 (2) 360 (3) $\frac{5}{6}$ (4) -6 (5) 14
(6) $-x - 8$ (7) a^4b^5 (8) 1 (9) $(x + 2)(x + 3)$ (10) $(3x + 2)(x + 1)$

2 (1) $x = 3$ (2) $x = 3, y = 2$ (3) $x = 4, \frac{1}{2}$

第 4 章 乗法公式

整式の積の計算は、次のようにする.

例 4.1

$$\begin{aligned} & (2x - 3)(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2x(x^2 - 4x + 5) - 3(x^2 - 4x + 5) \\ &= 2x^3 - 8x^2 + 10x - 3x^2 + 12x - 15 \\ &= 2x^3 - 11x^2 + 22x - 15 \end{aligned}$$

例 4.1 は、次のように計算してもよい.

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x + 5 \\ \times 2x - 3 \\ \hline 2x^3 - 8x^2 + 10x \quad \cdots 2x \times (x^2 - 4x + 5) \\ -3x^2 + 12x - 15 \quad \cdots -3 \times (x^2 - 4x + 5) \\ \hline 2x^3 - 11x^2 + 22x - 15 \end{array}$$

このように、整式の積を単項式の和の形に直すことを**展開する**という.

問 4.2 次の式を展開せよ.

(1) $(3x + 4)(2x - 5)$

(2) $(2x - 3)(x^2 + 6x - 7)$

(3) $(3x^2 - 2x + 1)(x + 4)$

(4) $(2x^2 - x - 4)(5x - 2)$

【答】 (1) $6x^2 - 7x - 20$ (2) $2x^3 + 9x^2 - 32x + 21$ (3) $3x^3 + 10x^2 - 7x + 4$
(4) $10x^3 - 9x^2 - 18x + 8$

例題 4.3 次の問いに答えよ.

(1) $(2x + 3)(3x - 5)$ を展開せよ.

(2) $(x+2)(2x+3)(3x-5)$ を展開せよ.

【解】

(1)

$$\begin{aligned}(2x+3)(3x-5) \\&=2x(3x-5)+3(3x-5) \\&=6x^2-10x+9x-15 \\&=6x^2-x-15\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(x+2)(2x+3)(3x-5) \\&=(x+2)(6x^2-x-15) \quad \leftarrow (1) \text{の結果より} \\&=x(6x^2-x-15)+2(6x^2-x-15) \\&=6x^3-x^2-15x+12x^2-2x-30 \\&=6x^3+11x^2-17x-30\end{aligned}$$

4.1 次の式を展開せよ.

- | | |
|--|----------|
| (1) $(2x+5)(3x+4)$ | (関配) |
| (2) $(2x-8)(3x+6)$ | (サンコー) |
| (3) $(3x+2)(5x-3)$ | (日本光学) |
| (4) $(2x-5)(7x+8)$ | (東京ガス) |
| (5) $(3x+2y)(2x-5y)$ | (きんでん) |
| (6) $(2a+b)(4a-3b)$ | (東芝多摩川) |
| (7) $(x+3)(x-2)-x^2+6$ | (デンソー) |
| (8) $(x^3+x^2+x+1)(x-1)$ | (日本特殊機器) |
| (9) $(x+1)(x+2)(x-3)$ | (中国電力) |
| (10) $(x+1)(x+2)(x+3)-(x-1)(x-2)(x-3)$ | (コスモ石油) |

(乗法公式 I)

$$1. (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

$$2. (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

多項式の乗法では、乗法公式を利用して展開すると簡単である。

例 4.4

1)

$$\begin{aligned} & (2x + 3)(2x - 3) \\ &= (2x)^2 - (3)^2 \\ &= 4x^2 - 9 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & (3x + 4)^2 \\ &= (3x)^2 + 2(3x)(4) + (4)^2 \\ &= 9x^2 + 24x + 16 \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) \\ &= (x^2 - 4)(x^2 + 4) \\ &= (x^2)^2 - (4)^2 \\ &= x^4 - 16 \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} & (x + y)^2(x - y)^2 \\ &= \{(x + y)(x - y)\}^2 \\ &= (x^2 - y^2)^2 \\ &= x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

問 4.5 乗法公式 I を利用して、次の式を展開せよ。

(1) $(x+2)(x-2)$

(2) $(2x+5)(2x-5)$

(3) $(3a+b)(3a-b)$

(4) $(x+4)^2$

(5) $(x-3)^2$

(6) $(3x+1)^2$

(7) $(5x-2)^2$

(8) $(4a+3b)^2$

【答】 (1) $x^2 - 4$ (2) $4x^2 - 25$ (3) $9a^2 - b^2$ (4) $x^2 + 8x + 16$ (5) $x^2 - 6x + 9$
 (6) $9x^2 + 6x + 1$ (7) $25x^2 - 20x + 4$ (8) $16a^2 + 24ab + 9b^2$

4.2 次の式を展開せよ.

(1) $(a-b)(a+b)$ (日産ディーゼル)

(2) $(2p+3)(2p-3)$ (関配)

(3) $(2a-b)^2$ (プレス工業)

(4) $(3x-4)^2$ (サンコー)

(5) $(2x-3y)^2$ (NEC)

(6) $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b\right)^2$ (石川島芝浦機械)

(7) $(x^2-3)^2$ (日産工機)

(8) $(3x^2+4)^2$ (日産工機)

(9) $(a+b)^2 + (c-a)^2$ (凸版印刷)

(10) $(a+b)^2 - (a-b)^2$ (ダイキン工業)

(11) $(2x-3)^2 - 4x(x-3)$ (いすゞ自動車)

(12) $(2a+b)^2 - (a+2b)(2a-b)$ (トヨタ自動車)

(13) $(2x+3)^2 - 2(x+2)(2x-3)$ (神戸製鋼)

$$(14) \quad (2x + y)(x + 2y) - 2(x - y)^2 \quad (\text{東洋ガラス})$$

$$(15) \quad 2ab - \{(a - b)^2 - (a + b)(a - b) + 2ab\} \quad (\text{豊田工機})$$

$$(16) \quad (a - b)(a + b) - (a + b)^2 + 2b^2 \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(17) \quad (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) \quad (\text{I H I})$$

(乗法公式 II)

$$3. \quad (x + A)(x + B) = x^2 + (A + B)x + AB$$

$$4. \quad (Ax + B)(Cx + D) = ACx^2 + (AD + BC)x + BD$$

例 4.6

1)

$$\begin{aligned} & (x + 3)(x - 2) \\ &= x^2 + (3 - 2)x + 3 \times (-2) \\ &= x^2 + x - 6 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & (2x + 1)(3x - 4) \\ &= 6x^2 + (-8 + 3)x - 4 \\ &= 6x^2 - 5x - 4 \end{aligned}$$

4.3 次の式を展開せよ.

$$(1) \quad (x - 2)(x - 5) \quad (\text{不二高圧コンクリート})$$

$$(2) \quad (x + 1)(x - 9) \quad (\text{山崎製パン})$$

$$(3) \quad (a + 5)(a - 3) \quad (\text{三菱電機})$$

$$(4) \quad (m - 7)(m - 8) \quad (\text{三菱電機})$$

$$(5) \quad (3x + 3)(2x - 5) \quad (\text{三菱電機})$$

$$(6) \quad (2x + 3)(3x - 5) \quad (\text{日本精工})$$

$$(7) (2x - 4)(3x + 6) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(8) (3x + 1)(x - 4) \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(9) (2x - 3)(x + 2) \quad (\text{新日鉄八幡})$$

$$(10) (4x + 1)(3x + 2) \quad (\text{関配})$$

(乗法公式 III)

$$5. (A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

$$6. (A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$$

$$(A - B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - B^3$$

例 4.7

1)

$$\begin{aligned} & (2x + 3y)^3 \\ &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3 \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & (a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2) \\ &= (a - 2b)\{a^2 + a(2b) + (2b)^2\} \\ &= a^3 - (2b)^3 \\ &= a^3 - 8b^3 \end{aligned}$$

4.4 次の式を展開せよ.

$$(1) (a + b)^3 \quad (\text{J R})$$

$$(2) (a - b)^3 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(3) (x + 2)^3 \quad (\text{九州電力})$$

$$(4) (2x - 3y)^3 \quad (\text{東芝府中})$$

$$(5) (x - 1)^3 - (y - 1)^3 \quad (\text{日本水産})$$

$$(6) (x - 3)^3(x + 3)^3 \quad (\text{藤木工務店})$$

$$(7) (a + b)^3 - (a^3 + b^3) + (a + b)(a^2 + b^2) - 5ab(a + b) \quad (\text{コスモ石油})$$

$$(8) (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (\text{葵精機})$$

$$(9) (x + 2)(x^2 - 2x + 4) \quad (\text{愛知製鋼})$$

$$(10) (x^2 + x + 1)(x - 1) \quad (\text{東芝多摩川})$$

$$(11) (x - 1)(x^2 + x + 1)(x^3 + 1) \quad (\text{日本光学})$$

$$(12) (x - 1)(x + 1)(x^4 + x^2 + 1) \quad (\text{デンソー})$$

例題 4.8 次の式を展開せよ.

$$(1) (a + b + c)^2 \quad (\text{日本セメント, NEC, 丸一鋼管})$$

$$(2) (x + y + z)(x + y - z) \quad (\text{日本水産})$$

【解】

(1)

$$\begin{aligned} & (a + b + c)^2 \\ &= \{(a + b) + c\}^2 \\ &= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & (x + y + z)(x + y - z) \\ &= \{(x + y) + z\}\{(x + y) - z\} \\ &= (x + y)^2 - z^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 - z^2 \end{aligned}$$

例題 4.9 次の式を展開せよ.

(コニカ)

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$$

【解】

$$\begin{aligned}
 & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) \\
 &= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) \quad \leftarrow 1+4=2+3 \\
 &= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) \\
 &= \{(x^2+5x)+4\}\{(x^2+5x)+6\} \\
 &= (x^2+5x)^2 + 10(x^2+5x) + 24 \\
 &= (x^2)^2 + 2(x^2)(5x) + (5x)^2 + 10x^2 + 50x + 24 \\
 &= x^4 + 10x^3 + 25x^2 + 10x^2 + 50x + 24 \\
 &= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24
 \end{aligned}$$

4.5 次の式を展開せよ.

$$(1) (x-y-2)^2 \quad (\text{セガエンタープライゼズ})$$

$$(2) (2x-3y-5)^2 \quad (\text{日産車体})$$

$$(3) (x^2-x+1)^2 \quad (\text{旭化成})$$

$$(4) (x+y+z)^2 - (x+y-z)^2 \quad (\text{日本特殊機器})$$

$$(5) (a+b-c)(a+b+c) \quad (\text{旭化成})$$

$$(6) (a+b+4)(a+b-6) \quad (\text{三菱電機})$$

$$(7) (x+2y+3)(x+5+2y) \quad (\text{東洋高圧})$$

$$(8) (a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \quad (\text{日本特殊機器})$$

$$(9) (x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2) \quad (\text{愛知製鋼, 九州電力})$$

$$(10) (x-3)(x-2)(x+2)(x+3) \quad (\text{ノリタケ})$$

$$(11) (x+1)(x+2)(x-3)(x-4) \quad (\text{I H I})$$

4.6 $A = a + b$, $B = a - b$ のとき, 次のおののおのを a, b の式で表せ. (住友金属鉱山)

$$(1) A^2 + B^2$$

$$(2) A^3 - B^3$$

4.7 次の式の□の中をうめよ.

$$(1) (x-3)(x+\square) = x^2 + x - \square \quad (\text{大阪住友セメント})$$

$$(2) (2x-\square)(\square x+2) = 6x^2 - \square x - 10 \quad (\text{小田急})$$

$$(3) 2x^2 + 12x + \square = 2(x+\square)^2 \quad (\text{日本ガス化学})$$

実践問題 4

住友金属

1 次の問に答えなさい。

- (1) さいころを1つ投げたとき、6の目が出る確率を求めよ。
- (2) さいころを2つ投げたとき、両方の目がそれぞれ6となる確率を求めよ。
- (3) さいころを2つ投げたとき、2つの目の和が4となる確率を求めよ。
- (4) さいころを2つ投げたとき、2つの目の和が4でない確率を求めよ。

2 次の問に答えなさい。

- (1) 積が72で最小公倍数が24となるような2つの自然数を求めよ。
- (2) ある自然数に4を加えて2乗したら、もとの数より76大きくなった。このとき、もとの自然数を求めよ。
- (3) 100円硬貨と50円硬貨があわせて37枚あり、金額の合計は、2900円である。このとき、それぞれの硬貨は何枚あるか。
- (4) 異なる2つの数があって、その和を4で割ると9になり、2つの数の差を2倍すると8になる。この2つの数を求めよ。

【答】

1 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{36}$ (3) $\frac{1}{12}$ (4) $\frac{11}{12}$

2 (1) 3と24 (2) 5 (3) 100円21枚, 50円16枚 (4) 20と16

第 5 章 因数分解

1つの整式を各項に共通な因数があるとき，その共通因数をくくり出して，その整式を因数分解することができる．

例 5.1

$$1) \quad ma + mb - mc = m(a + b - c)$$

$$2) \quad x^2 - 3x = x \times x - x \times 3 = x(x - 3)$$

$$3) \quad 6a^2b + 4ab = 2ab \times 3a + 2ab \times 2b = 2ab(3a + 2b)$$

5.1 次の式を因数分解せよ．

$$(1) \quad 8ab - 4ac - 2ad \quad (\text{日本鉱業})$$

$$(2) \quad x^2 - ax^2 \quad (\text{コパル})$$

$$(3) \quad 3x^2y - 6xy^2 \quad (\text{ダイエー})$$

$$(4) \quad a^3 - 3a^2 - a \quad (\text{東京電力})$$

$$(5) \quad 4a^2bc - 8ab^2c - 6abc^2 \quad (\text{J R})$$

$$(6) \quad 6a^3b^2c - 8ab^3c^2 \quad (\text{N K K})$$

$$(7) \quad (a + b)^3 + (a - b)^3 \quad (\text{デンソー})$$

$$(8) \quad (a + b)^3 - (a - b)^3 \quad (\text{富士製鉄})$$

(因数分解の公式 I)

$$1. \quad A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

$$2. \quad A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

例 5.2

$$1) \quad a^2 + 6a + 9 = (a)^2 + 2(a)(3) + (3)^2 = (a + 3)^2$$

$$2) \quad x^2 - 4 = (x)^2 - (2)^2 = (x + 2)(x - 2)$$

$$\begin{aligned} 3) \quad x^3 - 2x^2 + x &= x(x^2 - 2x + 1) \\ &= x(x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2) \\ &= x(x - 1)^2 \end{aligned}$$

例題 5.3 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad 4x^2 + 20xy + 25y^2 \quad (\text{東芝多摩川})$$

$$(2) \quad (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1 \quad (\text{チッソ})$$

$$(3) \quad a^4 - b^4 \quad (\text{日本冷蔵})$$

$$(4) \quad x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \quad (\text{九州電力, 平田機工})$$

$$(5) \quad (a + b)(b^2 - c^2) - (a + b)(b - c)^2 \quad (\text{山下汽船})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & 4x^2 + 20xy + 25y^2 \\ &= (2x)^2 + 2(2x)(5y) + (5y)^2 \\ &= (2x + 5y)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1 \\ &= A^2 + 2A + 1 \quad \leftarrow x^2 + 2x = A \\ &= (A + 1)^2 \\ &= (x^2 + 2x + 1)^2 \\ &= \{(x + 1)^2\}^2 \\ &= (x + 1)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & a^4 - b^4 \\ &= (a^2)^2 - (b^2)^2 \\ &= (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \\ &= (a^2 + b^2)(a + b)(a - b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & x^4 - 2x^2y^2 + y^4 \\
 & = (x^2)^2 - 2(x^2)(y^2) + (y^2)^2 \\
 & = (x^2 - y^2)^2 \\
 & = \{(x+y)(x-y)\}^2 \\
 & = (x+y)^2(x-y)^2 \\
 \\
 (5) \quad & (a+b)(b^2 - c^2) - (a+b)(b-c)^2 \\
 & = (a+b)(b+c)(b-c) - (a+b)(b-c)^2 \\
 & = (a+b)(b-c)\{(b+c) - (b-c)\} \\
 & = (a+b)(b-c) \times 2c \\
 & = 2c(a+b)(b-c)
 \end{aligned}$$

5.2 次の式を因数分解せよ.

- | | |
|---|------------|
| (1) $a^2 + 2ab + b^2$ | (日本ボーリング) |
| (2) $x^2 + 6x + 9$ | (J R) |
| (3) $x^2 - 10x + 25$ | (電源開発) |
| (4) $x^2 + 2x + 1$ | (日産車体) |
| (5) $4x^2 - 4x + 1$ | (日立プラント建設) |
| (6) $9x^2 + 6x + 1$ | (ダイハツ) |
| (7) $9x^2 - 6x + 1$ | (京王電鉄) |
| (8) $25 - 30x + 9x^2$ | (凸版印刷) |
| (9) $49x^2 - 28xy + 4y^2$ | (東京電気化学) |
| (10) $x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ | (NEC) |
| (11) $x^2y^2 - 10xy + 25$ | (協和電設) |
| (12) $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ | (デンソー) |
| (13) $x^4 + 2x^3 + x^2$ | (富士通) |
| (14) $a^3 - 4a^2 + 4a$ | (きんでん) |

$$(15) \quad a^2 - 2a^3 + a^4 \quad (\text{大隈鉄工所})$$

$$(16) \quad (a+b)^2 + 4(a+b) + 4 \quad (\text{デンソー})$$

$$(17) \quad (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \quad (\text{間組})$$

5.3 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad a^2 - b^2 \quad (\text{インフォメーションディベロップメント})$$

$$(2) \quad 4x^2 - 9y^2 \quad (\text{シチズン})$$

$$(3) \quad 4x^2 - 25y^2 \quad (\text{東芝多摩川})$$

$$(4) \quad 4x^2 - 1 \quad (\text{マリネックス})$$

$$(5) \quad 3x^2 - 3y^2 \quad (\text{東京ガス})$$

$$(6) \quad 3x^2 - 75 \quad (\text{I H I})$$

$$(7) \quad abx^2 - a^3b \quad (\text{キャノン})$$

$$(8) \quad x^4 - x^2y^2 \quad (\text{ヤマハ})$$

$$(9) \quad x^4 - y^4 \quad (\text{東北電力, 東京昇降機サービス})$$

$$(10) \quad x^8 - 1 \quad (\text{ワシノ機械, ローレルバンクマシン, 日石三菱})$$

$$(11) \quad 1 - a^8 \quad (\text{日本光学})$$

$$(12) \quad a^4 - 2a^2 + 1 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(13) \quad (x - 4y)^2 - 25 \quad (\text{北海道電力})$$

$$(14) \quad (x^2 + 1)^2 - 4x^2 \quad (\text{京阪電気鉄道})$$

$$(15) \quad a^2 - (b + c)^2 \quad (\text{スズキ自動車})$$

$$(16) \quad (a - b)(x^2 - y^2) + (x - y)(a^2 - b^2) \quad (\text{日産自動車})$$

(因数分解の公式 II)

$$1. \quad x^2 + (A + B)x + AB = (x + A)(x + B)$$

$$2. \quad ACx^2 + (AD + BC)x + BD = (Ax + B)(Cx + D)$$

例 5.4 $x^2 + 5x - 14$ を因数分解せよ. (NKK)

積が定数項の -14 に等しい 2 つの整数は, 次の 4 とおりである.

$$1 \text{ と } -14, -1 \text{ と } 14, 2 \text{ と } -7, -2 \text{ と } 7$$

このうち, 和が x の係数の 5 と等しくなる数は -2 と 7 である.

よって,
$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)(x + 7)$$

例 5.5 $x^4 - 5x^2 + 4$ を因数分解せよ. (NEC)

$A = x^2$ とおくと

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= A^2 - 5A + 4 \\ &= (A - 1)(A - 4) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

例題 5.6 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^2 - 5xy - 6y^2$ (日産工機)

(2) $3x^2 - 3x - 6$ (NEC)

(3) $40 - 6x - x^2$ (大末建設)

(4) $x^3 - 5x^2 + 6x$ (鹿島道路)

(5) $(x + y)^2 - (x + y) - 6$ (きんでん)

(6) $(x^2 + 5x)^2 - 36$ (IHI)

【解】

(1)
$$\begin{aligned} &x^2 - 5xy - 6y^2 \\ &= x^2 + \{(+y) + (-6y)\}x + (+y)(-6y) \\ &= (x + y)(x - 6y) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} &3x^2 - 3x - 6 \\ &= 3(x^2 - x - 2) \\ &= 3(x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad & 40 - 6x - x^2 \\ &= -(x^2 + 6x - 40) \\ &= -(x - 4)(x + 10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad & x^3 - 5x^2 + 6x \\ &= x(x^2 - 5x + 6) \\ &= x(x - 2)(x - 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) \quad & (x + y)^2 - (x + y) - 6 \\ &= A^2 - A - 6 \qquad \leftarrow A = x + y \\ &= (A + 2)(A - 3) \\ &= (x + y + 2)(x + y - 3)\end{aligned}$$

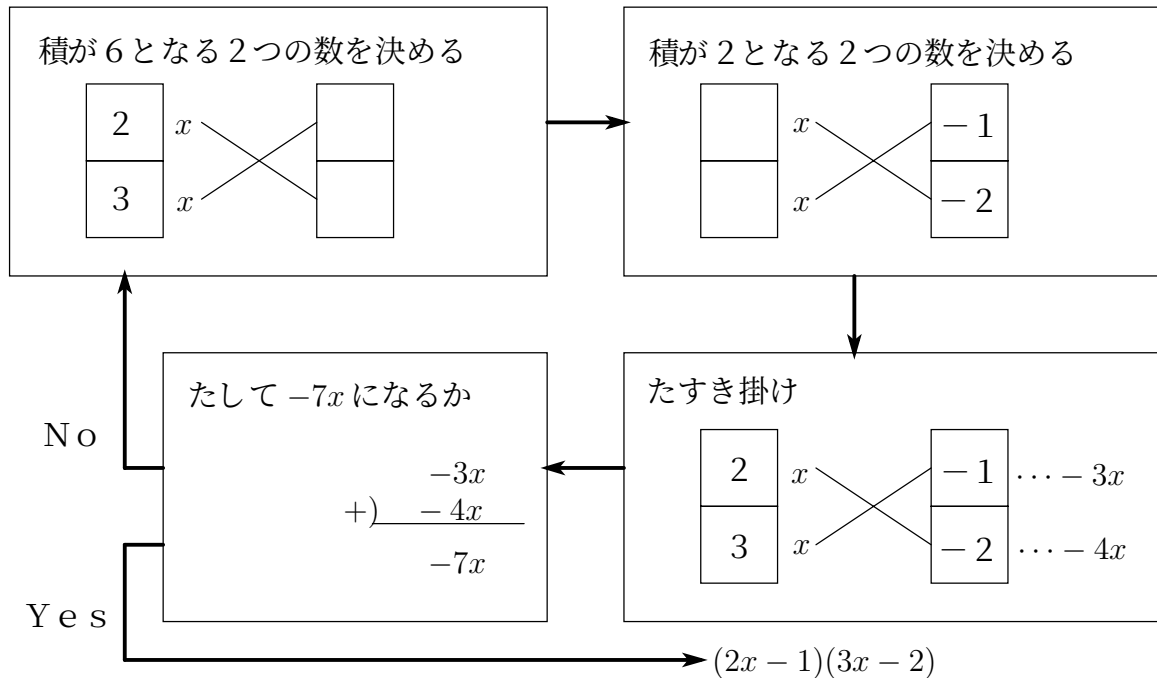
$$\begin{aligned}(6) \quad & (x^2 + 5x)^2 - 36 \\ &= A^2 - 36 \qquad \leftarrow A = x^2 + 5x \\ &= (A + 6)(A - 6) \\ &= (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x - 6) \\ &= (x + 2)(x + 3)(x - 1)(x + 6)\end{aligned}$$

5.4 次の式を因数分解せよ.

- | | |
|----------------------|------------|
| (1) $x^2 + 8x + 15$ | (日立建設機械) |
| (2) $x^2 + 6x + 8$ | (ゼネラル) |
| (3) $x^2 + 2x - 24$ | (協和電設) |
| (4) $x^2 - 8x + 15$ | (セントラル自動車) |
| (5) $x^2 - 7x + 10$ | (J R) |
| (6) $x^2 - 5x + 6$ | (浦和土建工業) |
| (7) $x^2 - 6x + 5$ | (凸版印刷) |
| (8) $x^2 - 2x - 3$ | (富士通) |
| (9) $x^2 - 10x + 9$ | (ダイハツ) |
| (10) $x^2 - 6x - 16$ | (ヤマハ) |

- (11) $x^2 - 8x + 12$ (安川電機)
- (12) $x^2 - x - 12$ (NEC)
- (13) $x^2 + 20x + 84$ (ダイハツ)
- (14) $x^2 + 6x - 91$ (NEC)
- (15) $x^3 + 3x^2 + 2x$ (NEC)
- (16) $ab^2 - 7ab + 10a$ (東芝多摩川)
- (17) $x^3y - 3x^2y - 4xy$ (関西電力)
- (18) $x^4 - 10x^2 + 9$ (ローレルバンクマシン)
- (19) $(a+1)^2 - 3(a+1) + 2$ (凸版印刷)
- (20) $(x^2 - x)^2 - 36$ (日本光学)
- (21) $(a^2 - 3)^2 - 4a^2$ (トヨタ自動車)

例 5.7 $6x^2 - 7x + 2$ の因数分解は、 x^2 の係数 6 と定数項の 2 をそれぞれ 2 つの数の積の形にして、次のように考える.



例題 5.8 次の式を因数分解せよ.

$$(1) 5x^2 + 7x - 6 \quad (\text{愛知製鋼})$$

$$(2) 2a^2 - 3ab + b^2 \quad (\text{東芝物流})$$

【解】

$$(1) \quad \begin{array}{rcl} & 5x^2 + 7x - 6 & \\ 1 & \times & 2 = 10 \\ 5 & \times & -3 = \frac{-3(+}{7} \end{array}$$

$$5x^2 + 7x - 6 = (x + 2)(5x - 3)$$

$$(2) \quad \begin{array}{rcl} & 2a^2 - 3ab + b^2 & \\ 2a & \times & -b = -ab \\ a & \times & -b = \frac{-2ab(+}{-3ab} \end{array}$$

$$2a^2 - 3ab + b^2 = (2a - b)(a - b)$$

5.5 次の式を因数分解せよ.

$$(1) 3x^2 + 4x + 1 \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(2) 3x^2 - 7x + 2 \quad (\text{ナショナル住宅})$$

$$(3) 2x^2 - x - 15 \quad (\text{J R})$$

$$(4) 3x^2 + 11x + 10 \quad (\text{東芝昇降機サービス})$$

$$(5) 2x^2 + 5x - 3 \quad (\text{東武鉄道})$$

$$(6) 3x^2 + 5x - 12 \quad (\text{昭和シェル石油})$$

$$(7) 2x^2 + 13x - 24 \quad (\text{麒麟麦酒})$$

$$(8) 5x^2 + 9x - 2 \quad (\text{ブラザー工業})$$

$$(9) 7x^2 - 24x + 9 \quad (\text{三井造船})$$

$$(10) 7x^2 + 39x - 18 \quad (\text{日本輸送機})$$

$$(11) 8a^2 + 2a - 3 \quad (\text{きんでん})$$

(12) $6x^2 + 11x - 10$ (凸版印刷)

(13) $6x^2 - 11x - 35$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(14) $15x^2 - 7x - 2$ (デンソー)

(15) $15x^2 - x - 2$ (きんでん)

(16) $10a^2 + 7a - 12$ (西日本プラント工業)

(17) $12x^2 - 4x - 5$ (東武鉄道)

(18) $12x^2 + 23x + 10$ (マリネックス)

(19) $12x^2 + 17x - 40$ (三菱重工業)

(20) $18x^2 - 39x - 7$ (安川電機)

(21) $3x^2 + 17xy - 6y^2$ (徳山曹達)

(22) $4x^2 - 5xy - 6y^2$ (大日本インキ)

(23) $6a^2 + ab - 2b^2$ (新日本製鉄)

(24) $3x^2 + 7xy - 20y^2$ (日立製作所)

例題 5.9 次の式を因数分解せよ.

(1) $\frac{4}{3}x^2 + xy + \frac{1}{6}y^2$ (TOTO)

(2) $36x^4 - 13x^2 + 1$ (きんでん)

【解】

(1)

$$\begin{aligned} & \frac{4}{3}x^2 + xy + \frac{1}{6}y^2 \\ &= \frac{1}{6}(8x^2 + 6xy + y^2) \\ & \begin{array}{ccc} 4x & \times & y = 2xy \\ 2x & \times & y = \frac{4xy}{6xy} \end{array} \end{aligned}$$

$$\frac{4}{3}x^2 + xy + \frac{1}{6}y^2 = \frac{1}{6}(4x + y)(2x + y)$$

(2)

$$\begin{array}{rcl}
 36x^4 - 13x^2 + 1 & & \\
 \begin{array}{l} 4x^2 \\ 9x^2 \end{array} \begin{array}{l} \diagup \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{l} -1 = -9x^2 \\ -1 = -4x^2 \end{array} \begin{array}{l} + \\ -13x^2 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 36x^4 - 13x^2 + 1 &= (4x^2 - 1)(9x^2 - 1) \\
 &= (2x + 1)(2x - 1)(3x + 1)(3x - 1)
 \end{aligned}$$

5.6 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad 3 - 5x - 12x^2 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(2) \quad 6a^2 + 9a - 6 \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(3) \quad x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16} \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(4) \quad 6x^3 + 33x^2 - 18x \quad (\text{九州電力})$$

$$(5) \quad 4ax^2 + 7ax + 3a \quad (\text{ニコン})$$

$$(6) \quad 48m^2n + 32mn - 3n \quad (\text{京王電鉄})$$

$$(7) \quad 2(x - y)^2 - (x - y) - 3 \quad (\text{日本空港給油})$$

$$(8) \quad 4x^4 - 5x^2y^2 - 6y^4 \quad (\text{日立エスケイソフトウェア})$$

例題 5.10 適当な文字に注目して, 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + 4y + 2 \quad (\text{大同製鋼})$$

$$(2) \quad 2x^2 - xy - y^2 - 7x + y + 6 \quad (\text{豊田工機})$$

【解】

(1)

$$\begin{aligned}
 &x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + 4y + 2 \\
 &= x^2 + (3y + 3)x + 2(y + 1)^2 \quad \leftarrow x \text{ で整理} \\
 &\begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} \diagdown \\ \diagup \end{array} \begin{array}{l} (y + 1) = y + 1 \\ 2(y + 1) = 2y + 2 \end{array} \begin{array}{l} + \\ 3y + 3 \end{array} \\
 &x^2 + 3xy + 2y^2 + 3x + 4y + 2 = \{x + (y + 1)\}\{x + 2(y + 1)\} \\
 &= (x + y + 1)(x + 2y + 2)
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 & 2x^2 - xy - y^2 - 7x + y + 6 \\
 &= 2x^2 + (-y - 7)x - (y + 2)(y - 3) \quad \leftarrow x \text{ で整理} \\
 & \begin{array}{rcl}
 2 & \swarrow & (y - 3) = y - 3 \\
 1 & \searrow & -(y + 2) = -2y - 4(+ \\
 & & -y - 7
 \end{array} \\
 & 2x^2 - xy - y^2 - 7x + y + 6 = \{2x + (y - 3)\}\{x - (y + 2)\} \\
 & = (2x + y - 3)(x - y - 2)
 \end{aligned}$$

5.7 次の式を因数分解せよ. ☆

(1) $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 3$ (安川電機)

(2) $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4y - 1$ (シチズン)

(3) $x^2 + 2(a + b)x - ab(a + 2)(b - 2)$ (シチズン)

(4) $2x^2 + 8x + 6 + y^2 + 3xy + 5y$ (川崎重工業)

(5) $2x^2 + 8xy + 6y^2 - x + y - 1$ (武田薬品工業)

(6) $2x^2 - 2y^2 + 3xy - x + 3y - 1$ (いすゞ自動車)

(7) $2x^2 - 5xy - 3y^2 + x + 11y - 6$ (富士通第一通信ソフトウェア)

(因数分解の公式 III)

1. $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$

2. $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$

例 5.11

(1) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3$ (東京急行電鉄)

$$= (x + 3)(x^2 - x \times 3 + 3^2)$$

$$= (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$$

(2) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3$ (日立建設機械)

$$= (x - 1)(x^2 + x \times 1 + 1^2)$$

$$= (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad 27a^3 + 8b^3 &= (3a)^3 + (2b)^3 && \text{(日本光学)} \\
 &= (3a + 2b)\{(3a)^2 - (3a)(2b) + (2b)^2\} \\
 &= (3a + 2b)(9a^2 - 6ab + 4b^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad 2a^4 - 16ab^3 &= 2a(a^3 - 8b^3) && \text{(協和電設)} \\
 &= 2a\{a^3 - (2b)^3\} \\
 &= 2a(a - 2b)\{a^2 + a(2b) + (2b)^2\} \\
 &= 2a(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \quad a^6 + b^6 &= (a^2)^3 + (b^2)^3 && \text{(コマツ西日本)} \\
 &= (a^2 + b^2)\{(a^2)^2 - (a^2)(b^2) + (b^2)^2\} \\
 &= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 && \text{(日本工具機械)} \\
 &= (x^3 + y^3)(x^3 - y^3) \\
 &= (x + y)(x^2 - xy + y^2)(x - y)(x^2 + xy + y^2)
 \end{aligned}$$

5.8 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad a^3 + b^3 \quad \text{(本田技研, NEC, コマツ西日本)}$$

$$(2) \quad a^3 - b^3 \quad \text{(新日本製鉄)}$$

$$(3) \quad x^3 - 8 \quad \text{(京阪電鉄)}$$

$$(4) \quad 8x^3 - 27y^3 \quad \text{(青木建設)}$$

$$(5) \quad a^3 - 1 \quad \text{(NEC)}$$

$$(6) \quad 8x^4 - x \quad \text{(富士通)}$$

$$(7) \quad 81x^3 - 24y^3 \quad \text{(東京電気化学)}$$

$$(8) \quad -27bx^3 + by^3 \quad \text{(愛知機械工業)}$$

$$(9) \quad x^6 - y^3 \quad \text{(日本精工)}$$

$$(10) \quad x^6 - 1 \quad \text{(日石三菱)}$$

例題 5.12 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad 3x(x+1) - 2(x+1)^2 \quad (\text{安川電機})$$

$$(2) \quad a(x-y) + b(y-x) \quad (\text{大隈鉄工所})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & 3x(x+1) - 2(x+1)^2 \\ &= 3xA - 2A^2 && \leftarrow x+1 = A \\ &= A(3x - 2A) \\ &= (x+1)\{3x - 2(x+1)\} \\ &= (x+1)(x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & a(x-y) + b(y-x) \\ &= a(x-y) - b(x-y) \\ &= aP - bP && \leftarrow x-y = P \\ &= P(a-b) \\ &= (x-y)(a-b) \end{aligned}$$

5.9 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad x(a-b) + y(a-b) \quad (\text{浦和土建工業})$$

$$(2) \quad x^2(x+2) - 4(x+2) \quad (\text{小田急電鉄})$$

$$(3) \quad a(x-y) - x + y \quad (\text{日本ミシン})$$

$$(4) \quad x(y-1) - y + 1 \quad (\text{日本特殊陶業})$$

$$(5) \quad 3(a+1)^2 - 2a - 2 \quad (\text{小松製作所})$$

例題 5.13 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad ax - ay + bx - by \quad (\text{大阪住友セメント})$$

$$(2) \quad x^3 - 2x^2 - x + 2 \quad (\text{東芝, 日本空港給油})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & ax - ay + bx - by \\ &= a(x-y) + b(x-y) \\ &= aP + bP && \leftarrow x-y = P \\ &= P(a+b) \\ &= (x-y)(a+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & x^3 - 2x^2 - x + 2 \\
& = x^2(x - 2) - (x - 2) \\
& = x^2P - P && \leftarrow x - 2 = P \\
& = P(x^2 - 1) \\
& = (x - 2)(x + 1)(x - 1)
\end{aligned}$$

5.10 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad xy + 2x - 2y - 4 \quad (\text{小松製作所})$$

$$(2) \quad ax - bx + by - ay \quad (\text{日本コロンビア})$$

$$(3) \quad a^3 + b^3 + a^2b + ab^2 \quad (\text{大同製鋼})$$

$$(4) \quad x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 \quad (\text{ヤマハ, きんでん})$$

$$(5) \quad x^3 - x^2 + x - 1 \quad (\text{スズキ自動車})$$

$$(6) \quad x^3 - x^2 - x + 1 \quad (\text{日立建設機械, 小松製作所})$$

$$(7) \quad x^3 - 6x^2 - x + 6 \quad (\text{中国土木})$$

$$(8) \quad x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \quad (\text{デンソー})$$

例題 5.14 次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 24 \quad (\text{豊和産業})$$

$$(2) \quad (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) - 24 \quad (\text{富士通})$$

【解】

$$\begin{aligned}
(1) \quad & (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 24 \\
& = (A - 2)(A - 12) + 24 && \leftarrow x^2 + x = A \\
& = A^2 - 14A + 48 \\
& = (A - 6)(A - 8) \\
& = (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 8) \\
& = (x - 2)(x + 3)(x^2 + x - 8)
\end{aligned}$$

$$(2)$$

$$\begin{aligned}
& (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 \\
&= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3) - 24 && \leftarrow 1+4=2+3 \\
&= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6) - 24 \\
&= (A+4)(A+6) - 24 && \leftarrow x^2+5x=A \\
&= A^2+10A \\
&= A(A+10) \\
&= (x^2+5x)(x^2+5x+10) \\
&= x(x+5)(x^2+5x+10)
\end{aligned}$$

5.11 次の式を因数分解せよ.

- (1) $(x^2+3x-2)(x^2+3x+4)-16$ (味の素)
- (2) $x^2+2xy+y^2-3x-3y-40$ (富士電機)
- (3) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)-4$ (KDD)
- (4) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5)-4$ (ダイハツ)
- (5) $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)-3y^4$ (日本光学)

例題 5.15 次の式を因数分解せよ.

- (1) $x^2+y^2-z^2+2xy$ (メルシャン)
- (2) $a^2-b^2-c^2-2bc$ (東京電気化学)
- (3) $4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$ (住友ゴム)

【解】

$$\begin{aligned}
(1) \quad & x^2+y^2-z^2+2xy \\
&= x^2+2xy+y^2-z^2 \\
&= (x+y)^2-z^2 \\
&= \{(x+y)+z\}\{(x+y)-z\} \\
&= (x+y+z)(x+y-z) \\
(2) \quad & a^2-b^2-c^2-2bc \\
&= a^2-(b^2+2bc+c^2) \\
&= a^2-(b+c)^2 \\
&= \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\} \\
&= (a+b+c)(a-b-c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\
& = (2ab)^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\
& = \{2ab + (a^2 + b^2 - c^2)\}\{2ab - (a^2 + b^2 - c^2)\} \\
& = (a^2 + 2ab + b^2 - c^2)(c^2 - a^2 + 2ab - b^2) \\
& = \{(a+b)^2 - c^2\}\{c^2 - (a-b)^2\} \\
& = \{(a+b) + c\}\{(a+b) - c\}\{c + (a-b)\}\{c - (a-b)\} \\
& = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)
\end{aligned}$$

5.12 次の式を因数分解せよ.

- | | |
|--------------------------------------|----------|
| (1) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$ | (トヨタ自動車) |
| (2) $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$ | (日下歯車) |
| (3) $a^2 + b^2 - c^2 - 2ab$ | (東芝物流) |
| (4) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz$ | (栗本鉄工) |
| (5) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$ | (旭化成) |
| (6) $x^2 - y^2 + 2y - 1$ | (中越パルプ) |
| (7) $a^2 - b^2 - 4b - 4$ | (ワシノ機械) |
| (8) $9 - x^2 + 2xy - y^2$ | (日本飛行機) |
| (9) $-a^2 - b^2 + 2ab + 1$ | (NEC) |
| (10) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$ | (三菱電機) |

例題 5.16 $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$ を因数分解せよ. (リコー)

【解】 特定の文字に注目して (ここでは a), 整理する.

$$\begin{aligned}
& a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) \\
& = a^2(b-c) + b^2c - ab^2 + c^2a - bc^2 \\
& = a^2(b-c) - a(b^2 - c^2) + bc(b-c) \\
& = a^2(b-c) - a(b+c)(b-c) + bc(b-c) \\
& = (b-c)\{a^2 - (b+c)a + bc\} \\
& = (b-c)(a-b)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a)
\end{aligned}$$

5.13 次の式を因数分解せよ.

$$(1) a^2b - a^2c + b^2c - ab^2 + ac^2 - bc^2 \quad (\text{デンソー})$$

$$(2) a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \quad (\text{YKK})$$

$$(3) ab(a - b) + bc(b - c) + ca(c - a) \quad (\text{日本光学})$$

$$(4) (x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz \quad (\text{NKK})$$

例題 5.17 最低次数の文字に注目して、因数分解せよ.

$$(1) ax - ay - x^2 + y^2 \quad (\text{大同製鋼})$$

$$(2) xy - yz - y^2 + zx \quad (\text{佐世保重工})$$

$$(3) 4px^2 - px - 3p + x^2 + x - 2 \quad (\text{日産自動車})$$

$$(4) x^3 + x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 - 1 \quad (\text{徳山曹達})$$

【解】

(1) a に注目する.

$$\begin{aligned} & ax - ay - x^2 + y^2 \\ &= a(x - y) - (x^2 - y^2) \\ &= a(x - y) - (x + y)(x - y) \\ &= (x - y)\{a - (x + y)\} \\ &= (x - y)(a - x - y) \end{aligned}$$

(2) x に注目 (z に注目でも可) する.

$$\begin{aligned} & xy - yz - y^2 + zx \\ &= xy + zx - yz - y^2 \\ &= x(y + z) - y(z + y) \\ &= (y + z)(x - y) \end{aligned}$$

(3) p に注目する.

$$\begin{aligned} & 4px^2 - px - 3p + x^2 + x - 2 \\ &= p(4x^2 - x - 3) + x^2 + x - 2 \\ &= p(x - 1)(4x + 3) + (x - 1)(x + 2) \\ &= (x - 1)\{p(4x + 3) + (x + 2)\} \\ &= (x - 1)(4px + 3p + x + 2) \end{aligned}$$

(4) a に注目する.

$$\begin{aligned}
 & x^3 + x^2 - (a^2 + 1)x + a^2 - 1 \\
 &= x^3 + x^2 - x - 1 - a^2x + a^2 \\
 &= x^2(x + 1) - (x + 1) - a^2(x - 1) \\
 &= (x + 1)(x^2 - 1) - a^2(x - 1) \\
 &= (x + 1)^2(x - 1) - a^2(x - 1) \\
 &= (x - 1)\{(x + 1)^2 - a^2\} \\
 &= (x - 1)\{(x + 1) + a\}\{(x + 1) - a\} \\
 &= (x - 1)(x + a + 1)(x - a + 1)
 \end{aligned}$$

5.14 次の式を因数分解せよ.

- | | |
|--|------------|
| (1) $x^2y + x^2 - y - 1$ | (東京電気) |
| (2) $a^2b - ab - a + 1$ | (デンソー) |
| (3) $ax^2 - x^2 - a + 1$ | (富士通) |
| (4) $ab + b^2 - bc - ca$ | (東芝機械) |
| (5) $x^2 + xy - yz - xz$ | (中部電力) |
| (6) $ax^3 + x^2 + ax + 1$ | (東芝府中) |
| (7) $ab^2 - a^2b - 2bx + 2ax$ | (ミノルタ) |
| (8) $x^3 - 2ax^2 - 4x + 8a$ | (大阪住友セメント) |
| (9) $x^3 - 3ax^2 - 4x + 12a$ | (トヨタ自動車) |
| (10) $x^3 + 2x^2y - x - 2y$ | (松田組) |
| (11) $x^2 - xz - y^2 - yz$ | (KDD) |
| (12) $a^2b + 2ac - a^2 - 2abc$ | (デンソー) |
| (13) $a^2 + 3ab + 2b^2 + ac + bc$ | (富士ゼロックス) |
| (14) $x^3 + 3x^2 + 2x + 3xy + x^2y + 2y$ | (日産自動車) |
| (15) $a^2bc + ac^2 + acd - abd - cd - d^2$ | (日本光学) |

$$(16) \quad x^3 + y^3 - x^2y - yz^2 + z^2x - xy^2 + 2zx^2 - 2xyz \quad (\text{キャノン})$$

例題 5.18 平方差をつくり、次の式を因数分解せよ.

$$(1) \quad x^4 + x^2 + 1 \quad (\text{沖電気, 九州電力, デンソー, 日産自動車, 横浜ゴム})$$

$$(2) \quad x^4 - 6x^2 + 1 \quad (\text{TOTO})$$

$$(3) \quad a^4 + 5a^2 + 9 \quad (\text{大隈鉄工所})$$

$$(4) \quad a^4 + 4b^4 \quad (\text{川崎車両})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 + x^2 + 1 \\ &= x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - x^2 \\ &= \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} \\ &= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^4 - 6x^2 + 1 \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 - 4x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - (2x)^2 \\ &= \{(x^2 - 1) + 2x\}\{(x^2 - 1) - 2x\} \\ &= (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & a^4 + 5a^2 + 9 \\ &= a^4 + 6a^2 + 9 - a^2 \\ &= (a^2 + 3)^2 - a^2 \\ &= \{(a^2 + 3) + a\}\{(a^2 + 3) - a\} \\ &= (a^2 + a + 3)(a^2 - a + 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & a^4 + 4b^4 \\ &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= \{(a^2 + 2b^2) + 2ab\}\{(a^2 + 2b^2) - 2ab\} \\ &= (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2) \end{aligned}$$

5.15 次の式を因数分解せよ.

- (1) $a^4 + a^2 + 1$ (東芝物流)
- (2) $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (NEC, 本田技研, 三井東圧化学)
- (3) $x^4 - 3x^2 + 1$ (九州電力, 東芝, 島津製作所)
- (4) $x^4 - 7x^2 + 9$ (協和電設)
- (5) $a^4 + 5a^2 + 9$ (大隈鉄工所)
- (6) $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$ (九州電力)
- (7) $x^4 + 4x^2y^2 + 16y^4$ (ダイハツ)
- (8) $x^4 + 4$ (IHI)
- (9) $x^4 + 4y^4$ (新日本製鉄)
- (10) $4x^4 + 11x^2 + 9$ (日本工具製作)
- (11) $x^8 + x^4 + 1$ (いすゞ自動車)

例題 5.19 $(x^2 - 1)(y^2 - 1) - 4xy$ を因数分解せよ. (九州電力)

【解】

$$\begin{aligned}
 & (x^2 - 1)(y^2 - 1) - 4xy \\
 &= x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1 - 4xy \\
 &= x^2y^2 - 2xy + 1 - x^2 - 2xy - y^2 \\
 &= (xy - 1)^2 - (x + y)^2 \\
 &= \{(xy - 1) + (x + y)\}\{(xy - 1) - (x + y)\} \\
 &= (xy + x + y - 1)(xy - x - y - 1)
 \end{aligned}$$

5.16 $(a^2 - b^2)(x^2 - y^2) + 4abxy$ を因数分解せよ. (トヨタ自動車)

第 6 章 約数・倍数

整数なら素因数分解，整式なら因数分解し，共通する因数のすべてをとって最小指数を指数としたものの積が最大公約数である．すべての因数を選び，最大指数としたものの積が最小公倍数である．

例題 6.1 次の各組の整数の最大公約数・最小公倍数を求めよ．

(1) 54, 36 (トヨタ自動車)

(2) 12, 24, 30 (武田薬品工業)

【解】

(1)

2	54	2	36
3	27	2	18
3	9	3	9
	3		3

$$54 = 2^1 \times 3^3$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$(\text{低い方の指数}) \rightarrow \text{最大公約数} = 2^1 \times 3^2 = 18$$

$$(\text{高い方の指数}) \rightarrow \text{最小公倍数} = 2^2 \times 3^3 = 108$$

(2)

$$12 = 2^2 \times 3^1$$

$$24 = 2^3 \times 3^1$$

$$30 = 2^1 \times 3^1 \times 5^1$$

$$(\text{最も低い指数}) \rightarrow \text{最大公約数} = 2^1 \times 3^1 = 6$$

$$(\text{最も高い指数}) \rightarrow \text{最小公倍数} = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 = 120$$

6.1 次の各組の整数の最大公約数・最小公倍数を求めよ.

- (1) 27, 63 (TOTO)
 (2) 125, 500 (リッカー)
 (3) 24, 12, 6 (TOTO)
 (4) 30, 24, 15 (ツムラ)
 (5) 20, 30, 36 (宝酒造)
 (6) 30, 36, 42 (クラレ)
 (7) 12, 36, 54 (日本内燃機)
 (8) 210, 770, 231 (ダイハツ)

整式の約数・倍数は、文字だけに注目し、数係数は無視して考える. 特に、共通の約数を持たないときは、最大公約数は1である.

例題 6.2 次の各組の整式の最大公約数・最小公倍数を求めよ.

- (1) $18xy^3, 24x^3y$ (KDD)
 (2) ab^2c^3, a^3b^4c, a^4c (黒崎窯業)
 (3) $x^2 - x - 6, x^2 - 5x + 6$ (東海電線)
 (4) $x^3 - x, x^4 + 2x^3 + x^2$

【解】

- (1) 係数の 18, 24 は無視して考える.

$$18xy^3 = 18x^1y^3$$

$$24x^3y = 24x^3y^1$$

$$(\text{低い方の指数}) \rightarrow \text{最大公約数} = x^1y^1 = xy$$

$$(\text{高い方の指数}) \rightarrow \text{最小公倍数} = x^3y^3$$

- (2)

$$ab^2c^3 = a^1b^2c^3$$

$$a^3b^4c = a^3b^4c^1$$

$$a^4c = a^4 \times c^1$$

$$\text{最大公約数} = a^1 \times c^1 = ac$$

$$\text{最小公倍数} = a^4b^4c^3$$

(3)

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 6 &= (x+2)^1(x-3)^1 \\
 x^2 - 5x + 6 &= (x-3)^1(x-2)^1 \\
 \text{最大公約数} &= (x-3)^1 = x-3 \\
 \text{最小公倍数} &= (x+2)^1(x-3)^1(x-2)^1 = (x+2)(x-3)(x-2)
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 x^3 - x &= x^1(x+1)^1(x-1)^1 \\
 x^4 + 2x^3 + x^2 &= x^2(x+1)^2 \\
 \text{最大公約数} &= x^1(x+1)^1 = x(x+1) \\
 \text{最小公倍数} &= x^2(x+1)^2(x-1)^1 = x^2(x+1)^2(x-1)
 \end{aligned}$$

6.2 次の各組の整式の最大公約数・最小公倍数を求めよ.

(1) $6a^3b^2c, 3a^2b^3$ (トヨタ自動車)

(2) $4a^2, 12ax, 6x^2$ (富士通ビジネスシステム)

(3) $12x^3y, -9x^2y^2, 6x^4y$ (東京ガス)

(4) $7xy, 21x^2y^2, 28x^4y^4$ (山下新日本汽船)

(5) $5x^2 - 2x - 3, x^2 - 2x + 1$ (トヨタ自動車)

(6) $a(a-1) - 2, a + a(a+3) + 3$ (アサヒビール)

(7) $x^3 - 1, (x^2 + 1)^2 - x^2$ (NKK)

(8) $x^2 - 6x - 16, 2x^2 + 9x + 10, 4x^2 + 9x + 2$ (京王電鉄)

(9) $x^3 + 1, x^4 + 2x^3 + x^2, x^2 - 2x - 3$ (富士通カスタマエンジニアリング)

6.3 はがき (縦 15cm , 横 10cm) を何枚か同じ向きに並べて, 最も小さい正方形をつくりたい. 何枚のはがきが必要か. (萬有製薬)

6.4 32で割っても 48で割っても 13余る最小の数を求めよ. (今西組)

例題 6.3 ある数で 79を割っても, 91を割っても 7余るという. ある数はいくらか. (ワシノ機械)

【解】 $79 - 7 = 72, 91 - 7 = 84$ なので, 72と84の約数で7よりも大きい数であればよいので, 答えは 12.

6.5 ある数で 123 を割れば 21 余り, 73 を割れば 5 余るという. ある数はいくらか.
(日本ガス化学)

6.6 12, 16, 18 のどの数で割っても余りが 7 になる最小の数はいくらか. (山崎鉄工所)

(最大公約数・最小公倍数) 整数 (または整式) A, B の最大公約数を G , 最小公倍数を L とする. A, B を G で割った商をそれぞれ a, b とすると

$$\text{I) } A = Ga, B = Gb$$

II) a, b は互いに素 (共通の約数を持たない)

$$\text{III) } L = Gab$$

$$\text{IV) } GL = AB$$

例題 6.4 積が 300 で最小公倍数が 60 である 2 つの整数を求めよ. (東京ガス)

【解】 求める 2 つの整数を A, B とし, 最大公約数を G とする. IV) より

$$G \times 60 = 300$$

を解いて $G = 5$. III) に $G = 5, L = 60$ を代入することにより

$$ab = 12$$

となる. このとき, a, b は互いに素であるので, a, b の組み合わせは

$$1, 12 \quad \text{または} \quad 3, 4$$

である. よって, I より求める 2 数は

$$5, 60 \quad \text{または} \quad 15, 20$$

6.7 最大公約数が 12, 最小公倍数が 420 となる 2 数を求めよ. (大日本製紙)

6.8 2 つの整数がある. その積は 360 で, 最小公倍数は 120 である. この 2 数を求めよ.
(藤倉電線)

6.9 最大公約数が $x - 1$, 最小公倍数が $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15$ である 2 つの 2 次の整式を求めよ.
(いすゞ自動車)

第 7 章 分数式

A, B を 2 つの整式とすると、 $\frac{A}{B}$ の形に表され、 B に文字を含む式を**分数式**といい、 B をその分母、 A をその分子という。

例えば、 $\frac{2by}{ax}, \frac{3}{x+1}, \frac{2x+3}{x-5}$ などは分数式である。
分数式の計算については、次の性質が基本になる。

(分数式の基本性質)

$$\frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C}, \quad \frac{A}{B} = \frac{A \div D}{B \div D}, \quad \text{ただし } C \neq 0, D \neq 0$$

分数式の分母、分子をその共通因数で割ることを**約分する**という。

分母、分子が共通因数をもたない分数式は、それ以上約分できない。このような分数式を**既約分数式**という。

例 7.1

$$(1) \frac{18ab^3c^2}{24a^3bc^3} = \frac{18ab^3c^2 \div 6abc^2}{24a^3bc^3 \div 6abc^2} = \frac{3b^2}{4a^2c}$$

$$(2) \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 4x - 5} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+5)} = \frac{x+3}{x+5}$$

7.1 次の分数式を約分せよ。

$$(1) \frac{54a^{10}b^6c^8}{-162a^{14}b^2cd} \quad (\text{呉羽紡績})$$

$$(2) \frac{x-1}{x^2-3x+2} \quad (\text{新菱重機})$$

$$(3) \frac{x^2+3x+2}{x+2} \quad (\text{旭硝子})$$

$$(4) \frac{x^2+x-6}{2x^2-6x+4} \quad (\text{ブラザー工業})$$

$$(5) \frac{(x^2+3x+2)(x^2+x-2)}{(x^2-2x+1)(x+2)(x-3)} \quad (\text{日立建設機械})$$

$$(6) \frac{ax^2 + bx^2 - a - b}{bx + ax - b - a} \quad (\text{日本航空})$$

$$(7) \frac{x^3 - 8}{x^4 + 4x^2 + 16} \quad (\text{NKK})$$

分数式の加法，減法，および乗法，除法は，分数の場合と同様に行う。

(分数式の乗法，除法)

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

例 7.2

$$(1) \frac{x}{y} \div \frac{by}{ax} \times \frac{b}{a} = \frac{x}{y} \times \frac{ax}{by} \times \frac{b}{a} = \frac{x^2}{y^2} \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(2) \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4} \div \frac{2x - 1}{x - 2} \quad (\text{三菱重工業})$$

$$= \frac{(2x + 1)(2x - 1)}{(x + 2)(x - 2)} \times \frac{x - 2}{2x - 1} = \frac{2x + 1}{x + 2}$$

$$(3) \frac{A^2 - 3A + 2}{A^2 + 5A + 6} \div \frac{A^2 - 8A + 7}{A^2 + 4A + 3} \times \frac{A^2 - 5A - 14}{A^2 - A - 2} \quad (\text{クボタ})$$

$$= \frac{A^2 - 3A + 2}{A^2 + 5A + 6} \times \frac{A^2 + 4A + 3}{A^2 - 8A + 7} \times \frac{A^2 - 5A - 14}{A^2 - A - 2}$$

$$= \frac{(A - 1)(A - 2)}{(A + 2)(A + 3)} \times \frac{(A + 1)(A + 3)}{(A - 1)(A - 7)} \times \frac{(A + 2)(A - 7)}{(A + 1)(A - 2)} = 1$$

7.2 次の計算をせよ。

$$(1) \frac{3x^2y}{4a^2b^3} \times \frac{8a^3b}{9x^3y^2} \quad (\text{日本水産})$$

$$(2) \frac{4xy^5}{3x^2y^3} \div \frac{2x^3y}{3xy^2} \quad (\text{武田薬品工業})$$

$$(3) \frac{5a^2}{6xy} \div \left(\frac{2a^2}{9x^2y^2} \right)^2 \quad (\text{NOK})$$

$$(4) \frac{(-2ab)^2}{(xy)^2} \times \frac{x^2y^2}{(-a^2b)^3} \quad (\text{日本水産})$$

$$(5) \frac{2x-1}{x} \times \frac{3x}{4x-2} \quad (\text{大阪製紙})$$

$$(6) \frac{x-1}{x} \times \frac{x^2+x}{x^2-1} \quad (\text{愛知製鋼})$$

$$(7) \frac{x+1}{x^2-4} \div \frac{x^2-1}{x-2} \quad (\text{富士電機})$$

$$(8) \frac{x^2-13x+36}{x^2-16} \div \frac{x-9}{x+4} \quad (\text{日産自動車})$$

$$(9) \frac{x^2-4}{x^2-16} \times \frac{x^2-2x-8}{x^2+4x+4} \quad (\text{マツダ})$$

$$(10) \frac{a^2-11a+30}{a^2-6a+9} \times \frac{a^2-3a}{a^2-5a} \quad (\text{小田急})$$

$$(11) \frac{x^2-2x-3}{x^2-4} \times \frac{x^2+4x+4}{x^2-4x+3} \quad (\text{オリンパス})$$

$$(12) \frac{x^2-3x+2}{x^2-9} \div \frac{x^2-6x+8}{2x^2-5x-3} \quad (\text{三村化学工業})$$

$$(13) \frac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2} \times \frac{xy+y^2}{x^2-xy} \quad (\text{九州電力})$$

$$(14) \frac{x^2-9y^2}{x^2+6xy+9y^2} \times \frac{x+3y}{x^2-xy-6y^2} \quad (\text{雪印乳業})$$

$$(15) \frac{x-3}{x^2-3x} \div \frac{x^2-1}{x^3-8} \times \frac{x^2+x}{x^2+2x+4} \quad (\text{日本コロムビア})$$

$$(16) \frac{x^2-x-2}{6x-15} \times \frac{6x^2-7x-20}{x^2-4} \div \frac{3x^2+7x+4}{x^2+2x} \quad (\text{三菱マテリアル})$$

(分数式の加法, 減法)

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

例 7.3

$$(1) \frac{x^2}{x-2} - \frac{4}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x+2$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \frac{2x}{x^2 - a^2} + \frac{2a}{a^2 - x^2} &= \frac{2x}{x^2 - a^2} + \frac{2a}{-(x^2 - a^2)} \\
 &= \frac{2x - 2a}{x^2 - a^2} \\
 &= \frac{2(x - a)}{(x + a)(x - a)} = \frac{2}{x + a}
 \end{aligned}$$

7.3 次の計算をせよ.

$$(1) \quad \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} \quad (\text{アマダワシノ})$$

$$(2) \quad \frac{2x-1}{x-3} + \frac{x+2}{3-x} \quad (\text{クボタ})$$

$$(3) \quad \frac{x}{x^2-1} + \frac{1}{1-x^2} \quad (\text{日本光学})$$

$$(4) \quad \frac{x+1}{x^2-4} - \frac{3}{(x+2)(x-2)} \quad (\text{松田組})$$

$$(5) \quad \frac{a^2}{a-1} + \frac{1}{a+1} - \frac{a^2}{a+1} - \frac{1}{a-1} \quad (\text{中越パルプ})$$

例題 7.4 次の計算をせよ.

$$(1) \quad \frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(2) \quad \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} + \frac{8}{4-x^2} \quad (\text{日本毛織})$$

$$(3) \quad \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \quad (\text{オリンパス工業})$$

$$(4) \quad a+b - \frac{2ab}{a+b} \quad (\text{マツダ})$$

【解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\frac{2x}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} \\
 &= \frac{2x}{(x+1)(x-1)} - \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{2x - (x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} + \frac{8}{4-x^2} \\
 &= \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} + \frac{8}{-(x^2-4)} \\
 &= \frac{x(x+2) - (x-2)^2 - 8}{(x+2)(x-2)} \\
 &= \frac{6x-12}{(x+2)(x-2)} = \frac{6(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{6}{x+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \\
 &= \frac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} - \frac{(x-y)^2}{(x+y)(x-y)} \\
 &= \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{4xy}{(x+y)(x-y)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & a+b - \frac{2ab}{a+b} \\
 &= \frac{(a+b)^2 - 2ab}{a+b} = \frac{a^2+b^2}{a+b}
 \end{aligned}$$

7.4 次の計算をせよ.

$$(1) \quad \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-4} \quad (\text{雪印乳業})$$

$$(2) \quad \frac{1}{x-4} - \frac{8}{x^2-16} \quad (\text{日産自動車})$$

$$(3) \quad \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1} \quad (\text{NECエンジニアリング})$$

$$(4) \quad \frac{x}{x-2} - \frac{x-2}{x+2} - \frac{8}{4-x^2} \quad (\text{三井造船})$$

$$(5) \quad \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x-y} + \frac{2x}{x^2-y^2} \quad (\text{豊和産業})$$

$$(6) \quad \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x-y} + \frac{2xy}{x^2-y^2} \quad (\text{横浜ゴム})$$

$$(7) \quad \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \quad (\text{シチズン})$$

$$(8) \quad 1 + \frac{b}{a-b} \quad (\text{平田機工})$$

$$(9) \quad x - \frac{x^2}{x+1} \quad (\text{昭和シェル石油})$$

例題 7.5 次の式を計算せよ.

$$(1) \quad \frac{2}{x^2 - 6x + 5} - \frac{1}{x^2 - 4x + 3} - \frac{1}{x^2 - 8x + 15} \quad (\text{富士電機})$$

$$(2) \quad \frac{x+2}{x^2-x} + \frac{2x+1}{x^2-3x+2} - \frac{x-3}{x^2-2x} \quad (\text{日立研究所})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2}{x^2 - 6x + 5} - \frac{1}{x^2 - 4x + 3} - \frac{1}{x^2 - 8x + 15} \\ &= \frac{2}{(x-1)(x-5)} - \frac{1}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{(x-3)(x-5)} \\ &= \frac{2(x-3) - (x-5) - (x-1)}{(x-1)(x-3)(x-5)} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{x+2}{x^2-x} + \frac{2x+1}{x^2-3x+2} - \frac{x-3}{x^2-2x} \\ &= \frac{x+2}{x(x-1)} + \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)} - \frac{x-3}{x(x-2)} \\ &= \frac{(x+2)(x-2) + x(2x+1) - (x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)} \\ &= \frac{2x^2 + 5x - 7}{x(x-1)(x-2)} = \frac{(x-1)(2x+7)}{x(x-1)(x-2)} = \frac{2x+7}{x(x-2)} \end{aligned}$$

7.5 次の計算をせよ.

$$(1) \quad \frac{a+b}{ab} - \frac{b+c}{bc} - \frac{a+c}{ac} \quad (\text{きんでん})$$

$$(2) \quad \frac{3}{x^2+x-2} - \frac{2}{x^2-1} \quad (\text{日本スピンドル製造})$$

$$(3) \quad \frac{1}{x^2-4x+3} - \frac{4}{x^2+2x-15} + \frac{3}{x^2+4x-5} \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(4) \quad \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} \quad (\text{日本輸送機})$$

$$(5) \quad \frac{1}{a+1} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} \quad (\text{コスモ石油})$$

$$(6) \quad \frac{x+2y}{xy-x^2} + \frac{2x-5y}{x^2-3xy+2y^2} - \frac{x-3y}{x^2-2xy} \quad (\text{ニコン})$$

$$(7) \frac{x-2}{2x^2-5x+3} + \frac{3x-1}{2x^2+x-6} - \frac{5-2x}{x^2+x-2} \quad (\text{J R})$$

$$(8) \frac{x^2+2x-15}{x^2+x} \times \frac{x+1}{x^2+5x} + \frac{3x^2-x+3}{x^2+3x} \div \frac{x}{x+3} \quad (\text{大日本製薬})$$

例題 7.6 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{a}{5(a-5)} + \frac{5}{a(5-a)} \quad (\text{東芝})$$

$$(2) \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{東京計器})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{a}{5(a-5)} + \frac{5}{a(5-a)} \\ &= \frac{a}{5(a-5)} + \frac{5}{-a(a-5)} \\ &= \frac{a^2}{5a(a-5)} - \frac{25}{5a(a-5)} \\ &= \frac{a^2-25}{5a(a-5)} = \frac{(a+5)(a-5)}{5a(a-5)} = \frac{a+5}{5a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ &= \frac{a}{(a-b)\{-(c-a)\}} + \frac{b}{(b-c)\{-(a-b)\}} + \frac{c}{(c-a)\{-(b-c)\}} \\ &= -\frac{a}{(a-b)(c-a)} - \frac{b}{(b-c)(a-b)} - \frac{c}{(c-a)(b-c)} \\ &= \frac{-a(b-c) - b(c-a) - c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \end{aligned}$$

7.6 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{1}{a^2-ab} + \frac{1}{b^2-ab} \quad (\text{星崎電機})$$

$$(2) \frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)} \quad (\text{日本毛織})$$

例 7.7 (NEC)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} \\
&= \frac{1+x}{(1-x)(1+x)} + \frac{1-x}{(1+x)(1-x)} + \frac{2}{1+x^2} \\
&= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} \\
&= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)} + \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{4}{1-x^4}
\end{aligned}$$

7.7 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2x}{x^2+1} \quad (\text{フジテック})$$

$$(2) \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} \quad (\text{徳山曹達})$$

例 7.8 (NKK)

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+4} \\
&= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) + \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) \\
&= \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} \\
&= \frac{(x+3)(x+4) + (x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\
&= \frac{2(x^2+5x+7)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}
\end{aligned}$$

7.8 次の計算をせよ. (NET)

$$\frac{x+4}{x-1} - \frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3} + \frac{x+1}{x-4}$$

例題 7.9 次の式を計算せよ.

$$(1) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \div \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \quad (\text{小田急})$$

$$(2) \left(\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+1} \right) \div \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-4}{x-2} \right) \quad (\text{ムトウ})$$

【解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \div \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) \\
 &= \frac{b+a}{ab} \div \frac{a^2-b^2}{ab} \\
 &= \frac{a+b}{ab} \times \frac{ab}{(a+b)(a-b)} = \frac{1}{a-b} \\
 (2) \quad & \left(\frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+1} \right) \div \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-4}{x-2} \right) \\
 &= \frac{x(x+1)+2(x-2)}{(x-2)(x+1)} \div \frac{x(x-2)-(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)} \\
 &= \frac{x^2+3x-4}{(x-2)(x+1)} \div \frac{x+4}{(x+1)(x-2)} \\
 &= \frac{(x-1)(x+4)}{(x-2)(x+1)} \times \frac{(x+1)(x-2)}{x+4} = x-1
 \end{aligned}$$

7.9 次の計算をせよ.

$$(1) \quad (a^2 - b^2) \div \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \quad (\text{日産自動車})$$

$$(2) \quad \left(1 + \frac{2y}{x-y} \right) \div \left(1 - \frac{2y}{x+y} \right) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(3) \quad \left(\frac{1}{x^2+4x+3} + \frac{1}{2x+6} \right) \left(2 + \frac{4}{3x+1} \right) \quad (\text{JR})$$

$$(4) \quad \left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} \right) \div \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(5) \quad \frac{x^2+xy}{x^2+y^2} \times \left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y} \right) \div \left(\frac{x+y}{y} + \frac{y}{x-y} \right) \quad (\text{日新製鋼})$$

例 7.10 (トヨタ自動車)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{2a+b}{a+b} - 1}{1 - \frac{b}{a+b}} \\
 &= \left(\frac{2a+b}{a+b} - 1 \right) \div \left(1 - \frac{b}{a+b} \right) \\
 &= \frac{(2a+b) - (a+b)}{a+b} \div \frac{(a+b) - b}{a+b} \\
 &= \frac{a}{a+b} \div \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+b} \times \frac{a+b}{a} = 1
 \end{aligned}$$

これは、次のように計算することもできる.

$$\frac{\left(\frac{2a+b}{a+b} - 1\right) \times (a+b)}{\left(1 - \frac{b}{a+b}\right) \times (a+b)} = \frac{(2a+b) - (a+b)}{(a+b) - b} = \frac{a}{a} = 1$$

例題 7.11 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} \quad (\text{三菱電機})$$

$$(2) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \quad (\text{栗本鉄工所})$$

$$(3) \frac{t-1}{t - \frac{2}{t+1}} \quad (\text{大同特殊鋼})$$

【解】

$$(1) \frac{1 - \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)x}{\left(x - \frac{1}{x}\right)x} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x+1}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} &= \frac{1}{x-1} + \frac{x}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x} \\ &= \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{(x+1) + x(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \frac{t-1}{t - \frac{2}{t+1}} &= \frac{(t-1)(t+1)}{\left(t - \frac{2}{t+1}\right)(t+1)} \\ &= \frac{(t+1)(t-1)}{t(t+1) - 2} \\ &= \frac{(t+1)(t-1)}{t^2+t-2} \\ &= \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t+2)} = \frac{t+1}{t+2} \end{aligned}$$

7.10 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{a - \frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} \quad (\text{三菱電機北伊丹, NEC})$$

$$(2) \frac{\frac{6}{x} - x - 5}{1 - \frac{1}{x}} \quad (\text{東邦レーヨン})$$

$$(3) \frac{x}{x+1} - \frac{1}{x - \frac{1}{x}} \quad (\text{日立エンジニアリング})$$

$$(4) \frac{\frac{4ab}{a+b} - 2a}{\frac{4ab}{a+b} - 2b} \quad (\text{マツダ})$$

$$(5) \frac{x+5+\frac{12}{x-3}}{x+\frac{2}{x-3}} \quad (\text{日産車体})$$

$$(6) \frac{x}{1+\frac{1}{x-1}} \quad (\text{新菱重機})$$

$$(7) \frac{x}{1-\frac{1}{1+x}} \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(8) 1 - \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} \quad (\text{電源開発})$$

例題 7.12 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{y}}{\frac{x-y}{x} - \frac{x+y}{y}} \quad (\text{大同製鋼})$$

$$(2) \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}} \quad (\text{日立製作所})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{y}}{\frac{x-y}{x} - \frac{x+y}{y}} &= \frac{\left(\frac{x+y}{x} + \frac{x-y}{y}\right)xy}{\left(\frac{x-y}{x} - \frac{x+y}{y}\right)xy} \\ &= \frac{y(x+y) + x(x-y)}{y(x-y) - x(x+y)} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{-x^2 - y^2} = \frac{x^2 + y^2}{-(x^2 + y^2)} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}} &= \frac{\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)(1-x)(1+x)}{\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right)(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{(1+x) + (1-x)}{(1+x) - (1-x)} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

7.11 次の式を計算せよ.

$$(1) \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}} \quad (\text{山武メンテナンス})$$

$$(2) \frac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}} \quad (\text{トヨタ自動車})$$

例題 7.13 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}} \quad (\text{日産ディーゼル})$$

$$(2) \frac{1}{c - \frac{1}{c + \frac{1}{c}}} \quad (\text{日本無線})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}} &= \frac{\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) (a+b)(a-b) \times (a+b)}{\left\{1 - \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\right\} (a+b)^2 \times (a-b)} \\ &= \frac{\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}(a+b)}{\{(a+b)^2 - (a^2+b^2)\}(a-b)} \\ &= \frac{4ab(a+b)}{2ab(a-b)} \\ &= \frac{2(a+b)}{a-b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \frac{1}{c - \frac{1}{c + \frac{1}{c}}} &= \frac{1}{c - \frac{1 \times c}{(c + \frac{1}{c}) \times c}} \\ &= \frac{1}{c - \frac{c}{c^2+1}} \\ &= \frac{1 \times (c^2+1)}{\left(c - \frac{c}{c^2+1}\right) (c^2+1)} \\ &= \frac{c^2+1}{c(c^2+1) - c} = \frac{c^2+1}{c^3} \end{aligned}$$

7.12 次の計算をせよ. ☆ (阪急電鉄)

$$\frac{1}{a - \frac{1}{a + \frac{1}{a}}} - \frac{1}{a + \frac{1}{a - \frac{1}{a}}}$$

例 7.14 (NECエンジニアリング)

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{A}{A+2 - \frac{A+1}{A+\frac{1}{A+2}}} \\
&= 1 - \frac{A}{A+2 - \frac{(A+1)(A+2)}{\left(A+\frac{1}{A+2}\right)(A+2)}} \\
&= 1 - \frac{A}{A+2 - \frac{(A+1)(A+2)}{A(A+2)+1}} \\
&= 1 - \frac{A}{A+2 - \frac{(A+1)(A+2)}{(A+1)^2}} \\
&= 1 - \frac{A}{A+2 - \frac{A+2}{A+1}} \\
&= 1 - \frac{A(A+1)}{\left(A+2 - \frac{A+2}{A+1}\right)(A+1)} \\
&= 1 - \frac{A(A+1)}{(A+2)(A+1) - (A+2)} \\
&= 1 - \frac{A(A+1)}{A(A+2)} \\
&= 1 - \frac{A+1}{A+2} = \frac{1}{A+2}
\end{aligned}$$

7.13 次の計算をせよ．☆

(住友ゴム)

$$1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{x}}}}$$

7.14 $a > b > c > 0$ のとき， $\frac{1}{ab}$ ， $\frac{1}{bc}$ ， $\frac{1}{ca}$ の大小関係をいえ．

(日本鉄塔工業)

7.15 $x = a + \frac{1}{a}$ ， $y = a - \frac{1}{a}$ のとき， $\frac{y}{x} - \frac{x}{y}$ を a を用いて表せ．

(日立製作所)

第 8 章 式の値

8.1 $x = -2$ のとき, $x^3 - x^2 - 6x$ の値を求めなさい. (デンソー)

8.2 $a = 2, b = -3, c = 1$ のとき, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ の値を求めよ. (富士精密)

8.3 $a = 2$ のとき, $|a + 2| + |a - 4|$ の値を求めよ. (九州電力)

8.4 $m = -3, n = -1$ のとき, $-m(m^2 + n)$ の値を求めよ. (日本精工)

8.5 $x = 11, y = 15$ のとき, 次の値を求めよ. (デンソー)

$$\frac{2x^2 - x - 3}{2y^2 - 5y - 3} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{y^2 - y - 6}$$

8.6 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$ のとき, $\frac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{2ab}{(a+b)^2}}$ の値を求めよ. ☆ (トヨタ自動車)

例題 8.1 $a + b = 5, ab = 2$ のとき, $a^2 + b^2$ の値を求めよ. (豊和工業)

【解】 $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ であることを利用する.

$$a^2 + b^2 = (5)^2 - 2 \times 2 = 21$$

8.7 $x^2 + y^2 = 8, x + y = 3$ のとき, xy の値を求めよ. (日本無線)

8.8 $a + b = 4, ab = 1$ のとき, $a^2 + b^2$ 及び $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ の値を求めよ. (九州電力)

例題 8.2 $x + y = 5, xy = 1$ のとき, $x^3 + y^3$ の値を求めよ. (蘇東興業)

【解】 $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$ を利用する.

$$x^3 + y^3 = (5)^3 - 3 \times 1 \times 5 = 110$$

8.9 $a + b = 2, a^3 + b^3 = 38$ のとき, ab の値を求めよ. (中国電力)

8.10 $x + y = 3$, $xy = 1$ のとき, $\frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}$ の値を求めよ. (本田技研)

対称式 (次式では a と b を入れ換えても不変な式) の計算では,

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \quad (8.1)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \quad (8.2)$$

を利用すると便利である. また, (8.1) の b を $-b$ に置き換えると,

$$\begin{aligned} a^2 + (-b)^2 &= \{a + (-b)\}^2 - 2a(-b) \\ a^2 + b^2 &= (a - b)^2 + 2ab \end{aligned} \quad (8.3)$$

同様に, (8.2) の b を $-b$ に置き換えると,

$$\begin{aligned} a^3 + (-b)^3 &= \{a + (-b)\}^3 - a(-b)\{a + (-b)\} \\ a^3 - b^3 &= (a - b)^3 + 3ab(a - b) \end{aligned} \quad (8.4)$$

となる.

例題 8.3 $x + \frac{1}{x} = 2$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ の値を求めよ. (東芝プロセスソフトウェア)

【解】 (8.1) に $a = x$, $b = \frac{1}{x}$ を代入する.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} = (2)^2 - 2 = 2$$

8.11 $x - \frac{1}{x} = 1$ のとき, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ の値を求めよ. (ローレルバンクマシン)

例題 8.4 $x + \frac{1}{x} = 1$ のとき, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ の値を求めよ. (日立製作所)

【解】 (8.2) に $a = x$, $b = \frac{1}{x}$ を代入する.

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3x \cdot \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) = (1)^3 - 3(1) = -2$$

8.12 $x - \frac{1}{x} = 1$ のとき, $x^3 - \frac{1}{x^3}$ の値を求めよ. (松田組)

第 9 章 比例式

例題 9.1 $x : 10 = 3 : 2$ のとき, x の値を求めよ. (日産自動車)

【解】 $a : b = c : d \iff ad = bc$ を利用する.

$$2x = 10 \times 3 \quad \text{より} \quad x = 15$$

9.1 $(\quad) : \frac{3}{4} = 3 : 4$ のとき, $(\quad)$ にあてはまる数を入れよ. (デンソー)

例題 9.2 $x : y = 5 : 6$, $y : z = 9 : 10$ のとき, $x : y : z$ を求めよ. (日産自動車)

【解】 2 式に共通な y の最小公倍数は 18 なので,

$$x : y = 5 : 6 = 15 : 18$$

$$y : z = 9 : 10 = 18 : 20$$

$$\text{よって, } x : y : z = 15 : 18 : 20$$

9.2 $x : y = 3 : 2$, $x : z = 4 : 1$ のとき $x : y : z$ を求めよ. (アラコ)

9.3 $A : B = \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, $C : B = 2.5 : 1.5$ のとき $A : B : C$ を求めよ. (武田薬品工業)

例題 9.3 $2x = 3y$ のとき $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ の値を求めよ. (三共)

【解】 $2x = 3y \iff x : y = 3 : 2 \iff x = 3k, y = 2k$ (k は比例定数) であるので,

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{(3k)^2 + (2k)^2}{3k \cdot 2k} = \frac{13k^2}{6k^2} = \frac{13}{6}$$

9.4 $x : y = 1 : 3$ のとき $\frac{5xy}{x^2 + y^2}$ を求めよ. (トヨタ自動車)

9.5 $2x = 5y$ のとき, $\frac{x}{x+2y} + \frac{y}{x-y}$ の値を求めよ. (小田急)

例題 9.4 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ のとき $\frac{x+y-z}{x+y+z}$ の値を求めよ. (西日本プラント工業)

【解】 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = k$ とおくと, $x = 2k, y = 3k, z = 4k$ より

$$\frac{x+y-z}{x+y+z} = \frac{2k+3k-4k}{2k+3k+4k} = \frac{k}{9k} = \frac{1}{9}$$

9.6 $a:b:c = 3:4:5$ のとき $P = \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}$ の値を求めよ. (トヨタ自動車)

9.7 $\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$ のとき $\frac{(2x+y)^2 - 48z^2}{(2x+5y-14z)^2}$ の値を求めよ. (東芝機械)

例題 9.5 $\frac{x+y}{5} = \frac{y+z}{6} = \frac{z+x}{7}$ のとき $x:y:z$ を求めよ. (東京ガス)

【解】 与式 $= k$ とおくと

$$x+y = 5k \tag{9.1}$$

$$y+z = 6k \tag{9.2}$$

$$z+x = 7k \tag{9.3}$$

となる. この3式の辺々を加えると

$$\begin{aligned} 2(x+y+z) &= 18k \\ x+y+z &= 9k \end{aligned} \tag{9.4}$$

を得る.

(9.1), (9.4) より $z = 4k$ となり, これを (9.2), (9.3) に代入することにより $y = 2k, x = 3k$ を得る.

よって, $x:y:z = 3k:2k:4k = 3:2:4$

9.8 $\frac{x+y}{7} = \frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{9}$ のとき $x:y:z$ を求めよ. (徳山曹達)

9.9 $\begin{cases} 3x-2y+z=0 \\ 4x-5y+3z=0 \end{cases}$ のとき $x:y:z$ を求めよ. (ゼネラル)

9.10 $\frac{x+2y}{2} = \frac{y+3z}{3} = \frac{z+4x}{4}$ のとき $x:y:z$ を求めよ. (山下新日本汽船)

第 10 章 無理数

2 乗すれば a となる数を a の平方根という.
正の数 a の平方根は, 正の数と負の数の 2 つがあり,

正の平方根は $\sqrt{a}$, 負の平方根は $-\sqrt{a}$

である.

問 10.1 次の () にあてはまる数を書き入れよ.

(1) 4 の平方根は () と ()

(2) $\sqrt{25} = ()$

(3) 7 の平方根は () と ()

(4) $-\sqrt{16} = ()$

【答】 (1) 2, -2 (2) 5 (3) $\sqrt{5}$, $-\sqrt{5}$ (4) -4

(平方根の性質)

1 $a \geq 0$ のとき $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a} \geq 0$

2 $a \geq 0$ のとき $\sqrt{a^2} = a$, $a < 0$ のとき $\sqrt{a^2} = -a$

3 一般に $\sqrt{a^2} = |a|$

例 10.2 $(\sqrt{7})^2 = 7$, $\sqrt{3^2} = 3$, $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

10.1 次の式に誤りがあれば右边を訂正せよ.

(三菱電機)

(1) $\sqrt{9} = \pm 3$

(2) $\sqrt{(-8)^2} = -8$

(3) 16 の平方根 = 4

(平方根の公式) $a > 0, b > 0, k > 0$ のとき

$$1 \quad \sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$2 \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$3 \quad \sqrt{k^2a} = k\sqrt{a}$$

例 10.3

$$(1) \quad \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$(2) \quad \sqrt{500} = \sqrt{100 \times 5} = \sqrt{10^2} \times \sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

$$(3) \quad \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

10.2 次の問いに答えよ.

$$(1) \quad \sqrt{2} = 1.4 \text{ であれば } \sqrt{200} \text{ はいくらか.}$$

(三菱電機北伊丹)

$$(2) \quad \sqrt{3} = 1.7 \text{ のとき } \sqrt{300} \text{ はいくらか.}$$

(日本情報管理システム)

例 10.4

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sqrt{81} - 2\sqrt{16} \\ & = \sqrt{9^2} - 2\sqrt{4^2} = 9 - 2 \times 4 = 1 \end{aligned}$$

(東芝昇降機サービス)

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27} \\ & = \sqrt{2^2 \times 3} + \sqrt{4^2 \times 3} - \sqrt{3^2 \times 3} \\ & = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} \\ & = (2 + 4 - 3)\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

(日新舗道建設)

$$\begin{aligned} 3) \quad & 4\sqrt{8} - \sqrt{50} - \sqrt{18} \\ & = 4 \times 2\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} \\ & = 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

(デンソー)

$$\begin{aligned} 4) \quad & 8\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - \sqrt{27} \\ & = 8\sqrt{3} + 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3} \\ & = 2\sqrt{2} + (8 - 3)\sqrt{3} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} \end{aligned}$$

(新日鉄八幡)

10.3 次の式を簡単にせよ.

- | | |
|--|----------|
| (1) $\sqrt{100} + \sqrt{16}$ | (ダイキン工業) |
| (2) $\sqrt{49} - 5\sqrt{25}$ | (ユニチカ) |
| (3) $\sqrt{81} - 2\sqrt{8}$ | (アイシン機工) |
| (4) $\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$ | (デンソー) |
| (5) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ | (チバコー) |
| (6) $3\sqrt{2} - \sqrt{8}$ | (NKK) |
| (7) $3\sqrt{20} - 2\sqrt{80}$ | (トヨタオート) |
| (8) $-4\sqrt{3} - \sqrt{48} \div 2$ | (ダイハツ) |
| (9) $\sqrt{\frac{27}{16}} + 4\sqrt{3}$ | (日産自動車) |
| (10) $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + \sqrt{2}$ | (愛知製鋼) |
| (11) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{32}$ | (トヨタ自動車) |
| (12) $\sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{2}$ | (中外製薬) |
| (13) $\sqrt{3} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3}$ | (NEC) |
| (14) $\sqrt{12} + \sqrt{27} - 4\sqrt{3}$ | (大日本製薬) |
| (15) $2\sqrt{3} - \sqrt{75} + \sqrt{27}$ | (東洋高压) |
| (16) $\sqrt{72} - \sqrt{8} - \sqrt{32}$ | (京セラ) |
| (17) $2\sqrt{8} - \sqrt{32} + \sqrt{72}$ | (トーエネック) |
| (18) $\sqrt{12} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{27}$ | (三菱重工) |
| (19) $\sqrt{200} - 3\sqrt{18} + \sqrt{8}$ | (フジテック) |
| (20) $\sqrt{12} + \sqrt{32} - 3\sqrt{48}$ | (東京光学) |
| (21) $\sqrt{72} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{8}$ | (きんでん) |
| (22) $3\sqrt{75} - 2\sqrt{27} + \sqrt{12}$ | (日本光学) |

$$(23) \sqrt{500} - \sqrt{80} + \sqrt{20} \quad (\text{日産自動車})$$

$$(24) \sqrt{108} + \sqrt{27} - \sqrt{192} \quad (\text{きんでん})$$

$$(25) \sqrt{27} - \sqrt{12} + \sqrt{48} - 5\sqrt{3} \quad (\text{葵精機})$$

$$(26) \sqrt{8} + \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18} \quad (\text{九州電力})$$

$$(27) \sqrt{36} + \sqrt{72} + \sqrt{50} - 3\sqrt{2} \quad (\text{九州産交整備})$$

$$(28) 3\sqrt{12} - 5\sqrt{8} + \sqrt{48} - 4\sqrt{32} \quad (\text{日石三菱})$$

例 10.5

$$\begin{aligned} 1) \quad & 2\sqrt{3} \div \sqrt{28} \times \sqrt{21} \quad (\text{住友金属鉱業}) \\ & = 2\sqrt{3} \div 2\sqrt{7} \times \sqrt{21} \\ & = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{21}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{3 \times 21}{7}} = \sqrt{9} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \sqrt{15}(\sqrt{12}\sqrt{20} - \sqrt{60}) \quad (\text{ワシノ機械}) \\ & = \sqrt{15}(2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5} - 2\sqrt{15}) \\ & = \sqrt{15}(4\sqrt{15} - 2\sqrt{15}) = \sqrt{15} \times 2\sqrt{15} = 30 \end{aligned}$$

10.4 次の計算をせよ.

$$(1) \sqrt{3} \times \sqrt{12} \quad (\text{昭南工業})$$

$$(2) \sqrt{3} \times \sqrt{9} \quad (\text{チバコー})$$

$$(3) \sqrt{40} \div \sqrt{5} \quad (\text{雪印乳業})$$

$$(4) \sqrt{9}\sqrt{80} \quad (\text{住友電気})$$

$$(5) 2\sqrt{3} \times \sqrt{27} \quad (\text{日産ディーゼル})$$

$$(6) \sqrt{25} \times \sqrt{8} \div \sqrt{2} \quad (\text{豊和工業})$$

$$(7) \sqrt{42} \div \sqrt{6} \times 2\sqrt{7} \quad (\text{住友金属鉱業})$$

$$(8) \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{5} \times \sqrt{10} \quad (\text{富士重工業})$$

$$(9) \sqrt{45} \times \sqrt{27} \div \sqrt{20} \times \sqrt{12} \quad (\text{NKK京浜})$$

- (10) $\sqrt{6} \div \sqrt{2} \times \sqrt{3} - 1$ (デンソー)
- (11) $\sqrt{6} \times \sqrt{18} - \sqrt{27}$ (TOTO)
- (12) $2\sqrt{3} \times 3\sqrt{2} + 4\sqrt{6}$ (アイシン機工)
- (13) $(\sqrt{6} \times \sqrt{12} - \sqrt{2}) \div 5$ (デンソー)
- (14) $(\sqrt{27} - \sqrt{12}) \div \sqrt{3}$ (愛知製鋼)
- (15) $\sqrt{10}(\sqrt{8}\sqrt{20} - \sqrt{40})$ (日本無線)
- (16) $3\sqrt{15}(\sqrt{8}\sqrt{30} - \sqrt{135})$ (日本無線)
- (17) $(\sqrt{18} - \sqrt{8})(2\sqrt{2} - 1)$ (ダイハツ)

例題 10.6 次の計算をせよ.

- (1) $(2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 3\sqrt{2})$ (沖電気)
- (2) $(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ (日立製作所)
- (3) $(\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{2})$ (小松製作所)
- (4) $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5})$ (クボタ)

【解】

- (1)
$$\begin{aligned} & (2\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \\ &= 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) + \sqrt{2}(\sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \\ &= 6 - 6\sqrt{6} + \sqrt{6} - 6 = -5\sqrt{6} \end{aligned}$$
- (2)
$$\begin{aligned} & (2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 \\ &= (2\sqrt{5})^2 - 2(2\sqrt{5})(\sqrt{3}) + (\sqrt{3})^2 \\ &= 20 - 4\sqrt{15} + 3 = 23 - 4\sqrt{15} \end{aligned}$$
- (3)
$$\begin{aligned} & (\sqrt{2} + \sqrt{5})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{5} - \sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 5 - 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & (\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{5})(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}) \\
 & = \{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \sqrt{5}\} \{(\sqrt{2} - \sqrt{3}) - \sqrt{5}\} \\
 & = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2 \\
 & = 2 - 2\sqrt{6} + 3 - 5 = -2\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

10.5 次の計算をせよ.

- | | |
|---|-----------|
| (1) $(1 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})$ | (デンソー) |
| (2) $(2 + \sqrt{3})(3 - \sqrt{3})$ | (きんでん) |
| (3) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})(4\sqrt{5} - 2\sqrt{2})$ | (大和ハウス) |
| (4) $(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ | (川崎重工業) |
| (5) $(\sqrt{6} + 3\sqrt{2})^2$ | (京セラ) |
| (6) $(\sqrt{2} - 1)^2 + \sqrt{8}$ | (凸版印刷) |
| (7) $(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 + 2\sqrt{35}$ | (トヨタ自動車) |
| (8) $(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2 + \sqrt{60}$ | (昭和シェル石油) |
| (9) $3 \left(\frac{\sqrt{6} - 3}{3} \right)^2 + 6 \left(\frac{\sqrt{6} - 3}{3} \right)$ | (大同特殊鋼) |
| (10) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ | (山崎製パン) |
| (11) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ | (三共工業) |
| (12) $(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})$ | (昭和シェル石油) |
| (13) $(4 - 2\sqrt{3})(4 + \sqrt{12})$ | (日本新金属) |
| (14) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$ | (豊田工機) |
| (15) $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4})(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{4})$ | (協和発酵) |
| (16) $(\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2)(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2)$ | (呉羽紡績) |

分母に平方根を含む式は、分母と分子に同じ数を掛けて、分母に平方根を含まない式に変形することができる。このように変形することを**分母を有理化する**という。

例 10.7 次の式の分母を有理化してみよう。

$$1) \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$2) \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

問 10.8 次の式の分母を有理化せよ.

$$(1) \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$(3) \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$(4) \frac{2}{3\sqrt{2}}$$

$$(5) \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$$

$$(6) \frac{4\sqrt{5}}{7\sqrt{2}}$$

【答】 (1) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{7}}{7}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (5) $\frac{\sqrt{15}}{10}$ (6) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$

例題 10.9 次の式の分母を有理化せよ.

$$(1) \sqrt{18} - \sqrt{32} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(2) \frac{3 - 5\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} \quad (\text{東芝})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt{18} - \sqrt{32} + 5\sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \\ &= \left(3 - 4 + \frac{5}{2}\right)\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \frac{3-5\sqrt{2}}{2\sqrt{10}} \\
 &= \frac{(3-5\sqrt{2})\sqrt{10}}{2\sqrt{10}\sqrt{10}} \\
 &= \frac{3\sqrt{10}-5\sqrt{20}}{20} \\
 &= \frac{3\sqrt{10}-5 \times 2\sqrt{5}}{20} = \frac{3\sqrt{10}-10\sqrt{5}}{20}
 \end{aligned}$$

10.6 次の式の分母を有理化せよ.

$$(1) \quad 3\sqrt{12} - \frac{24}{\sqrt{3}} + \sqrt{27} \quad (\text{KDD})$$

$$(2) \quad \frac{10\sqrt{2} - \sqrt{50}}{\sqrt{10}} \quad (\text{日石三菱})$$

$$(3) \quad \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \quad (\text{新日鉄八幡})$$

$$(4) \quad \frac{18}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \quad (\text{葵精機})$$

$$(5) \quad \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 - \sqrt{6} \quad (\text{京阪電鉄})$$

例題 10.10 $\frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$ を有理化せよ.

【解】 $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ であることを利用する. 分母と分子に $\sqrt{7} - \sqrt{3}$ を掛ける.

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \\
 &= \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} \\
 &= \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{7 - 3} \\
 &= \frac{2(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

例えば, 式の分母が $3 - \sqrt{2}$ のときは分母と分子に $3 + \sqrt{2}$ を掛け, 式の分母が $2\sqrt{5} + \sqrt{3}$ のときは, 分母と分子に $2\sqrt{5} - \sqrt{3}$ を掛けるとよい.

問 10.11 次の式の分母を有理化せよ.

$$(1) \frac{6}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$$

$$(2) \frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$$

$$(3) \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$$

【答】 (1) $2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$ (2) $\frac{2+3\sqrt{2}}{7}$ (3) $\frac{10-\sqrt{15}}{17}$

例題 10.12 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \quad (\text{デンソー})$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad (\text{岡山日立家電})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{3})} \\ &= \frac{5 + 2\sqrt{15} + 3}{5 - 3} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{2} = 4 + \sqrt{15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &= \frac{3 + \sqrt{6} - \sqrt{6} + 2}{3 - 2} = 5 \end{aligned}$$

10.7 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad (\text{厚木ナイロン})$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3} - 1} \quad (\text{武田薬品工業})$$

$$(3) \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \quad (\text{日産ディーゼル})$$

- (4) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$ (東亜合成)
- (5) $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (旭化成)
- (6) $\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ (新日鉄八幡)
- (7) $\frac{\sqrt{2}+3}{2\sqrt{2}-1}$ (新日鉄八幡)
- (8) $\frac{2\sqrt{5}-4\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (凸版印刷)
- (9) $(\sqrt{6}+\sqrt{3}) \div (\sqrt{6}-\sqrt{3})$ (中国電力)
- (10) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{3}$ (住友電気)
- (11) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}$ (日立研究所)
- (12) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (日本水産)
- (13) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (きんでん)
- (14) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ (本田技研)
- (15) $\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ (大阪ガス)
- (16) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ (本田技研)
- (17) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (トヨタ自動車)
- (18) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (日産自動車)
- (19) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$ (シチズン)

$$(20) \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}} - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad (\text{島津製作所})$$

10.8 次の計算をせよ. ☆

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}}} \quad (\text{日本光学})$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1} - \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2} - 1} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(3) \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}} \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

$$(4) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{2}} \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

根号を2重に含む式は, 次のように簡単にできる場合がある.

例えば, $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ については

$$5+2\sqrt{6} = (3+2) + 2\sqrt{3 \cdot 2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$$

であり, $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 0$ であるから

$$\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\text{同様に } \sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

一般に, $a > 0, b > 0$ のとき

$$a+b+2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$a+b-2\sqrt{ab} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

であるから, 次のことが成り立つ.

(2重根号の公式)

$$a > 0, b > 0 \text{ のとき } \sqrt{(a+b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$a > b > 0 \text{ のとき } \sqrt{(a+b) - 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

例 10.13

$$(1) \quad \sqrt{8+2\sqrt{15}} = \sqrt{(5+3)+2\sqrt{5\cdot 3}} \\ = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

$$(2) \quad \sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}} \\ = \sqrt{(9+3)-2\sqrt{9\cdot 3}} \\ = \sqrt{9} - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$$

$$(3) \quad \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} \\ = \frac{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}} \\ = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$$

10.9 次の式を計算せよ.

$$(1) \quad \sqrt{11+2\sqrt{30}} \quad (\text{マツダ})$$

$$(2) \quad \sqrt{11+2\sqrt{18}} \quad (\text{大阪ガス})$$

$$(3) \quad \sqrt{10-2\sqrt{21}} \quad (\text{NEC})$$

$$(4) \quad \sqrt{14-2\sqrt{48}} \quad (\text{JR})$$

$$(5) \quad \sqrt{5+\sqrt{24}} \quad (\text{菱電エンジニアリング})$$

$$(6) \quad \sqrt{5-\sqrt{24}} \quad (\text{マツダ})$$

$$(7) \quad \sqrt{6+4\sqrt{2}} \quad (\text{デンソー})$$

$$(8) \quad \sqrt{17-4\sqrt{15}} \quad (\text{日本光学})$$

$$(9) \quad \sqrt{11+6\sqrt{2}} \quad (\text{九州電力})$$

$$(10) \quad \sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad (\text{東芝})$$

$$(11) \quad \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{28-2\sqrt{75}} \quad (\text{シチズン})$$

$$(12) \quad \sqrt{4-\sqrt{15}} \quad (\text{東芝})$$

$$(13) \quad \sqrt{6-3\sqrt{3}} \quad (\text{東洋曹達})$$

10.10 $\sqrt{2} = a$, $\sqrt{3} = b$ のとき $\sqrt{7 + \sqrt{24}}$ を a , b を用いて表せ. (日本道路公団)

10.11 $x = \sqrt{2}$ のとき $\frac{\sqrt{3+2x} + \sqrt{3-2x}}{\sqrt{3+2x} - \sqrt{3-2x}}$ の値を求めよ. (東京ガス)

10.12 $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $\frac{1-a}{1-\sqrt{1+a}} + \frac{1+a}{1+\sqrt{1-a}}$ の値を求めよ. (NTT)

例題 10.14 $x = \sqrt{2} + 1$ のとき $x^3 - x^2 - x + 1$ の値を求めよ. (東亜道路工業)

【解】 $x = \sqrt{2} + 1$ より

$$\begin{array}{rcl} x - 1 & = & \sqrt{2} \\ (x - 1)^2 & = & (\sqrt{2})^2 \\ x^2 - 2x + 1 & = & 2 \\ x^2 - 2x - 1 & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x \quad + 1 \\ x^2 - 2x - 1 \overline{) x^3 - x^2 - x + 1} \\ \underline{x^3 - 2x^2 - x} \\ x^2 + 1 \\ \underline{x^2 - 2x - 1} \\ 2x + 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } x^3 - x^2 - x + 1 &= (x^2 - 2x - 1)(x + 1) + 2x + 2 \\ &= 2x + 2 \\ &= 2(\sqrt{2} + 1) + 2 = 4 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

例題 10.15 $x = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$ のとき, 次の値を求めよ. (三井造船)

(1) $x + y$

(2) $x - y$

(3) xy

(4) $x^2 + y^2$

(5) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

【解】 (4),(5) は, (1),(3) の結果を利用する.

(1) $x + y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \sqrt{3}$

(2) $x - y = \frac{\sqrt{3}+1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1$

$$(3) \quad xy = \frac{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{2 \times 2} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = (\sqrt{3})^2 - 2 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$(5) \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} = (x+y) \div xy = \sqrt{3} \div \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

ここでは、 $x^2 + y^2$ 、 $x^3 + y^3$ などの対称式の値を求めるとき

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

と書き直し、 $x+y$ 、 xy の値を利用して計算した方が簡単である。

たとえば、 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ などの対称式も

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{x^2 y^2} = \frac{(x+y)^2 - 2xy}{(xy)^2}$$

と変形することにより、 $x+y$ 、 xy を用いて表すことができる。

例題 10.16 $x = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ 、 $y = \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ のとき $x^3 + y^3$ の値を求めよ。 (TOTO)

【解】

$$x+y = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{10}$$

$$xy = \frac{(\sqrt{10}-\sqrt{2})(\sqrt{10}+\sqrt{2})}{2 \times 2} = \frac{10-2}{4} = 2$$

であるから

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= (\sqrt{10})^3 - 3 \times 2 \times \sqrt{10} \\ &= 10\sqrt{10} - 6\sqrt{10} = 4\sqrt{10} \end{aligned}$$

10.13 $x = \sqrt{2} - 1$ のとき $x^3 + 2x^2 - x + 1$ の値を求めよ。 (日本光学)

10.14 $x = 2 + \sqrt{3}$ のとき $\frac{x^3 + x^2 - 4x + 1}{2x}$ の値を求めよ。 (三菱化工)

10.15 $a = 1 - \sqrt{2}$ 、 $b = \sqrt{2} + 1$ のとき $a^2 + b^2$ の値を求めよ。 (三共)

10.16 $x = \frac{1}{2}(\sqrt{10} + \sqrt{2})$, $y = \frac{1}{2}(\sqrt{10} - \sqrt{2})$ のとき, 次の値を求めよ. (東洋高压)

(1) $x + y$

(2) xy

(3) $x^2 - xy + y^2$

(4) $x^3 + y^3$

10.17 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{2}$ のとき $x^2 + xy + y^2$ はいくらか. (佐世保重工業)

10.18 $x = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{2}}{2}$ のとき $x^2 + xy + y^2$ はいくらか. (三菱造船)

10.19 $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4}$, $y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$ のとき, 次の値を求めよ. (トヨタ自動車)

(1) $\frac{\sqrt{3}}{x + y} + \sqrt{xy}$

(2) $x^2y + xy^2$

10.20 $x = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{5}$, $y = \frac{\sqrt{7} - \sqrt{3}}{5}$ のとき $\sqrt{x^2 - xy + y^2}$ の値を求めよ. (ダイハツ)

10.21 $x = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $y = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ のとき, 次の値を求めよ. (ディーゼル機器)

(1) $x^2 + y^2$

(2) $(x - y)^2$

10.22 $x = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$, $y = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ のとき $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ の値を求めよ. (富士通)

10.23 $x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$, $y = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$ のとき $x^3 + y^3$, $x^2 + 3xy + y^2$ の値を求めよ. (日本鉄塔工業)

10.24 $x = \sqrt{3 + \sqrt{5}}$, $y = \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ のとき $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ の値を求めよ. (電源開発)

10.25 $x + \frac{1}{x} = 3$ ($x > 0$) のとき $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ の値を求めよ. (NTT)

10.26 $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき, b の値はいくらか. また, $(a+b)^2 - ab$ の値はいくらか. ☆ (トヨタ自動車)

第 11 章 1 次方程式

例題 11.1 次の 1 次方程式を解け.

(1) $6x - 11 = 8x + 5$ (西日本プラント工業)

(2) $x - 2\{x - (1 - x)\} = 3x$ (日本水産)

(3) $0.6(4 - x) - 5(0.6x + 0.34) + 0.9 = 0$ (東洋電装)

(4) $\frac{5 - x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x - 1}{2}$ (日立プラント建設)

【解】

(1) $6x - 11 = 8x + 5$

$$6x - 8x = 5 + 11$$

$$-2x = 16$$

$$x = -8$$

(2) $x - 2\{x - (1 - x)\} = 3x$

$$x - 2(x - 1 + x) = 3x$$

$$x - 2(2x - 1) = 3x$$

$$x - 4x + 2 = 3x$$

$$x - 4x - 3x = -2$$

$$-6x = -2$$

$$x = \frac{1}{3}$$

(3) $0.6(4 - x) - 5(0.6x + 0.34) + 0.9 = 0$

$$2.4 - 0.6x - 3x - 1.7 + 0.9 = 0$$

$$24 - 6x - 30x - 17 + 9 = 0$$

$$-36x = -16$$

$$x = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{5-x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x-1}{2} \\
 & 6 \times \frac{5-x}{3} = 6 \times \left(\frac{3}{2} - \frac{x-1}{2} \right) \\
 & 2(5-x) = 9 - 3(x-1) \\
 & 10 - 2x = 9 - 3x + 3 \\
 & x = 2
 \end{aligned}$$

11.1 次の1次方程式を解け.

- | | |
|---|-----------|
| (1) $3x + 2 = 2x + 3$ | (住友電気工業) |
| (2) $3x + 5 = 10 + 2x$ | (小松製作所) |
| (3) $5x - 2 + 3x = 14$ | (中京コクヨ) |
| (4) $5x - 7 = 2x + 29$ | (ダイハツ) |
| (5) $5x - 8 = 2x - 2$ | (セガミ) |
| (6) $5x - 4 = -9x + 38$ | (日本セメント) |
| (7) $x - 3 = 3x - 15$ | (ニホンゲンマ) |
| (8) $-8x - 30 = -3x$ | (日産自動車) |
| (9) $3 - 7x = 3x - 2$ | (日本自動販売) |
| (10) $0.5x + 3.5 = 0.25x + 3$ | (凸版印刷) |
| (11) $4(x - 3) = 3(x - 2)$ | (住友ゴム) |
| (12) $2(x + 1) = 3x + 4$ | (東京ガス) |
| (13) $3(x - 2) - 5 = -x + 1$ | (住友金属鉱業) |
| (14) $5x - 2(4x - 3) = 18$ | (昭和シェル石油) |
| (15) $2x - 4 = 7x - (x - 8)$ | (東京ガス) |
| (16) $2x - 2\{x - (1 - x)\} = 3x - 8$ | (いすゞ自動車) |
| (17) $3x - [8x + 6 - \{7x - (5x + 12)\}] = 0$ | (三共) |
| (18) $0.5(3 - x) - 4(0.3x + 0.65) + 7.9 = 0$ | (ヤマハ) |

$$(19) (2x + 5) : (2x - 5) = 13 : 3 \quad (\text{呉造船})$$

$$(20) x(x - 3) = x(x - 6) + 9 \quad (\text{沖電気})$$

$$(21) (x - 1)^2 + 2 = (x - 1)(x - 3) \quad (\text{東亜合成})$$

$$(22) \frac{2x + 1}{3} = \frac{1 + x}{2} \quad (\text{三菱電機})$$

$$(23) 1 - \frac{x - 2}{6} = 3 - \frac{x}{2} \quad (\text{J T B})$$

$$(24) \frac{1}{2} - \frac{4 - x}{3} = \frac{5}{6} \quad (\text{マリネックス})$$

$$(25) \frac{x}{8} - \frac{12 - 4x}{2} = 8 \quad (\text{九州大日本印刷})$$

$$(26) \frac{6x + 2}{3} - \frac{4x - 4}{6} = 1 \quad (\text{日産自動車})$$

$$(27) \frac{2x - 8}{11} - \frac{2x - 6}{12} = \frac{5}{6} \quad (\text{住友倉庫})$$

$$(28) \frac{x + 1}{3} - \frac{2(x + 5)}{7} = -x + 1 \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(29) \frac{3x - 5}{5} - \frac{7x - 13}{6} = 3 - \frac{x + 3}{2} \quad (\text{沖電気})$$

実数 A の絶対値 A について、次のことが成り立つ.

$$A \geq 0 \quad \text{のとき} \quad |A| = A$$

$$A < 0 \quad \text{のとき} \quad |A| = -A$$

例えば, $|5| = 5$, $|-5| = -(-5) = 5$ である.

また, 任意の実数 A に対して, $|-A| = |A|$, $|A| \geq 0$ である.

$|x - 2|$ については $x = 2$ のとき, $|x - 2| = 0$ であり,

$$x \geq 2 \quad \text{のとき} \quad |x - 2| = x - 2$$

$$x < 2 \quad \text{のとき} \quad |x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$$

また, $|2 - x| = |-(x - 2)| = |x - 2|$ と書き直せる.

問 11.2 次の式を簡単にせよ.

$$(1) x < -1 \quad \text{のとき} \quad |x + 1|$$

(2) $x \geq 3$ のとき $|3 - x|$

【答】 (1) $-x - 1$ (2) $x - 3$

絶対値のついた方程式の計算では、絶対値の中の符号に注意して場合分けを行って計算するとよい。

例題 11.3 方程式 $|x - 1| = 2 - 3x$ を解け. (ブラザー工業)

【解】 $x - 1$ は $x = 1$ のとき $x - 1 = 0$ であるので、 $x \geq 1$ と $x < 1$ の場合に分けて方程式を解く。

i) $x \geq 1$ のとき、 $|x - 1| = x - 1$ なので

$$x - 1 = 2 - 3x$$

$$4x = 3$$

$$x = \frac{3}{4} \quad x = \frac{3}{4} \text{ は } x \geq 1 \text{ に反するので解ではない}$$

ii) $x < 1$ のとき、 $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$ なので

$$-x + 1 = 2 - 3x$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{2} \text{ は } x < 1 \text{ に適するので解である}$$

よって、解は $x = \frac{1}{2}$

11.2 次の方程式を解け。

(1) $3x + 2|x| = 5$ (日立製作所)

(2) $|x - 1| = 2x$ (武田薬品工業)

(3) $|x - 5| = 7 - 3x$ (日立家電販売)

例題 11.4 方程式 $|x + 3| + |2 - x| = x + 4$ を解け. (九州電力)

【解】 $|2 - x| = |-(x - 2)| = |x - 2|$ と書き直し、方程式

$$|x + 3| + |x - 2| = x + 4$$

を解けばよい。また、

$$|x + 3| = \begin{cases} x + 3 & (x \geq -3 \text{ のとき}) \\ -x - 3 & (x < -3 \text{ のとき}) \end{cases}, \quad |x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2 \text{ のとき}) \\ -x + 2 & (x < 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるので、 -3 と 2 によって分けられる 3 つの区間で考える.

i) $x < -3$ のとき

$$(-x-3)+(-x+2)=x+4$$

$$-x-3-x+2=x+4$$

$$-3x=5$$

$$x=-\frac{5}{3} \quad x=-\frac{5}{3} \text{ は } x < -3 \text{ に反するので解ではない}$$

ii) $-3 \leq x < 2$ のとき

$$(x+3)+(-x+2)=x+4$$

$$x+3-x+2=x+4$$

$$-x=-1$$

$$x=1 \quad x=1 \text{ は } -3 \leq x < 2 \text{ に適するので解である}$$

iii) $x \geq 2$ のとき

$$(x+3)+(x-2)=x+4$$

$$x+3+x-2=x+4$$

$$x=3 \quad x=3 \text{ は } x \geq 2 \text{ に適するので解である}$$

よって、解は $x=1, 3$

11.3 次の方程式を解け.

$$(1) |x+4|+2|x-2|=9 \quad (\text{NHK})$$

$$(2) |x-2|+3|x+1|=13 \quad (\text{大同製鋼})$$

例題 11.5 $1 - \frac{x+b}{3} = 2x$ の解が $x = -1$ のとき、 b の値を求めよ. (三共)

【解】 $x = -1$ は $1 - \frac{x+b}{3} = 2x$ の解であるので、

$$1 - \frac{-1+b}{3} = 2 \times (-1) \quad \text{を解いて} \quad b = 10$$

11.4 $3ax + a - 1 = 25$ の解が $x = 4$ のとき、 a の値を求めよ. (京王電鉄)

11.5 $\frac{ax-2}{3} - \frac{x-3a}{5} = 1$ の解が $x = -3$ のとき a の値を求めよ. (新日鉄八幡)

(方程式 $ax = b$ の分類)

1. $a \neq 0$ のとき $x = \frac{b}{a}$
2. $a = 0, b \neq 0$ のとき 解なし
3. $a = 0, b = 0$ のとき すべての数

例題 11.6 x の方程式 $a^2x + 1 = x + a$ を解け.

(日立マクセル)

【解】

$$\begin{aligned}
 a^2x + 1 &= a - 1 \\
 (a^2 - 1)x &= a - 1 \\
 (a + 1)(a - 1)x &= a - 1
 \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \begin{cases} a \neq 1, -1 & \text{のとき} & x = \frac{1}{a+1} \\ a = -1 & \text{のとき} & \text{解なし} \\ a = 1 & \text{のとき} & \text{すべての数} \end{cases}$$

11.6 x の方程式 $(a - 4)(a - 1)x = a - 2(x + 1)$ を解け.

(日本光学)

第 12 章 複素数

2 次方程式 $x^2 + 9 = 0$ の解を考えてみよう. この方程式は,

$$x^2 = -9 \quad (12.1)$$

と変形されるが, (12.1) の解は, 2 乗すれば -9 となる数でなければならない.

ところが, どんな実数でも 2 乗すれば正または 0 となるから, (12.1) の解は実数の範囲では求められない.

そこで, 2 乗すれば負となる実数以外の新しい数を考え, 方程式 (12.1) も解を持つようにしよう.

まず, 2 乗すれば -1 となる新しい数を考え, それを i で表す.

$$i^2 = -1 \quad (12.2)$$

この i を**虚数単位**という.

i を含んだ数を, (12.2) に注意して文字式と同様に計算すると

$$(3i)^2 = 3^2 i^2 = 9 \times (-1) = -9$$

$$(-3i)^2 = (-3)^2 i^2 = 9 \times (-1) = -9$$

となるから, 2 乗すれば -9 となる数は $3i$ と $-3i$ の 2 つであることがわかる. 2 次方程式 (12.1) の解は $3i$ と $-3i$ である.

一般に, 次のように決める.

$$\mathbf{1} \quad i^2 = -1$$

$$\mathbf{2} \quad a > 0 \quad \text{のとき} \quad \sqrt{-a} = \sqrt{a} i$$

例 12.1

$$1) \quad \sqrt{-5} = \sqrt{5} i$$

$$2) \quad -\sqrt{-5} = -\sqrt{5} i$$

$$3) \quad \sqrt{-36} = \sqrt{36} i = 6i$$

問 12.2 次の数を i を使って表せ.

(1) $\sqrt{-3}$

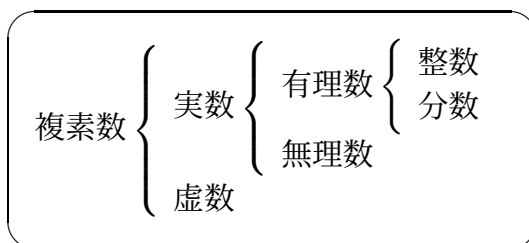
(2) $\sqrt{-4}$

(3) $\sqrt{-8}$

(4) $-\sqrt{-7}$

【答】 (1) $\sqrt{3}i$ (2) $2i$ (3) $2\sqrt{2}i$ (4) $-\sqrt{7}i$

$1+2i$, $4-3i$, $3+\sqrt{5}i$ などのように $a+bi$ の形で表される数を**複素数**という. ただし, a, b は実数, i は虚数単位. $b=0$ のとき, すなわち, $a+0i$ は実数 a を表す. $b \neq 0$ のとき, すなわち, 実数でない複素数を**虚数**という.



複素数の加法・減法・乗法・除法は, $i^2 = -1$ という性質の他は実数と同じ四則演算に従い, 次のように計算される.

例題 12.3 2つの複素数を, $A = 2+3i$, $B = 1-2i$ とするとき, 次の計算をせよ.

(1) $A+B$

(2) $A-B$

(3) $A \times B$

(4) $A \div B$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad A+B &= (2+3i) + (1-2i) \\ &= 2+3i+1-2i = 3+i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad A-B &= (2+3i) - (1-2i) \\ &= 2+3i-1+2i = 1+5i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad A \times B &= (2+3i)(1-2i) \\ &= 2-4i+3i-6i^2 \\ &= 2-i-6 \times (-1) = 8-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad A \div B &= \frac{2+3i}{1-2i} \\
 &= \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\
 &= \frac{2+4i+3i+6i^2}{1-4i^2} \\
 &= \frac{2+7i+6 \times (-1)}{1-4 \times (-1)} = \frac{-4+7i}{5}
 \end{aligned}$$

2つの複素数 $a+bi$ と $a-bi$ を互いに**共役な複素数**という．例えば，複素数 $1+2i$ と $1-2i$ は互いに共役な複素数である．互いに共役な複素数の和と積は，ともに実数である．

問 12.4 次の計算をせよ．

$$(1) (2+3i) + (4-5i)$$

$$(2) (3-2i) - (5-i)$$

【答】 (1) $6-2i$ (2) $-2-i$

負の平方根は， i を用いた形に直してから計算する．

例題 12.5 次の計算をせよ．

$$(1) \sqrt{-3}\sqrt{-2}$$

$$(2) (\sqrt{2} + \sqrt{-1})(1 - \sqrt{-2})$$

$$(3) (2 - \sqrt{-3})^2$$

【解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sqrt{-3}\sqrt{-2} &= \sqrt{3}i\sqrt{2}i = \sqrt{6}i^2 = -\sqrt{6} \\
 \text{注意: } \sqrt{-3}\sqrt{-2} &= \sqrt{(-3) \times (-2)} \text{ は誤り}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &(\sqrt{2} + \sqrt{-1})(1 - \sqrt{-2}) \\
 &= (\sqrt{2} + i)(1 - \sqrt{2}i) \\
 &= \sqrt{2} - 2i + i - \sqrt{2}i^2 \\
 &= \sqrt{2} - i - \sqrt{2} \times (-1) = 2\sqrt{2} - i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & (2 - \sqrt{-3})^2 \\
 & = (2 - \sqrt{3}i)^2 \\
 & = (2)^2 - 2(2)(\sqrt{3}i) + (\sqrt{3}i)^2 \\
 & = 4 - 4\sqrt{3}i + 3i^2 \\
 & = 4 - 4\sqrt{3}i + 3 \times (-1) = 1 - 4\sqrt{3}i
 \end{aligned}$$

12.1 次の計算をせよ.

$$(1) \sqrt{-4} \times \sqrt{-25} \quad (\text{安川電機})$$

$$(2) \sqrt{-2} \times \sqrt{-18} \quad (\text{京王電鉄})$$

$$(3) (1 + \sqrt{-2})(2 - \sqrt{-2}) \quad (\text{NKK})$$

$$(4) (\sqrt{-8} + \sqrt{6})^2 \quad (\text{小田急})$$

例 12.6 $i^7 = (i^2)^3 i = (-1)^3 i = -i$ (豊田工機)

12.2 次の計算をせよ.

$$(1) (4 + 3i)(1 + i) \quad (\text{日本光学})$$

$$(2) (1 - i)(2 + 3i) \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

$$(3) (2 - i)(3 + 2i) \quad (\text{日本ボーリング})$$

$$(4) (2 + 3i)(4 - 2i) \quad (\text{北陸電力})$$

$$(5) (4 - 3i)(3 + 5i) \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

$$(6) (5 - 3i)(4 + i) \quad (\text{東芝})$$

$$(7) (4 - i)(4 + i) \quad (\text{日本ボーリング})$$

$$(8) (3 - 2i)(6 + 4i) \quad (\text{北陸電力})$$

$$(9) (-i)^3 \quad (\text{厚木ナイロン})$$

$$(10) 5i^3 \times 5i^5 \quad (\text{日本ペイント})$$

$$(11) i - i^2 + i^3 - i^4 + i^5 \quad (\text{オリンパス})$$

$$(12) (3 + 5i)^2 \quad (\text{KNサービス})$$

$$(13) (1+i-i^3)^2 \quad (\text{昭和シェル石油})$$

$$(14) (\sqrt{7}-\sqrt{3}i)(\sqrt{7}+\sqrt{3}i) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(15) (2+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{27}i) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(16) \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) \quad (\text{KDD})$$

$$(17) \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 - \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + 1 \quad (\text{JR})$$

$$(18) (1+i)^3 \quad (\text{日立ソフトウェアエンジニアリング})$$

$$(19) (-1+\sqrt{3}i)^3 \quad (\text{東洋高圧})$$

$$(20) \left(\frac{i\sqrt{3}-1}{2}\right)^3 \quad (\text{TOTO})$$

例 12.7 $\frac{4+3i}{3+i}$ を計算せよ. (九州電力)

【解】 分母が $3+i$ なので共役な複素数 $3-i$ を分母と分子に掛ける.

$$\begin{aligned} \frac{4+3i}{3+i} &= \frac{(4+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)} \\ &= \frac{12+5i-3i^2}{9-i^2} \\ &= \frac{12+5i-3 \times (-1)}{9-(-1)} \\ &= \frac{15+5i}{10} = \frac{3+i}{2} \end{aligned}$$

12.3 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{2+3i}{4i} \quad (\text{日産ディーゼル})$$

$$(2) \frac{1+i}{1-i} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(3) \frac{2+i}{1+i} \quad (\text{東芝府中})$$

$$(4) \frac{1-i}{2+i} \quad (\text{日本ペイント})$$

$$(5) \frac{i-1}{2-3i} \quad (\text{安川電機})$$

$$(6) \frac{2-3i}{3+2i} \quad (\text{I H I})$$

$$(7) \frac{1+i}{i-1} \quad (\text{T O T O})$$

$$(8) \frac{(1-i)(1+3i)}{2+i} \quad (\text{日石三菱})$$

$$(9) \frac{(3-i)(4+3i)}{3+i} \quad (\text{キャノン})$$

$$(10) \frac{1}{i} + \frac{i}{1+i} + \frac{1+i}{2+i} \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

$$12.4 \quad \frac{2-i}{4-3i} \text{ を } a+bi \text{ の形で表せ.} \quad (\text{九州電力})$$

(複素数の相等) a, b, c, d を実数とするとき

$a+bi=c+di$ であるのは $a=c, b=d$ のときに限る
 特に $a+bi=0$ であるのは $a=0, b=0$ のときに限る

例題 12.8 次の等式を満たす実数 a, b の値を求めよ. (九州電力)

$$(i-1)a + (i+1)b = 2i - 4$$

【解】 等式の左辺を i について整理すると

$$(-a+b) + (a+b)i = -4 + 2i$$

$-a+b, a+b$ は実数であるから

$$-a+b = -4, \quad a+b = 2$$

これを解いて $a=3, b=-1$

$$12.5 \quad 3x + (2-3i)y = 17-12i \text{ となる実数 } x, y \text{ の値を求めよ.} \quad (\text{日石三菱})$$

12.6 $(x + 5i) + (7 - 2yi) = 5 - i$ となる実数 x, y の値を求めよ. (トヨタ自動車)

12.7 $(1 - i)x + (1 + i)y = -4$ の等式を満足させる実数 x, y の値を求めよ. (トヨタ自動車)

12.8 式 $(3 + 2i)a - (1 - i)b = 1 + 4i$ を満たす実数 a, b の値を求めよ. ただし, i は虚数単位を表す. (東芝)

12.9 $(1 - i)^2 + (1 - i)C + D = 0$ のときの実数 C, D の値を求めよ. (日立製作所)

12.10 等式 $(x - yi)(4 + i) = 17 - 17i$ が成り立つように実数 x, y の値を求めよ. (三井高压化学)

12.11 $\frac{3+i}{1+i} + \frac{2x-i}{1-i}$ が実数のとき, 実数 x の値を求めよ. (九州電力)

例題 12.9 次の問いに答えよ. (マツダ)

(1) $\frac{2}{1+i}$ の分母が実数となるように計算せよ.

(2) $x = \frac{2}{1+i}$ のとき, $2x^3 - 4x^2 + 3x + 1$ の値を求めよ.

【解】

$$(1) \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1-i^2} = \frac{2(1-i)}{1-(-1)} = 1-i$$

(2) $x = 1 - i \cdots \textcircled{1}$ より

$$\begin{array}{rcl} x - 1 & = & -i \\ (x - 1)^2 & = & (-i)^2 \\ x^2 - 2x + 1 & = & -1 \\ x^2 - 2x + 2 & = & 0 \cdots \textcircled{2} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x \\ x^2 - 2x + 2 \overline{) 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1} \\ \underline{2x^3 - 4x^2 + 4x} \\ -x + 1 \end{array}$$

$$\text{よって } 2x^3 - 4x^2 + 3x + 1 = 2x(x^2 - 2x + 2) - x + 1$$

$$\textcircled{2} \text{ より } \qquad \qquad \qquad = -x + 1$$

$$\textcircled{1} \text{ より } \qquad \qquad \qquad = -(1-i) + 1 = i$$

12.12 $x = 3 + 3i$ のとき, $x^3 - 5x^2 + 12x + 20$ の値を求めよ. (東京ガス)

12.13 $x = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $y = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ のとき, 次の式の値を求めよ. (日本光学)

(1) $x + y$

(2) xy

(3) $x^2 + xy + y^2$

整式 $x^4 - 9$ は, まず次のように因数分解される.

$$x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x^2 - 3) \quad (12.3)$$

しかし, 係数に無理数や虚数を用いてもよいことにすると, 上の式は, 更に, 次のように因数分解することができる.

$$x^4 - 9 = (x^2 + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \quad (12.4)$$

$$= (x + \sqrt{3}i)(x - \sqrt{3}i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) \quad (12.5)$$

(12.3) 式は係数が有理数の範囲での因数分解,

(12.4) 式は係数が実数の範囲での因数分解,

(12.5) 式は係数が複素数の範囲での因数分解である.

例 12.10 $x^4 - x^2 - 2$ を有理数, 実数, 複素数の範囲で因数分解すると

有理数の範囲では $(x^2 + 1)(x^2 - 2)$

実数の範囲では $(x^2 + 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

複素数の範囲では $(x + i)(x - i)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

12.14 4次式 $x^4 - 25$ を, 係数の範囲が下の3つの場合について因数分解せよ. (富士通川崎工場)

(1) 有理数の範囲

(2) 実数の範囲

(3) 複素数の範囲

第 13 章 2 次方程式

因数分解を利用して解を求める方法では、次の「等式の性質」を用いる.

(等式の性質)

$$AB = 0 \quad \text{ならば} \quad A = 0 \quad \text{または} \quad B = 0$$

例題 13.1 2 次方程式 $x^2 - 3x - 40 = 0$ の解を求めよ. (いすゞ自動車)

【解】 因数分解して

$$(x + 5)(x - 8) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad x + 5 = 0 \quad \text{または} \quad x - 8 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad x = -5, 8$$

(因数分解の公式)

$$\begin{aligned} x^2 + (a + b)x + ab \\ = (x + a)(x + b) \end{aligned}$$

13.1 次の 2 次方程式を解け.

(1) $x^2 + 4x = 0$ (関西電力)

(2) $x^2 + 3x = 0$ (ブラザー工業)

(3) $x^2 + x - 12 = 0$ (ダイハツ)

(4) $x^2 - x - 12 = 0$ (ダイハツ)

(5) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (京浜急行)

(6) $x^2 + 5x + 6 = 0$ (デンソー)

(7) $x^2 - 5x + 6 = 0$ (日野自動車)

(8) $x^2 - 8x + 15 = 0$ (住友金属鉱業)

(9) $x^2 + 3x - 40 = 0$ (大隅鉄工)

(10) $x^2 - 13x + 36 = 0$ (西日本プラント工業)

(11) $x^2 + 16x + 63 = 0$ (安川電機)

- (12) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (山崎製パン)
- (13) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (ゼネラル)
- (14) $x^2 + 2x - 20 = 4$ (豊田工機)
- (15) $x^2 - 16x = 36$ (ダイハツ)
- (16) $x^2 - 3x + 1 = 5$ (東芝)
- (17) $2x^2 - 10x + 12 = 0$ (ダイハツ)
- (18) $(x + 4)(x + 3) = 6$ (京阪電鉄)
- (19) $28 + (2x + 8)(x - 5) = (3x + 3)(2x + 4)$ (東京急行)
- (20) $2x - \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = 2$ (東邦ガス)

例題 13.2 2次方程式 $45x^2 + 75x - 30 = 0$ を解け. (ダイハツ)

【解】 15で割ると

$$\begin{array}{rcl}
 3x^2 + 5x - 2 & = & 0 \\
 3 & \times & -1 = -1 \\
 1 & \times & 2 = \frac{6}{5} (+ \\
 & & 5 \\
 (3x - 1)(x + 2) & = & 0
 \end{array}$$

ゆえに $3x - 1 = 0$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

または $x + 2 = 0$

$$x = -2$$

よって、解は $x = \frac{1}{3}, -2$

13.2 次の2次方程式を解け.

- (1) $2x^2 + 5x + 2 = 0$ (トヨタ自動車)
- (2) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ (オリエン時計)
- (3) $2x^2 + x - 1 = 0$ (東芝)
- (4) $2x^2 - x - 15 = 0$ (KNサービス)

-
- (5) $2x^2 - 5x - 12 = 0$ (日本水産)
- (6) $2x^2 - 5x - 7 = 0$ (東洋高压)
- (7) $2x^2 - 9x + 4 = 0$ (住友金属鉱業)
- (8) $2x^2 + 11x - 6 = 0$ (東芝機械)
- (9) $2x^2 + 15x + 7 = 0$ (日本毛織)
- (10) $3x^2 + 2x - 5 = 0$ (きんでん)
- (11) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ (熊本共栄工業)
- (12) $5x^2 + 18x - 8 = 0$ (きんでん)
- (13) $5x^2 - 17x - 12 = 0$ (トーエネック)
- (14) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ (きんでん)
- (15) $6x^2 + 5x - 6 = 0$ (日本無線)
- (16) $6x^2 + 19x + 10 = 0$ (愛知機械)
- (17) $6x^2 - 13x + 6 = 0$ (玉野エンジニア)
- (18) $12x^2 + 23x + 10 = 0$ (マリネックス)
- (19) $8x^2 - 3x + 1 = 2x^2 + 4x + 6$ (住友電気工業)
- (20) $x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = 0$ (山下新日本汽船)
- (21) $x^2 - \frac{x}{12} - \frac{1}{2} = 0$ (オーツタイヤ)
- (22) $0.3x^2 - 0.5x - 1.2 = 0$ (コニカ)
- (23) $40x^2 - 61x - 84 = 0$ (東京急行)
- (24) $(x+1)(2x+3) = 4x^2 + 5$ (小田急)
- (25) $(2x-5)^2 = (x-3)^2$ (川崎製鉄)
- (26) $4x^2 - 12x + 9 = 0$ (ブラザー工業)
- (27) $9x^2 + 84x + 196 = 0$ (大同毛織)

2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の左辺が簡単に因数分解できない場合は、次の**2次方程式の解の公式I**を使って解くことができる。

(**2次方程式の解の公式I**) 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

例題 13.3 次の2次方程式を解の公式Iを利用して解け。

(1) $2x^2 - x - 2 = 0$ (日本ボーリング)

(2) $2x^2 - 3x - 5 = 0$ (三菱重工)

(3) $x^2 - x + 1 = 0$ (日立マクセル)

【解】

(1) 解の公式Iに、 $a = 2$, $b = -1$, $c = -2$ を代入して

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-2)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

(2) 解の公式Iに、 $a = 2$, $b = -3$, $c = -5$ を代入して

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} = \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4} = \frac{5}{2}, -1$$

(3) 解の公式Iに、 $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ を代入して

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

補足：(1), (2)を実数解, (3)を虚数解という。

2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ を解の公式Iに代入すると

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(2b') \pm \sqrt{(2b')^2 - 4(a)(c)}}{2(a)} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4b'^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4(b'^2 - ac)}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm \sqrt{4}\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} \\ &= \frac{-2b' \pm 2\sqrt{b'^2 - ac}}{2a} = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \end{aligned}$$

となるので、次の2次方程式の解の公式IIが示された.

(2次方程式の解の公式II) 2次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ の解は

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

例題 13.4 次の2次方程式を解の公式IIを利用して解け.

(1) $3x^2 - 8x - 6 = 0$ (東芝)

(2) $5x^2 + 4x + 17 = 0$ (尼崎製鉄)

【解】

(1) $3x^2 + 2(-4)x - 6 = 0$ なので、解の公式IIに、 $a = 3$, $b' = -4$, $c = -6$ を代入すると

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - (3)(-6)}}{(3)} = \frac{4 \pm \sqrt{34}}{3}$$

(2) $5x^2 + 2(2)x + 17 = 0$ なので、解の公式IIに、 $a = 5$, $b' = 2$, $c = 17$ を代入すると

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - (5)(17)}}{(5)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-81}}{5} = \frac{-2 \pm \sqrt{81}i}{5} = \frac{-2 \pm 9i}{5}$$

すべての2次方程式は、解の公式Iを利用すれば解くことができるが、 x の1次の係数が奇数のときは解の公式Iを、偶数のときは解の公式IIを利用した方が簡単である.

2次方程式を解くには、次の2つの方法がある.

1 因数分解を利用する.

2 解の公式を利用する.

簡単に因数分解ができるのは、解の公式の根号が外せるときである. すなわち、解の公式Iの $b^2 - 4ac$, 解の公式IIの $b'^2 - ac$ の値が $0, 1, 4, 9, \dots$ などの平方数であれば、因数分解をして解を求めることができる.

13.3 解の公式を利用して、次の2次方程式を解け.

(1) $x^2 - 7x + 11 = 0$ (富士重工業)

(2) $2x^2 + 7x - 3 = 0$ (愛知時計電機)

$$(3) \quad 3x^2 - 10x + 5 = 0 \quad (\text{日野自動車})$$

$$(4) \quad 2x^2 - 5x + 1 = 0 \quad (\text{日本タングステン})$$

$$(5) \quad 3x^2 - 8x + 2 = 0 \quad (\text{日本無線})$$

$$(6) \quad 0.5x^2 + 0.25x = 1.25 \quad (\text{住友電気})$$

$$(7) \quad (3x - 1)(x + 3) = 1 \quad (\text{呉造船})$$

$$(8) \quad 3(x^2 + 1) = 11x \quad (\text{凸版印刷})$$

$$(9) \quad 3x^2 - 4x + 4 = 0 \quad (\text{昭南工業})$$

$$(10) \quad y - 3 = \frac{3}{4}y(y + 2) \quad (\text{東洋高圧})$$

例題 13.5 次の2次方程式を解け.

$$(1) \quad (x + 2)^2 = 25 \quad (\text{NET})$$

$$(2) \quad x^2 - 2x - 255 = 0 \quad (\text{電源開発})$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad & (x + 2)^2 = 25 \\ & x + 2 = \pm 5 \\ & x = -2 \pm 5 \\ & x = 3, \quad -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & x^2 - 2x - 255 = 0 \\ & x^2 - 2x = 255 \\ & x^2 - 2x + 1 = 255 + 1 \\ & (x - 1)^2 = 256 \\ & x - 1 = \pm 16 \\ & x = 1 \pm 16 \\ & x = 17, \quad -15 \end{aligned}$$

13.4 次の2次方程式を解け.

$$(1) \quad (x - 2)^2 = 9 \quad (\text{日産自動車})$$

$$(2) \quad (x - 1)^2 = 144 \quad (\text{三菱鉛筆})$$

$$(3) \quad x^2 + 2x - 255 = 0 \quad (\text{電源開発})$$

$$(4) \quad x^2 - x - 3.75 = 0 \quad (\text{日本ビクター})$$

$$(5) \quad (2t - 3)^2 + 9 = 0 \quad (\text{マツダ})$$

13.5 次の2次方程式を解け.

$$(1) \quad (x - 1)^2 - 2(x - 1) - 3 = 0 \quad (\text{日本無線})$$

$$(2) \quad (x + 3)^2 - 13(x + 3) + 36 = 0 \quad (\text{王子製紙})$$

例題 13.6 2次方程式 $(\sqrt{5} + 2)x^2 + x - 2(2\sqrt{5} + 5) = 0$ を解け. (京セラ)

【解】 x^2 の係数を有理化するために両辺に $\sqrt{5} - 2$ を掛けると

$$\begin{array}{rcl} x^2 + (\sqrt{5} - 2)x - 2\sqrt{5} & = & 0 \\ 1 & \times & \sqrt{5} = \sqrt{5} \\ 1 & \times & -2 = -2 \quad (+) \\ & & \sqrt{5} - 2 \\ (x + \sqrt{5})(x - 2) & = & 0 \\ x & = & -\sqrt{5}, 2 \end{array}$$

13.6 次の2次方程式を解け. ☆

$$(1) \quad x^2 - 2\sqrt{13}x - 39 = 0 \quad (\text{電源開発})$$

$$(2) \quad 3x^2 + \sqrt{5}x + 1 = 0 \quad (\text{マツダ})$$

$$(3) \quad (\sqrt{2} + 1)x^2 + (\sqrt{3} + 1)x + \sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) = 0 \quad (\text{安宅産業})$$

13.7 方程式 $x^2 - 3|x| + 2 = 0$ を解け. (デンソー)

例題 13.7 2次方程式 $x^2 + ax + 15 = 0$ が $x = -5$ を解にもつように a の値を決めなさい. また, もう一方の解を求めなさい. (愛知製鋼)

【解】 $x = -5$ は2次方程式 $x^2 + ax + 15 = 0 \cdots \textcircled{1}$ の解なので,

$$\begin{aligned} (-5)^2 + a \times (-5) + 15 &= 0 \\ 25 - 5a + 15 &= 0 \\ -5a &= -40 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

①に $a = 8$ を代入して

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

$$(x + 3)(x + 5) = 0$$

$$x = -3, -5 \quad (\text{答}) a = -8, \text{他の解は } x = -3$$

13.8 2次方程式 $x^2 + 3x - a = 0$ の1つの解が3のとき、もう1つの解を求めよ.
(NKK京浜)

13.9 $x = -1$ が $x^2 + ax + 2 = 0$ の解であるとき、この方程式のもう1つの解を求めなさい.
(新日鉄八幡)

13.10 2次方程式 $2x^2 - ax - 6 = 0$ の1つの解が $-\frac{1}{2}$ であるとき、他の1つの解を求めよ.
(シャープ)

13.11 x に関する2次方程式 $x^2 - mx - 3(m + 5) = 0$ の1つの解が3であるとき、他の1つの解を求めよ.
(日本光学)

13.12 x に関する2次方程式 $(a - 1)x^2 - (a^2 + 1)x + 2(a + 1) = 0$ の1つの解が2であるとき、 a の値と他の解を求めよ.
(日産自動車)

第 14 章 判別式

定数 a, b, c を実数とする. 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は

$$\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{および} \quad \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

である. これらの解が実数であるか, 虚数であるかは, 根号の中の $b^2 - 4ac$ の符号によって判別することができる. すなわち

- I) $b^2 - 4ac > 0$ の場合, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は正の実数である. よって方程式は, **異なる 2 つの実数解**をもつ.
- II) $b^2 - 4ac = 0$ の場合, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は 0 であるから, 上の 2 つの解は一致し, 方程式はただ 1 つの実数の解をもつ. この 1 つの実数解を **重解**または**重複解**という.
- III) $b^2 - 4ac < 0$ の場合, $\sqrt{b^2 - 4ac}$ は虚数である. よって方程式は**異なる 2 つの虚数解**をもつ. この 2 つの虚数の解は, 互いに共役な複素数である.

実数の解を**実数解**, 虚数の解を**虚数解**という.

$b^2 - 4ac$ を 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の**判別式**といい, 普通

$$D = b^2 - 4ac$$

で表す. また, 2 次方程式 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ では, $D = 4(b'^2 - ac)$ であるから, $D' = \frac{D}{4} = b'^2 - ac$ の符号を調べて解を判別することができる.

(解の判別 [1])

- I) 異なる 2 つの実数解をもつ $\iff D > 0$
- II) (実数の) 重解をもつ $\iff D = 0$
- III) 異なる 2 つの虚数解をもつ $\iff D < 0$

例題 14.1 次の 2 次方程式の解を判別せよ.

(1) $2x^2 + x - 5 = 0$

(2) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

(3) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

(4) $7x^2 - 16x + 8 = 0$

【解】

(1) $D = (1)^2 - 4(2)(-5) = 41 > 0$ より, 異なる 2 つの実数解をもつ.

(2) $D = (-3)^2 - 4(2)(4) = -23 < 0$ より, 異なる 2 つの虚数解をもつ.

(3) $9x^2 + 2(3)x + 1 = 0$ なので,
 $D' = (3)^2 - (9)(1) = 0$ より, 重解をもつ.

(4) $7x^2 + 2(-8)x + 8 = 0$ なので,
 $D' = (-8)^2 - (7)(8) = 8 > 0$ より, 異なる 2 つの実数解をもつ.

例題 14.2 次の 2 次方程式の解を判別せよ.

(日石三菱)

(1) $x^2 + (x - 1)^2 = 0$

(2) $x^2 + 3kx + 2k^2 = 0$

【解】

(1) $x^2 + (x - 1)^2 = 0$
 $2x^2 + 2(-1)x + 1 = 0$
 $D' = (-1)^2 - (2)(2) = -1 < 0$ なので
(答) 異なる 2 つの虚数解をもつ.

(2) $D = (3k)^2 - 4(1)(2k^2) = k^2$ より,
 $k \neq 0$ のとき $D > 0$, $k = 0$ のとき $D = 0$ なので
(答) $\begin{cases} k \neq 0 \text{ のとき, 異なる 2 つの実数解をもつ} \\ k = 0 \text{ のとき, 重解をもつ} \end{cases}$

問 14.3 次の 2 次方程式の解を求めよ.

(1) $4x^2 + 3x + 1 = 0$

(2) $16x^2 - 24x + 9 = 0$

【答】 (1) 異なる 2 つの虚数解をもつ (2) 重解をもつ

14.1 次の2次方程式の解を判別せよ.

$$(1) \quad x^2 - 2x + 1 = 0 \quad (\text{東芝})$$

$$(2) \quad x^2 - 4x - 5 = 0 \quad (\text{蘇東興業})$$

$$(3) \quad 4x^2 - 12x + 9 = 0 \quad (\text{日石三菱})$$

$$(4) \quad x^2 + x + 1 = 0 \quad (\text{日石三菱})$$

$$(5) \quad 2x^2 + 4x + 3 = 0 \quad (\text{小松製作所})$$

$$(6) \quad 4x^2 - 12mx + 9m^2 = 0 \quad (m \text{ は実数}) \quad (\text{三井東圧化学})$$

例題 14.4 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ について, 重複解をもつような a の値を求めなさい.
(トヨタ自動車)

【解】 判別式を D とすると, 重複解をもつのは $D = 0$ のときであるから

$$D = (a)^2 - 4(1)(2a - 3) = 0$$

$$a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$(a - 2)(a - 6) = 0$$

$$(\text{答}) \quad a = 2, 6$$

補足: 例題 14.4 の方程式は, a の値により次のようになる.

$$a = 2 \text{ のとき方程式は}$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0$$

$$x = -1 \text{ (重解)}$$

$$a = 6 \text{ のとき方程式は}$$

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 0$$

$$x = -3 \text{ (重解)}$$

また,

$$\text{I) 異なる2つの実数解をもつ} \iff D > 0$$

$$\text{II) (実数の) 重解をもつ} \iff D = 0$$

なので, I), II) をまとめると, 次のことが成り立つ.

(解の判別 [2])

$$\text{IV) 実数解をもつ} \iff D \geq 0$$

14.2 2次方程式 $x^2 + 2kx + 8k + 9 = 0$ が重解をもつように k の値をもとめよ. (日本光学)

14.3 $(m+2)x^2 + (m-3)x + (2m-3) = 0$ が重解をもつように m の値を定めよ.
(神戸製鋼)

14.4 $x^2 - 2(2k-1)x + k^2 - 2k + 2 = 0$ が重複解をもつように, k の値を求めよ.
(川崎重工)

14.5 2次方程式 $x^2 - 2m(x-4) - 15 = 0$ が重複解を持つように m の値を定めよ.
(いすゞ自動車)

第 15 章 解と係数の関係

2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β , 判別式を D とすると

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta &= \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}\end{aligned}$$

よって、次の**解と係数の関係**が成り立つ。

(**解と係数の関係**) 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とすると

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

例題 15.1 次の 2 次方程式の解の和と積を求めよ。

(1) $x^2 - 5x + 6 = 0$

(2) $x^2 + 2\sqrt{3}x + 3 = 0$

(3) $2x^2 + 9 = 0$

【解】

(1) $a = 1, b = -5, c = 6$ なので,
解の和 $\alpha + \beta = -\frac{-5}{1} = 5$, 解の積 $\alpha\beta = \frac{6}{1} = 6$

(2) $a = 1, b = 2\sqrt{3}, c = 3$ なので,
解の和 $\alpha + \beta = -\frac{2\sqrt{3}}{1} = -2\sqrt{3}$, 解の積 $\alpha\beta = \frac{3}{1} = 3$

(3) $a = 2, b = 0, c = 9$ なので,
解の和 $\alpha + \beta = -\frac{0}{2} = 0$, 解の積 $\alpha\beta = \frac{9}{2}$

15.1 2 次方程式 $x^2 - 2x + 3 = 0$ の解を α, β とするとき、次の値を求めよ。 (N T T)

(1) $\alpha + \beta$

(2) $\alpha\beta$

15.2 次の方程式の解の和と積を求めよ.

(小松製作所)

(1) $3x^2 + 2x - 5 = 0$

(2) $\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4} = 0$

例題 15.2 2次方程式 $x^2 + 4x + 2 = 0$ の解を α, β とするとき, 次の式の値を求めよ. (NEC)

(1) $\alpha^2 + \beta^2$

(2) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

【解】 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -\frac{4}{1} = -4, \alpha\beta = \frac{2}{1} = 2$

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-4)^2 - 2(2) = 12$

(2) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{12}{2} = 6$

15.3 2次方程式 $x^2 + 4x + 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき, 次の値を求めよ. (NTT)

(1) $\alpha + \beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

15.4 2次方程式 $3x^2 + 5x + 1 = 0$ の2つの解を α, β とするとき, 次の値を求めよ. (平田機工)

(1) $\alpha + \beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

15.5 2次方程式 $x^2 - 2x + 2 = 0$ の2つの解を α, β とするとき, 次の式の値を求めよ. (トヨタ自動車)

(1) $\alpha + \beta$

(2) $\alpha\beta$

(3) $\alpha^2 + \beta^2$

(4) $(\alpha - \beta)^2$

15.6 2次方程式 $x^2 - x + 1 = 0$ の2解を α, β とするとき, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ の値を求めよ.
(三井造船)

15.7 2次方程式 $2x^2 - 3x + 4 = 0$ の解を α, β とするとき, 次の式の値を求めよ.
(日本特殊機器)

(1) $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2$

(2) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

15.8 2次方程式 $4x^2 + 12x + 5 = 0$ の解を α, β とするとき, 次の式の値を求めよ.
(新日鉄八幡)

(1) $(\alpha + \beta)^4$

(2) $(\alpha - \beta)^4$

15.9 2次方程式 $2x^2 + 6x - 1 = 0$ の解を α, β とするとき, $\frac{\beta^2}{\alpha} + \frac{\alpha^2}{\beta}$ の値を求めよ.
(NTT)

15.10 2次方程式 $2x^2 - 3x + 5 = 0$ の解を α, β としたとき, $\left(\frac{1}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\right)$ の値を求めよ.
(電源開発)

例題 15.3 $2x^2 + ax - b = 0$ の2つの解が $-3 + \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}$ であるとき, a, b の値を求めよ.
(横河電機)

【解】 解と係数の関係より

$$\begin{aligned} (-3 + \sqrt{5}) + (-3 - \sqrt{5}) &= -\frac{a}{2} \\ -6 &= -\frac{a}{2} \\ a &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-3 + \sqrt{5})(-3 - \sqrt{5}) &= \frac{-b}{2} \\ 9 - 5 &= -\frac{b}{2} \\ b &= -8 \end{aligned}$$

15.11 2次方程式 $x^2 + px + q = 0$ が2と5を解にもつとき、 p, q の値をいえ. (シチズン)

例題 15.4 2次方程式 $x^2 - mx + m + 2 = 0$ の1つの解が他の解の2倍であるとき、 m の値を求めよ. (川崎製鉄)

【解】 2つの解を $\alpha, 2\alpha$ とおくと、解との係数の関係より

$$\alpha + 2\alpha = -\frac{-m}{1}$$

$$3\alpha = m \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha \cdot 2\alpha = \frac{m+2}{1}$$

$$2\alpha^2 = m+2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$2\alpha^2 = 3\alpha + 2$$

$$2\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0$$

$$(2\alpha + 1)(\alpha - 2) = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, 2$$

①より $\alpha = -\frac{1}{2}$ のとき $m = -\frac{3}{2}$, $\alpha = 2$ のとき $m = 6$. (答) $m = -\frac{3}{2}, 6$

上の例題のような問題では、解のおき方が問題を解く鍵になる.

1 解の差が d のとき $\alpha, \alpha + d$

2 一方の解が他の解の m 倍のとき $\alpha, m\alpha$

3 解の比が $p : q$ のとき pk, qk

15.12 2次方程式 $x^2 + 3x + k = 0$ において、2つの解の差が2であるとき、 k の値を求めよ. (武田薬品工業)

15.13 2次方程式 $x^2 + ax + 14 - a = 0$ の解の比が2:3であるとき、 a の値および解を求めよ. (帝人)

一般に、2つの数 α, β を解とする2次方程式の1つは

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0 \quad \text{すなわち} \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

で与えられる. よって、次のことが成り立つ.

(2数を解とする方程式) 2つの数 α, β を解とする2次方程式は

I) $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

II) $m = \alpha + \beta, n = \alpha\beta$ とすると $x^2 - mx + n = 0$

例題 15.5 次の2数を解とする2次方程式で、係数が整数であるものを作れ.

$$(1) -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$$

$$(2) \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

【解】

$$(1) m = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}, \quad n = -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \text{ より}$$

$$x^2 - \left(\frac{1}{6}\right)x + \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$6x^2 - x - 2 = 0$$

$$(2) m = \frac{1+\sqrt{2}}{2} + \frac{1-\sqrt{2}}{2} = 1, \quad n = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times \frac{1-\sqrt{2}}{2} = \frac{1-2}{4} = -\frac{1}{4} \text{ より}$$

$$x^2 - (1)x + \left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$4x^2 - 4x - 1 = 0$$

15.14 2と-3を解とする2次方程式を作れ. (武田薬品工業)

例題 15.6 2次方程式 $x^2 + 2x + 3 = 0$ の解を α, β とするとき, α^2, β^2 を解とする2次方程式を作れ. (シチズン)

【解】 解と係数の関係から $\alpha + \beta = -2, \alpha\beta = 3$.

$$m = \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (-2)^2 - 2(3) = -2$$

$$n = \alpha^2 \cdot \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = (3)^2 = 9$$

よって, 求める2次方程式は

$$x^2 - (-2)x + 9 = 0$$

$$x^2 + 2x + 9 = 0$$

15.15 $5x^2 - 2x - 4 = 0$ の2つの解を α, β とするとき, $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$ を2解とする2次方程式を求めよ. (萬有製薬)

15.16 2次方程式 $x^2 - 7x + 5 = 0$ の2つの解を α, β とするとき, 次の2数を解とする2次方程式を作れ. (三菱重工)

(1) $2\alpha, 2\beta$

(2) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

15.17 $3x^2 - 4x + 5 = 0$ の2解を α, β とするとき, $\alpha^2 + \beta, \alpha + \beta^2$ を2解とする2次方程式を作れ. (積水化学)

15.18 2次方程式 $2x^2 + x - 1 = 0$ の2解を α, β とするとき, 次の式の値を求めよ. また, (1), (2) を解とする2次方程式を作れ. (マツダ)

(1) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

(2) $\alpha^3 + \beta^3$

(3) (1), (2) を解とする2次方程式

第 16 章 連立方程式

連立 2 元 1 次方程式は，未知数の一方を消去することにより，未知数が 1 つの方程式を導いて解くことができる．

例題 16.1 次の連立方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} x + y = 8 \\ x - 2y = -1 \end{cases} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(2) \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases} \quad (\text{関配})$$

$$(3) \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 12 \end{cases} \quad (\text{きんでん})$$

【解】

$$(1) \begin{array}{ll} x + y = 8 \cdots \textcircled{1}, & x - 2y = -1 \cdots \textcircled{2} \text{とおく} \\ \begin{array}{r} x + y = 8 \cdots \textcircled{1} \\ -) x - 2y = -1 \cdots \textcircled{2} \\ \hline 3y = 9 \\ y = 3 \end{array} & \begin{array}{l} y = 3 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入} \\ x + 3 = 8 \\ x = 5 \end{array} \end{array}$$

(答) $x = 5, y = 3$

$$(2) \begin{array}{ll} 3x + 2y = 13 \cdots \textcircled{1}, & 5x - 3y = 9 \cdots \textcircled{2} \text{とおく} \\ \begin{array}{r} 9x + 6y = 39 \cdots \textcircled{1} \times 3 \\ +) 10x - 6y = 18 \cdots \textcircled{2} \times 2 \\ \hline 19x = 57 \\ x = 3 \end{array} & \begin{array}{l} x = 3 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入} \\ 3 \times 3 + 2y = 13 \\ 2y = 4 \\ y = 2 \end{array} \end{array}$$

(答) $x = 3, y = 2$

$$(3) \begin{array}{ll} \text{第 1 式に 10 を掛けて} & 2x - 5y = 40 \cdots \textcircled{1} \\ \text{第 2 式に 6 を掛けて} & 2x - 3y = 72 \cdots \textcircled{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 2x - 5y = 40 & \cdots & \textcircled{1} \\
 -) 2x - 3y = 72 & \cdots & \textcircled{2} \\
 \hline
 -2y = -32 & & \\
 y = 16 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 y = 16 \text{ を } \textcircled{1} \text{ に代入} \\
 2x - 5 \times 16 = 40 \\
 2x = 120 \\
 x = 60
 \end{array}$$

(答) $x = 60, y = 16$

16.1 次の連立方程式を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y = 3 - x \end{cases} \quad (\text{大阪住友セメント})$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 7 \end{cases} \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(3) \begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad (\text{日産車体})$$

$$(4) \begin{cases} x + y = 8 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad (\text{中国土木})$$

$$(5) \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 6x - 3y = 3 \end{cases} \quad (\text{T C M東洋運搬機})$$

$$(6) \begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ x + 3y = 9 \end{cases} \quad (\text{住友金属鉱業})$$

$$(7) \begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + y = 8 \end{cases} \quad (\text{オーツタイヤ})$$

$$(8) \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 6x + 3y = 27 \end{cases} \quad (\text{メイテック})$$

$$(9) \begin{cases} x + y = 3 \\ 5x + 2y = 0 \end{cases} \quad (\text{トヨタ車体})$$

$$(10) \begin{cases} 2x + y = 20 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(11) \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 19 \end{cases} \quad (\text{愛知機械})$$

$$(12) \begin{cases} 3x - 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad (\text{東海電気})$$

$$(13) \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 6y = 14 \end{cases} \quad (\text{ダイキン工業})$$

$$(14) \begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad (\text{住友精密工業})$$

$$(15) \begin{cases} 3x + y = 8 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \quad (\text{NKK})$$

$$(16) \begin{cases} 3x + 2y = 9 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases} \quad (\text{いすゞ自動車})$$

$$(17) \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \quad (\text{富士重工業})$$

$$(18) \begin{cases} 4x + 3y = 0 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \quad (\text{日本建工})$$

$$(19) \begin{cases} 8x - 3y = -9 \\ 2x - 5y = 19 \end{cases} \quad (\text{日本建工})$$

$$(20) \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 10 \end{cases} \quad (\text{電源開発})$$

$$(21) \begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 7x - 6y = -4 \end{cases} \quad (\text{愛知電機})$$

$$(22) \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x - 5y = -3 \end{cases} \quad (\text{日立電子エンジニアリング})$$

$$(23) \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -2x + 3y = 9 \end{cases} \quad (\text{小松製作所})$$

$$(24) \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 5y = 1 \end{cases} \quad (\text{日本精工})$$

$$(25) \begin{cases} 3x - 4y = 3 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases} \quad (\text{きんでん})$$

$$(26) \begin{cases} 3x + 4y - 14 = 0 \\ 2x + 5y = 0 \end{cases} \quad (\text{呉造船})$$

$$(27) \begin{cases} 2x + y = 10 \\ 5 + 4x = 2y + 9 \end{cases} \quad (\text{住友金属鉱業})$$

$$(28) \begin{cases} 2x + 3y = 1.5 \\ 8x - 9y = -15 \end{cases} \quad (\text{東洋電装})$$

$$(29) \begin{cases} 4x + 5y = 56 \\ 0.2x - y = -2.2 \end{cases} \quad (\text{日本建工})$$

$$(30) \begin{cases} 2x + \frac{1}{3}y = 5 \\ \frac{1}{2}x + y = 4 \end{cases} \quad (\text{コニカ})$$

$$(31) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = -1 \\ 2x + 5y = -23 \end{cases} \quad (\text{日本建工})$$

$$(32) \begin{cases} \frac{x+y}{3} - x = -4 \\ 5x - 6y = 37 \end{cases} \quad (\text{日本建工})$$

例題 16.2 次の連立方程式を解け.

(NECシステム建設)

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{15}{x} + \frac{6}{y} = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

【解】 $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$ とおくと

$$\begin{cases} 5a + 3b = 2 & \cdots \textcircled{1} \\ 15a + 6b = 2\frac{1}{2} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より } a = -\frac{3}{10}, b = \frac{7}{6}$$

$$\text{ゆえに } \frac{1}{x} = -\frac{3}{10}, \frac{1}{y} = \frac{7}{6}$$

辺々逆数をとると

$$(\text{答}) x = -\frac{10}{3}, y = \frac{6}{7}$$

16.2 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 15 \end{cases} \quad (\text{早川電気})$$

$$(2) \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = 3 \\ \frac{15}{x} + \frac{3}{y} = 4 \end{cases} \quad (\text{間組})$$

$$(3) \begin{cases} \frac{2}{x-5} + \frac{1}{y+6} = \frac{3}{4} \\ \frac{3}{x-5} + \frac{2}{y+6} = 1 \end{cases} \quad (\text{九電工})$$

3元1次方程式を解くには、まず未知数の1つを消去して、他の2つの未知数の連立方程式を導き、それを解くことを考えればよい.

例題 16.3 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + 2y + 4z = 13 \\ x + 3y + 9z = 24 \end{cases} \quad (\text{シチズン})$$

$$(2) \begin{cases} x + 2y - z = 5 \\ 2x - y + z = 6 \\ x + 3y + 2z = 13 \end{cases} \quad (\text{大福機工})$$

【解】

$$(1) \quad x + y + z = 6 \cdots \textcircled{1}, \quad x + 2y + 4z = 13 \cdots \textcircled{2}, \quad x + 3y + 9z = 24 \cdots \textcircled{3} \text{とおく}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 2y + 4z = 13 & \cdots \textcircled{2} & x + 3y + 9z = 24 \cdots \textcircled{3} \\ -) x + y + z = 6 & \cdots \textcircled{1} & -) x + 2y + 4z = 13 \cdots \textcircled{2} \\ \hline y + 3z = 7 & \cdots \textcircled{4} & y + 5z = 11 \cdots \textcircled{5} \end{array}$$

④, ⑤を解くと $y = 1, z = 2$. これらを ①に代入して $x = 3$.

$$(\text{答}) x = 3, y = 1, z = 2$$

(2) $x + 2y - z = 5 \cdots \textcircled{1}$, $2x - y + z = 6 \cdots \textcircled{2}$, $x + 3y + 2z = 13 \cdots \textcircled{3}$ とおく

$$\begin{array}{rcl} x + 2y - z = 5 & \cdots \textcircled{1} & 4x - 2y + 2z = 12 \cdots \textcircled{2} \times 2 \\ +) 2x - y + z = 6 & \cdots \textcircled{2} & -) x + 3y + 2z = 13 \cdots \textcircled{3} \\ \hline 3x + y = 11 & \cdots \textcircled{4} & 3x - 5y = -1 \cdots \textcircled{5} \end{array}$$

④, ⑤を解くと $x = 3, y = 2$. これらを ②に代入して $z = 2$. ← ①, ③でも可
(答) $x = 3, y = 2, z = 2$

補足：3つの未知数があるので，1つを消去する際，最も消去しやすいものを判断して計算するとよい．

16.3 次の連立方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} a - b - c = 2 \\ a + b + c = -4 \\ a - b + c = -8 \end{cases} \quad (\text{きんでん})$$

$$(2) \begin{cases} x + y + z = 10 \\ x - y = 3 \\ y = z - 1 \end{cases} \quad (\text{日産自動車})$$

$$(3) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - 4 = 3 \end{cases} \quad (\text{三菱電機})$$

$$(4) \begin{cases} z + 2x = 10 \\ y + 2z = 16 \\ x + 2y = 10 \end{cases} \quad (\text{大末建設})$$

$$(5) \begin{cases} 3x + 3y = 9 \\ 2x + 3z = 11 \\ 3y + 2z = 12 \end{cases} \quad (\text{凸版印刷})$$

$$(6) \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y + z = 7 \\ x + 3y - 2z = 1 \end{cases} \quad (\text{名鉄自動車整備})$$

$$(7) \begin{cases} x + y + z = 11 \\ 2x + 3y + z = 18 \\ x + 2y + z = 14 \end{cases} \quad (\text{高砂空調サービス})$$

$$(8) \begin{cases} 3x + y + z = -5 \\ 4x + 3y - z = -2 \\ 5x + 4y + z = 6 \end{cases} \quad (\text{三菱自動車})$$

$$(9) \begin{cases} x + 2y + 4z = 15 \\ x + y + z = 9 \\ x + 3y + 9z = 23 \end{cases} \quad (\text{九州電力})$$

$$(10) \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 3x + 5y + 2z = 3 \\ 2x + 6y + 4z = 2 \end{cases} \quad (\text{アドバンスディスプレイ})$$

$$(11) \begin{cases} 6x + 2y - 3z = 10 \\ 2x + 7y + 2z = 28 \\ 8x - 4y - z = 12 \end{cases} \quad (\text{ヤマハ})$$

$$(12) \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases} \quad (\text{JR})$$

$$(13) \begin{cases} x + y + z = -8 \\ 3x = 2y + z \\ x - 2y + 3z = 2 \end{cases} \quad (\text{デンソー})$$

$$(14) \begin{cases} 2x + 3y + 6z = 48 \\ 9x + 6y + z = 56 \\ 5x + 4y + 3z = 46 \end{cases} \quad (\text{近畿コンクリート})$$

$$(15) \begin{cases} x - 2y + 3z = 18 \\ 3x + y - 2z = 6 \\ 2x - 3y + z = 12 \end{cases} \quad (\text{日本ボーリング})$$

$$(16) \begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ 2x + y - z = 7 \\ x + 2y - 3z = 4 \end{cases} \quad (\text{日産自動車})$$

$$(17) \begin{cases} x + y + z = 30 \\ \frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{2} \end{cases} \quad (\text{NEC})$$

$$(18) \frac{4x + 3y}{4} = \frac{3y + 2z}{3} = \frac{x + 2z}{2} = 5 \quad (\text{味の素})$$

$$(19) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 30 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 40 \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 50 \end{cases} \quad (\text{リコー厚木事業所})$$

$$(20) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 11 \\ \frac{1}{y} + \frac{2}{z} = 6 \\ \frac{3}{z} + \frac{1}{x} = 12 \end{cases} \quad (\text{日立造船})$$

$$(21) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 9 \\ \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{2}{z} = 28 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = 19 \end{cases} \quad (\text{前田建設工業})$$

$$(22) \begin{cases} \frac{6}{x+y} - \frac{1}{y+z} = 1 \\ \frac{\frac{4}{y+z} + \frac{2}{z+x}}{4} = 2 \\ \frac{\frac{4}{z+x} + \frac{3}{x+y}}{3} = -3 \end{cases} \quad (\text{明電舎})$$

式の対称性に注目する解法もある.

例題 16.4 次の連立方程式を解け. (日立建設機械)

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ y + z = 7 \\ z + x = 6 \end{cases}$$

【解】 $x + y = 5 \cdots \textcircled{1}$, $y + z = 7 \cdots \textcircled{2}$, $z + x = 6 \cdots \textcircled{3}$ とおく.

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ の辺々を加えて

$$2x + 2y + 2z = 18$$

$$x + y + z = 9 \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{4}$ より

$$(x + y) + z = 9$$

$$5 + z = 9$$

$$z = 4$$

$z = 4$ を $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ に代入して

$$y = 3, x = 2$$

(答) $x = 2, y = 3, z = 4$

16.4 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = 5 \\ z + x = 3 \end{cases} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 7 \\ y + z = 12 \\ z + x = 13 \end{cases} \quad (\text{戸田建設})$$

$$(3) \begin{cases} x + y = 9 \\ 2y + 2z = 14 \\ 3x + 3z = 24 \end{cases} \quad (\text{東芝})$$

$$(4) \begin{cases} a + b + c = 13 \\ b + c + d = 10 \\ c + d + a = 7 \\ d + a + b = 15 \end{cases} \quad (\text{九州電力})$$

$$(5) \begin{cases} x + y + z = 11 \\ y + z + u = 17 \\ z + u + x = 15 \\ u + x + y = 14 \end{cases} \quad (\text{日本硝子})$$

例題 16.5 次の連立方程式を解け. (NET)

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 5x^2 + 3xy + y^2 = 5 \end{cases}$$

【解】 第1式から $y = 1 - 2x \cdots \textcircled{1}$

これを第2式に代入すると

$$5x^2 + 3x(1 - 2x) + (1 - 2x)^2 = 5$$

$$3x^2 - x - 4 = 0$$

$$(x + 1)(3x - 4) = 0$$

$$x = -1, \frac{4}{3}$$

①から $x = -1$ のとき $y = 3$, $x = \frac{4}{3}$ のとき $y = -\frac{5}{3}$

$$\text{したがって} \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}, \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

16.5 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 + x - 3 \end{cases} \quad (\text{ムトウ})$$

$$(2) \begin{cases} y = 2x - 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (\text{京成電鉄})$$

$$(3) \begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 6 \end{cases} \quad (\text{昭和シェル石油})$$

$$(4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad (\text{大阪変圧器})$$

$$(5) \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 20 \end{cases} \quad (\text{富士通})$$

$$(6) \begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 - 2xy + y = 2 \end{cases} \quad (\text{デンソー})$$

$$(7) \begin{cases} y - 2x = 1 \\ y^2 + y - 11x = 8 \end{cases} \quad (\text{ヤマハ})$$

$$(8) \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases} \quad (\text{きんでん})$$

$$(9) \begin{cases} 3x^2 - 21x - y^2 + 31 = 0 \\ 2x + y = 5 \end{cases} \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

$$(10) \begin{cases} 3x = 4y \\ x^2 - y^2 = xy - 20 \end{cases} \quad (\text{日本光学})$$

$$(11) \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \quad (\text{きんでん})$$

$$(12) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 2x^2 - 3xy + y^2 - 2x = 4 \end{cases} \quad (\text{KDD})$$

$$(13) \begin{cases} x = y^2 \\ y = |x - 2| \end{cases} \quad (\text{ダイハツ})$$

2つの数 x, y を解とする2次方程式は

$$m = x + y, n = xy \quad \text{とすると} \quad t^2 - mt + n = 0$$

である.

和が m , 積が n である2数を求めるにはこの2次方程式を解けばよい.

例題 16.6 連立方程式 $\begin{cases} x + y = -11 \\ xy = 28 \end{cases}$ を解け. (日産車体)

【解】 x, y は t に関する2次方程式 $t^2 - (-11)t + 28 = 0$ の解であるから

$$t^2 + 11t + 28 = 0$$

$$(t + 4)(t + 7) = 0$$

$$t = -4, -7$$

$$\text{したがって, } \begin{cases} x = -4 \\ y = -7 \end{cases}, \begin{cases} x = -7 \\ y = -4 \end{cases}$$

例題 16.7 連立方程式 $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ について, 次の問いに答えよ. (NECエンジニアリング: 改)

(1) $x + y = m, xy = n$ とするとき, m, n の値を求めよ.

(2) (1) の m, n から2次方程式 $t^2 - mt + n = 0$ を解いて x, y の値を求めよ.

【解】

$$(1) m = x + y = 7$$

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \text{ に第1式と第2式を代入して}$$

$$25 = 7^2 - 2n$$

$$2n = 24$$

$$n = 12$$

(2) x, y を解とする2次方程式は $t^2 - 7t + 12 = 0$ なので

$$(t - 3)(t - 4) = 0$$

$$t = 3, 4$$

$$\text{したがって, } \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}, \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$$

補足： x, y について対称な連立方程式であるときの解法. また, 解も対称な組合せになる.

16.6 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 80 \\ x + y = 12 \end{cases} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(2) \begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \quad (\text{九州電力})$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ x + y = 6 \end{cases} \quad (\text{ダイエー})$$

$$(4) \begin{cases} x + y = 5 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases} \quad (\text{川崎製鉄})$$

$$(5) \begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 98 \end{cases} \quad (\text{新菱重機})$$

例題 16.8 $\begin{cases} xy + (x + y) = 5 \\ 2xy - (x + y) = 1 \end{cases}$ を解きなさい. (トヨタ自動車)

【解】 $m = x + y, n = xy$ とおく.

連立方程式 $\begin{cases} n + m = 5 \\ 2n - m = 1 \end{cases}$ を解いて, $m = 3, n = 2$

x, y は $t^2 - 3t + 2 = 0$ の解であるから

$$(t - 1)(t - 2) = 0$$

$$t = 1, 2$$

したがって, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

16.7 連立方程式 $\begin{cases} 2(x + y) + 3xy = -4 \\ 3(x + y) - 2xy = 7 \end{cases}$ を解け. (九州電力)

例題 16.9 連立方程式 $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 0 \end{cases}$ を解け. (世紀東急工業)

【解】 第2式を因数分解すると $(x - y)(2x + y) = 0$ となり, これに第1式を代入して

$$3(2x + y) = 0$$

$$2x + y = 0$$

よって, $\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ を解いて, (答) $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$

16.8 次の連立方程式を解け.

(1) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - y^2 = 8 \end{cases}$ (菱和調温工業)

(2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ (日産車体)

例題 16.10 連立方程式 $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ 2x^2 - xy + y^2 - 28x + 24 = 0 \end{cases}$ を解け. (ブラザー)

【解】 第1式を因数分解して, $(x + y)(3x - y) = 0$

$$x + y = 0 \quad \text{または} \quad 3x - y = 0$$

$$y = -x \quad \quad \quad y = 3x$$

i) $y = -x \cdots \textcircled{1}$ のとき, 第2式に代入して

$$2x^2 - x(-x) + (-x)^2 - 28x + 24 = 0$$

$$4x^2 - 28x + 24 = 0$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x - 1)(x - 6) = 0$$

$$x = 1, 6$$

①から $x = 1$ のとき $y = -1$, $x = 6$ のとき $y = -6$

ii) $y = 3x \cdots \textcircled{2}$ のとき, 第2式に代入して

$$2x^2 - x(3x) + (3x)^2 - 28x + 24 = 0$$

$$8x^2 - 28x + 24 = 0$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x - 2)(2x - 3) = 0$$

$$x = 2, \frac{3}{2}$$

②から $x = 2$ のとき $y = 6$, $x = \frac{3}{2}$ のとき $y = \frac{9}{2}$

$$\text{したがって, } \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}, \begin{cases} x=6 \\ y=-6 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=6 \end{cases}, \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{9}{2} \end{cases}$$

16.9 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 5x - 2y + 8 = 0 \\ x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{いすゞ自動車})$$

$$(2) \begin{cases} 2x^2 + 5xy - 3y^2 = 0 \\ x^2 + 2y = 5 \end{cases} \quad (\text{東邦レーヨン})$$

$$(3) \begin{cases} x^2 - 2xy + y^2 = 4 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad (\text{東洋高圧})$$

例題 16.11 連立方程式 $\begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 44 \\ 2x^2 - xy + y^2 = 16 \end{cases}$ を解け. (川崎航空)

【解】 第2式 $\times 11$ - 第1式 $\times 4$ から(定数項を消去する)

$$\begin{array}{r} 22x^2 - 11xy + 11y^2 = 176 \\ -) 4x^2 + 4xy + 8y^2 = 176 \\ \hline 18x^2 - 15xy + 3y^2 = 0 \\ 6x^2 - 5xy + y^2 = 0 \\ (2x - y)(3x - y) = 0 \end{array}$$

上式より $2x - y = 0$ ($y = 2x$) または $3x - y = 0$ ($y = 3x$) なので

i) $y = 2x$ のとき, これをを原方程式に代入して

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \quad (x, y) = (\pm 2, \pm 4) \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

ii) $y = 3x$ のとき, これをを原方程式に代入して

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 \\ x &= \pm\sqrt{2} \quad (x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm 3\sqrt{2}) \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

$$\text{したがって, } \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = \pm 4 \end{cases}, \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ y = \pm 3\sqrt{2} \end{cases} \quad (\text{複号同順})$$

16.10 次の連立方程式を求めよ.

$$(1) \begin{cases} x^2 + xy = 1 \\ xy + y^2 = 3 \end{cases} \quad (\text{ローレルバンクマシン})$$

$$(2) \begin{cases} 9x^2 + 5xy - 2y^2 = 10 \\ 4x^2 + 4xy - 2y^2 = 5 \end{cases} \quad (\text{伊藤忠自動車})$$

実践問題6

きんでん

1 次の式を因数分解しなさい.

(1) $6x^2 + 7x + 2$

(2) $x^4 - 5x^2 + 4$

(3) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

2 次の不等式を解きなさい.

(1) $x^2 + 5x - 6 > 0$

(2) $x(x - 2) \leq 0$

(3) $x^2 - 3x + 1 \leq 0$

3 方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2つの解が1と α , 方程式 $x^2 + bx + a = 0$ の2つの解が -3 と β であるとき, 定数 a, b の値を求めよ. また, α, β の値を求めよ.

【答】

1 (1) $(2x+1)(3x+2)$ (2) $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ (3) $(x+1)(x+2)(x+3)$

2 (1) $x < -6, 1 < x$ (2) $0 \leq x \leq 2$ (3) $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

3 $a = -3, b = 2, \alpha = 2, \beta = 1$

JR九州

次の問いに答えなさい.

(1) $2x^2 - x - 15$ を因数分解しなさい.

(2)
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 3x + y + 2z = 6 \end{cases}$$
 の連立方程式を解きなさい.

(3) $f(x) = x^2 - 2x + 2$ の範囲 $(0 \leq x \leq 3)$ での最大値と最小値を求めなさい.

【答】

(1) $(x-3)(2x+5)$ (2) $x = 1, y = -1, z = 2$ (3) $x = 3$ のとき最大値5, $x = 1$ のとき最小値1

第 17 章 分数方程式

(分数方程式の解き方)

- 1) 両辺の分母の最小公倍数を掛ける.
- 2) その整方程式を解く.
- 3) 解の吟味. 2) の解のうち, 原方程式の分母を 0 にしないものだけをとる.

例題 17.1 分数方程式 $\frac{x^2 - 3x}{x^2 - 1} + \frac{1}{x - 1} + 4 = 0$ を解け. (大阪ガス)

【解】 分母の最小公倍数 $x^2 - 1$ を両辺に掛けると

$$\begin{aligned}(x^2 - 3x) + (x + 1) + 4(x^2 - 1) &= 0 \\ 5x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ (x - 1)(5x + 3) &= 0 \\ x &= 1, -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

ここで, $x = 1$ は原方程式の分母を 0 にするので不適.

$$(\text{答}) x = -\frac{3}{5}$$

17.1 次の分数方程式を解け.

$$(1) \frac{x - 2}{x + 3} = -1 \quad (\text{N T T})$$

$$(2) \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{x - 3} = 0 \quad (\text{豊田工機})$$

$$(3) \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{2x - 3} = 0 \quad (\text{京王電鉄})$$

$$(4) \frac{2x - 1}{x + 2} = \frac{2x + 1}{x} \quad (\text{日本飛行機})$$

$$(5) \frac{x - 2}{x + 6} = \frac{2x - 7}{x + 9} \quad (\text{日石三菱})$$

$$(6) \frac{10}{x+2} - \frac{11}{x+3} = \frac{3}{4} \quad (\text{松田組})$$

$$(7) \frac{x-1}{x+1} + \frac{x+3}{x-2} = 2 \quad (\text{安川電機})$$

$$(8) \frac{1}{x-1} = \frac{2x}{x^2-1} + 3 \quad (\text{積水化学工業})$$

$$(9) \frac{x}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} \quad (\text{日本毛織})$$

$$(10) \frac{x}{x+2} + \frac{7}{x-2} = \frac{20}{x^2-4} \quad (\text{マツダ})$$

$$(11) \frac{x-5}{x^2-1} + 3 = \frac{2}{1-x} \quad (\text{西日本鉄道})$$

$$(12) \frac{3(x-1)}{x+1} - \frac{2(x+1)}{x-1} = 5 \quad (\text{シチズン})$$

$$(13) \frac{x-3}{x^2-3x+2} = \frac{x+1}{x-1} + 1 \quad (\text{国精工業})$$

$$(14) \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \quad (\text{武田薬品工業})$$

$$(15) x + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{x+1} + \frac{5x-4}{x^2-1} \quad (\text{ブラザー工業})$$

$$(16) \frac{3x}{x-3} - \frac{16}{x^2-9} = \frac{x}{x+3} + \frac{2x}{9-x^2} \quad (\text{松田組})$$

第 18 章 無理方程式

(無理方程式の解き方)

- 1) 適当に移項し，両辺を平方 (2 乗) して，整方程式を導く.
- 2) その整方程式を解く.
- 3) 解の吟味. 2) の解で，原方程式を満たすものをとる.

例題 18.1 無理方程式 $\sqrt{x+5}+1=x$ を解け.

(NTT)

【解】 移項すると $\sqrt{x+5}=x-1$

両辺を平方し，移項すると

$$\begin{aligned}x+5 &= x^2 - 2x + 1 \\-x^2 + 3x + 4 &= 0 \\x^2 - 3x - 4 &= 0 \\(x+1)(x-4) &= 0 \\x &= -1, 4\end{aligned}$$

ここで $x = -1$ を原方程式に代入すると，左辺 $\neq$ 右辺となり不適.

$x = 4$ を原方程式に代入すると，左辺 = 右辺.

(答) $x = 4$

18.1 次の無理方程式を解け.

- (1) $\sqrt{x-1}=5$ (トヨタ車体)
- (2) $1+\sqrt{x+1}=5$ (長谷川製作所)
- (3) $\sqrt{x}=x-6$ (平田機工)
- (4) $x-3=\sqrt{x-3}$ (富士重工業)
- (5) $\sqrt{x+1}=x-1$ (NTT)

$$(6) \sqrt{x+3} = x-3 \quad (\text{ローレルバンクマシン})$$

$$(7) \sqrt{x-1} = 3-x \quad (\text{デンソー})$$

$$(8) \sqrt{5x+10} = 8-x \quad (\text{きんでん})$$

$$(9) \sqrt{x^2-x+4} = 2x \quad (\text{オリンパス})$$

$$(10) x - \sqrt{x+6} = 0 \quad (\text{凸版印刷})$$

$$(11) x - \sqrt{x+3} = 9 \quad (\text{ワシノ機械})$$

$$(12) x + \sqrt{x+1} = 5 \quad (\text{川崎製鉄})$$

$$(13) x + \sqrt{x+3} = 3 \quad (\text{富士通})$$

$$(14) \sqrt{25-x^2} - x = 1 \quad (\text{神戸製鋼})$$

$$(15) \sqrt{25-x^2} + x - 1 = 0 \quad (\text{ヤマハ})$$

例題 18.2 無理方程式 $\sqrt{x+4} - \sqrt{6-x} = 2$ を解け. (住友倉庫)

【解】 移項すると $\sqrt{x+4} = 2 + \sqrt{6-x}$

両辺を平方し, 移項すると

$$x+4 = 4 + 4\sqrt{6-x} + (6-x)$$

$$2x-6 = 4\sqrt{6-x}$$

$$x-3 = 2\sqrt{6-x}$$

さらに平方し, 整理すると

$$x^2 - 6x + 9 = 4(6-x)$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$(x+3)(x-5) = 0$$

$$x = -3, 5$$

ここで, $x = -3$ を原方程式に代入すると, 左辺 $\neq$ 右辺となり不適.

$x = 5$ を原方程式に代入すると, 左辺 = 右辺.

(答) $x = 5$

18.2 次の無理方程式を解け.

$$(1) \sqrt{4x+9} - 2\sqrt{x} = 1 \quad (\text{スズキ自動車})$$

$$(2) \sqrt{x+5} - \sqrt{2x+3} = 1 \quad (\text{東芝プロセスソフトウェア})$$

第 19 章 因数定理

x についての整式を $P(x)$, $Q(x)$ などと表し, $P(x)$ の x に数 a を代入したときの式の値を $P(a)$ と書く.

例 19.1 $P(x) = x^3 - 3x + 4$ において

$$P(2) = 2^3 - 3 \cdot 2 + 4 = 6$$

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - \alpha$ で割ったときの余りは定数である.
このときの商を $Q(x)$, 余りを R とすると, R は定数で

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) + R$$

x に α を代入すると

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R \quad \text{ゆえに} \quad P(\alpha) = R$$

すなわち, 次の**剰余の定理**が成り立つ.

(剰余の定理)

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - \alpha$ で割ったときの余りは $P(\alpha)$

例 19.2 $P(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ を $x + 1$ で割ったときの余りは

$$P(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^2 + 5 = 4 \quad \Longleftarrow x + 1 \text{ を } 0 \text{ にする } x \text{ の値を代入する}$$

同じように, 整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax + b$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを R とすると, R は定数で

$$P(x) = (ax + b)Q(x) + R$$

$x = -\frac{b}{a}$ を代入すると

$$P\left(-\frac{b}{a}\right) = R$$

よって, 次のことが成り立つ.

整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax + b$ で割ったときの余りは $P\left(-\frac{b}{a}\right)$

例題 19.3 $8x^4 - 6x^2 - 7$ を $2x + 3$ で割ったときの余りを求めよ. (トヨタ自動車)

【解】 $P(x) = 8x^4 - 6x^2 - 7$ とおくと, $P(x)$ を $2x + 3$ で割った余りは

$$P\left(-\frac{3}{2}\right) = 8 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 7 = 20 \quad (\text{答}) 20$$

19.1 次の問いに答えよ.

(1) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ を $x + 3$ で割った余りを求めよ. (日本光学)

(2) $x^3 - 2x^2 + 2x - 1$ を $2x - 3$ で割った余りを求めよ. (マツダ)

例題 19.4 $x^3 - 4x^2 + px - 3$ を $x - 2$ で割った余りが 1 になるときの p の値を求めよ. (東洋酸素)

【解】 $f(x) = x^3 - 4x^2 + px - 3$ とおくと, $f(x)$ を $x - 2$ で割った余りは $f(2)$ なので

$$\text{すなわち } f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2^2 + p \cdot 2 - 3 = 1$$

$$8 - 16 + 2p - 3 = 1$$

$$2p = 12$$

$$\text{したがって } p = 6$$

19.2 $x^3 - x^2 - ax + 2$ を $x + 1$ で割ったときの余りが 1 であるとき, a の値を求めよ. (NTT)

19.3 $x^3 + px^2 + 11x + 6$ を $x - 2$ および $x - 3$ で割ったときの余りは等しいという. p の値と, そのときの余りを求めよ. (大阪ガス)

剰余の定理により, 整式 $P(x)$ を 1 次式 $x - \alpha$ で割った余りは $P(\alpha)$ であり, 余りが 0 のとき $P(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れるから, 次の**因数定理**が成り立つ.

(因数定理)

1 次式 $x - \alpha$ が整式 $P(x)$ の因数である $\iff P(\alpha) = 0$

例題 19.5 $x^3 - mx + 4$ は $x + 2$ で割り切れる. このときの m の値を求めよ. (NTT)

【解】 $P(x) = x^3 - mx + 4$ とおくと, $P(x)$ は $x + 2$ で割り切れるので

$$P(-2) = (-2)^3 - m(-2) + 4 = 0$$

$$-8 + 2m + 4 = 0$$

$$2m = 4$$

$$m = 2$$

19.4 $x^4 - px^3 + px^2 - 4$ が $x + 2$ で割り切れるように、 p の値を定めよ。(住友ゴム)

19.5 $x^3 - px^2 + 2x + 4$ が $x - p$ で割り切れるように、 p の値を定めよ。(東洋高圧)

因数定理を用いて、整式の因数分解を考えてみよう。

例題 19.6 $x^3 - 3x + 2$ を因数分解せよ。(NKK)

解説： $P(x) = x^3 - 3x + 2$ において、 $P(\alpha) = 0$ となる α を探す。定数項が2であるので、2の約数から $\pm 1, \pm 2$ などの値を α の値として代入してみるとよい。

【解】

$$P(x) = x^3 - 3x + 2 \text{ とおくと}$$

$$P(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

ゆえに、 $P(x)$ は $x - 1$ で

割り切れるので、

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - 1)(x^2 + x - 2) \\ &= (x - 1)(x - 1)(x + 2) \\ &= (x - 1)^2(x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} x-1 \overline{) \begin{array}{r} x^3 - 3x + 2 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x^2 - 3x + 2 \\ \underline{x^2 - x} \\ -2x + 2 \\ \underline{-2x + 2} \\ 0 \end{array}} \end{array}$$

$$(\text{答}) \quad x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$$

(組立除法)

整式 $P(x)$ を1次式 $x - \alpha$ で割ったときの商や余りを求める計算には、次のような計算が便利である。

$$\begin{array}{r} (2x^3 + 5x^2 - 2) \div (x + 3) \\ \begin{array}{cccc} 2 & 5 & 0 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{-3} \leftarrow x + 3 \text{ を } 0 \text{ にする値} \\ \leftarrow \text{右斜めに上がる時、} -3 \text{ を掛ける} \end{array} \\ +) \begin{array}{cccc} \downarrow & -6 & 3 & -9 \\ 2 & -1 & 3 & \parallel -11(\text{余り}) \end{array} \\ \hline (\text{商}) 2x^2 - x + 3 \end{array}$$

問 19.7 次の割り算を組立除法を用いて計算してみよう。

$$(1) \quad (x^3 + 3x^2 - 2x - 1) \div (x - 3) \quad (\text{富士電機})$$

$$(2) \quad (2x^3 + 3x^2 + x + 4) \div (x + 2) \quad (\text{きんでん})$$

【答】

(1)

$$\begin{array}{r}
 (x^3 + 3x^2 - 2x - 1) \div (x - 3) \\
 \begin{array}{r}
 1 \quad 3 \quad -2 \quad -1 \\
 +) \downarrow \quad 3 \quad 18 \quad 48 \\
 \hline
 1 \quad 6 \quad 16 \quad \| 47
 \end{array}
 \end{array}$$

商 $x^2 + 6x + 16$, 余り 47

(2)

$$\begin{array}{r}
 (2x^3 + 3x^2 + x + 4) \div (x + 2) \\
 \begin{array}{r}
 2 \quad 3 \quad 1 \quad 4 \\
 +) \downarrow \quad -4 \quad 2 \quad -6 \\
 \hline
 2 \quad -1 \quad 3 \quad \| -2
 \end{array}
 \end{array}$$

商 $2x^2 - x + 3$, 余り -2 **問 19.8** 例題 19.6 の割り算を組立除法を用いて計算せよ.**【答】** 略**19.6** 次の式を因数分解せよ.

(1) $x^3 - 3x - 2$ (三菱重工)

(2) $x^3 - 3x^2 + x + 1$ (日産自動車)

(3) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ (トヨタ自動車)

(4) $x^3 - 2x^2 - 6x + 7$ (シチズン)

(5) $x^3 + x^2 - 5x - 6$ (川崎航空)

(6) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ (日産自動車)

(7) $x^3 - 4x^2 - 8x + 8$ (九州電力)

(8) $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ (コマツ西日本)

(9) $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ (神戸製鋼)

(10) $3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$ (日立ソフトウェアエンジニアリング)

(11) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$ (TOTO)

19.7 整式 $f(x) = x^3 - ax - 2$ について, 次の問いに答えよ. (トヨタ自動車)(1) $f(x)$ を $x - 3$ で割ったときの余りが 1 になるとき, a の値を求めよ.

(2) $a = 3$ のとき, $f(x)$ を因数分解せよ.

19.8 $x^3 + 3x^2 + ax + b$ は $x - 2$ で割り切れるが, $x + 3$ で割ると 5 余るという. a, b の値を求めなさい. (トヨタ自動車)

19.9 整式 $P(x)$ を $x + 2$ で割ったときの余りが 5 のとき, $(2x - 1)P(x)$ を $x + 2$ で割ったときの余りを求めよ. (東芝)

例題 19.9 $2x^3 + ax^2 + bx - 18$ が $x^2 + x - 6$ で割り切れるときの a, b の値を求めよ. (武田薬品工業)

解説: 例えば整数 M が 15 で割り切れるとき, $15 = 3 \times 5$ より, M は 3 でも 5 でも割り切れる.

これと同様に, $P(x)$ が $x^2 + x - 6$ で割り切れるとき, $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ より, $P(x)$ は $x + 3$ でも $x - 2$ でも割り切れる.

【解】 $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 18$ とおく. $P(x)$ が $x^2 + x - 6$ で割り切れるとき, $P(x)$ は $x + 3$ と $x - 2$ で割り切れるから

$$P(-3) = 0 \quad \text{かつ} \quad P(2) = 0$$

したがって,

$$\begin{aligned} P(-3) &= 2(-3)^3 + a(-3)^2 + b(-3) - 18 = 0 \\ &-54 + 9a - 3b - 18 = 0 \\ &9a - 3b = 72 \\ &3a - b = 24 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} P(2) &= 2 \cdot 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 - 18 = 0 \\ &16 + 4a + 2b - 18 = 0 \\ &4a + 2b = 2 \\ &2a + b = 1 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る. よって, ①, ②の連立方程式を解いて, $a = 5, b = -9$

19.10 $x^3 + px^2 + qx - 5$ が $x^2 - 1$ で割り切れるときの p, q の値を求めよ. (NHK)

例題 19.10 x の整式 $P(x)$ を $x+1$ で割ると 5 余り, $x-2$ で割ると -7 余る. $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ.

解説: 整式 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの余りは, 1 次式か定数であるから, $ax+b$ とおくことができる.

【解】 $P(x)$ を $(x+1)(x-2)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax+b$ とすると, 次の等式が成り立つ (a, b は定数).

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

与えられた条件から $P(-1) = 5$ かつ $P(2) = -7$ であるので,

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1+1)(-1-2)Q(-1) + a(-1) + b = 5 \\ 0 \times (-3) \times Q(-1) - a + b &= 5 \\ -a + b &= 5 \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(2) &= (2+1)(2-2)Q(2) + a \cdot 2 + b = -7 \\ 3 \times 0 \times Q(2) + 2a + b &= -7 \\ 2a + b &= -7 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②の連立方程式を解くと, $a = -4, b = 1$
したがって, 求める余りは $-4x + 1$

19.11 $x-2$ で割ると 3 余り, $x-5$ で割ると 6 余る多項式がある. この多項式を $(x-2)(x-5)$ で割ると余りはいくらか. (マツダ)

例題 19.11 整式 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $4x-5$ であり, $x-3$ で割ったときの余りは 5 であるという. このとき $P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの余りを求めよ.

【解】 $P(x)$ を $(x-1)(x-2)$ で割ったときの余りは $4x-5$ であり, 商を $Q_1(x)$ とおくと, 次の等式が成り立つ.

$$P(x) = (x-1)(x-2)Q_1(x) + 4x - 5$$

これに $x = 2$ を代入すると

$$P(2) = 3 \cdots \textcircled{1}$$

また, $P(x)$ を $x-3$ で割ったときの余りは 5 なので

$$P(3) = 5 \cdots \textcircled{2}$$

$P(x)$ を $(x-2)(x-3)$ で割ったときの商を $Q_2(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと (a, b は定数), 次の等式が成り立つ.

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q_2(x) + ax + b \cdots \textcircled{3}$$

よって ①, ②を ③に代入すると

$$\begin{cases} 2a + b = 3 \\ 3a + b = 5 \end{cases}$$

この連立方程式を解いて, $a = 2, b = -1$

したがって, 求める余りは $2x - 1$

19.12 整式 $f(x)$ を $x^2 + 2x - 3$ で割ったときの余りは $2x + 1$ であり, $x + 2$ で割ったときの余りは 1 であるという. $f(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めなさい. ☆ (トヨタ自動車)

19.13 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b, g(x) = x^3 + x^2 + (2a+b)x + 2b$ について $x+1$ が共通の公約数であるとき, 次の問いに答えよ. (東芝)

(1) 実数 a, b の値を求めよ.

(2) このときの $f(x), g(x)$ の最大公約数を求めよ.

実践問題 7

三菱電機

1 次の式を展開しなさい.

(1) $(a+5)(a-3)$

(2) $(m-7)(m-8)$

(3) $(3x+3)(2x-5)$

(4) $(a+b+4)(a+b-6)$

(5) $(2x+3y)^3$

2 次の () の中に適当な数値を入れなさい.

(1) $-4, -2, (\quad), 5, 10, 16$

(2) $19, 20, 18, 21, 17, 22, (\quad)$

(3) $\sqrt{2} = 1.4$ であれば $\sqrt{200} = (\quad)$

(4) 19,481 円は, 84,700 円の $(\quad)\%$ である.

(5) $x:y=6:7, y:z=3:2$ のとき $x:y:z=(\quad)$ である.

(6) $2\sqrt{3x+1}=x+3$ の 2 根の和は $(\quad)$ である.

(7) 関数 $y=x^2+3x-4$ について, x が -1 から 2 まで変化するときの平均変化率は $(\quad)$ である.

(8) 2m の 8% は $(\quad)$ cm である.

(9) $\log_8 0.25 = (\quad)$

(10) $\log_7 1 = (\quad)$

【答】

1 (1) $a^2+2a-15$ (2) $m^2-15m+56$ (3) $6x^2-9x-15$

(4) $a^2+2ab+b^2-2a-2b-24$ (5) $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

2 (1) 1 (2) 16 (3) 14 (4) 23 (5) $18:21:14$

(6) 6 (7) 4 (8) 16 (9) $-\frac{2}{3}$ (10) 0

第 20 章 高次方程式

例題 20.1 次の方程式を解け.

(1) $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$ (I H I)

(2) $(x^2 - 3x)^2 - 8(x^2 - 3x) - 20 = 0$ (トヨタ自動車)

(3) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ (播磨耐火煉瓦)

【解】

(1) $x^2 = X$ とおくと

$$X^2 + 2X - 8 = 0$$

$$(X - 2)(X + 4) = 0$$

$$(x^2 - 2)(x^2 + 4) = 0$$

ゆえに $x^2 - 2 = 0$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

または $x^2 + 4 = 0$

$$x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

(答) $x = \pm\sqrt{2}, \pm 2i$

(2) $x^2 - 3x = A$ とおくと

$$A^2 - 8A - 20 = 0$$

$$(A + 2)(A - 10) = 0$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 3x - 10) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x + 2)(x - 5) = 0$$

(答) $x = 1, \pm 2, 5$

(3)

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$$

$$x^2(x - 2) - (x - 2) = 0$$

$x - 2 = A$ とおくと

$$x^2 A - A = 0$$

$$A(x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 2)(x^2 - 1) = 0$$

$$(x - 2)(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$(\text{答}) \quad x = 2, \pm 1$$

20.1 次の方程式を解け.

(1) $x^3 - 1 = 0$ (東洋酸素)

(2) $x^4 + 9 = 10x^2$ (日本毛織)

(3) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ (名機製作所)

(4) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0$ (電源開発)

(5) $x^4 - 2x^3 - x + 2 = 0$ (マツダ)

(6) $(x + 1)(x + 2)(x - 5)(x - 6) = 44$ (大阪ガス)

例題 20.2 方程式 $x^3 + x^2 + x + 6 = 0$ を解け. (NEC フィールドサービス)

【解】 $P(x) = x^3 + x^2 + x + 6$ とおくと, $P(-2) = 0$ であるから,
 $P(x)$ は $x + 2$ で割り切れて, 次のように因数分解される.

$$P(x) = (x + 2)(x^2 - x + 3)$$

$P(x) = 0$ から, $x + 2 = 0$ または $x^2 - x + 3 = 0$

よって (答) $x = -2, \frac{1 \pm \sqrt{11}i}{2}$

高次方程式 $P(x) = 0$ で, 1つの解 $x = \alpha$ が見つかり, $P(x)$ は $x - \alpha$ で割り切れるから, 因数分解して, 低次の方程式に帰着される.

20.2 次の方程式を解け.

(1) $x^3 - 3x + 2 = 0$ (昭和アルミ)

(2) $2x^3 - 6x^2 + 4 = 0$ (東芝)

(3) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ (東京計器)

$$(4) \quad x^3 - 8x^2 + 17x - 10 = 0 \quad (\text{東京電気化学})$$

$$(5) \quad 3x^3 - 13x^2 + 13x - 3 = 0 \quad (\text{日本毛織})$$

$$(6) \quad x^3 + 4x^2 + 3x - 2 = 0 \quad (\text{日本ボーリング})$$

$$(7) \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \quad (\text{日本ボーリング})$$

$$(8) \quad x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0 \quad (\text{小田急})$$

例題 20.3 方程式 $x^3 - x + a = 0$ の解の 1 つが 2 であるとき、定数 a の値と他の解を求めよ.

【解】 $x = 2$ が解であるから
 $2^3 - 2 + a = 0$ ゆえに $a = -6$

よって、方程式は $x^3 - x - 6 = 0$
 左辺は $x - 2$ を因数にもつことに注意して、因数分解すると

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

したがって $a = -6$ 、他の解は $x = -1 \pm \sqrt{2}i$

一般に、係数が実数である方程式が、虚数 $a + bi$ を解にもつと、その共役複素数 $a - bi$ も、この方程式の解である.

20.3 $x^3 - x^2 + ax + 5 = 0$ について、次の問いに答えなさい. (トヨタ自動車)

(1) 1 つの解が -1 のとき、 a の値を求めなさい.

(2) (1) のとき、残りの 2 つの解を求めなさい.

2 次方程式は複素数の範囲で常に解を持つが、3 次以上の高次方程式も、複素数の範囲で必ず解をもつことが知られている.

2 次方程式の重解を 2 つの解が重なったものとして、2 個に数えることにすると、2 次方程式は常に 2 個の解をもつ. また、例えば、

方程式 $(x - 1)^2(x + 2) = 0$ の解 $x = 1$ は 2 重解

方程式 $x(x - 1)^3 = 0$ の解 $x = 1$ は 3 重解

という. 2 重解は 2 個、3 重解は 3 個として数えることにすると、一般に n 次方程式の解の個数は n 個である.

20.4 $x^4 + x^3 + ax + b = 0$ の 2 つの解が -1 , 2 である. a , b の値を求めよ. また、残りの解を求めよ. (日立製作所)

実践問題 8

ダイハツ工業

1 次の計算をなさい.

(1) $7 \times 3 - 4^2 + 6 \times 4 \div (-8)$

(2) $x^2 + x - 12 = 0$

(3) $\frac{2}{3}ab - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{3}ab$

(4) $(5x + 7y - 4) - (5x - 7y + 2)$

(5) $0.45 + 0.3 - 0.34 + 0.2$

2 2点 $(-2, -3)$, $(2, -5)$ を通る直線の式を求めよ.

3 ある工場で部品をつくるのに A の機械 3 台と B の機械 6 台とを試用したら 1 時間で 1,200 個, A の機械 2 台と B の機械 3 台とを使用したら 1 時間で 680 個つくれた.

(1) A の機械, B の機械の 1 時間あたりの生産個数を求めよ.

(2) A の機械 4 台と B の機械 3 台を使用して 2,000 個の部品をつくるのに何時間かかるか.

【答】

1 (1) 2 (2) $x = -4$, 3 (3) $\frac{5}{6}ab$ (4) $14y - 6$ (5) 0.61

2 $y = -\frac{1}{2}x - 4$

3 (1) $A : 160$ 個, $B : 120$ 個 (2) 2 時間

第 21 章 1 次不等式

実数の大小関係について考えてみよう.

2つの実数 a, b の間には $a > b$, $a = b$, $a < b$ のうち, どれか 1 つの関係だけが成り立つ.

また, 実数の大小関係を基本性質として, 次のことが成り立つ.

(大小関係の基本性質)

$$1 \quad a > b, b > c \implies a > c$$

$$2 \quad a > b \implies a + c > b + c, \quad a - c > b - c$$

$$3 \quad a > b, c > 0 \implies ac > bc, \quad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

$$4 \quad a > b, c < 0 \implies ac < bc, \quad \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$$

例題 21.1 次の不等式を解け.

$$(1) \quad 3x + 11 > 7x - 1$$

(いすゞ自動車)

$$(2) \quad \frac{x-5}{2} < 2-x$$

(三共)

【解】

(1)

$$\text{移項して} \quad 3x - 7x > -1 - 11$$

$$-4x > -12$$

$$\text{両辺を } -4 \text{ で割って} \quad x < 3$$

(2)

両辺に2を掛けて $x - 5 < 2(2 - x)$

$$x - 5 < 4 - 2x$$

移項して $3x < 9$ 両辺を3で割って $x < 3$ **注意**

(1) 移項しても不等号の向きは変わらない.

(2) 両辺を正の数で掛けたり割ったりしても不等号の向きは変わらない.

(3) 両辺を負の数で掛けたり割ったりすると不等号の向きが変わる.

21.1 次の不等式を解け.

(1) $x + \frac{1}{2} > 1$ (大日本工業)

(2) $-x + 3 < -1$ (富士通ビジネスシステム)

(3) $-3x + 2 < 5$ (東芝姫路)

(4) $3x + 5 < x - 2$ (呉造船)

(5) $x + 3 > -3x + 7$ (デンソー)

(6) $x - 6 < 4x - 3$ (山武メンテナンス)

(7) $4x - 3 > 7x - 6$ (東海電気工事)

(8) $2(x + 1) \leq 4(x + 2)$ (富士電機)

(9) $30 + \frac{5}{6}x \leq x + 14$ (デンソー)

(10) $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}x - \frac{5}{12}$ (住友軽金属)

(11) $\frac{x}{2} - \frac{2}{3}x < 26 - \frac{3}{5}x$ (日本毛織)

(12) $\frac{x+1}{2} > 2(x+1)$ (YKK)

(13) $\frac{x-3}{4} + \frac{6-x}{2} > x$ (ワシノ機械)

$$(14) \quad \frac{x+3}{5} - \frac{4x-2}{15} + 2x > 0 \quad (\text{日本電線})$$

$$(15) \quad \frac{3x-1}{5} - \frac{5-x}{2} > \frac{2}{3} + \frac{7(x-2)}{6} \quad (\text{日本光学})$$

例題 21.2 不等式 $|x-1| < 3$ を解け. (東芝)

解説: $x-1$ の符号による場合分けを行う.

【解】

i) $x-1 \geq 0$ すなわち $x \geq 1$ のとき

$$x-1 < 3 \quad \text{ゆえに} \quad x < 4$$

$$\text{よって} \quad 1 \leq x < 4$$

ii) $x-1 < 0$ すなわち $x < 1$ のとき

$$-(x-1) < 3 \quad \text{ゆえに} \quad x > -2$$

$$\text{よって} \quad -2 < x < 1$$

i), ii) から $-2 < x < 4$

補足: 絶対値 $|x|$ について, 正の定数 a に対し, 次のことが成り立つ.

$$|x| = a \quad \Longleftrightarrow \quad x = a \text{ または } x = -a$$

$$|x| < a \quad \Longleftrightarrow \quad -a < x < a$$

$$|x| > a \quad \Longleftrightarrow \quad x < -a \text{ または } a < x$$

このことを用いると, 上の例題は不等式は, 次の不等式と同値である.

$$-3 < x-1 < 3$$

よって, この不等式の各辺に 1 を加えて, 解 $-2 < x < 4$ が得られる.

21.2 次の不等式を解け.

$$(1) \quad |x-2| < 5 \quad (\text{清水建設})$$

$$(2) \quad |2x-1| < 3 \quad (\text{旭化成})$$

$$(3) \quad |x-1| - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}x \quad (\text{東京ガス})$$

例題 21.3 次の連立不等式を解け.

$$(1) \quad \begin{cases} 2x-3 > x-1 \\ x+5 > 4x-4 \end{cases} \quad (\text{東京ガス})$$

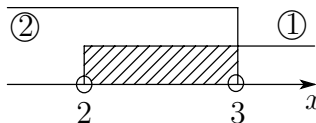
$$(2) \begin{cases} 5x + 7 < 6x - 3 \\ 3x - 5 \leq 5x + 3 \end{cases} \quad (\text{中川電機})$$

【解】

(1) 2つの不等式を上から順に ①, ②とする.

①から $x > 2$, ②から $x < 3$

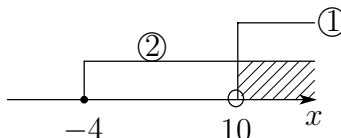
求める範囲は ①, ②の共通部分であるから

(答) $2 < x < 3$ 

(2) 2つの不等式を上から順に ①, ②とする.

①から $x > 10$, ②から $x \geq -4$

求める範囲は ①, ②の共通部分であるから

(答) $x > 10$ 

21.3 次の連立不等式を解け.

$$(1) \begin{cases} 2x + 4 > x - 5 \\ 3x + 5 > 2x + 7 \end{cases} \quad (\text{中川電機})$$

$$(2) \begin{cases} 27 - 5x < 60 + 6x \\ 7x + 6 < 5x + 10 \end{cases} \quad (\text{ダイハツ})$$

$$(3) \begin{cases} 2x + 3 \geq 5x - 15 \\ \frac{x+1}{2} + \frac{x}{3} > 3 \end{cases} \quad (\text{愛知製鋼})$$

$$(4) \begin{cases} \frac{4}{3}x + \frac{5}{6} \geq \frac{1}{2}x - \frac{5}{2} \\ 6 - \frac{x}{3} > 2 - \frac{x}{7} \end{cases} \quad (\text{大阪ガス})$$

$$(5) \begin{cases} 3x + 8 \geq 5x + 2 \\ x - \frac{2}{3} < 3(x - 1) + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{東京ガス})$$

$$(6) \begin{cases} \frac{x-16}{3} > \frac{x-10}{7} \\ 4 + x > x + \frac{x-12}{3} \end{cases} \quad (\text{日立家電販売})$$

$$(7) 4x - 6 < 3x + 5 < 8x + 5 \quad (\text{日本光学})$$

第 22 章 式と証明

乗法と因数分解の公式，計算の経過や結果を表す等式などは，含まれている文字にどんな値を代入しても，その等式の両辺の値が存在する限り常に成り立つ．このような等式を**恒等式**という．

例 22.1 次の等式は，いずれも恒等式である．

$$1) (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$2) \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{2x}{x^2-1}$$

例題 22.2 a, b, c を定数とするとき，次のことが成り立つ．

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ が } x \text{ についての恒等式 } \iff a = b = c = 0$$

解説： x にどのような値を代入しても常に

$$ax^2 + bx + c = 0$$

が成り立つということである．

[証明]

i) $(\implies)$ の証明

$x = 0, 1, -1$ のとき等式が成り立つから

$$c = 0, \quad a + b + c = 0, \quad a - b + c = 0$$

これを解くと $a = b = c = 0$

ii) $(\impliedby)$ の証明

$a = b = c = 0$ とすると， $ax^2 + bx + c = 0$ は恒等式である．

[証終]

x についての 2 つの 2 次式 $ax^2 + bx + c$ と $a'x^2 + b'x + c$ について
等式 $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c$ が恒等式であることと
等式 $(a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c') = 0$ が恒等式であること
は同じであるから，次が成り立つ．

$$\left\{ \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c \\ \text{が } x \text{ についての恒等式である} \end{array} \right\} \iff a = a', \quad b = b', \quad c = c'$$

同様に， $P(x), Q(x)$ が整式のとき，一般に，次のことが成り立つ．

(恒等式)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{等式 } P(x) = Q(x) \\ \text{が恒等式である} \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} P(x) \text{ と } Q(x) \text{ の次数が等しく,} \\ \text{整理したとき, 同じ次数の項の} \\ \text{係数がそれぞれ等しい} \end{array} \right\}$$

例題 22.3 $ax(x+1) + bx(x-1) + c(x+1)(x-1) = x^2 + 3$ が x についての恒等式であるように, 定数 a, b, c の値を求めよ.

【解】 左辺を整理すると

$$(a+b+c)x^2 + (a-b)x - c = x^2 + 3$$

両辺の各次数の項の係数を比べると **(係数比較法)**

$$a+b+c=1, \quad a-b=0, \quad -c=3$$

これらを解いて, (答) $a=2, b=2, c=-3$

補足: x にどのような値を代入しても上の例題の等式は成り立つので,

$$x=1 \text{ を代入して } 2a=4 \text{ から } a=2,$$

$$x=-1 \text{ を代入して } 2b=4 \text{ から } b=2,$$

$$x=0 \text{ を代入して } -c=3 \text{ から } c=-3$$

のように実際に数値を代入して求めることができる **(数値代入法)**.

22.1 $A(x-2)(x+3) + B(x-1) + C = 2x^2 - 3x + 5$ が x についての恒等式となるように, 定数 A, B, C の値を求めよ. (中川無線電気)

22.2 $\frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$ がどのような x に対しても常に成り立つように, 定数 a, b の値を求めよ. (大金製作)

22.3 次式が x についての恒等式となるとき, A, B, C の値を求めよ. (きんでん)

$$\frac{3x-9}{(x^2-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

22.4 $a+b+c=0$ のとき $(a+b)(b+c)(c+a) + abc = 0$ を証明せよ. (三菱電機)

22.5 $a+b+c=0$ のとき,

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) + 3 = 0$$

が成り立つことを証明せよ. (平田機工)

例題 22.4 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ のとき, $\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ を証明せよ. (日本光学)

[証明] $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$ とおくと, $a = bk$, $c = dk$ より

$$\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{bk \cdot b + dk \cdot d}{bk \cdot b - dk \cdot d} = \frac{k(b^2+d^2)}{k(b^2-d^2)} = \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2},$$

$$\frac{a^2+c^2}{a^2-c^2} = \frac{(bk)^2 + (dk)^2}{(bk)^2 - (dk)^2} = \frac{k^2(b^2+d^2)}{k^2(b^2-d^2)} = \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

上の 2 式より $\frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{a^2+c^2}{a^2-c^2}$ [証終]

22.6 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ のとき, 次の等式を証明せよ. (川崎製鉄)

$$(1) \frac{x^2}{a^2} = \frac{x^2 - xy + y^2}{a^2 - ab + b^2}$$

$$(2) \frac{pa+rx}{qa+sx} = \frac{pb+ry}{qb+sy}$$

22.7 $\frac{ax+by}{a+b} = \frac{x+y}{2}$ であるとき, $a=b$ または $x=y$ となることを証明せよ. (コスモ石油)

22.8 $\frac{b+2c}{a} = \frac{c+2a}{b} = \frac{a+2b}{c}$ かつ $a+b+c \neq 0$ のとき, $a=b=c$ であることを証明せよ. (日本光学)

不等式の計算においては, 文字はすべて実数であることを前提としている.

例題 22.5 不等式 $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ が成り立つことを証明せよ. (昭和電工)

[証明]

$$\begin{aligned} a^2 - ab + b^2 &= \left(a^2 - ab + \frac{b^2}{4}\right) - \frac{b^2}{4} + b^2 \\ &= \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \end{aligned}$$

$$a, b \text{ は実数であるから } \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \quad \frac{3}{4}b^2 \geq 0$$

よって $a^2 - ab + b^2 \geq 0$ [証終]

例題 22.5 の不等式で等号が成り立つのは、 $a - \frac{b}{2} = 0$, $b = 0$ のとき、すなわち、 $a = b = 0$ のときに限る。

P , Q の大小関係については、次のことが成り立つ。

$$P > Q \iff P - Q > 0$$

$$P = Q \iff P - Q = 0$$

$$P < Q \iff P - Q < 0$$

よって、 P , Q の大小は $P - Q$ の符号を調べると判定できる。

例題 22.6 不等式 $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ を証明せよ。 (日新製鋼)

[証明]

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx) \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2) \\ &= \frac{1}{2}\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx \quad \text{[証終]}$$

例題 22.6 の不等式で等号が成り立つのは、 $x - y = 0$, $y - z = 0$, $z - x = 0$ のとき、すなわち、 $x = y = z$ のときに限る。

22.9 次の不等式を証明せよ。

$$(1) \ a^2 + b^2 \geq 2(a + b - 1) \quad \text{(厚木ナイロン)}$$

$$(2) \ a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \quad \text{(東京計器)}$$

例題 22.7 $a > 0$, $b > 0$ のとき、 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのは、どのようなときか。

[証明]

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} &= \frac{1}{2}(a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ のとき、すなわち $a = b$ のときに限る。

[証終]

$\frac{a+b}{2}$ を a と b の**相加平均**という. また, $a > 0, b > 0$ のとき, $\sqrt{ab}$ を a と b の**相乗平均**という. 例題 22.7 より, 次のことがいえる.

(相加平均, 相乗平均の大小関係)

2つの正の数 a, b について

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは, 2つの数が等しいときに限る.

22.10 次の不等式を証明せよ.

(1) $a > 0$ のとき $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (ダイハツ)

(2) $a > 0, b > 0$ のとき $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ (ダイハツ)

(3) $a > 0, b > 0, c > 0$ のとき $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ (東洋倉庫)

(4) $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ のとき $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right) \geq 4$ (北辰電気)

22.11 文字がすべて正数のとき, 各組についてその大小を比較せよ. ただし, $a \neq b$ とする.

(1) $\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}$ (シチズン)

(2) $\sqrt{ab}, \frac{2ab}{a+b}$ (宇部興産)

(3) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right), \frac{2}{a+b}$ (大隈鉄工)

(4) $a^3 + b^3, ab(a+b)$ (三菱電機)

22.12 a, b が相異なる正数であるとき, 次の A, B, C の大小を調べよ. (大隈鉄工)

$$A = \frac{a+b}{2}, \quad B = \sqrt{ab}, \quad C = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

実践問題 9

大同特殊鋼

1 次の計算をしなさい.

$$(1) 2\frac{1}{3} \div \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{8}{9} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$(2) -0.3^2 \times 10^2 \div (-3) - (-2) + (-2)^2$$

$$(3) \frac{\frac{3}{5} - \frac{1}{15}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$(4) a^2 \times a^3 - (-b^2)^3 \times \frac{1}{b^2}$$

$$(5) (-2)^3 \times 3^2$$

$$(6) \sqrt{\frac{4}{15}} \times \sqrt{\frac{5}{7}} \div \frac{6}{\sqrt{14}}$$

2 $\angle A$ が鋭角で $\cos A = \frac{4}{5}$ のとき, $\sin A$, $\tan A$ の値を求めなさい.

3 次の各問いに答えなさい.

(1) 7% と 2% の食塩水を混ぜて 3% の食塩水を 400g 作りたい. それぞれ何 g ずつ混ぜればよいか.

(2) ある正の数の 2 乗を計算するのに誤って 2 倍したので, 正しい答よりも 8 だけ小さくなった. 正しい答えはいくらか.

(3) 原価 2400 円の品物に r 割の利益を見込んで定価をつけたが, 売れなかったので定価の r 割引で売ったら 216 円の損をした. r の値を求めなさい.

【答】

$$1 \quad (1) -\frac{17}{6} \quad (2) 9 \quad (3) \frac{4}{5} \quad (4) a^5 + b^4 \quad (5) -72 \quad (6) \frac{\sqrt{6}}{9}$$

$$2 \quad \sin A = \frac{3}{5}, \quad \tan A = \frac{3}{4}$$

$$3 \quad (1) 7\% : 80\text{g}, 2\% : 320\text{g} \quad (2) 16 \quad (3) 3$$

第 23 章 文章題

例題 23.1 2けたの整数がある．その十の位の数字と一の位の数字の和は10であり，十の位の数字と一の位の数字を入れ替えると，もとの数より18小さくなる．この2けたの整数を求めよ． (住友金属鉱業)

【解】 十の位の数を x ，一の位の数を y とすると

$$x + y = 10 \cdots \textcircled{1}$$

元の数 $10x + y$ ，位を入れ替えた数は $10y + x$ なので，題意より

$$(10y + x) = (10x + y) - 18$$

$$-9x + 9y = -18$$

$$-x + y = -2 \cdots \textcircled{2}$$

①，②を解いて， $x = 6$ ， $y = 4$ (答) 64

23.1 ある数から7を引いて3倍したら81になった．ある数を求めよ． (日産自動車)

23.2 連続する3つの偶数の和は1122であるという．この真ん中の数を求めよ． (大平製作所)

23.3 ある数を平方するのを，誤って2倍したために答が35小さくなった．その正しい答を求めよ． (山之内製薬)

23.4 分子と分母の差が105で，約分すると $\frac{13}{6}$ となる分数を求めよ． (旭産業)

23.5 連続する2つの整数の平方の和が613である．この2数を求めよ． (九州電力)

23.6 大きい数と小さい数との差は6で，大きい数を5倍にすると，小さい数の10倍より2だけ大きくなるという．この2数を求めなさい． (スズキ)

23.7 2つの整数がある．大きい数を小さい数で割ると，商が3，余りが4となる．また，小さい数の7倍を大きい数で割ると，商は2，余りは9となる．この2つの整数を求めよ (東京計器)

23.8 2桁の整数がある．それに36を加えると数字の順序が逆になり，また，その数の十位と一位の数字の和を4倍すれば，もとの数に等しくなる．この数を求めよ． (住友ゴム)

23.9 2桁の整数がある．その各位の数字の和は12で，一の位と十の位の数字を入れかえるともとの数より18大きくなるという．もとの数を求めよ． (アマダワシノ)

23.10 3桁の整数がある．各々の位の数字の和は14，十の位の数字は百の位の数字と一の位の数字との和に等しく，また，百の位の数字と一の位の数字を入れかえて作った数は，もとの数より99大きいという．もとの整数を求めよ (武田薬品)

23.11 ある2桁の整数は，その十の位の数と一の位の数との積の2倍に等しくなっている．この整数を求めよ． (三菱重工)

例題 23.2 A君の年令は妹より3才年上です．母と妹との年を合計すると49才です．7年後，母の年令はA君と妹との年令の和と同じです．母の年令はいくつですか． (トヨタ自動車)

【解】 妹の年齢を x 才とすると，題意より

A君の年齢は $x + 3$ 才，母親の年齢は $49 - x$ 才．

7年後の3人の年齢は

妹 $x + 7$ 才，A君 $x + 10$ 才，母親 $56 - x$ 才なので，

$$56 - x = (x + 10) + (x + 7)$$

を解いて， $x = 13$ ．

したがって，妹13才，A君16才，母親36才． (答) 36才

23.12 父が28才，息子が6才である．何年後に父の年令が息子の年令の2倍になるか． (日産ディーゼル)

23.13 今年は母が42才，子供は18才，母の年令が子供の5倍であったのは今から何年前か． (石塚硝子)

23.14 現在母の年令は41才，子供の年令は17才である．母の年令が子供の年齢の3倍であるのはいつか． (トヨタ自動車)

23.15 父の年令は子供の年令の 3 倍である．あと 13 年たつと父の年令は子供の年令の 2 倍になる．現在の父の年令と子供の年令を求めよ． (ダイハツ)

23.16 現在，父の年令は 45 才，3 人の子供の年令はそれぞれ 11 才，7 才，5 才である．父の年令が，3 人の子供の年令の和の 3 倍となるのはいつか． (麒麟麦酒)

23.17 父と母と子の年令の和は 62 才である．父は母より 7 才年上で，母は子の 5 倍の年令である．3 人の年令をそれぞれ求めよ． (中京海運)

23.18 父と 3 人の子供がいる．父と長子との年令の和は 66，父と末子との年令の和は 62，長子と次子との年令の和は 38，次子と末子との年令の和は 34 であるという．それぞれの年令を求めよ． ☆ (第一製薬)

例題 23.3 みかん 1 個 50 円，りんご 1 個 80 円を合わせて 13 個買い，150 円のかごに入れてもらい，全部で 950 円払った．それぞれ何個買ったか． (住友電気工業)

【解】 みかんを x 個，りんごを y 個買ったとすると

個数から $x + y = 13 \cdots \textcircled{1}$

金額から $50x + 80y + 150 = 950$

整理して $5x + 8y = 80 \cdots \textcircled{2}$

①，②を解いて， $x = 8$ ， $y = 5$

(答) みかん 8 個，りんご 5 個

23.19 5 円硬貨の数は，10 円硬貨の数の 5 倍で，金額の合計は 210 円である．それぞれ何枚あるか． (東京ガス)

23.20 40 円の切手と 60 円の切手を買った．全部で 100 枚，値段が 4900 円であった．それぞれの切手の枚数を求めよ． (大豊工業)

23.21 1 個 15 円のみかんと 1 個 20 円のリんごをとりまぜて 20 個箱に入れ，箱代 30 円を含めて 360 円にしたい．みかんとりんごを何個ずつ入れればよいか． (中越パルプ工業)

23.22 ノート 3 冊と鉛筆 2 本で 510 円．またノート 2 冊と鉛筆 1 本で 310 円である．それぞれの金額を求めよ． (日産車体)

23.23 A と B の缶詰があり，A を 2 個，B を 1 個で 420 g である．また，A を 3 個と B を 4 個で 930 g である．A，B それぞれ何 g か． (電源開発)

23.24 100 円のジュースと 120 円のジュースがある．その日のジュースの売上が 13,280 円である．100 円のジュースの方が 120 円のジュースより 2 倍と 24 本多く売れた．それぞれ何本ずつ売れたか． (NKK)

23.25 切手を 10 円，20 円，25 円の 3 種類を合わせて 75 枚買った．1225 円の予定であったが，10 円切手と 20 円切手を取り違えたので，1325 円になった．予定の切手の枚数を求めよ． (山崎製パン)

23.26 80 円の鉛筆と 50 円の鉛筆を合わせて 15 本買うつもりだったが，本数を取り間違えたために予定より 210 円多くなってしまった．初めに買うつもりであった本数はそれぞれ何本ずつか． (日本建工)

23.27 10 円，50 円，100 円硬貨が合わせて 30 個ある．その金額の合計は 1700 円である．100 円硬貨は 50 円硬貨より 4 個多いという．おのおのの個数を求めよ． (厚木ナイロン)

23.28 10,000 円，5,000 円，1,000 円の各紙幣がとりまぜて 30 枚あり，金額の合計は 120,000 円である．各紙幣はそれぞれ何枚か． (ダイハツ工業)

例題 23.4 子供に柿を分配するのに，1 人 5 個ずつ分ければ 10 個余り，7 個ずつ分ければ 6 個不足するという．子供の人数と柿の個数を求めよ． (芦森工業)

【解】 子供の人数を x 人，柿の個数を y 個とすると

$$y = 5x + 10, \quad y = 7x - 6$$

と表せる．上の 2 式から $x = 8, y = 50$ (答) 子供 8 人，柿 50 個

例題 23.5 鉛筆を子供に配りたい．1 人に 6 本ずつ配ると 18 本残り，1 人に 9 本ずつ配ると最後の 1 人は 6 本しかもらえなくなる．子供の人数を求めなさい． (安立電気)

【解】 子供の人数を x 人とする，鉛筆の本数は，

$$(6x + 18) \text{ 本} \quad \text{または} \quad 9(x - 1) + 6$$

と表せる．したがって $6x + 18 = 9(x - 1) + 6$

を解いて $x = 7$ (答) 7 人

23.29 鉛筆を 1 人 7 本ずつ配れば 11 本余り，1 人 9 本ずつ配れば最後の 1 人は 6 本しかもらえない．さて鉛筆の数は何本か． (王子製紙)

23.30 鉛筆を 1 人 7 本ずつ配ると 17 本余り，9 本ずつ配ると 3 本だけ足りなくなる．人数と鉛筆の総数を求めよ． (横浜ゴム)

23.31 子供達に鉛筆を配るのとき、1 人に 6 本ずつ配ると 18 本余り、9 本ずつ配ると最後の 1 人には 3 本足りなくなる。子供の人数を求めなさい。(第一貨物自動車)

23.32 りんごを子供に分けるのに、1 人 4 個ずつだと 8 個不足し、3 個ずつだと 2 個不足する。りんごの数と子供の数を求めよ。(芝浦製作所)

23.33 ある寄宿舎で生徒を 1 室に 5 人ずつ入れると 12 人余り、7 人ずつ入れると 1 室は 6 人で、なお 1 室は空室になるという。生徒の人数および室数を求めよ。(JTB)

23.34 生徒を講堂に入れて、1 つの腰掛けに 4 人ずつ掛けさせたら 25 人の生徒が掛けられなくなった。そこで 1 つの腰掛けに 5 人ずつ掛けさせると、腰掛けが 8 脚余った。腰掛けの数と生徒の数を求めよ。(山之内製菓)

23.35 会合の費用を集めるのに 1000 円ずつ集めれば 200 円余り、950 円ずつ集めれば 300 円足りない。人数は何人か。(ダイハツ工業)

23.36 会費を 1 人 800 円ずつ出すと 1400 円余り、1 人 700 円ずつ出すと 3300 円足りない。クラスの人数は何人か。それと集めるお金はいくらか。(マリネックス)

23.37 ある会社の採用試験で受験生を教室に入れるのに、45 人ずつ入れると 15 人余り、35 人ずつ入れると 45 人ずつ入れるより 1 教室多く使ってもなお 10 人余ることになる。受験生は何人か。ただし、教室の人数はすべて同じである。(トヨタ自動車)

23.38 ノートを生徒に 3 冊ずつ配ると 12 冊余るが、6 冊ずつ配ると最後の 1 人は 1 冊以上 6 冊未満になる。生徒は何人いるか。(電源開発)

23.39 組み立てられた自動車を製品倉庫に入れるのに、1 倉庫あたり 500 台ずつ入れると 1000 台余るが、720 台ずつ入れると最後の倉庫に入る自動車は 500 台より多く、720 台より少ないという。自動車の台数を求めよ。(ダイハツ工業)

23.40 会合の費用を当日の出席者から同額ずつ集めるのに、1 人から 350 円ずつにすれば 600 円だけ余り、310 円ずつにすれば、その中の 1 人だけは他の人より多く出さなければならない。また 320 円ずつ集めれば、最後の 1 人は 220 円以下になるという。当日の会合費の総額を求めよ。(日野自動車工業)

例題 23.6 ある会社の従業員は 1260 名で、これは前年の 5 % の増加となる。男女別にみると男子は 10 % の増加、女子は 20 % の減少となる。現在の男子および女子はおのおの何人か。
(アマダワシノ)

【解】 前年の男子を x 人、女子を y 人とする

$$x + y = 1260 \cdots \textcircled{1}$$

今年の前年に対する増減数をみると、男子は $+0.1x$ 、女子は $-0.2y$ なので

$$0.1x + (-0.2y) = 60$$

$$x - 2y = 600 \cdots \textcircled{2}$$

①、②を解いて、 $x = 1000$ 、 $y = 200$ であるので、
今年の男子は、1000 人の 10 % 増より 1100 人、
今年の女子は、200 人の 20 % 減より 160 人。

(答) 男子 1100 名、女子 160 名

23.41 ある学年の今年の生徒数は、昨年より 24 % 増えて 434 人である。昨年の生徒数は何人であったか。
(中越パルプ工業)

23.42 去年のある会社の社員が、男女あわせて 3750 人であった。今年は去年より男子が 5 % 減り、女子が 10 % 増え、全体で 2 % 減った。
(京阪電気鉄道)

(1) 去年の男、女の数求めよ。

(2) 今年の男子社員数を求めよ。

23.43 ある学校の生徒数は 1,335 名で、これを昨年度と比較すると、男子は 3 % 増加し、女子は 4 % 減少したため、総数で昨年度より 10 名増加になる。現在のこの学校の男女生徒はそれぞれ何名か。
(コスモ石油)

23.44 ある会社の昨年の生徒数が 780 人で、今年は男子が 8 %、女子が 10 % 増加した。また今年は昨年より男女合わせて 72 人増加していた。今年の男子と女子の人数を求めなさい。
(富士通四国インフォテック)

23.45 ある企業の従業員数は 5300 名で昨年に比べて 6 % 増加している。そのうち男子は昨年の男子数の 15 % 増加して、女子は 10 % 減少している。現在の男子と女子の従業員数を求めよ。
(トヨタ自動車)

例題 23.7 甲、乙 2 人の 1 ヶ月の収入の比は 7 : 5、支出の比は 13 : 9 であって残高は共に 7500 円である。両人の 1 ヶ月の収入はそれぞれいくらか。(富士通ビジネスシステム)

【解】 題意より、甲の収入を $7x$ 、乙の収入を $5x$ とし、甲の支出を $13y$ 、乙の支出を $9y$ とすると、

$$7x - 13y = 5x - 9y = 7500$$

を解いて、 $x = 15,000$ 、 $y = 7,500$ なので、

甲の収入は、 $7 \times 15,000 = 105,000$ 円、

乙の収入は、 $5 \times 15,000 = 75,000$ 円。

(答) 甲の収入 105,000 円、乙の収入 75,000 円。

23.46 A村、B村、C村の人口の比が $3:5:6$ で、A村の人口が 5400 人であるとき、他の村の人口はそれぞれ何人か。 (住友大阪セメント)

23.47 糸を 2 つに切って、それらの長さの比を $5:3$ とするとき、2 つの糸の長さの差は 6cm である。もとの糸の長さを求めよ。 (日産ディーゼル)

23.48 甲、乙 2 人の収入の比は $5:3$ で、支出の比は $9:5$ であって、1 年間にともに 60 万円の貯金をしたという。甲、乙 2 人の 1 年間の収入および支出はそれぞれいくらか。 (雪印乳業)

23.49 自動車会社 A、B 両社はいずれも乗用車とトラックを生産している。ある日の両社の生産実績を比較してみたら、総生産台数の比率は $7:9$ であり、そのうち乗用車のみの生産台数の比率は $6:5$ 、またトラックの生産台数はそれぞれ 300 台、820 台であった。両社の総生産台数を求めよ。 (トヨタ自動車)

例題 23.8 A 高校のあるクラスの卒業生のうち、 $\frac{1}{4}$ は進学し、残りの $\frac{5}{6}$ は就職し、残りの 6 人は家事につきました。このクラスの卒業生は全部で何人か。 (リコー)

【解】 クラスの卒業整数を x 人とする、進学者数は $\frac{1}{4}x$ で、進学者以外の人数は $x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$ なので、就職者数は、 $\frac{3}{4}x \times \frac{5}{6} = \frac{5}{8}x$

よって、 $\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}x + 6 = x$ を解いて、 $x = 48$ (答) 48 人

23.50 棒の長さを測るのに、ひもを 3 つ折にしたら 7cm 余り、4 つ折にしたら 4cm 不足した。棒の長さとひもの長さを求めよ。 (日本コロムビア)

23.51 ある家庭で主人の月給の $\frac{1}{10}$ を家賃に、 $\frac{1}{2}$ を食費に、 $\frac{1}{4}$ を衣料その他の諸経費に当て残額 45,000 円を預金するように予算をたてた。主人の月給はいくらか。 (コクヨ)

23.52 あるひもを $\frac{3}{5}$ 使い、その残りを $\frac{3}{4}$ 使うと、その残りが 6cm である。ひもの長さを求めよ。 (コマツ)

23.53 A君は最初の店で所持金の $\frac{1}{4}$ で品物を買ひ、次の店で残りの $\frac{4}{9}$ で品物を買ったところ 2000 円残った。最初の所持金はいくらであったか。(デンソー)

23.54 生徒の $\frac{2}{3}$ が進学し、その残りの $\frac{1}{3}$ が就職し、余りが 8 人であった。クラス全体の人数を求めよ。(東芝)

23.55 あるクラスの卒業生のうち $\frac{1}{3}$ が進学、残りの $\frac{3}{4}$ は会社へ就職し、その残りの 9 人が家業を継いだ。卒業生は何人か。(日産ディーゼル)

23.56 ある学校の去年の生徒数は男女合わせて 1000 人であったが、今年は女子が $\frac{1}{6}$ 増となり、男子は $\frac{1}{8}$ 減となって、合計 980 人になった。現在の男女の生徒数は何人か。(東京ガス)

例題 23.9 食塩 40g を 160g の水に溶かすと何%の食塩水ができるか。(石塚硝子)

【解】 全体の質量は、 $40 + 160 = 200(\text{g})$

$$\text{濃度} = \frac{40}{200} \times 100 = 20(\%) \quad (\text{答}) 20\%$$

解説 $\text{濃度}(\%) = \frac{\text{食塩の質量}}{\text{全体の質量}} \times 100, \quad \text{食塩の質量} = \text{全体の質量} \times \frac{\text{濃度}(\%)}{100}$

23.57 20g の食塩を 80g の水に溶かした時の濃度を求めよ。(TOTO)

23.58 100g の水に 25g の食塩を加えると、何%の食塩水ができるか。(日本化薬)

23.59 5%の食塩水 200g と 10%の食塩水 300g を混ぜると、何%の食塩水ができるか。(日産自動車)

23.60 3%の食塩水 100g がある。それから半分すてて 6%の食塩水 50g を加えると何%の食塩水ができるか。(本田技研工業)

例題 23.10 15%の食塩水 300g を 10%の濃度にするには何 g の水が必要か。(本田技研工業)

【解】 15%の食塩水 300g 中の食塩の質量は、

$$300 \times 0.15 = 45(\text{g})$$

水 x g を加えて 10%の食塩水になるとすれば、

$$45 = (300 + x) \times 0.1$$

$$450 = 300 + x$$

$$x = 150 \quad (\text{答}) 150\text{g}$$

23.61 12%の食塩水 200g を 8%の食塩水にするには水を何 g 加えればよいか. (丸一鋼管)

23.62 8%の食塩水 50g にどれだけの水を入れたら 4%になるか. (アラコ)

23.63 4%の食塩水 120g を 2%にしたい. あと水を何 g 入れると 2%になるか. (田中土建工業)

23.64 4%の食塩水が 120g ある. これに水を加えて濃度を 3%にしたい. 水を何 g 加えればよいか. (日本空港給油)

23.65 5%の食塩水が 200g ある. これを水で薄めて 2%の食塩水にするには何 g の水を加えればよいか. (コマツ)

23.66 8%の食塩水 150g を 6%の食塩水にするには水何 g が必要か. (大日本印刷)

23.67 8%の食塩水 540g がある. これを 9%の食塩水にするにはいくらの水を蒸発させればよいか. (三菱電機)

23.68 10%の食塩水 100g がある. これを 20%の溶液にするには, さらに食塩を何 g 入れればよいか. (世紀東急工業)

23.69 4%の食塩水 400g がある. これに 10%の食塩水を加えて 6%の食塩水を作るとき, 10%の食塩水は何 g 必要か. (YKK)

23.70 10%の食塩水 400g があります. これを 4%以上 8%以下の食塩水にするにはどれほどの水を加えればよいか. (三井造船)

例題 23.11 8%の食塩水と 3%の食塩水を合わせて, 5%の食塩水 600g をつくりたい. それぞれ何 g ずつ入れればよいか. (デンソー)

【解】 8%の食塩水を x g, 3%の食塩水を y g 入れるとする.

$$\begin{array}{ll} \text{(食塩水の質量)} & x + y = 600 \cdots \textcircled{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{(食塩の質量)} & 0.08x + 0.03y = 600 \times 0.05 \cdots \textcircled{2} \end{array}$$

②に 100 を掛けて

$$8x + 3y = 3000 \cdots \textcircled{2}'$$

①, ②' を解いて, $x = 240$, $y = 360$

(答) 3%を 240g, 8%を 360g

23.71 8%の食塩水と20%の食塩水を混ぜ合わせて10%の食塩水600gをつくりたい。8%の食塩水と20%の食塩水を何gとればよいか。(JR)

23.72 5%と10%の食塩水を混ぜあわせて8%の食塩水を500gをつくりたい。それぞれ何gずつ混ぜればよいか。(三菱マテリアル)

23.73 5%の食塩水と8%の食塩水を混ぜて6%の食塩水を3kg作りたい。それぞれどれだけ混ぜるとよいか。(テイゲイ気化器)

23.74 6%の食塩水と3%の食塩水がそれぞれ500gずつある。この2つの食塩水をまぜて5%の食塩水を500gつくるにはそれぞれの食塩水をどれだけずつ混ぜればよいか。(日本コンデンサ工業)

23.75 10%の食塩水に5%の食塩水を混ぜて6%の食塩水を作ろうと思ったところ、5%の食塩水のかわりに誤って同量の水を入れてしまった。できたのは何%の食塩水か。(トヨタ自動車)

23.76 食塩水がA, Bそれぞれの容器に500g入っている。A, Bから200gずつ取り出し、混ぜ合わせたら10%の食塩水ができた。さらにBの残りの300gの食塩水に水を150g入れたら、Aの食塩水と同じ濃度になった。A, Bそれぞれ何%の食塩水か。(日本製紙)

23.77 A, B 2つの食塩水がそれぞれ1kg, 2kgある。AからBへ100g移し、よく混ぜた後、Bの100gをとってAに移すと、Aは9%, Bは18%の濃度になるという。もとのA, Bの濃度はいくらか。(マツダ)

23.78 甲, 乙, 丙の3つの容器に濃度未知の食塩水が入っている。甲, 乙, 丙の容器から等量ずつ取り出して、これを混合すると10%の食塩水となり、甲と乙から重量で2:3の割合で取り出して混合すると7%, 乙と丙から重量で3:2の割合で取り出して混合すると9%の食塩水になるという。甲, 乙, 丙の食塩水の濃度を求めよ。(共同印刷)

例題 23.12 A, B, C, Dの平均身長は171cmで、AはDより8cm高く、CはDより7cm高く、BはAとDの平均より5cm高い。Dの身長を求めよ。(田中土建工業)

【解】 $\frac{A+B+C+D}{4} = 171$ より
 $A + B + C + D = 684 \cdots \textcircled{1}$

また、題意より

$$A = D + 8 \cdots \textcircled{2}$$

$$C = D + 7 \cdots \textcircled{3}$$

$$B = \frac{A + D}{2} + 5 \cdots \textcircled{4}$$

②を④に代入して

$$B = D + 9 \cdots \textcircled{5}$$

②, ③, ⑤を①に代入して

$$(D + 8) + (D + 9) + (D + 7) + D = 684$$

$$4D + 24 = 684$$

$$D = 165 \quad (\text{答}) 165\text{cm}$$

23.79 兄と弟の身長の平均が 172cm で、弟の身長が 158cm とするとき、兄の身長を求めよ。
(日産ディーゼル)

23.80 8回のテストの平均点が 84.5 点であった。9 回目に何点とれば平均点が 85 点になるか。
(第一産業)

23.81 A, B, C, D 4 人の平均身長は 171cm で、A は D より 8cm 高く、B は A と D の平均身長より 5cm 高く、C は D より 7cm 高い。このとき、B の身長を求めなさい。
(富士通)

23.82 ある会社の採用試験の受験者数は合格者の 9 倍であった。試験の成績では不合格者の平均点が 52 点で、受験者全体の平均点は合格者の平均点より 20 点低かった。このときの合格者の平均点は何点であったか。
(リコーエレメックス)

23.83 ある会社の入社試験で、受験者の 25 % が合格した。合格者の平均点は合格基準点より 15 点高く、不合格者の平均点は合格基準点より 25 点低い。また、受験者の平均点は 60 点であった。合格基準点は何点か。
(東芝機械)

例題 23.13 12km 間を行きは時速 4km、帰りは時速 6km で歩いたとしたら、平均時速はいくらか。
(中国電力)

【解】

行きに要する時間は $12 \div 4 = 3(\text{時間})$

帰りに要する時間は $12 \div 6 = 2(\text{時間})$

よって、往復 24km に 5 時間を要したので、

$$24 \div 5 = 4.8(\text{時間}) \quad (\text{答}) \text{時速 } 4.8\text{km}$$

23.84 C I V I Cで1周6kmのコースを5分で走ったときの平均時速はいくらか。
(本田技研工業)

23.85 片道60kmの道を自動車で、往きは時速30km、帰りは時速20kmで往復した。自動車の平均時速を求めよ。
(トヨタ自動車)

23.86 行きは時速40km、帰りは時速60kmで行く車の平均時速を求めよ。(九州産交)

例題 23.14 甲はある距離を毎時4kmで行った。乙は毎時5kmの速さで行ったので、甲よりも2時間早くついた。距離を求めよ。(村田機械)

【解】 距離を x kmとすると、甲の要する時間は $\frac{x}{4}$ 、乙の要する時間は $\frac{x}{5}$ なので、題意より

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 2$$

$$\text{両辺に20をかける} \quad 5x - 4x = 40$$

$$x = 40 \quad (\text{答})40\text{km}$$

23.87 ある距離を30km/hで走ると1時間遅れて、36km/hで走ると30分早く着く。この距離を求めよ。
(本田技研工業)

23.88 25km/hで行くと1時間遅れ、30km/hで行くと1時間早く着く。この時の距離とどれくらいの速さで行けば時間どおりに着くか。
(日産自動車)

23.89 A地点からB地点へ行くのに、行きは3km/h、帰りは5km/hの速さで往復すると時間が4時間かかった。A B間の距離を求めよ。(富士通四国インフォテック)

23.90 A, B地区間60kmあるところを往復する自動車がある。帰りには毎時の速さ5km/hだけ増加したため、行きよりも24分早くついた。自動車の往きの速度はいくらですか。
(ブルトザー工業)

例題 23.15 A君は甲地から7km離れた乙地へ行くのに、はじめ自転車で毎時10kmの速さで行ったが、途中で自転車がこわれた。それで毎時4kmの速さで歩いて行ったので、全体で1時間かかった。自転車のこわれた地点は甲地から何kmの地点か。
(三共)

【解】 甲地から自転車のこわれた地点までの距離を x km、こわれた地点から乙地までの距離を y kmとすると

(距離) $x + y = 7 \cdots \textcircled{1}$

(時間) $\frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1 \cdots \textcircled{2}$

①, ②を解いて, $x = 5, y = 2$ (答)5km

23.91 山田君は家から 30km 離れた A 公園にサイクリングに出かけた。出発したのは午前 8 時で、最初は毎時 10km の速さで走っていたが、途中でパンクしたので 15 分間の手間がかかった。そこで修理後は毎時 15km の速さで走ったが、目的地の 5km 手前の橋を通過した際は、ちょうど 10 時 5 分であった。パンクした場所は家から何 km の地点か。 (クボタ)

23.92 ある列車が A 駅を出て 40km のところで機関車に故障を起こしたため、その後は速さを毎時 20km だけ落した。そのため A 駅から 120km 離れた B 駅へ予定より 40 分遅れて着いた。この列車の初めの速さを求めよ。 (京王帝都電鉄)

例題 23.16 ある汽車が長さ 150m ある鉄橋にさしかかって全て通過するまでに 17 秒かかる。また、420m のトンネルにさしかかって全て通過するまでに 35 秒かかる。汽車の時速と長さを求めよ。 (川鉄運輸)

【解】 汽車の長さを x m, 速さを秒速 y m とすると,

$$y = \frac{x + 150}{17} = \frac{x + 420}{35}$$

これを解いて, $x = 105, y = 15$ (秒速 15m は時速 54km)

(答)105m, 時速 54km

23.93 長さ 75m の汽車が 175m の駅を 9 秒で通り過ぎるときの時速を求めよ。 (京セラ)

23.94 秒速 25m の汽車が 1400m のトンネルをぬけるのに 1 分かかりました。汽車の長さは何 m ですか。 (山崎製パン)

23.95 電車が 240m の橋を渡りきるのに 16 秒かかり、電車の一番前が通るのに 12 秒かった。電車の長さとき速を求めよ。 (平田機工)

23.96 長さ 75m の列車が時速 54km の速さで走っている。この列車が、トンネルに入る 15 秒前に汽笛をならしてから 2 分 45 秒後に完全にトンネルを出た。トンネルの長さは何 m か。 (富士通ビジネスシステム)

23.97 普通列車は時速 75km, 急行列車は時速 100km で走ります. いま普通列車が A 駅を発車したのち, 6 分遅れて急行列車が発車しました. 急行列車が普通列車に追いつくのは A 駅から何 km 離れた地点ですか. また, 普通列車に追いつくのは急行列車が A 駅を発車して何分後ですか. (京阪急行電鉄)

例題 23.17 流れの速さが毎時 5km の川上にある甲町と川下の乙市間を通っている定期船で, 乙市から甲町に行くのには 8 時間, 甲町から乙市は 6 時間かかる. 船の速さと, 甲乙間の距離を求めよ. (TOTO)

解説 船の速さを毎時 x km とすると, 流速は毎時 5km なので,
上りの速さは $(x - 5)$ km, 下りの速さは $(x + 5)$ km

【解】 船の速さを毎時 x , 甲乙間の距離を y km とすると

$$y = 8(x - 5) = 6(x + 5)$$

これを解いて, $x = 35$, $y = 240$

(答) 船の速さは毎時 35km, 甲乙間の距離は 240km

23.98 流れの速さが毎時 8km の川を, 汽船が A 町から B 町まで運行している. A 町から B 町まで下りで 5 時間かかり, 川をさかのぼって B 町から A 町へ行くのに 15 時間かかった. この船の静水での速さは毎時何 km か. また, A 町と B 町の距離はいくらか. (大同特殊鋼)

23.99 ある舟が 96km の川を往復するのに, 下りは 8 時間, 上りは 12 時間かかったという. この舟の静水での速さと流速を求めよ. (佐世保重工)

23.100 川下の甲地より 12km 川上にある乙地まで, 時速 5km の船で往復して 5 時間かかった. 川の流れは一定であるとするとき, 川の流れは時速何 km か. (日本化薬)

23.101 川に沿って 12km 離れた 2 つの町がある. この間を時速 7km の船が上下するのに 3 時間 44 分要した. 川の流れが一定であるとして, このとき川の流速を求めよ. (宇部興産)

23.102 流速 3km/h の川で片道 5km を往復するのに 1 時間 15 分かかったという. この船の時速を求めよ. (積水化学工業)

23.103 流れの速さが毎時 2km の川で, 16km の距離を船で往復するのに 2 時間 20 分かかるといふ. 船の静水での速さを求めよ. (日本水産)

23.104 流れの速さが毎時 3km の川で 20km 離れた上流，下流の地点 A，B 間を船で往復するのに 7 時間かかったという．この船の静水での速さを求めなさい．(三洋化成工業)

例題 23.18 5 人で 25 日かかる仕事を， x 人で y 日で仕上げるとき， y を x の式で表せ．(三共)

【解】 仕事にかかる延べ人数は， $5 \times 25 = 125$ なので，

$$xy = 125 \quad \text{から} \quad y = \frac{125}{x}$$

23.105 12 人ならば 20 日で仕上げる予定の仕事を，予定より 4 日早く仕上げるには，何人増やせばよいか．(凸版印刷)

23.106 1 冊の本を，毎日 23 ページずつ読むと 26 日目に読み終わり，また 34 ページずつ読めば，17 日目に読み終わる．毎日 14 ページずつ読めば何日目に読み終わるか．(安川電機)

23.107 自動車のある部品を加工するのに，専用機 3 台と汎用機 2 台を使用すると，5 時間に 295 個加工することができます．また専用機 6 台を 3 時間，汎用機 4 台を 7 時間使用すると 418 個加工することができます．専用機，汎用機おのこの 1 台で 1 時間に何個加工することができますか．(日産自動車)

23.108 6 日間かかって $\frac{2}{3}$ を仕上げた．全部仕上げるのに何日かかるか．(豊生ブレーキ)

例題 23.19 A 1 人なら 20 日，B 1 人なら 30 日かかる仕事がある．この仕事を 2 人ですると何日かかるか．(本田技研工業)

【解】 2 人で 1 日に仕事全体の $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$ だけするので，

2 人ですると 12 日かかる．(答)12 日

解説

I) 1 人で a 日で仕上げる $\iff$ 1 人で 1 日に全体の $\frac{1}{a}$ だけ仕上げる

II) $\left\{ \begin{array}{l} \text{甲だけで } a \text{ 日,} \\ \text{乙だけで } b \text{ 日で} \\ \text{仕上げる} \end{array} \right\} \iff \text{共同で 1 日に } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \text{ だけ仕上げる}$

23.109 Aは10日で、Bは15日で仕事を終える。二人ですると何日かかるか。(佐伯建設工業)

23.110 Aは札束を数えるのに3時間かかり、Bは2時間かかる。二人が一緒に数えると何時間何分で終わるか。(今西組)

23.111 A、B 2人ですると20日かかる仕事を、A 1人ですると30日かかるという。B 1人では何日かかるか。(ブラザー工業)

23.112 ある仕事をAが30日で、Bが20日で、Cが15日で仕上げるという。このとき、AとBがそれぞれ8日間仕事をしたとすれば、Cが何日仕事をすれば仕上がりますか。(日本航空)

23.113 ある器の中へA管で注水すると50分、B管では20分かかる。A管で30分注水し、その後B管だけで注水すればあと何分で満水になるか。(本田技研工業)

23.114 ある仕事をなしとげるのにA君、B君、C君が一緒にやれば5日かかり、A君とB君とでやれば6日かかり、B君とC君ならば10日かかる。A君、B君、C君が1人でやれば何日かかるか。(タツタ電線)

23.115 水槽に水を入れるのに、A、B 2管を使うと3時間、B、C 2管を使うと4時間、A、C 2管を使うと6時間で満水となる。A、B、C 3管を同時に使えば、何時間で満水にできるか。(日石三菱)

23.116 ある石油タンクに重油を満たすのに、ポンプA、B、Cの3つが使えるが、それぞれ単独に使った場合にはAでは30分、Bでは24分、Cでは18分かかる。いまポンプAで注油し始めたが、12分たったところで故障してしまった。直ちに今度はBとCの2つのポンプに切り換えて注油を終わった。Aで注油し始めてから満タンになるまで、何分かかったことになるか。(昭和シェル石油)

23.117 A、B、C 3人共同してある工事に取りかかり、8日でその半分を終えた後Cが去りました。A、B共同でなお8日間働いて残りの $\frac{3}{5}$ を終えた後Bもまた去りました。よってその残りをAだけで完成させるのに12日を要しました。A、B、Cのおのみの単独ではこの工事を幾日で仕上げることができますか。(横河橋梁)

例題 23.20 甲1人で働くと60日、乙1人で働くと40日かかる仕事がある。これを甲が初め働いて途中で乙に代わって働くと50日かかる。甲と乙はそれぞれ何日働いたか。(NEC)

【解】 甲は x 日, 乙は y 日働いたとすると,

$$x + y = 50 \cdots \textcircled{1}, \quad \frac{x}{60} + \frac{y}{40} = 1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②を解いて, $x = 30, y = 20$ (答) 甲 30 日, 乙 20 日

23.118 甲 1 人なら 20 日かかり, 乙 1 人なら 30 日かかる仕事を, 最初甲 1 人で何日か働いて, その残りを乙 1 人で引き受け, 乙は甲より 10 日多く働いて仕上げた. 甲は何日働いたことになるか. (中越パルプ工業)

例題 23.21 甲, 乙 2 人で働けばある日数で完成する仕事がある. 今この仕事を甲だけですれば 18 日遅れ, 乙だけですれば 32 日遅れるという. このとき, 甲だけで完成するには何日かかるか. また, 乙だけで完成するには何日かかるか. (クボタ)

【解】 2 人で n 日で完成すると, 題意より甲 1 人では $n + 18$ 日, 乙 1 人では $n + 32$ 日で完成することになる. このとき,

甲は 1 日に仕事全体の $\frac{1}{n + 18}$, 乙は 1 日に仕事全体の $\frac{1}{n + 32}$ をすることになり, また 2 人では 1 日に仕事全体の $\frac{1}{n}$ をするので

$$\frac{1}{n + 18} + \frac{1}{n + 32} = \frac{1}{n}$$

この両辺に $n(n + 18)(n + 32)$ を掛けると

$$\begin{aligned} n(n + 32) + n(n + 18) &= (n + 18)(n + 32) \\ 2n^2 + 50n &= n^2 + 50n + 18 \times 32 \\ n^2 &= 24^2 \\ n > 0 \quad \text{なので} \quad n &= 24 \end{aligned}$$

よって, 甲だけで, $24 + 18 = 42$ (日), $24 + 32 = 56$ (日)
(答) 甲 42 日, 乙 56 日

23.119 A, B の機械がある. 2 台の機械を使ってある日数で仕上げる仕事がある. A だけを使うと 4 日遅れ, B だけを使うと 9 日遅れて完成する. A だけを使うと何日かかるか. (前田建設工業)

例題 23.22 短針と長針が 6 時から 7 時の間で重なる時刻を秒単位まで正確に求めよ. (ソニー)

解説 x 分間に回転する角度：長針 $(6x)^\circ$ ，短針 $(\frac{1}{2}x)^\circ$

【解】 6時 x 分に重なるとすると，題意より

$$6x = 180 + \frac{1}{2}x$$

$$12x = 360 + x$$

$$11x = 360$$

$$x = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$$

よって，6時 $32\frac{8}{11}$ 分 = 6時 32分 $\frac{480}{11}$ 秒 = 6時 32分 $43\frac{7}{11}$ 秒

23.120 4時と5時との間で，時計の両針が重なる時刻を求めよ． (味の素)

例題 23.23 ある長方形の周囲は 42m であり，面積は 80m^2 であった．2 辺の長さを求めよ． (愛知電機)

【解】 縦を $x\text{m}$ ，横を $y\text{m}$ とすると，題意より

$$x + y = 21, \quad xy = 80$$

を解いて， $(x, y) = (5, 16), (16, 5)$ (答)5m と 16m

23.121 周囲 40m の長方形がある．いまその縦を 2m 増し，横を 2m 減らすと正方形になるという．もとの長方形の縦と横の長さを求めよ． (旭産業)

23.122 26cm の長さの針金を使って長方形をつくるとき，面積が 42cm^2 になるようにするには縦と横の長さをいくらにすればよいか． (王子製紙)

23.123 長さ 24cm の針金を折り曲げて長方形をつくり，その面積が 27cm^2 となるようにするには，2 辺の長さをそれぞれいくらにすればよいか． (日産ディーゼル)

例題 23.24 周囲が 14m で対角線の長さが 5m の長方形がある．この長方形の面積を求めよ． (東京ガス)

【解】 縦の長さを $x\text{ m}$ ，横の長さを $y\text{ m}$ とすると，

題意より $x + y = 7 \cdots \textcircled{1}$

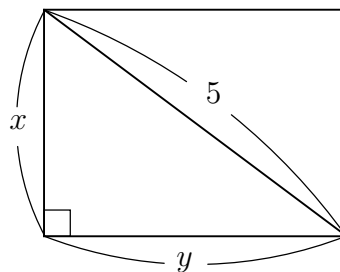
三平方の定理より $x^2 + y^2 = 5^2 \cdots \textcircled{2}$

①，②を解いて

$$(x, y) = (3, 4), (4, 3)$$

よって，面積は， $3 \times 4 = 12\text{m}^2$

(答) 12m^2



23.124 周囲の長さが 70cm で対角線の長さが 25cm である長方形の短辺と長辺の長さを求めよ. (凸版印刷)

23.125 一辺が 3m, 4m の 2 つの正方形の面積の和に等しい面積をもつ正方形の一辺の長さを求めよ. (旭産業)

23.126 ある 2 つの正方形を合わせた土地がある. その広さは 369m^2 で、その大きい方の正方形の 1 辺は、小さい方の正方形の 1 辺より 3m だけ長いという. この 2 つの正方形の土地の 1 辺の長さは、それぞれ何 m か. (武田薬品工業)

23.127 縦 1m, 横 2m のテーブルがある. これに広さが 3 倍である長方形のテーブル掛けをかけて、縦も横も同じ長さだけたれ下がるようにしたい. テーブル掛けの縦、横の長さをいくらにすればよいか. (安川電機)

23.128 横の長さが縦の長さより 4m だけ短い長方形がある. この長方形の横、縦の長さをいずれも 3m ずつ短くするとその面積はもとの面積の半分よりも 9m^2 だけ小さくなるという. もとの長方形の面積を求めよ. (昭和電線)

23.129 長方形の縦の長さは横の長さより 2cm 短い. また、縦を 3cm, 横を 4cm おのおの延長すると、元の面積より 53cm^2 大きくなります. 元の長方形の縦と横の長さを求めて下さい. (大阪鋼材)

23.130 周囲 80m の長方形の土地がある. 縦を 5m 短くし、横を 2m 伸ばしても元の面積と同じです. 元の長方形の縦の長さは何 m であるか. (関配)

23.131 直角をはさむ二辺のうち一辺が 25cm, 他の一辺が斜辺より 5cm 短い直角三角形がある. 他の一辺と斜辺を求めよ. (松下電工)

例題 23.25 直角三角形がある. その周の長さは 48cm^2 , 面積は 96cm^2 である. 3 辺の長さを求めよ. (ダイハツ)

【解】 直角をはさむ 2 辺を $x\text{ cm}$, $y\text{ cm}$, 斜辺を $z\text{ cm}$ とすると、題意より

$$x^2 + y^2 = z^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$x + y + z = 48 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\frac{1}{2}xy = 96 \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \text{より } (x + y)^2 - 2xy = z^2 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$$\textcircled{2} \text{より } x + y = 48 - z \quad \dots \textcircled{2}'$$

$$\textcircled{3} \text{より } xy = 192 \quad \dots \textcircled{3}'$$

②' と ③' を ①' に代入すると

$$\begin{aligned}(48 - z)^2 - 2 \cdot 192 &= z^2 \\ 48^2 - 2 \cdot 48z + z^2 - 8 \cdot 48 &= z^2 \\ 48^2 - 2 \cdot 48z - 8 \cdot 48 &= 0 \\ 48 - 2z - 8 &= 0 \\ z &= 20\end{aligned}$$

$z = 20$ を ②' に代入して $x + y = 28 \cdots \textcircled{4}$

③' と ④から $(x, y) = (12, 16), (16, 12)$

(答)12cm, 16cm, 20cm

23.132 面積が 30cm^2 の直角三角形の斜辺が、他の2辺の和より4cm短いという.
斜辺の長さを求めよ. (東邦ガス)

23.133 横が縦より5cm短い長方形の四隅を $3\text{cm} \times 3\text{cm}$ ずつ切り離し、フタのない箱を作った時の容量は 72cm^3 だった. このとき、長方形の縦と横の長さを求めなさい. (日立研究所)

第 24 章 点と座標

(平面上の 2 点間の距離)

2 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 間の距離 AB は

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

特に、原点 $O(0, 0)$ と $P(x, y)$ の距離 OP は

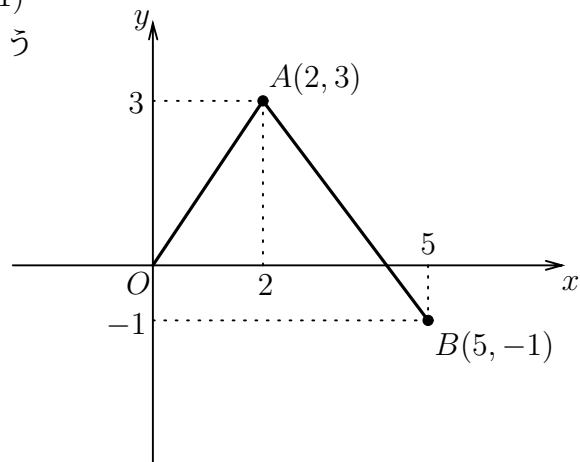
$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$

例 24.1

原点 $O(0, 0)$ と 2 点 $A(2, 3)$, $B(5, -1)$ があるとき、距離 AB , OA は、次のようになる.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(5 - 2)^2 + (-1 - 3)^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} = 5 \end{aligned}$$

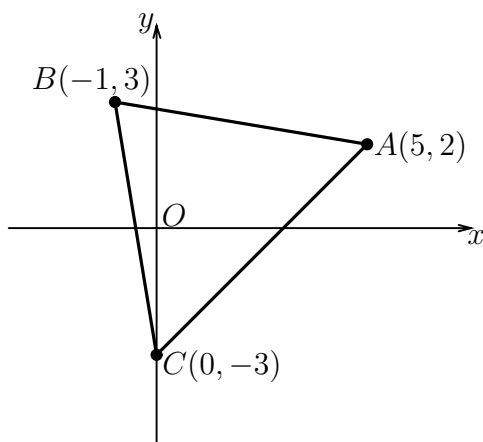
$$OA = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$



24.1 次の 2 点間の距離を求めよ.

- (1) $A(7, 5)$, $B(4, 1)$ (東洋倉庫)
- (2) $A(-3, 2)$, $B(3, -6)$ (東洋倉庫)
- (3) $A(-12, 0)$, $B(0, 16)$ (武田薬品工業)
- (4) $A(8, -7)$, $B(-4, -2)$ (東洋倉庫)

24.2 平面上の3点の座標をそれぞれ $A(5, 2)$, $B(-1, 3)$, $C(0, -3)$ とするとき、 $\triangle ABC$ の3辺の長さを求めよ。
(東北電力)



24.3 次の各点を頂点とする $\triangle ABC$ はどんな三角形か。

(1) $A(6, 5)$, $B(5, 0)$, $C(-2, 4)$ (デンソー)

(2) $A(-1, 1)$, $B(1, -1)$, $C(5, 3)$ (トヨタ自動車)

例題 24.2 2点 $A(0, 3)$, $B(5, 2)$ から等しい距離にある x 軸上の点 P の座標を求めよ。

【解】 点 P は x 軸上にあるから、

点 P の座標を $(x, 0)$ とする。

$$\begin{aligned} AP &= \sqrt{(x-0)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + 9} \end{aligned}$$

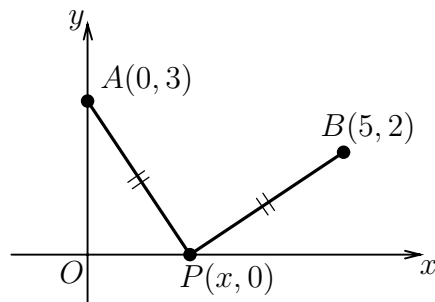
$$\begin{aligned} BP &= \sqrt{(x-5)^2 + (0-2)^2} \\ &= \sqrt{(x-5)^2 + 4} \end{aligned}$$

$AP = BP$ であるから

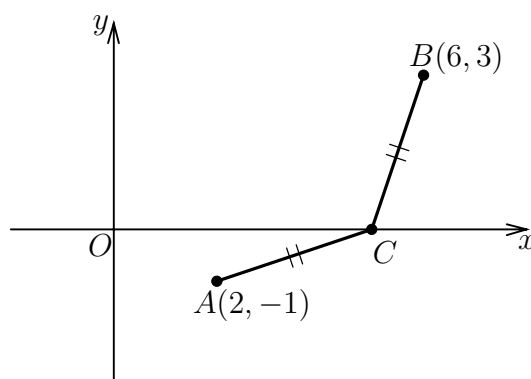
$$AP^2 = BP^2$$

$$\text{したがって } x^2 + 9 = (x-5)^2 + 4$$

これを解いて $x = 2$ よって、点 P の座標は $(2, 0)$



24.4 x 軸上において、2点 $A(2, -1)$, $B(6, 3)$ から等距離にある点 C の座標を求めよ。
(ダイハツ)



(平面上の分点の座標) 2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を

$$m:n \text{ に内分する点の座標は } \left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n} \right)$$

$$\text{特に, 中点の座標は } \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$m:n \text{ に外分する点の座標は } \left(\frac{-nx_1 + mx_2}{m-n}, \frac{-ny_1 + my_2}{m-n} \right)$$

例題 24.3 2点 $A(8, 7)$, $(2, -8)$ があるとき、次の点の座標を求めよ。

(1) 線分 AB を $1:2$ に内分する点 $P(x, y)$

(2) 線分 AB の中点 $M(x, y)$

(3) 線分 AB を $3:2$ に外分する点 $Q(x, y)$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad x &= \frac{2(8) + 1(2)}{1+2} = \frac{16+2}{3} = 6 \\ y &= \frac{2(7) + 1(-8)}{1+2} = \frac{14-8}{3} = 2 \quad P(6, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x &= \frac{8+2}{2} = 5 \\ y &= \frac{7+(-8)}{2} = -\frac{1}{2} \quad M\left(5, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

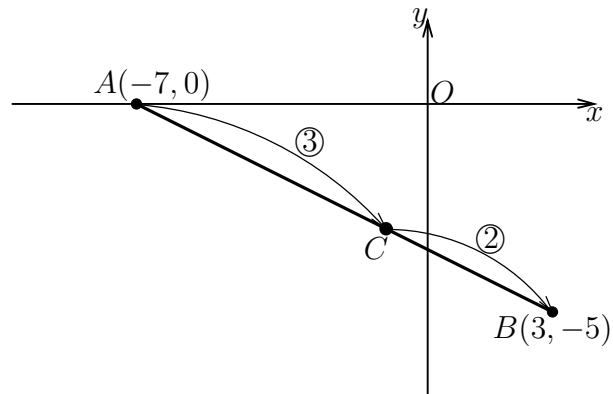
$$\begin{aligned} (3) \quad x &= \frac{-2(8) + 3(2)}{3-2} = \frac{-16+6}{1} = -10 \\ y &= \frac{-2(7) + 3(-8)}{3-2} = \frac{-14-24}{1} = -38 \quad Q(-10, -38) \end{aligned}$$

24.5 2点 $A(3, 2)$, $B(8, 5)$ を結ぶ線分 AB を $3:2$ に内分および外分する点の座標を求めよ. (京阪神急行)

24.6 $A(5, 8)$, $B(3, 2)$ であるとき, 線分 AB の中点の座標を求めよ. (北海道拓殖銀行)

24.7 2点 $A(-4, 0)$, $B(0, 3)$ がある. 線分 AC の中点が B であるとき, 点 C の座標を求めよ. (間組)

24.8 2点 $A(-7, 0)$, $B(3, -5)$ を結ぶ線分 AB を $3:2$ に内分する点 C , 及び AB 間の距離を求めよ. (日産自動車)



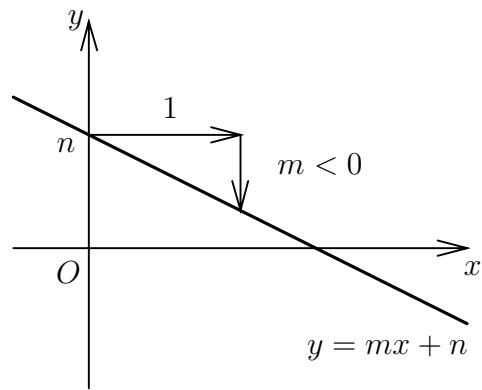
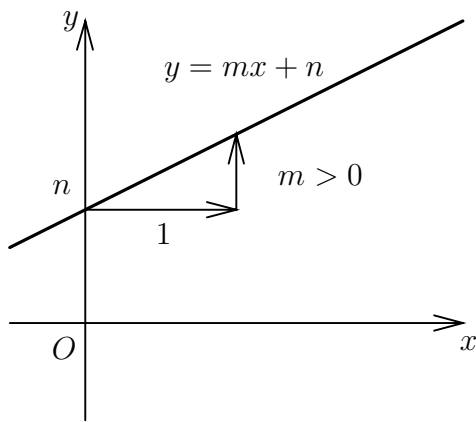
24.9 2点 $A(-1, 3)$, $B(5, 0)$ について次の問いに答えよ. (NEC)

- (1) AB 間の距離
- (2) 線分 AB を $2:1$ に内分する点
- (3) 線分 AB を $1:4$ に外分する点

第 25 章 直線の方程式

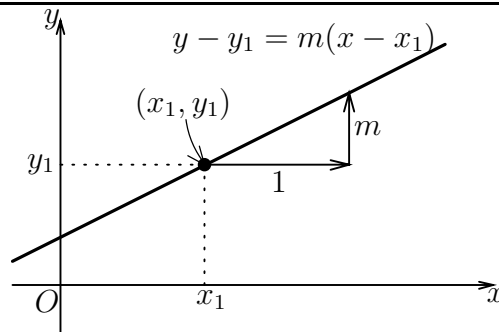
(直線の方程式) 傾きが m , 切片が n の直線の方程式は

$$y = mx + n$$



(直線の方程式) 点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m の直線の方程式は

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



例 25.1 点 $A(2, -5)$ を通り、傾きが 3 の直線の方程式は、

$$y - (-5) = 3(x - 2)$$

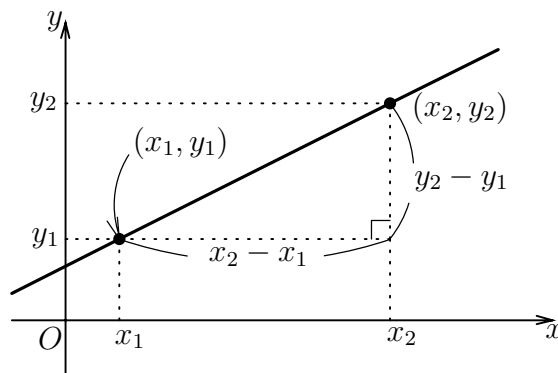
整理すると $y = 3x - 11$

25.1 次の直線の方程式を求めよ.

- (1) 点 $(1, 5)$ を通り, 傾きが 3 の直線 (日産ディーゼル)
- (2) 点 $(0, -1)$ を通り, 傾きが 2 の直線 (日立造船)
- (3) 傾きが $\frac{1}{2}$ で, 点 $(0, 3)$ を通る直線 (愛知製鋼)
- (4) 傾きが $-\frac{1}{2}$ で, 点 $(1, 2)$ を通る直線 (近畿コンクリート)
- (5) 傾きが $-\frac{1}{3}$ で, 点 $(1, -5)$ を通る直線 (日本飛行機)
- (6) 点 $(5, 2)$ を通り, x 軸の正の向きとなす角が 60° である直線 (富士通)

(直線の方程式) 2点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) を通る直線の方程式は, $x_1 \neq x_2$ のとき

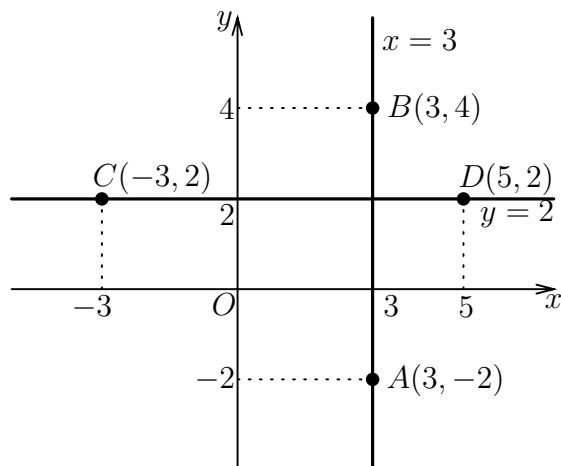
$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \text{ただし, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ である.}$$



なお, x 座標が等しい 2 点を通る直線は y 軸に平行となり, また, y 座標が等しい 2 点を通る直線は x 軸に平行となる.

例 25.2

- (1) 2点 $A(3, -2)$, $B(3, 4)$ を通る
直線の方程式は $x = 3$
- (2) 2点 $C(-3, 2)$, $D(5, 2)$ を通る
直線の方程式は $y = 2$



例題 25.3 2 点 $(1, 4)$, $(2, 7)$ を通る直線の方程式を求めよ. (新日鉄八幡)

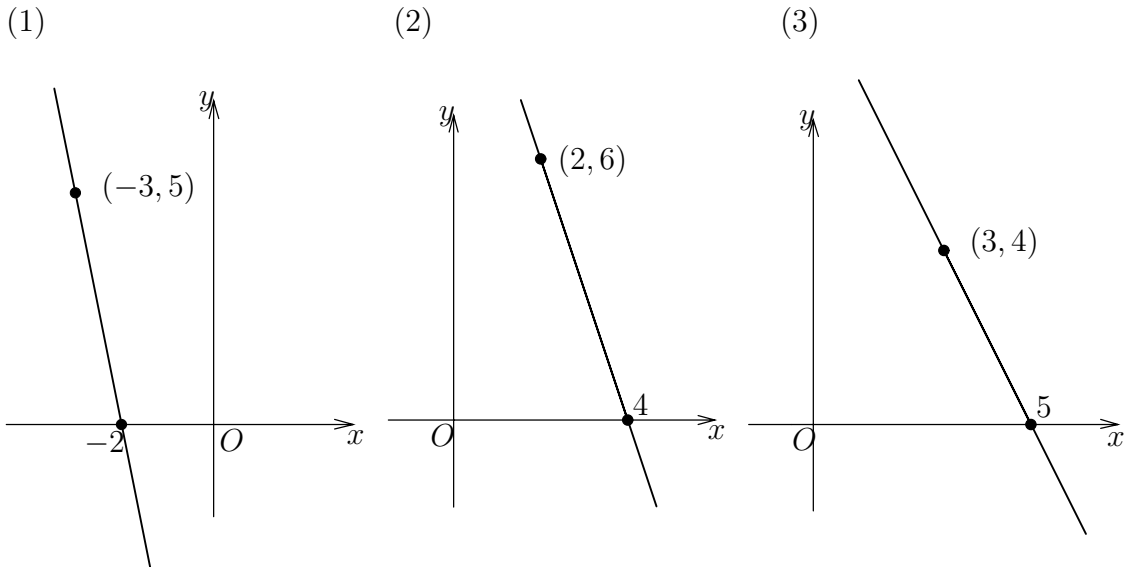
【解】 この直線の傾き m は, $m = \frac{7-4}{2-1} = 3$ であり, 点 $(1, 4)$ を通るので,

$$\begin{aligned} y - 4 &= 3(x - 1) \\ y &= 3x + 1 \end{aligned}$$

25.2 次の直線の方程式を求めよ.

- (1) 2 点 $(2, 3)$, $(5, 0)$ を通る直線 (日本飛行機)
- (2) 2 点 $(-2, 5)$, $(4, 1)$ を通る直線 (NTT)
- (3) 2 点 $(2, 3)$, $(5, 7)$ を通る直線 (日本特殊機器)
- (4) 2 点 $(4, 5)$, $(1, 7)$ を通る直線 (富士通VLSI)
- (5) 点 $(10, 2)$ および点 $(2, -2)$ を通る直線 (東京光学)
- (6) y 軸を 6 の点で, x 軸を 4 の点で切る直線 (芝浦製鋼)

25.3 次の直線の方程式を求めよ. (愛知製鋼)

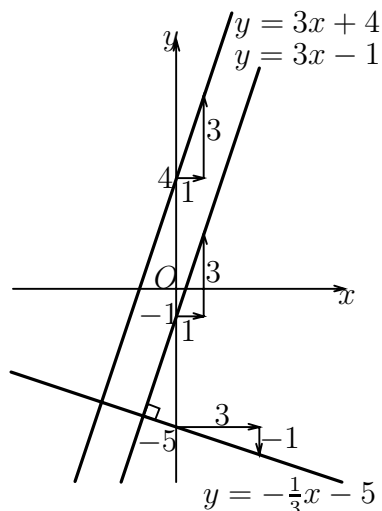


(2 直線の平行と垂直) 2 直線 $y = mx + n$, $y = m'x + n'$ が

平行のとき $m = m'$
 垂直のとき $mm' = -1$

例 25.4

- (1) 2直線 $y = 3x - 1$ と $y = 3x + 4$
は平行である.
- (2) 2直線 $y = 3x - 1$ と $y = -\frac{1}{3}x + 4$
は垂直である.



25.4 次の直線のうち平行となるものと、垂直になるものを2組ずつあげよ。(西日本新聞)

- (1) $2x = 3y - 5$ (2) $3x + 2y = 5$ (3) $3x - 5y = 8$
 (4) $x - 3y = 5$ (5) $6y = 2x + 7$ (6) $y = \frac{2}{3}x$

例題 25.5 点 $(2, 1)$ を通って、直線 $2x + y - 3 = 0$ に平行および垂直な直線の方程式を求めよ。(旭化成)

【解】 $2x + y - 3 = 0$ を変形して
 $y = -2x + 3$ となるから、
 この直線の傾きは -2 である.

よって、平行な直線の方程式は

$$y - 1 = -2(x - 2)$$

すなわち $y = -2x + 5$

垂直な直線の傾きを m とすれば

$$-2m = -1 \quad \text{から} \quad m = \frac{1}{2}$$

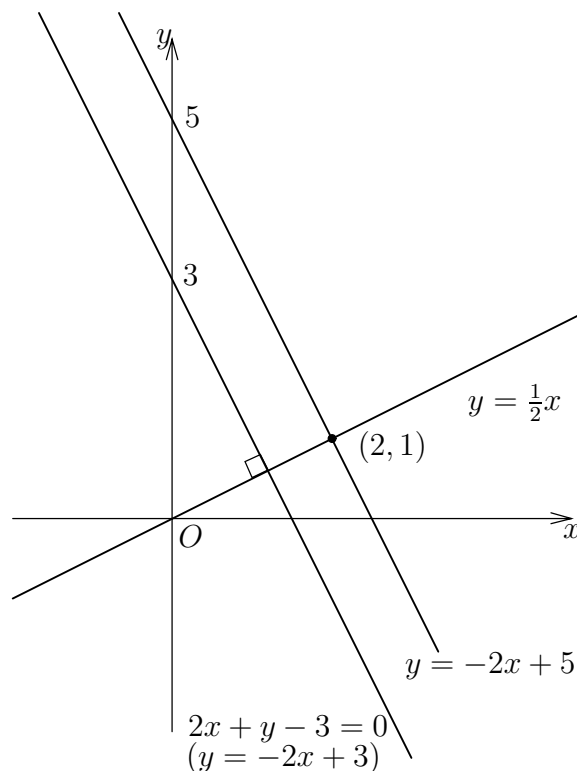
よって、垂直な直線の方程式は

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 2)$$

すなわち $y = \frac{1}{2}x$

(答) 平行な直線 $y = -2x + 5$

垂直な直線 $y = \frac{1}{2}x$



25.5 次の直線の方程式を求めよ.

- (1) 点 $(2, -3)$ を通り, 直線 $y = 2x + 3$ に平行な直線 (シチズン)
- (2) 2 点 $A(-4, 2)$, $B(4, -5)$ を通る直線に平行で $P(3, 4)$ を通る直線 (鐘淵化学工業)
- (3) 点 $(3, 2)$ を通り, 直線 $y = 4x - 1$ に垂直な直線 (きんでん)
- (4) 点 $(2, 2)$ を通り, 直線 $x + 4y + 8 = 0$ と直交する直線 (日本道路公団)
- (5) 直線 $2x + 3y - 3 = 0$ と垂直に交わり, 点 $(4, 6)$ を通る直線 (トヨタ自動車)
- (6) 点 $(2, 5)$ を通り, 2 点 $(-3, -3)$, $(1, 5)$ を通る直線に垂直な直線 (ノリタケ)

25.6 次の条件を満たす直線の方程式を求めなさい. (富士通 V L S I)

- (1) 点 $(2, 1)$ を通り, $3y = x - 4$ に平行な直線
- (2) 点 $(-2, 1)$ を通り, $2x - y - 5 = 0$ に垂直な直線

25.7 2 直線 $mx - y - 7 = 0$, $(2m - 3)x - y + 5 = 0$ が平行となるような m の値を求めなさい. また, 垂直に交わるような m の値を求めなさい. (トヨタ自動車)

25.8 2 直線 $6x + (2a - 1)y = 8$, $(a + 2)x + (a + 3)y = -3$ について, 次の問いに答えよ. (NEC フィールドサービス)

- (1) 2 直線が平行であるように a の値を定めよ.
- (2) 2 直線が垂直であるように a の値を定めよ.

例 25.6
2 直線

$$y = -x + 5 \quad \text{①}$$

$$y = 2x - 1 \quad \text{②}$$

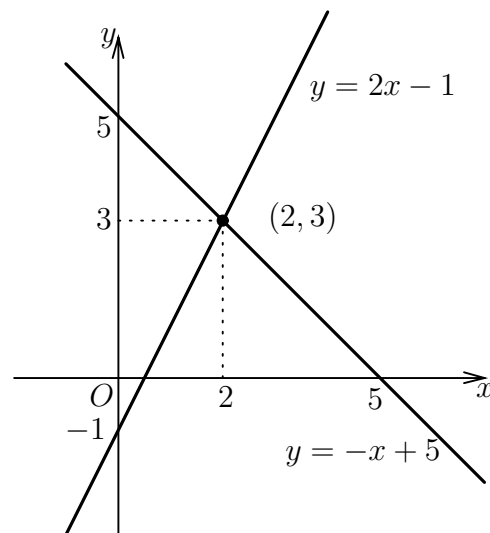
の交点の座標は, ①, ②の両方を満たすことから, 連立方程式

$$\begin{cases} y = -x + 5 & \cdots \text{①} \\ y = 2x - 1 & \cdots \text{②} \end{cases}$$

を解くと,

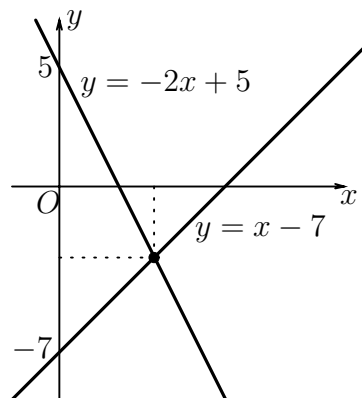
$$x = 2, y = 3$$

よって, 交点の座標は $(2, 3)$ である.



問 25.7

2直線 $y = x - 7$, $y = -2x + 5$ の
交点の座標を求めよ.



【答】 $(4, -3)$

25.9 2直線 $2x + 3y - 3 = 0$, $2x - 3y - 5 = 0$ の交点と原点 $(0, 0)$ を通る直線の傾きを求めなさい.
(トヨタ自動車)

25.10 直線 $x - 2y + 4 = 0$, $x - y - 5 = 0$ の交点と、原点を結ぶ直線の方程式を求めよ.
(日新製鋼)

25.11 2直線 $y = 2x + 5$, $x - 3y = 5$ の交点と点 $(-5, 0)$ を通る直線の方程式を求めよ.
(ヂーゼル機器)

25.12 2直線 $x + y - 1 = 0$, $2x - y + 4 = 0$ の交点を通り、直線 $x + 2y = 8$ に垂直な直線の方程式を求めよ.
(トヨタ車体)

例題 25.8 2点 $A(-3, 1)$, $B(1, -5)$ を結ぶ線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ.

【解】 2点 A , B を通る直線を ℓ とすると、
 ℓ の傾き m は、

$$m = \frac{-5 - 1}{1 - (-3)} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

線分 AB の中点 $M(x_1, y_1)$ の座標は、

$$x_1 = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

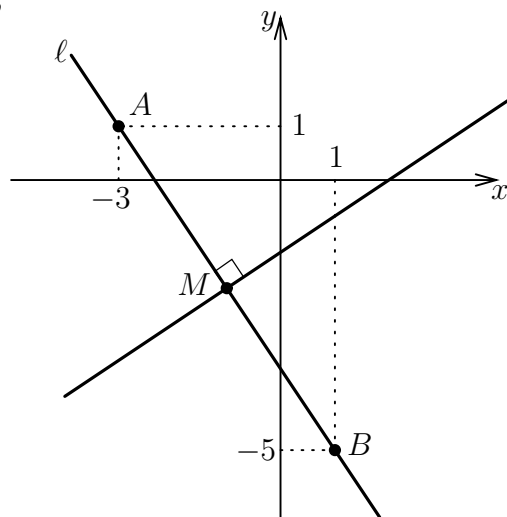
$$y_1 = \frac{1 + (-5)}{2} = -2$$

ℓ に垂直な直線の傾き m' は、

$$-\frac{3}{2}m' = -1 \quad \text{から} \quad m' = \frac{2}{3}$$

よって、 $y - (-2) = \frac{2}{3}\{x - (-1)\}$

整理して $y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$



25.13 A, B の座標をそれぞれ $(0, 2), (4, -1)$ とするとき、線分 AB の垂直二等分線の方程式を求めよ。(シチズン)

25.14 2点 $A(2, 0), B(4, 3)$ の垂直二等分線の方程式を求めよ。(NTT)

25.15 次の をうめよ。(大阪ガス)

(1) 方程式 $4x + 3y = 12$ のグラフは点 $(1, \text{ })$, 点 $(\text{ }, 2)$ を通る。

(2) 座標軸とこのグラフによって囲まれる部分の面積は である。

(3) このグラフを平行移動して、原点を通るようにすれば、その方程式は である。

25.16 次の各問いに答えよ。(東洋高压)

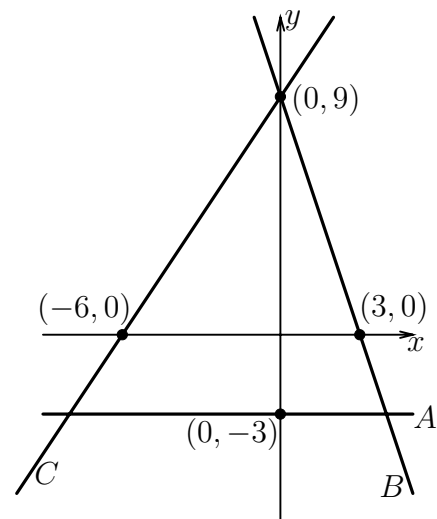
(1) 点 $(2, 2)$ を通り、直線 $y = 2x + 3 \cdots \text{①}$ に垂直な直線 $\cdots \text{②}$ の方程式を求めよ。

(2) 上の ①, ② の交点の座標を求めよ。

(3) 上の直線 ①, ② と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。

25.17 右図を見て、次の各問いに答えよ。(東芝)

- (1) 直線 A の方程式
- (2) 直線 B の方程式
- (3) 直線 C の方程式
- (4) 直線 A と直線 B の交点の座標
- (5) 直線 A と直線 C の交点の座標
- (6) 三直線によってつくられる三角形の面積

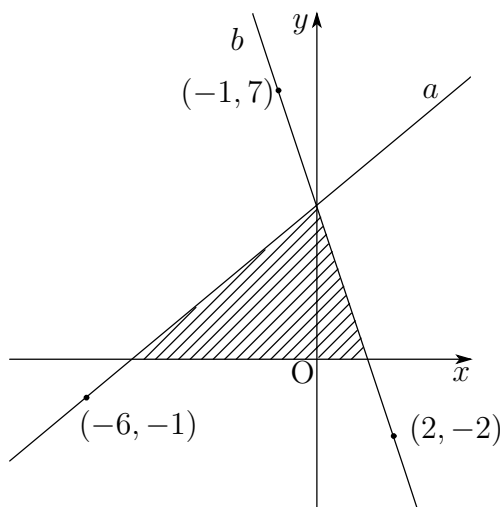


25.18 次の問いに答えよ.

(YKK)

(1) a と b の直線の方程式

(2) 斜線部の面積



25.19 2直線 $2x + 3y = 6$, $y = x + 4$ と x 軸とがつくる三角形の面積を求めよ. (昭和シェル石油)

25.20 2点 $(-3, 2)$, $(5, -3)$ を通る直線の方程式を求め, この直線と x 軸, y 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ. (住友ゴム)

25.21 3つの直線 $x + y + 2 = 0$, $-x + 3y - 10 = 0$, $y - x - 2 = 0$ とによって囲まれる部分の面積を求めよ. (NECフィールドサービス)

25.22 次の各問いに答えよ.

(東芝)

(1) 2点 $(-2, 1)$, $(-1, 3)$ を通る直線の式 ℓ_1 を求めよ.(2) (1)の直線と直角に交わり, 点 $(1, \frac{1}{2})$ を通る直線の式 ℓ_2 を求めよ.(3) ℓ_1 , ℓ_2 の交点と点 $(0, \frac{3}{5})$ を結ぶ線分の長さ s を求めよ.(4) (1),(2)の直線と x 軸で囲まれる三角形の面積 S を求めよ.

25.23 直線 $x - 2 + y = 0$ と $x - y = 0$ の交点を直線 $ax - y = 4$ が通るとき, a の値を求めよ. (聯合紙器)

25.24 $2x + 3y = 8$, $x - 4y = 9$, $ax + y = 3$ が1点で交わるような a の値を求めよ. (日本航空)

25.25 $2x + y + a = 0$, $bx - y - 3 = 0$ が点 $(1, -2)$ で交わる時, a , b の値を求めよ. (NKK)

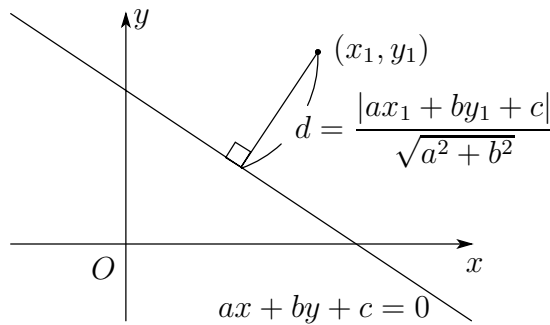
25.26 3 直線 $5x - 3y = 3$, $3y = 3x + 3$, $3x - y = 2m - 1$ が 1 点で交わるような m の値を求めよ. (三共)

(点と直線の距離)

点 (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ との距離 d は,

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

である.



25.27 原点から直線 $x - 4y - 5 = 0$ までの距離を求めよ. (NTT)

25.28 2 点 $(5, 3)$, $(2, -1)$ を通る直線の原点との距離を求めよ. (NTT)

(対称移動)

$y = f(x)$ のグラフを, それぞれ次のように対称移動したものは,

i) x 軸に関して $y = -f(x)$

ii) y 軸に関して $y = f(-x)$

iii) 原点に関して $y = -f(-x)$

の関数のグラフである.

[補足] グラフの対称移動は

i) x 軸に関して $y \rightarrow -y$

ii) y 軸に関して $x \rightarrow -x$

iii) 原点に関して $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$

として、代入することで求めることもできる.

例 25.9 直線 $y = 2x + 4$ を、次のように対称移動したものは

i) x 軸に関して

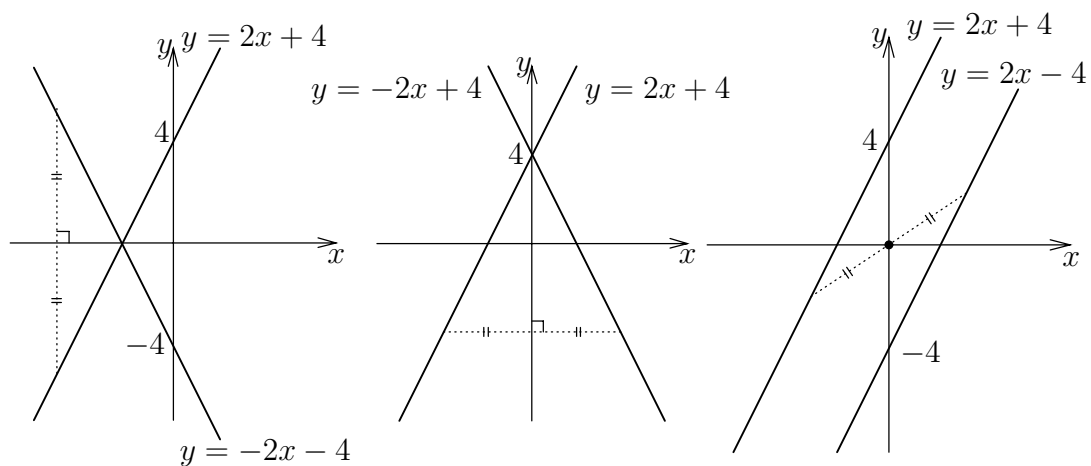
$$\begin{aligned} -y &= 2x + 4 \\ y &= -2x - 4 \end{aligned}$$

ii) y 軸に関して

$$\begin{aligned} y &= 2(-x) + 4 \\ y &= -2x + 4 \end{aligned}$$

iii) 原点に関して

$$\begin{aligned} -y &= 2(-x) + 4 \\ -y &= -2x + 4 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$



例 25.10 直線 $-3x + 4y + 12 = 0$ を，次のように対称移動したものは

i) x 軸に関して

$$-3x + 4(-y) + 12 = 0$$

$$-3x - 4y + 12 = 0$$

ii) y 軸に関して

$$-3(-x) + 4y + 12 = 0$$

$$3x + 4y + 12 = 0$$

問 25.11 直線 $-3x + 4y + 12 = 0$ を，原点に関して対象移動した直線の方程式を求めよ．

【答】 $3x - 4y + 12 = 0$

25.29 直線 $2x - 3y + 6 = 0$ と x 軸に関して対称な直線の方程式を求めよ．（九州電力）

25.30 直線 $2x + 3y = 6$ について，次の問いに答えなさい．（きんでん）

- (1) x 軸との交点の座標
- (2) y 軸との交点の座標
- (3) x 軸に関して対称な方程式
- (4) y 軸に関して対称な方程式

25.31 直線 $3x + 2y = 6$ について，次の問いに答えなさい．（NKK）

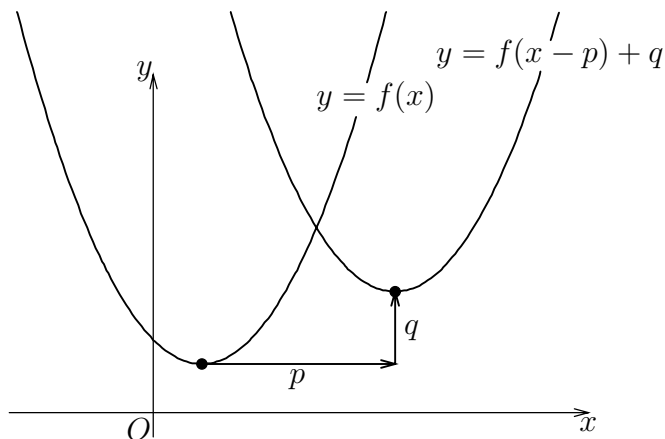
- (1) x 軸との交点の座標
- (2) y 軸との交点の座標
- (3) x 軸に関して対称な方程式

(平行移動)

$y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したものは,

$$y = f(x - p) + q$$

のグラフである.



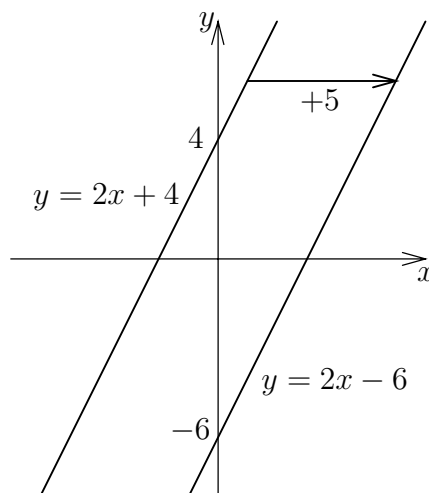
[補足] x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動したものは, $x \rightarrow x - p$, $y \rightarrow y - q$ として代入することでも求めることができる.

例 25.12

直線 $y = 2x + 4$ を x 軸方向に $+5$ だけ平行移動したものは,

$$y = 2(x - 5) + 4$$

$$y = 2x - 6$$



25.32 直線 $y = 2x + 3$ について, 次の問いに答えよ.

(NEC)

- (1) x 軸方向に 3 だけ平行移動した方程式
- (2) y 軸に関して対称移動した方程式

(3) 点 $(2, -2)$ を通り, 垂直な直線

例 25.13

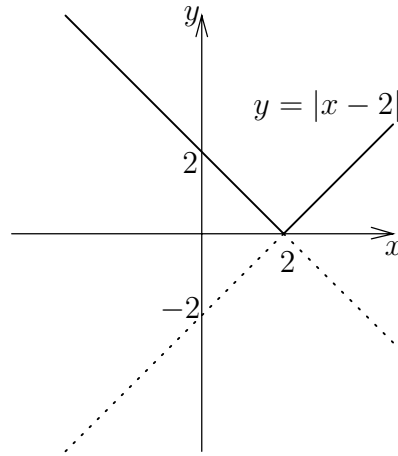
$y = |x - 2|$ のグラフは

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & (x \geq 2 \text{ のとき}) \\ -(x - 2) & (x < 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので,

i) $x \geq 2$ のとき $y = x - 2$

ii) $x < 2$ のとき $y = -x + 2$



25.33 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = |x|$ (川崎製鉄)

(2) $y = |x + 1|$ (三菱自動車)

(3) $y = 1 - |x - 3|$ (四日市倉庫)

(4) $y = \frac{x + |x|}{2}$ (沖電気)

(5) $y = |2x + 3| - |x - 1|$ (安立電気)

(6) $y = |x| + |x - 1| + |x - 2|$ (日野自動車)

例題 25.14 直線 $(2a + 1)x + (a + 4)y - a + 3 = 0$ は, a の値に関係なく定点を通ることを示し, その定点の座標を求めよ.

【解】 a について整理すると

$$a(2x + y - 1) + (x + 4y + 3) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり, $2x + y - 1 = 0$, $x + 4y + 3 = 0$ を満たす x, y であれば, a の値に関係なく, $\textcircled{1}$ は成り立つので,

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

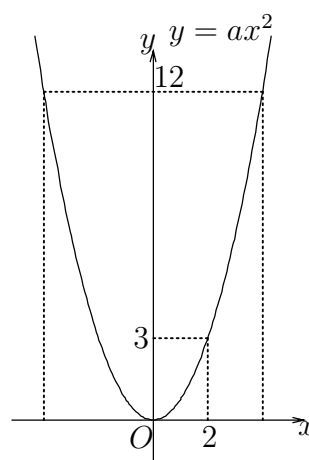
を解いて, $x = 1, y = -1$ **【答】** $(1, -1)$

25.34 直線 $kx - y + 2(1 - k) = 0$ が k の値に関係なく定点を通る．この定点の座標を求めよ．(関西電力)

25.35 直線 $y = mx + (3m + 1)$ のグラフは， m の値に関らず定点を通る．この定点の座標を求めよ．(トヨタ自動車)

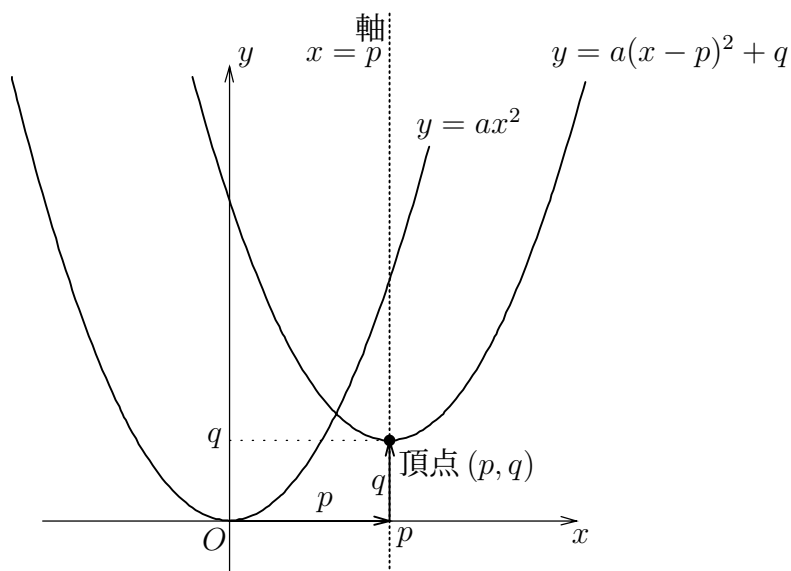
第 26 章 2 次関数

26.1 放物線 $y = ax^2$ について, a の値を求めよ. $y = 12$ のとき x の値を求めよ. (YKK)



(2 次関数の基本形)

$y = a(x - p)^2 + q$ は, $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した放物線で, 頂点の座標は (p, q) , 軸の式は $x = p$ である.



26.2 $y = x^2$ を右方へ2, 上方へ1だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ. (トヨタ自動車)

例 26.1 2次関数 $y = x^2 - 6x + 7$ のグラフをかくには, この関数を $y = a(x - p)^2 + q$ の形に変形する.

$$y = x^2 - 6x + 7$$

$$y = (x^2 - 6x) + 7$$

← はじめの2項を () でくくる

$$y = (x^2 - 6x + 9 - 9) + 7$$

← 平方になる式をつくる

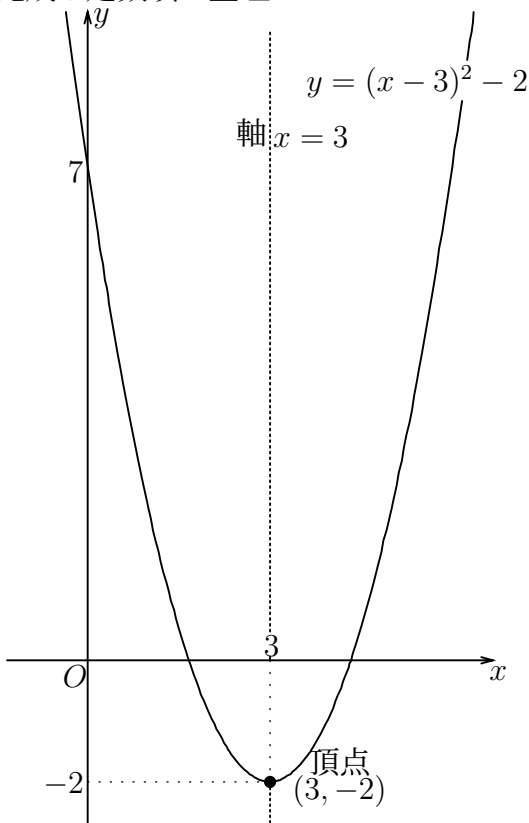
$$y = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 7$$

← 平方の形にする

$$y = (x - 3)^2 - 2$$

← 平方完成と定数項の整理

よって, $y = x^2 - 6x + 7$ は,
 $y = x^2$ のグラフを
 x 軸方向に3, y 軸方向に-2
 だけ平行移動したものである.
 したがって, このグラフは
 頂点の座標が $(3, -2)$,
 軸の式が $x = 3$
 の下に凸の放物線である.



例 26.2 $y = -2x^2 - 4x + 1$ は, 次のように変形できる.

$$y = -2x^2 - 4x + 1$$

$$y = -2(x^2 + 2x) + 1$$

← はじめの2項を x^2 の係数でくくる

$$y = -2(x^2 + 2x + 1 - 1) + 1$$

← 平方になる式をつくる

$$y = -2(x^2 + 2x + 1) + 2 + 1$$

← 平方の形にする

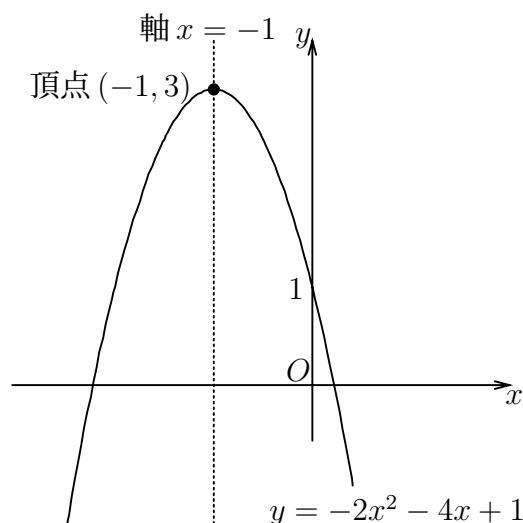
$$y = -2(x + 1)^2 + 3$$

← 平方完成と定数項の整理

よって、 $y = -2x^2 - 4x + 1$ のグラフは、
 $y = -2x^2$ のグラフを
 x 軸方向に -1 、 y 軸方向に $+3$
 だけ平行移動したものである。

したがって、このグラフは

頂点の座標が $(-1, 3)$ 、
 軸の式が $x = -1$
 の上に凸の放物線である。



[補足] $y = ax^2 + bx + c$ は、 $y = ax^2$ を平行移動したものの。

26.3 次の をうめよ。

(1) $y = x^2 + 8x + 15$ の頂点の座標は (,) である。 (積水ハウス)

(2) 2 次関数 $y = 3 - 2x - x^2$ のグラフは、放物線 $y = \text{}$ のグラフを平行移動したもので、頂点の座標は (,) である。 (東邦ガス)

26.4 次の放物線の頂点の座標および対称軸の方程式をいえ。

(1) $y = \frac{3}{2}(x - 4)^2 + 5$ (大同製鋼)

(2) $y = 2x^2 + 6x + 1$ (きんでん)

(3) $y = (1 + 2x)(2 - x)$ (NKK)

(4) $y + 2x^2 - 8x + 4 = 0$ (朝日ガラス)

(5) $y = 3x^2 + 7x + 6$ (横河橋梁)

26.5 $y = \frac{x^2 + 4x}{2}$ の頂点の座標を求めよ。 (日本特殊機器)

26.6 放物線 $y = x^2 + 2x - 3$ がある。これを次のように移動したときの放物線の式を求めよ。 (芝浦精機)

(1) 頂点が原点と一致するように平行移動する。

(2) 頂点が $(0, -2)$ となるように平行移動する。

26.7 $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフを k とするとき, k の概形をかき次の問いに答えよ.
(曙ブレーキ)

(1) k を y 軸に平行に異動し, 原点を通るようにした2次関数を求めよ.

(2) k を x 軸に平行に異動し, 原点を通るようにした2次関数を求めよ.

26.8 次の関数のグラフをかけ.

(1) $y = x^2 - 1$ (シチズン)

(2) $y = x^2 - 3$ (東横)

(3) $y = x^2 + 2x + 3$ (シチズン)

(4) $y = x^2 + 2x - 3$ (シチズン)

(5) $y = x^2 - 2x + 2$ (豊和工業)

(6) $y = x^2 - 2x - 3$ (小田急)

(7) $y = 2x^2 - 4x - 6$ (ブラザー工業)

(8) $y = -2x^2 + x + 10$ (住友電工)

例題 26.3 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフをかけ. (日本ペイント)

[解説]

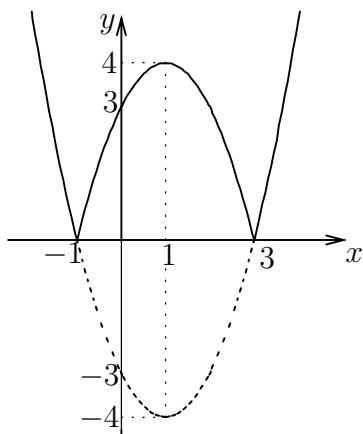
i) $f(x) \geq 0$ のとき $|f(x)| = f(x)$ なので, $y = |f(x)|$ は $y = f(x)$ と一致する.

ii) $f(x) < 0$ のとき $|f(x)| = -f(x)$ なので, $y = |f(x)|$ は $y = f(x)$ のグラフと x 軸に関して対称である.

【解】 $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフをもとに

$y \geq 0$ のとき $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフをかき,

$y < 0$ のとき $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフを x 軸に関して対称移動する.

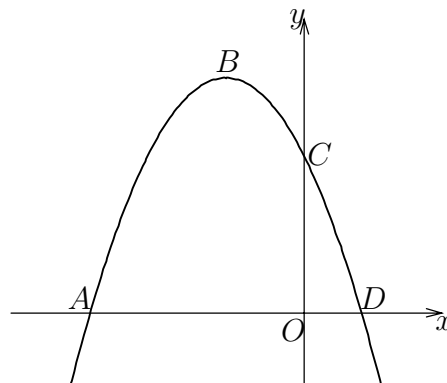


26.9 次のグラフをかけ.

(1) $y = |x^2 - 1|$ (大阪ガス)

(2) $y = |x^2 + 4x + 3|$ (マツダ)

26.10 右の図は $x^2 + 2x + y - 2 = 0$ のグラフである. A, B, C, D の座標を求めよ.
(トヨタ自動車)



例題 26.4 グラフの頂点が $(2, -3)$ で、点 $(4, 5)$ を通る 2 次関数を求めよ.

【解】 頂点が $(2, -3)$ であるから、

$$y = a(x - 2)^2 - 3 \quad \dots \textcircled{1}$$

とおける.

グラフが点 $(4, 5)$ を通るから

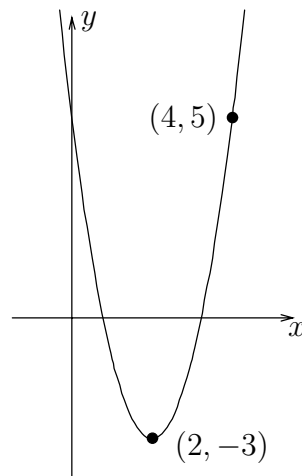
$$5 = a(4 - 2)^2 - 3$$

$$5 = 4a - 3$$

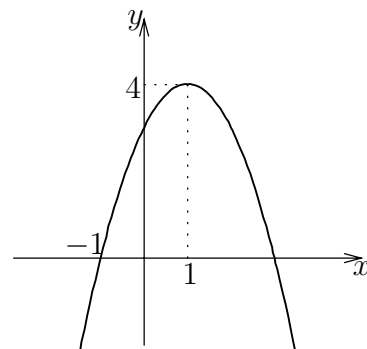
$$a = 2$$

よって、求める 2 次関数は、①より

$$y = 2(x - 2)^2 - 3$$



26.11 次の放物線の方程式を求めよ. (東芝)



26.12 頂点が $(3, -5)$ で、点 $(5, 3)$ を通る放物線の方程式を求めよ。 (日本無線)

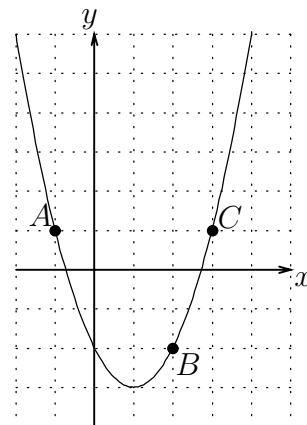
例題 26.5 グラフが3点 $A(-1, 1)$, $B(2, -2)$, $C(3, 1)$ を通る2次関数を求めよ。

【解】 2次関数を $y = ax^2 + bx + c$ とおくと、
そのグラフが3点 $(-1, 1)$, $(2, -2)$, $(3, 1)$
を通るので

$$\begin{cases} a - b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = -2 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}$$

を解いて、 $a = 1$, $b = -2$, $c = -2$

よって $y = x^2 - 2x - 2$



26.13 $y = ax^2 + bx + c$ が3点 $(2, \frac{7}{2})$, $(0, \frac{1}{2})$, $(-2, \frac{3}{2})$ を通るとき、 a , b , c の値を求めよ。 (九州電力)

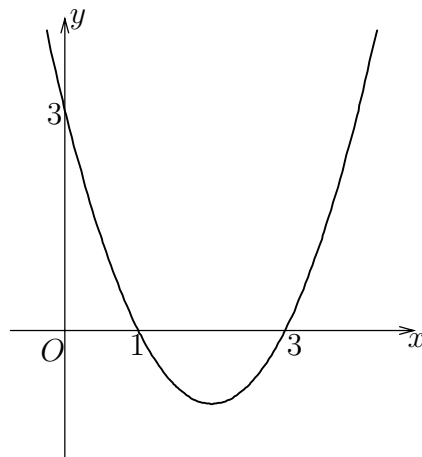
26.14 3点 $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 4)$ を通る放物線の方程式を求めよ。 (ユニチカ)

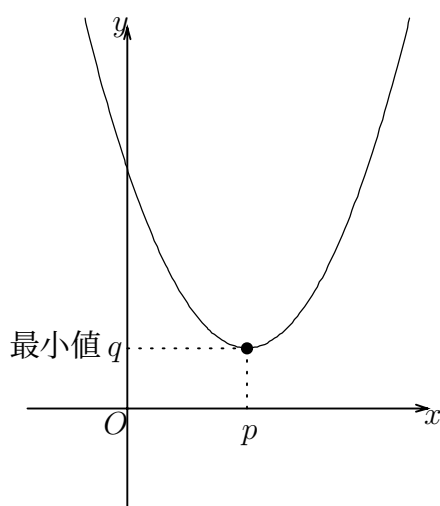
26.15 3点 $(1, 6)$, $(-3, 2)$, $(2, 12)$ を通る放物線の方程式を求めよ。 (日産自動車)

26.16 3点 $(-2, 48)$, $(1, 6)$, $(6, 16)$ を通る放物線がある。これについて、次の問いに答えよ。 (川崎製鉄)

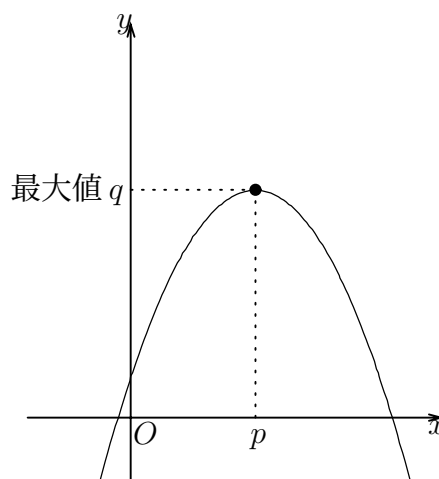
- (1) その放物線の式を求めよ。
- (2) その放物線の x 軸との交点の座標を求めよ。
- (3) その放物線の頂点の座標を求めよ。

26.17 右の放物線のグラフの方程式と頂点の座標を求めよ。 (三井金属鉱業)



(2 次関数の最大・最小)2 次関数 $y = a(x - p)^2 + q$ の最大値・最小値について $a > 0$ のとき

- i) $x = p$ のとき最小になり、
最小値は q である。
ii) 最大値はない。

 $a < 0$ のとき

- i) $x = p$ のとき最大になり、
最大値は q である。
ii) 最小値はない。

26.18 次の関数の最大値または最小値を求めよ。

- (1) $y = x^2 - 4x - 1$ (佐世保重工)
 (2) $y = -x^2 + 4x + 21$ (リッカー)
 (3) $y = -4x^2 + 16x + 32$ (愛知時計)

26.19 次の放物線の頂点、対称軸および最大値または最小値を求めよ。(トヨタ自動車)

- (1) $y = x^2 + x$
 (2) $y = -x^2 + 4x + 1$

26.20 $y = 2x^2 - 4x - 6$ のグラフについて、次の () をうめよ。(シチズン)

- (1) y 軸との交点を求めるには、与式に $x = ()$ を代入して、 $y = ()$ を得る。
 (2) x 軸との交点を求めるには、与式に $y = ()$ を代入して、 $x = (), ()$ を得る。

- (3) 対称軸を求めるには、 $y = \{x - (\quad)\}^2 - 8$ と変形できるから、 $x = (\quad)$ を得る。
- (4) (3)の変形から y は最 $(\quad)$ 値をもつことがわかり、それは $x = (\quad)$ のとき、 $(\quad)$ である。

26.21 2次関数 $y = x^2 + 4x - 5$ のグラフについて次の問いに答えよ。(川崎航空機)

- (1) 最大値または最小値を求めよ。
- (2) y 軸との交点の座標を求めよ。
- (3) x 軸との交点の座標を求めよ。
- (4) (1)～(3)をもとにグラフをかけ。

26.22 $y = x^2 - 2mx + 2n$ が $x = 6$ のとき最小値 14 である。 m, n の値を求めよ。
(星崎電機)

26.23 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが 3 点 $(0, -2), (-1, 3), (3, 7)$ を通るとき、次の問いに答えなさい。

- (1) a, b, c の値を求めよ。
- (2) このグラフと x 軸、 y 軸との交点を結んで得られる三角形の面積はいくらか。
- (3) y の最小値はいくらか。

26.24 $y = x^2 + mx + n$ のグラフが 2 点 $(-2, -1), (2, 7)$ を通るとき、 m, n の値、およびこの関数の最大値または最小値を求めよ。
(呉造船)

26.25 $y = 2x^2 + 8x + a$ の最小値が 10 となるように、 a の値を求めよ。(日石三菱)

26.26 $y = x^2 - 2ax + a - 1$ について次の問いに答えよ。(トヨタ自動車)

- (1) $a = 5$ のとき、最小値を求めよ。
- (2) 頂点の y 座標が -3 になるとき、 a の値を求めよ。

例題 26.6 2次関数 $y = 2x^2 - 4x + 5$ について、定義域が $-1 \leq x \leq 2$ のときの最大値と最小値を求めよ。

【解】 変形して

$$y = 2(x - 1)^2 + 3$$

定義域 $-1 \leq x \leq 2$ におけるグラフは、右の図の実線で示した放物線の一部となり、頂点の座標は $(1, 3)$ である.

$$x = -1 \text{ のとき } y = 11$$

$$x = 2 \text{ のとき } y = 5$$

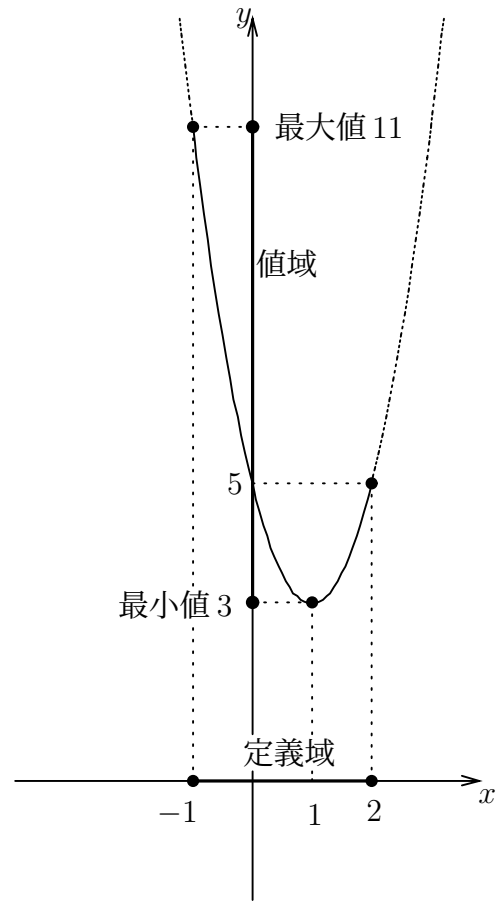
以上のことから

$x = -1$ のとき、 y は最大になり、
最大値は 11 である.

$x = 1$ のとき、 y は最小になり、
最小値は 3 である.

(答) $x = -1$ のとき最大値 11

$x = 1$ のとき最小値 3



26.27 $f(x) = x^2 - 2x + 2$ の範囲 $(0 \leq x \leq 3)$ での最大値と最小値を求めなさい. (J R)

26.28 $y = x^2 - 4x + 5$ $(0 \leq x \leq 5)$ の最大値と最小値を求めよ. (N E C)

26.29 $y = x^2 - 4x - 2$ について $0 \leq x \leq 3$ における最大値と最小値を求めよ. (日本航空)

26.30 $y = x^2 - 4x + 3$ において $\frac{1}{2} \leq x \leq 4$ の範囲で y の最大値と最小値を求めよ. (小松製作所)

26.31 $y = -x^2 + 3$ $(-1 \leq x \leq 2)$ の最大値と最小値を求めよ. (新日鉄八幡)

26.32 $y = 1 - 4x - x^2$ $(-3 \leq x \leq 2)$ の最大値と最小値を求めよ. (九州電力)

26.33 $-1 \leq x \leq 1$ のとき $y = x^2 - 4x + 3$ の最大値と最小値を求めよ. (N K K)

26.34 $0 \leq x \leq 1$ のとき, $72 - 14x - x^2$ の最大値は (), 最小値は () である. (小田急)

26.35 $-2 \leq x \leq 4$ のとき $(2x-1)(5-x)$ の値のとりうる範囲を求めよ. (日本セメント)

26.36 $y = |x^2 - 2x - 3|$ の $-1 \leq x \leq 2$ における最大値および最小値を求めよ. (大隈鉄工)

26.37 放物線 $y = 3x^2 - 18x + 25$ は () に凸で, 頂点の座標は (,) である. この曲線において $2 \leq x \leq 5$ での最大値は () である. さらにこの放物線を原点において接するようにするためには, この放物線を x 軸方向に (), y 軸方向に () だけ平行移動しなければならない. (マツダ)

例題 26.7 $2x + y = 10$ のとき, $x^2 + y^2$ の最小値, xy の最大値を求めよ.

【解】 $2x + y = 10$ より

$$y = 10 - 2x \cdots \textcircled{1}$$

まず, ①を $x^2 + y^2$ に代入して

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= x^2 + (10 - 2x)^2 \\ &= 5x^2 - 40x + 100 \\ &= 5(x - 4)^2 + 20 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

よって, ①, ②より $x^2 + y^2$ は $x = 4$, $y = 2$ のとき最小値 20

次に, ①を xy に代入して

$$\begin{aligned} xy &= x(10 - 2x) \\ &= -2x^2 + 10x \\ &= -2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{2} \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

よって, ①, ③より xy は $x = \frac{5}{2}$, $y = 5$ のとき最大値 $\frac{25}{2}$

26.38 $x + y = 2$ のとき, $x^2 + y^2$ の最小値を求めよ. (いすゞ自動車)

26.39 $x + y = 5$ であるとき, $x^2 + 3y^2$ の最小値を求めよ. (日石三菱)

26.40 $y = ax^2 + bx + 2a^2$ で $x = 1$ のとき, 最大値 1 である. 次の問いに答えなさい. (日立製作所)

- (1) a, b の値を求めなさい.
- (2) $2 \leq x \leq 4$ で最大値, 最小値を求めなさい.

26.41 x の 2 次関数 $f(x) = -x^2 + ax + b$ は $x = 1$ のとき $f(x) = 3$ で, $f(x)$ の最大値は 4 である. a, b の値を求めよ. (日本セメント)

26.42 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の最大値は $-3a$ に等しく, かつ, この 2 次関数グラフは 2 点 $(-1, -2), (1, 6)$ を通るといふ. a, b, c の値を求めよ. (神戸製鋼)

26.43 次の問いに答えよ. (島津製作所)

- (1) x の 2 次関数 $2x^2 + 3mx + 2m$ の最小値 y は, m のどんな関数か.
- (2) この m の関数 y は m のどんな値に対して最大となるか. また, その最大値を求めよ.

26.44 $x^2 - 2px + 3p = 0$ の 2 解を α, β とするとき, $\alpha^2 + \beta^2$ を最小にするような p の値を求めよ. ☆ (東洋高圧)

例題 26.8 ある商品は売価 15 円のき, 平均 500 個の売上がある. これを 1 円値上げするごとに平均 20 個ずつ売上個数が減っていくものとすれば, 最高の売上金額を得るには, 売価をいくらにすればよいか. (三井金属)

【解】 x 円値上げしたとき, 売価は $(15 + x)$ 円, 売上個数は $(500 - 20x)$ 個であるから, 売上金額を y 円とすると

$$\begin{aligned} y &= (15 + x)(500 - 20x) \\ &= -20(x + 15)(x - 25) \\ &= -20(x^2 - 10x - 375) \\ &= -20(x^2 - 10x + 25 - 400) \\ &= -20(x - 5)^2 + 8000 \end{aligned}$$

よって, 5 円値上げしたとき, 売上が最大. (答) 売価を 20 円にする

26.45 ある品物の売値が 50 円のとき, 1200 個の売上がある. 品物が 1 円上がるごとに 20 個ずつ売上が減っていく. 1 個をいくらで売れば売上金額が最大になるか. (大福機工)

26.46 ある品物の売値が 1 個 100 円するとき, 1 日 300 個の売上がある. 売値を 1 個につき 10 円値上げすると 15 個の割合で売上が減る. 1 日の売上金額を最大にするには売値をいくりにしたらよいか. (TOTO)

26.47 1 個の原価 70 円の商品を 1 個につき 100 円で売ると, 1 ヶ月あたりの売上は 1600 個である. もし値上げすると, 単価 1 円の値上げにつき, 20 個の割合で売上が減少するという. 利益を最大にするには, 売価はいくらにすればよいか. (マツダ)

26.48 ある製品を売り出すのに定価を 1 個 2 万円とすれば 1 ヶ月に平均 1000 個売れるという. いま, この製品を値上げしたいが, 値上高 25 円について 1 個の割合で売上が減少することが予想される. 売上金額を最大にするためには 1 個の売価をいくりにすればよいか. (ニコン)

26.49 毎秒 20m の速さで投げ上げた物体の t 秒後の高さを y m とすれば, $y = 20t - 5t^2$ で与えられる. 何秒後に最高の高さに達するか. またそのときの高さはどれだけか. (神鋼電機)

26.50 長さ l なる針金を曲げ扇形を作る. この面積を最大にするには, どのようにすればよいか. またこのときの面積を求めよ. (島津製作所)

26.51 直角三角形の直角をはさむ 2 辺の和が 24cm のとき, (日本毛織)

(1) その面積が最大となるのは, どんなときか.

(2) その斜辺が最小となるときは, どんなときか.

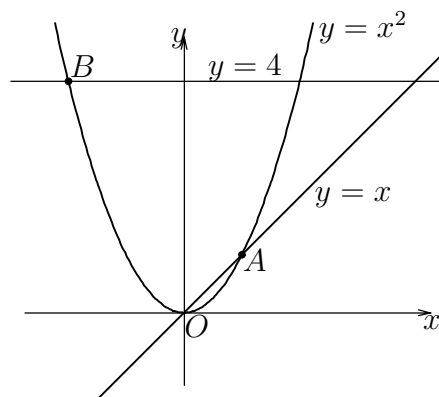
26.52 $M(3, 4)$ と直線 $y = x + 2$ 上の点 $P(x, y)$ を結ぶとき, 最短距離を求めよ. また, このときの点 P の座標を求めよ. (愛知機械)

26.53 放物線 $y = x^2 - 2x + 1$ と $y = -2x + 5$ との交点の座標を求めよ. (富士電機)

26.54 放物線 $y = x^2 - 2x - 3$ と直線 $y = -x + 3$ の交点の座標を求めよ. (NEC)

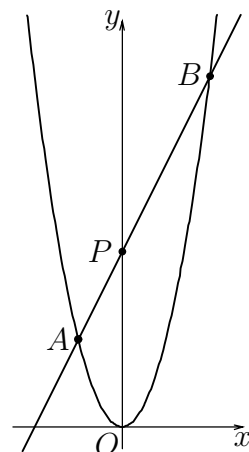
26.55 放物線 $y = x^2 + x - 3$ と直線 $y = 2x + 3$ の交点の座標を求めよ. (日本精工)

26.56 右図において、2 点 A, B の座標を求めよ。
(YKK)

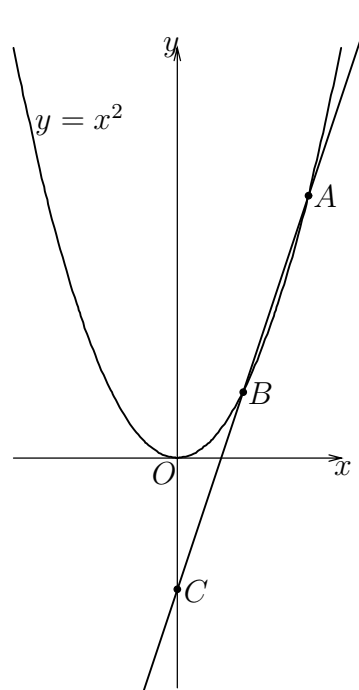


26.57 右の図のように 2 次関数 $y = x^2$ と 1 次関数 $y = 2x + 8$ のグラフが 2 点 A, B で交わっているとき、次の問いに答えよ。
(沖電気工業)

- (1) A, B の座標
- (2) 線分 AB の長さ
- (3) $\triangle OAP$ と $\triangle OBP$ の面積比

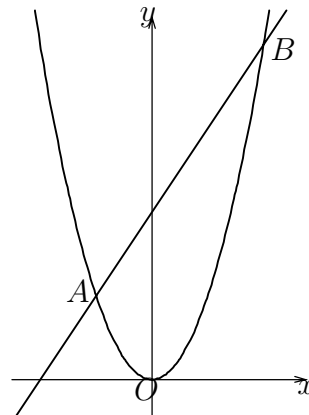


26.58 右の図は $y = x^2 \cdots \textcircled{1}$ と $y = ax + b \cdots \textcircled{2}$ のグラフで、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の交点 A, B のうち、 A の座標は $(2, 4)$ 、 $\textcircled{2}$ と y 軸との交点 C の座標は $(0, -2)$ であるという。 a, b の値および交点 B の座標を求めよ。
(日産自動車)



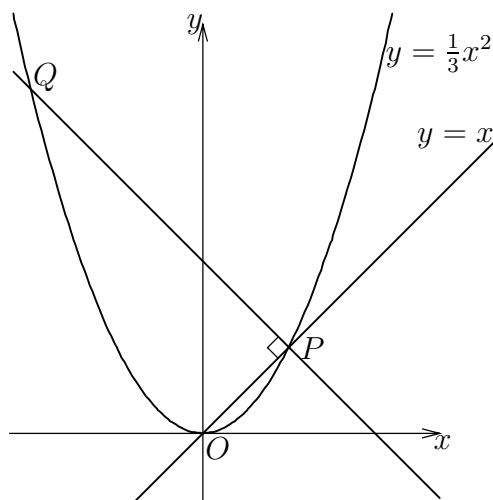
26.59 $y = ax + b$, $y = mx^2$ を同一平面上に描いたもので、交点 B の座標は $(4, 12)$ である．次の問いに答えよ．
(愛知製鋼)

- (1) m の値を求めよ．
- (2) 点 A の x 座標が -2 であるとき、 A の y 座標を求めよ．
- (3) 2点 A , B を通る直線の方程式を求めよ．



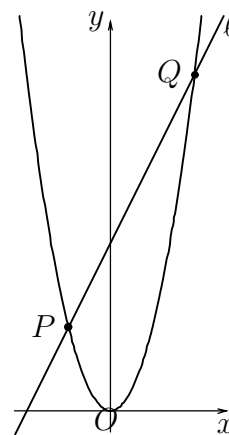
26.60 次の問いに答えよ． (JR)

- (1) 点 P の座標を求めよ．
- (2) 直線 PQ の方程式を求めよ．
- (3) $\triangle OPQ$ の面積を求めよ．



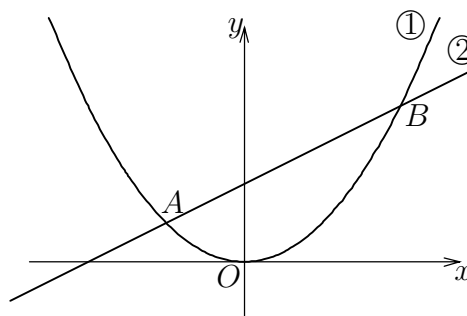
26.61 図のように、放物線と直線 ℓ が P , Q で交わっている． ℓ の傾きが 2, P の座標が $(-1, 2)$ であるとき、次の問いに答えなさい．
(住友金属鉱業)

- (1) 放物線の方程式を求めなさい．
- (2) 直線 ℓ の式を求めなさい．
- (3) 点 Q の座標を求めなさい．



26.62 下の図のように放物線 $y = ax^2 \cdots \textcircled{1}$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + b \cdots \textcircled{2}$ が2点 A, B で交わっている. 点 B の座標が $(4, 4)$ のとき, 次の問いに答えなさい. (新日鉄八幡)

- (1) a, b の値を求めよ.
- (2) 線分 AB の中点を通り, $\textcircled{2}$ の直線と垂直に交わる直線の式を求めなさい.
- (3) 放物線 $\textcircled{1}$ 上に四角形 $OCBA$ が台形となるような点 C をとる. この点 C の座標を求めなさい.



26.63 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + 1$ との交点を A, B とする. 以下の問いに答えよ. (新日鉄八幡)

- (1) 点 A, B の座標を求めよ. (ただし, 点 A の x 座標 $<$ 点 B の x 座標)
- (2) 原点 O と点 A, B を結んで作る $\triangle OAB$ の面積を求めよ.
- (3) 点 B を頂点とし, 原点 O を通る放物線の方程式を求めよ.

26.64 $y = 2x^2 + 5x - 3$ について次の各問いに答えなさい. (富士電気総合研究所)

- (1) x 軸と交わる点の座標を求めなさい.
- (2) $y = x + 3$ との交点の座標を求めなさい.

26.65 次の問いに答えよ. (新日鉄八幡)

- (1) 関数 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフを書きなさい.
- (2) y 軸上の点 $A(0, 16)$ と $y = x^2 - 4x + 4$ 上の点 B を結ぶ線分 AB が x 軸に平行なとき, 点 B の座標を求めなさい. (ただし, $x \geq 0$ とする)
- (3) (2) のとき, この曲線上に $AC = BC$ となる点 C をとるとき, 点 C の座標を求めなさい.

26.66 $y = -2x^2 + 5$ と x 軸に関して対称な方程式を求めよ. (スズキ自動車)

26.67 $y = x^2 - 4x$ と原点に関して対称な方程式を求めよ. (スズキ自動車)

26.68 $y = 2x^2 - 4x - 1$ について次の問いに答えよ.

(徳山曹達)

- (1) 頂点の座標
- (2) 原点に関して対称な方程式
- (3) x 軸の正の方向に 4, y 軸の負の方向に 3 だけ平行移動した方程式

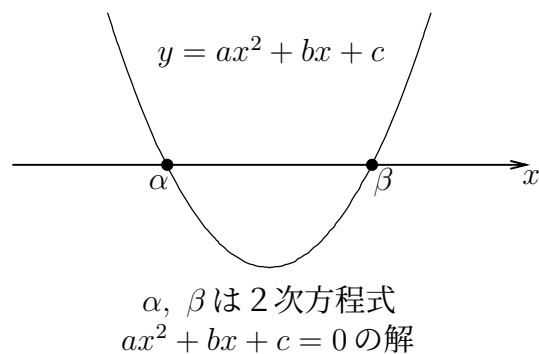
26.69 $y = 3x^2 - 6x + 7$ について次の問いに答えよ.

(ヂーゼル機器)

- (1) 頂点の座標を求めよ.
- (2) 原点に関して対称な方程式を求めよ.

(2次関数のグラフと x 軸との交点)

$y = ax^2 + bx + c$
 のグラフと x 軸との交点の
 x 座標を α, β とするとき,
 α, β は 2 次方程式
 $ax^2 + bx + c = 0$
 の解である.



例 26.9

2 次関数 $y = x^2 - 2x - 3$ のグラフと
 x 軸との交点の座標は,

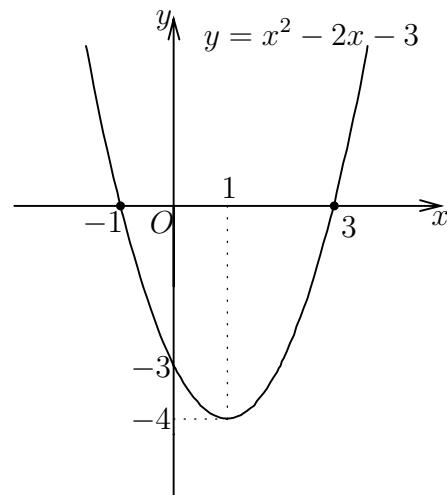
2 次方程式 $x^2 - 2x - 3 = 0$ を解いて

$$(x + 1)(x - 3) = 0$$

$$x = -1, 3$$

したがって, x 軸との交点は次の 2 点である.

$$(-1, 0), (3, 0)$$



例 26.10

2 次関数 $y = x^2 - 4x + 4$ のグラフと

x 軸との交点の座標は、

2 次方程式 $x^2 - 4x + 4 = 0$ を解いて

$$(x - 2)^2 = 0$$

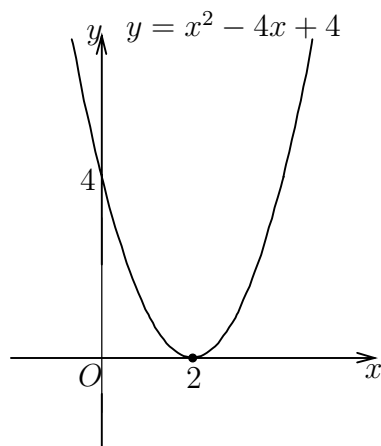
$$x = 2$$

したがって、 x 軸との交点は次の 1 点である.

$$(2, 0)$$

このとき、放物線は x 軸に接するといい、

$(2, 0)$ を接点という.



2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフと x 軸との位置関係は、判別式 D を

$$D = b^2 - 4ac$$

とすると次の表のようになる.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ ($a > 0$)			
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ ($a < 0$)			
x 軸との位置関係	x 軸と 2 点で交わる	x 軸と接する	x 軸と交わらない
2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解	(実数解) $x = \alpha, \beta$ の 2 つ	$x = \alpha$ (重解) の 1 つ	異なる 2 つの 虚数解

問 26.11 次の 2 次関数のグラフと x 軸との位置関係をいえ.

(1) $y = x^2 - 2x - 1$

(2) $y = 3x^2 - 6x + 3$

$$(3) \ y = -2x^2 + 3x - 2$$

【答】

$$(1) \ D = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 8 > 0 \quad \text{より} \quad x \text{ 軸と2点で交わる}$$

$$(2) \ D = (-6)^2 - 4(3)(3) = 0 \quad \text{より} \quad x \text{ 軸と接する}$$

$$(3) \ D = (3)^2 - 4(-2)(-2) = -7 < 0 \quad \text{より} \quad x \text{ 軸と交わらない}$$

問 26.12 x 軸と共有する点のあるものは、その点の座標を求めよ.

$$(1) \ y = x^2 + 2x - 4$$

$$(2) \ y = x^2 + 2x + 4$$

【答】 (1) $(-1 + \sqrt{5}, 0), (-1 - \sqrt{5}, 0)$ (2) $D = (2)^2 - 4(1)(4) = -12 < 0$ より
共有点なし

例題 26.13 次の放物線が x 軸と接するときの a の値を求めよ.

$$(1) \ y = x^2 + 2ax + 9$$

$$(2) \ y = x^2 - (a - 2)x + (2a + 1)$$

【解説】 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ について判別式 $D = b^2 - 4ac$ に対し、放物線が x 軸に接するとき $D = 0$ である.

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad (2a)^2 - 4 \times 1 \times 9 &= 0 \\ 4a^2 - 36 &= 0 \\ a^2 &= 9 \\ a &= \pm 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \{-(a-2)\}^2 - 4 \times 1 \times (2a+1) &= 0 \\ (a-2)^2 - 4(2a+1) &= 0 \\ a^2 - 4a + 4 - 8a - 4 &= 0 \\ a^2 - 12a &= 0 \\ a(a-12) &= 0 \\ a &= 0, 12 \end{aligned}$$

26.70 $y = x^2 - ax + 1$ が x 軸と接するときの a の値を求めよ. また, 接点の座標を求めよ. (全日本空輸)

例題 26.14 放物線 $y = x^2 - 3$ と直線 $y = -2x + a$ が接するような定数 a の値を求めよ.

【解説】放物線 $y = x^2 - 3 \cdots \textcircled{1}$ と直線 $y = -2x + a \cdots \textcircled{2}$ が接するとき, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を同時に満たす (x, y) の組は 1 組だけであるので, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から 2 次方程式 $x^2 - 3 = -2x + a$ は, 重解をもつ.

【解】 $y = x^2 - 3 \cdots \textcircled{1}$, $y = -2x + a \cdots \textcircled{2}$ とおくと $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$x^2 - 3 = -2x + a$$

$$x^2 + 2x - a - 3 = 0$$

この 2 次方程式は, 重解をもつので,

$$2^2 - 4 \times 1 \times (-a - 3) = 0$$

$$4 + 4a + 12 = 0$$

$$a = -4$$

26.71 $y = x^2 - 2x + 11$ の頂点の座標と, これに接する直線 $y = ax + 2$ の a の値を求めよ. (日立製作所)

26.72 $y = mx - 5$ が $y = x^2 - 4x + 4$ に接するときの m の値を求めよ. (日立製作所)

実践問題 10

大同特殊鋼

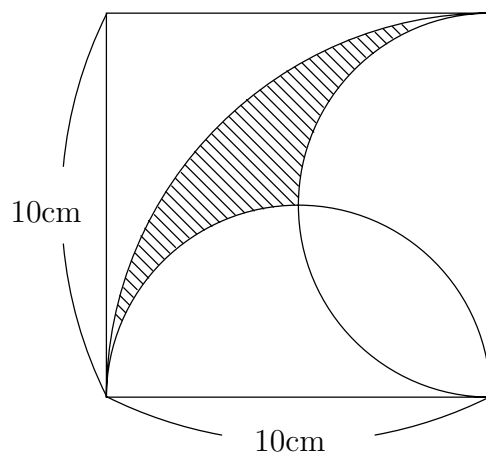
1 次のような直線の式を求めなさい.

- (1) y 切片が -2 で傾きが 3 の直線
- (2) 2 点 $(-1, 2)$, $(2, -7)$ を通る直線
- (3) 直線 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ に平行で点 $(1, 2)$ を通る直線

2 次の問いに答えなさい.

- (1) 2つのサイコロを同時に投げるとき, 目の和が 6 になる確率を求めよ.
- (2) a, b, c, d, e の 5 人の中から 3 人の代表を選ぶとき, その中に a が入っている確率を求めよ.

3 次の斜線部の面積を求めよ.



【答】

1 (1) $y = 3x - 2$ (2) $y = -3x - 1$ (3) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$

2 (1) $y = \frac{5}{36}$ (2) $\frac{3}{5}$

3 $\frac{25}{2}\pi - 25[\text{cm}^2]$

第 27 章 2 次不等式

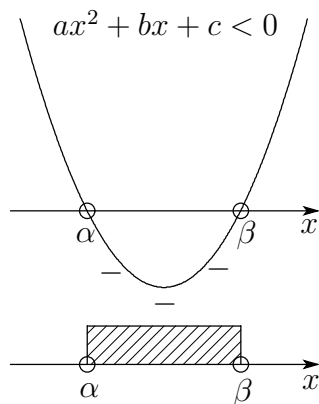
(2 次不等式の解き方 (1))

$ax^2 + bx + c = 0$ が異なる 2 つの実数解 α, β をもつとする. $\iff D > 0$

$a > 0, \alpha < \beta$ のとき,

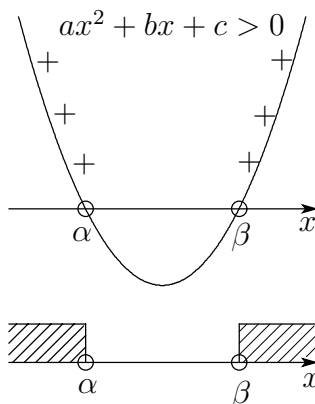
$ax^2 + bx + c < 0$ の解は

$$\alpha < x < \beta$$



$ax^2 + bx + c > 0$ の解は

$$x < \alpha, \beta < x$$



【補足】 $ax^2 + bx + c = 0$ が異なる 2 つの実数解 α, β をもつとする. $\iff D > 0$

$a > 0, \alpha < \beta$ のとき,

$ax^2 + bx + c \leq 0$ の解は

$$\alpha \leq x \leq \beta$$

$ax^2 + bx + c \geq 0$ の解は

$$x \leq \alpha, \beta \leq x$$

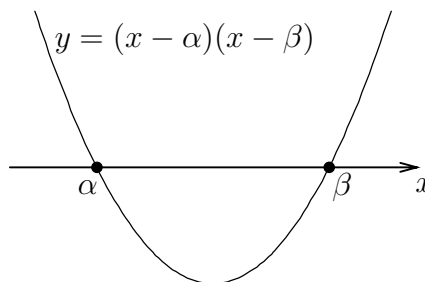
また, $\alpha < \beta$ のとき, 2 次関数

$$y = (x - \alpha)(x - \beta)$$

は, 展開すると x^2 の係数は, 1 であるから, 下に凸の放物線である. 特に,

$$x = \alpha \quad \text{と} \quad x = \beta \quad \text{のとき} \quad y = 0$$

となるので, グラフは右図のようになるから次のことがいえる.



(2次不等式の解き方 (2)) $\alpha < \beta$ のとき

$$(x - \alpha)(x - \beta) < 0 \quad \text{の解は} \quad \alpha < x < \beta$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) > 0 \quad \text{の解は} \quad x < \alpha, \beta < x$$

例 27.1

$$1) (x + 3)(x - 1) < 0 \quad \text{の解は} \quad -3 < x < 1$$

$$2) (x - 2)(x - 4) > 0 \quad \text{の解は} \quad x < 2, 4 < x$$

$$3) x(x + 2) \leq 0 \quad \text{の解は} \quad -2 \leq x \leq 0$$

問 27.2 次の2次不等式を解け.

$$(1) (x - 1)(x - 3) > 0$$

$$(2) (x - 2)(x - 5) < 0$$

$$(3) (x + 1)(x - 2) \geq 0$$

$$(4) x(x - 1) \leq 0$$

$$(5) x(x + 1) > 0$$

$$(6) (x + 2)(x + 3) \leq 0$$

【答】 (1) $x < 1, 3 < x$ (2) $2 < x < 5$ (3) $x \leq -1, 2 \leq x$ (4) $0 \leq x \leq 1$
 (5) $x < -1, 0 < x$ (6) $-3 \leq x \leq -2$

例題 27.3 次の2次不等式を解け.

$$(1) x^2 - 6x - 16 < 0$$

$$(2) 10x^2 - 9x + 2 \leq 0$$

$$(3) x + 12 \leq x^2$$

$$(4) 3(x + 2) < 2x(x + 1)$$

【解】

$$(1) x^2 - 6x - 16 < 0$$

$$(x + 2)(x - 8) < 0$$

$$-2 < x < 8$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & 10x^2 - 9x + 2 \leq 0 \\
 & (2x - 1)(5x - 2) \leq 0 \\
 & \frac{2}{5} \leq x \leq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & x + 12 \leq x^2 \\
 & -x^2 + x + 12 \leq 0 \\
 & x^2 - x - 12 \geq 0 \\
 & (x + 3)(x - 4) \\
 & x \leq -3, 4 \leq x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & 3(x + 2) < 2x(x + 1) \\
 & 3x + 6 < 2x^2 + 2x \\
 & -2x^2 + x + 6 < 0 \\
 & 2x^2 - x - 6 > 0 \\
 & (2x + 3)(x - 2) > 0 \\
 & x < -\frac{3}{2}, 2 < x
 \end{aligned}$$

「2 次不等式の解き方 (1)」より解の公式を利用することで、2 次不等式を解くことができる。この解き方は、判別式 D の値が正であるときに限り利用できる。

例題 27.4 次の 2 次不等式を解け。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2x^2 - x \leq x^2 - 3x + 2 \\
 (2) \quad & 5x + 2 < 3x^2
 \end{aligned}$$

【解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2x^2 - x \leq x^2 - 3x + 2 \\
 & x^2 + 2x - 2 \leq 0 \quad \cdots \textcircled{1} \\
 & x^2 + 2x - 2 = 0 \text{ の判別式 } D \text{ の値と 2 つの解 } \alpha, \beta (\alpha < \beta) \text{ は,} \\
 & D = (2)^2 - 4(1)(-2) = 12 \quad \implies D \text{ の値が正} \\
 & \alpha = \frac{-(2) - \sqrt{12}}{2(1)} = \frac{-2 - 2\sqrt{3}}{2} = -1 - \sqrt{3} \quad \longleftarrow \alpha = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \\
 & \beta = \frac{-(2) + \sqrt{12}}{2(1)} = \frac{-2 + 2\sqrt{3}}{2} = -1 + \sqrt{3} \quad \longleftarrow \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}
 \end{aligned}$$

①を解いて

$$\text{【答】} \quad -1 - \sqrt{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}$$

(2) $5x + 2 < 3x^2$

$-3x^2 + 5x + 2 < 0$

$3x^3 - 5x - 2 > 0 \quad \dots \textcircled{2}$

 $3x^2 - 5x - 2 = 0$ の判別式 D の値と 2 つの解 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ は,

$D = (-5)^2 - 4(3)(-2) = 49 \quad \Rightarrow \quad D \text{ の値が正}$

$\alpha = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{5-7}{6} = -\frac{1}{3} \quad \Leftarrow \quad \alpha = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$

$\beta = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2(3)} = \frac{5+7}{6} = 2 \quad \Leftarrow \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

②を解いて

【答】 $x < -\frac{1}{3}, 2 < x$

27.1 次の 2 次不等式を解け.

(1) $(x-5)(2x+1) < 0$ (昭和シェル石油)

(2) $x(x-1) < 0$ (東横)

(3) $x(1-x) < 0$ (東横)

(4) $x^2 - 3x - 4 < 0$ (本田技研)

(5) $x^2 - 3x - 4 > 0$ (興国化学)

(6) $x^2 + 5x - 6 < 0$ (シチズン)

(7) $x^2 - 5x - 6 \leq 0$ (ダイハツ)

(8) $x^2 + 3x - 10 > 0$ (リコー)

(9) $x^2 - 3x - 10 > 0$ (王子製紙)

(10) $x^2 - x - 6 < 0$ (別府化学)

(11) $x^2 - 4x - 5 > 0$ (いすゞ自動車)

(12) $x^2 - x - 12 > 0$ (いすゞ自動車)

(13) $x^2 + 2x - 3 < 0$ (本田技研)

(14) $x^2 - 3x - 54 < 0$ (日産ディーゼル)

(15) $2x^2 - 6x + 15 > x^2 + x + 3$ (アサヒ麦酒)

(16) $72 + 14x - x^2 > 0$ (小田急)

- (17) $x(1-x) < x(2+x)$ (川崎重工業)
- (18) $(x-1)^2 \geq 25$ (トヨタ自動車)
- (19) $2x^2 - 9x - 5 > 0$ (小松製作所)
- (20) $2x^2 + 7x + 3 < 0$ (ヤマハ)
- (21) $2x^2 - 5x + 2 > 0$ (大阪ガス)
- (22) $2x^2 - 7x - 4 < 0$ (中越パルプ)
- (23) $6x^2 - 7x - 5 > 0$ (ヤマハ)
- (24) $6x^2 - x - 12 \leq 0$ (日本輸送機)
- (25) $9x^2 - 3x - 12 \leq 0$ (大日本工業)
- (26) $8x^2 - 3x + 1 > 2x^2 + 4x + 6$ (名古屋鉄道)
- (27) $-4x^2 - 4x + 3 \leq 0$ (東京機器)
- (28) $10x - 3x^2 > 3$ (ブラザー工業)
- (29) $4(x^2 - 1) < 3(x - 1)$ (マツダ)
- (30) $x^2 \leq 2x + 5$ (日本毛織)
- (31) $2x^2 + 4x - 1 > 0$ (富士通VLSI)

例題 27.5 不等式 $x^2 - 3|x| + 2 > 0$ を解け. (IHI)

【解】

I) $x \geq 0$ のとき, $|x| = x$ なので

$$x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$(x-1)(x-2) > 0$$

$$x < 1, 2 < x$$

したがって, $0 \leq x < 1, 2 < x$

II) $x < 0$ のとき, $|x| = -x$ なので

$$x^2 + 3x + 2 > 0$$

$$(x+1)(x+2) > 0$$

$$x < -2, -1 < x$$

したがって, $x < -2, -1 < x < 0$

よって, I), II) より

【答】 $x < -2, -1 < x < 1, 2 < x$

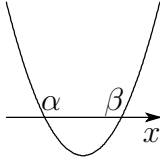
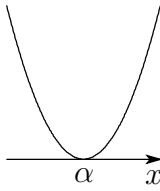
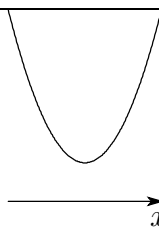
27.2 次の方程式，不等式を解け.

(1) $x^2 + 2|x| - 3 < 0$ (東芝)

(2) $|x^2 - 4| = 3x$ (キャノン)

(3) $|x^2 + 3x - 4| < x + 4$ (デンソー)

判別式 D と 2 次不等式 ($a > 0$) の解についてまとめると次のようになる.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$y = ax^2 + bx + c$ のグラフ ($a > 0$)			
$ax^2 + bx + c > 0$	$x < \alpha, \beta < x$	$x \neq \alpha$ の実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c \geq 0$	$x \leq \alpha, \beta \leq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2 + bx + c < 0$	$\alpha < x < \beta$	解なし	解なし
$ax^2 + bx + c \leq 0$	$\alpha \leq x \leq \beta$	$x = \alpha$	解なし

【補足】上の表の α, β ($\alpha < \beta$) は 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) の解であるので

I) $D > 0$ のとき $\alpha = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \beta = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$

II) $D = 0$ のとき $\alpha = -\frac{b}{2a}$

問 27.6 次の 2 次不等式を解け.

(1) $x^2 - 4x + 4 > 0$ (帝国産業)

(2) $x^2 - 2x + 2 < 0$ (帝国産業)

(3) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ (トヨタ自動車)

【答】 (1) $x \neq 2$ の実数 (2) 解なし (3) $x = 1$

例題 27.7 次の不等式を同時に満たす x の範囲を求めよ.

(1) $\begin{cases} x^2 - 3x - 10 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0 \end{cases}$ (小松製作所)

$$(2) -5 < x^2 + 2x - 8 < 7 \quad (\text{日本毛織})$$

【解】 (1) 第1式より

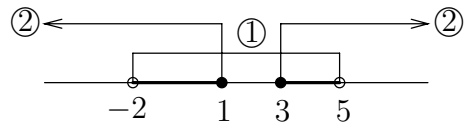
$$(x+2)(x-5) < 0 \\ -2 < x < 5 \cdots \textcircled{1}$$

第2式より

$$(x-1)(x-3) \geq 0 \\ x \leq 1, 3 \leq x \cdots \textcircled{2}$$

①と②の共通範囲を求めて

【答】 $-2 < x \leq 1, 3 \leq x < 5$



(2) 問題の不等式は

$$\begin{cases} -5 < x^2 + 2x - 8 \\ x^2 + 2x - 8 < 7 \end{cases}$$

である. この第1式より

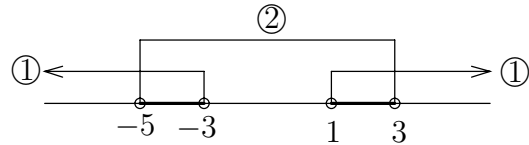
$$-x^2 - 2x + 3 < 0 \\ x^2 + 2x - 3 > 0 \\ (x+3)(x-1) > 0 \\ x < -3, 1 < x$$

次に, 第2式より

$$x^2 + 2x - 15 < 0 \\ (x+5)(x-3) < 0 \\ -5 < x < 3$$

①と②の共通範囲を求めて

【答】 $-5 < x < -3, 1 < x < 3$



27.3 次の連立不等式を解け.

$$(1) \begin{cases} \frac{2x-3}{4} \leq x+1 \\ x^2 + 3x - 4 < 0 \end{cases} \quad (\text{マツダ})$$

$$(2) 2x < x+3 < 2x^2 \quad (\text{きんでん})$$

$$(3) \begin{cases} x^2 + x - 20 < 0 \\ 2x^2 + x - 15 > 0 \end{cases} \quad (\text{東洋紡績})$$

$$(4) \begin{cases} x^2 - 7x + 10 < 0 \\ x^2 - 3x - 4 > 0 \end{cases} \quad (\text{殖産住宅})$$

$$(5) \begin{cases} x^2 - x - 12 < 0 \\ x^2 - 2x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{愛知製鋼})$$

$$(6) \begin{cases} x^2 + x - 6 < 0 \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \quad (\text{九州電力})$$

$$(7) \begin{cases} x^2 - 2x - 35 < 0 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases} \quad (\text{川崎組})$$

$$(8) \begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 8x - 9 > 0 \end{cases} \quad (\text{日本ボーリング})$$

$$(9) \begin{cases} x^2 > x + 6 \\ x^2 - x < 20 \end{cases} \quad (\text{京三製作所})$$

$$(10) \begin{cases} x^2 < x + 20 \\ x^2 + x > 2 \end{cases} \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(11) \begin{cases} 3x^2 - 4x - 4 > 0 \\ \frac{4-x}{3} < \frac{8-x}{5} \end{cases} \quad (\text{三菱重工})$$

$$(12) \begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 \\ 2x^2 - 13x + 15 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{中国電力})$$

$$(13) \begin{cases} x^2 + x - 20 < 0 \\ 2x^2 + x - 15 > 0 \end{cases} \quad (\text{呉羽紡績})$$

$$(14) \begin{cases} x^2 + 2x - 35 < 0 \\ 6x^2 - 7x - 5 > 0 \end{cases} \quad (\text{日本光学})$$

$$(15) \begin{cases} 8x - 3x^2 > 4 \\ 2x^2 - 7x > -6 \end{cases} \quad (\text{安川電機})$$

$$(16) \begin{cases} x^2 - 7x + 10 > 0 \\ x^2 - 8x - 12 < 0 \end{cases} \quad (\text{東亜燃料})$$

$$(17) \begin{cases} x^2 + 2x - 25 < 0 \\ 6x^2 - 7x - 5 > 0 \end{cases} \quad (\text{大日本製薬})$$

27.4 不等式 $4x - x^2 > 3$ を満たす整数 x を求めよ. (トヨタ自動車)

27.5 2 次不等式 $3x^2 - 11x - 20 \leq 0$ を満たす整数 x の個数を求めよ. (トヨタ自動車)

27.6 2 次不等式 $ax^2 + 5x + b > 0$ の解が $2 < x < 3$ であるとき, a, b の値を求めよ. (小田急)

27.7 不等式 $-6x^2 + px + q < 0$ の解が $x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x$ となる p, q の値を求めよ. (トヨタ自動車)

例題 27.8 周囲の長さが 50cm の長方形で, 面積が 100cm^2 以上であるものを作るには, その一辺の長さを何 cm から何 cm までにすればよいか. (川崎製鉄)

【解】 縦の長さを $x\text{cm}$ とすれば, 横の長さは $(25 - x)\text{cm}$ となる. このとき, 面積は $x(25 - x)\text{cm}^2$ なので, 題意より

$$x(25 - x) \geq 100$$

$$25x - x^2 - 100 \geq 0$$

$$x^2 - 25x + 100 \leq 0$$

$$(x - 5)(x - 20) \leq 0$$

$$5 \leq x \leq 20$$

【答】 5cm 以上 20cm 以下

27.8 周囲の長さが 26cm の長方形の面積が 40cm^2 より小さくなるようにするには, 辺の長さをどのようにすればよいか. (スズキ自動車)

例題 27.9 次の問いに答えよ.

(1) 2 次方程式 $x^2 + ax - a + 3 = 0$ が異なる 2 つの実数解をもつための a の値の範囲を求めなさい. (きんでん)

(2) 2 次方程式 $x^2 + 6x + 2k + 1 = 0$ が実数解をもつのは k がどんな値をとるときか. (トヨタ自動車)

(3) 2 次方程式 $x^2 - (a + 2)x + 4 = 0$ が虚数解をもつための a の値の範囲を求めよ. (大同製鋼)

【解説】 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解は $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ であり, 判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号により

I) $D > 0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

II) $D = 0 \iff$ 重解をもつ

III) $D < 0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

I), II) より $D \geq 0 \iff$ 実数解をもつ

【解】

(1) 判別式 $D > 0$ より

$$a^2 - 4 \times 1 \times (-a + 3) > 0$$

$$a^2 + 4a - 12 > 0$$

$$(a + 6)(a - 2) > 0$$

$$a < -6, 2 < a$$

(2) 判別式 $D \geq 0$ より

$$6^2 - 4 \times 1 \times (2k + 1) \geq 0$$

$$36 - 8k - 4 \geq 0$$

$$-8k \geq -32$$

$$k \leq 4$$

(3) 判別式 $D < 0$ より

$$\{-(a + 2)\}^2 - 4 \times 1 \times 4 < 0$$

$$(a + 2)^2 - 16 < 0$$

$$a^2 + 4a - 12 < 0$$

$$(a + 6)(a - 2) < 0$$

$$-6 < a < 2$$

27.9 $4x^2 + (k - 1)x + 1 = 0$ が異なる2つの実数解をもつとき, k の値の範囲を求めなさい.
(トヨタ自動車)

27.10 2次方程式 $x^2 - 2(k - 4)x + 2k = 0$ が異なる2つの実数解をもつのは, k がどのような範囲にある場合か.
(川崎重工)

27.11 2 次方程式 $x^2 + 6x + 2k - 1 = 0$ が実数解をもつのは k がどんな値をとるときか. (トヨタ自動車)

27.12 2 次方程式 $kx^2 - 2kx - k + 1 = 0$ が虚数解をもつとき, k のとりうる値の範囲を求めよ. (いすゞ自動車)

27.13 2 つの 2 次方程式 $x^2 + 4x - m^2 - 5m = 0$, $x^2 - 2mx + 2m^2 - 16 = 0$ がいずれも異なる 2 つの実数解をもつときの m の値の範囲を求めよ. (東芝)

27.14 $y = 2x^2 - 5x - 12$ のとき, 次の問いに答えよ. (帝国石油)

- (1) この関数の値が 0 になる x の値を求めよ.
- (2) この関数の値が正になる x の範囲を求めよ.
- (3) この関数の最小値を求めよ.

2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ の判別式 $D = b^2 - 4ac$ により, $D < 0$ のときグラフは x 軸との共有点をもたないので, x の値に関係なく y の符号は一定である. このとき, a の符号によって, y の符号は決定する.

$$\text{i) } D < 0 \text{ かつ } a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{常に } y > 0$$

$$\text{ii) } D < 0 \text{ かつ } a < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{常に } y < 0$$

例題 27.10 2 次関数 $y = ax^2 - (a - 1)x + (a - 1)$ が常に x 軸より上にあるための a の値の範囲を求めなさい. (トヨタ自動車)

【解】 常に $y > 0$ であるためには, 判別式 $D < 0$ かつ x^2 の係数が正でなければならないので

$$\begin{cases} \{-(a-1)\}^2 - 4a(a-1) < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

第 1 式より

$$(a-1)^2 - 4a(a-1) < 0$$

$$a^2 - 2a + 1 - 4a^2 + 4a < 0$$

$$-3a^2 + 2a + 1 < 0$$

$$3a^2 - 2a - 1 > 0$$

$$(3a+1)(a-1) > 0$$

$$a < -\frac{1}{3}, 1 < a$$

よって第 1 式の結果および第 2 式から **【答】** $a > 1$

27.15 すべての実数 x に対して $x^2 - 2cx + 3c > 0$ となる c の値の範囲を求めよ. (トヨタ自動車)

27.16 $x^2 - 2ax + 1 > 0$ が常に成立するとき, 整数 a の値を求めよ. (日本光学)

27.17 $(m - 3)x^2 - mx - 1$ が x のすべての実数値に対して常に負であるための m の値の範囲を求めよ. (神戸製鋼)

27.18 放物線 $y = x^2 - 2x - 8$ と直線 $y = 2x + m$ が相異なる 2 点を共有するとき, m の値の範囲を求めよ. (日本光学)

第 28 章 円の方程式

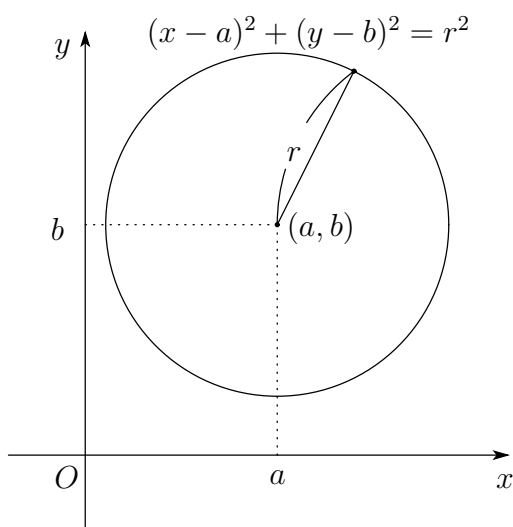
(円の方程式)

中心 (a, b) ，半径 r の円の方程式は

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

特に，原点を中心とする半径 r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2$$



例 28.1

(1) 点 $(-2, 1)$ を中心とする半径 4 の円の方程式は

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$$

(2) 原点を中心とする半径 2 の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = 4$$

問 28.2 次の方程式の表す円の中心の座標と半径を答えよ.

(1) $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$

(2) $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

(3) $x^2 + (y + 4)^2 = 5$

(4) $(x + 1)^2 + (y + 5)^2 = 8$

【答】 (1) 中心 $(1, 3)$ ，半径 3 (2) 中心 $(2, 0)$ ，半径 1 (3) 中心 $(0, -4)$ ，半径 $\sqrt{5}$
(4) 中心 $(-1, -5)$ ，半径 $2\sqrt{2}$

例 28.3 中心が点 $A(-2, 3)$ で、点 $B(1, 4)$ を通る円の方程式を求めよ.

【解】 半径を r とすれば、

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

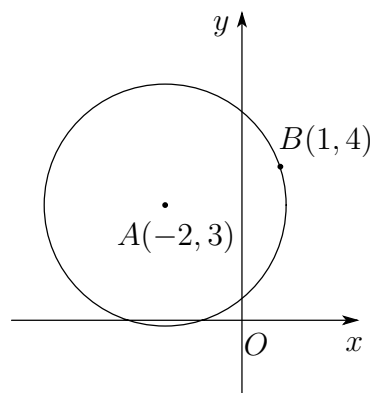
とおける. 円①は、点 B を通るので、

$$(1 + 2)^2 + (4 - 3)^2 = r^2$$

$$r^2 = 10$$

したがって、①より

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$$



28.1 次の方程式を求めよ.

- (1) 中心が $(1, -2)$ で、半径 3 の円 (富士電機)
- (2) 中心 $(1, -2)$ 、半径 4 の円 (NEC)
- (3) 中心 $(1, 2)$ で、半径 $\sqrt{5}$ の円 (トヨタ自動車)
- (4) 点 $A(3, 0)$ を中心とし、原点を通る円 (NHK)
- (5) 中心 $(3, -4)$ で点 $(7, -7)$ を通る円 (トヨタ自動車)
- (6) 中心が $(3, 4)$ で、 y 軸に接する円 (エルモ)

例題 28.4 2点 $A(-1, 6)$, $B(5, -2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ.

【解】 線分 AB の中点を $C(a, b)$ とすると

$$a = \frac{-1 + 5}{2} = 2$$

$$b = \frac{6 + (-2)}{2} = 2$$

点 C は、円の中心であるので、
半径を r とすると

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = r^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

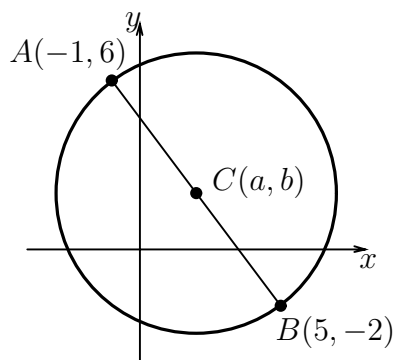
円①が点 A を通るので

$$(-1 - 2)^2 + (6 - 2)^2 = r^2$$

$$r^2 = 25$$

したがって、①より

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 25$$



28.2 次の円の方程式を求めよ.

- (1) 2 点 $A(-3, 4)$, $B(5, 2)$ を結ぶ線分 AB を直径とする円 (東邦ガス)
- (2) 2 点 $(3, 1)$, $(-1, -5)$ を直径の両端とする円 (マツダ)
- (3) 2 点 $(2, 3)$, $(4, -5)$ を直径の両端とする円 (砂鉄鋼業)

(円の方程式の一般形)

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (\text{ただし, } A, B, C \text{ は定数})$$

例題 28.5 方程式 $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$ を $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ の形に変形して, 円の中心の座標と半径を求めよ. (日産自動車)

【解】

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 &= 0 \\ x^2 + 6x + y^2 - 2y &= 6 \\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= 6 + 9 + 1 \\ (x + 3)^2 + (y - 1)^2 &= 16 \end{aligned}$$

【答】 中心 $(-3, 1)$, 半径 4

28.3 次の方程式の表す円の中心の座標と半径を求めよ.

- (1) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ (NKK)
- (2) $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 6$ (東洋高压)
- (3) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 31 = 0$ (福岡道路エンジニア)
- (4) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ (デンソー)
- (5) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ (東芝)
- (6) $x^2 + y^2 + 4x = 0$ (東京急行)
- (7) $x^2 + y^2 = x + y$ (日本ガス化学)

28.4 円 $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ と中心が同じで, 点 $(4, -1)$ を通る円の方程式を求めよ. (トヨタ中央研究所)

例題 28.6 3点 $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(1, 1)$ を通る円の方程式を求めよ.

【解】 円の方程式を

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

とおく. 点 $(0, 0)$ を通るので,

$$\begin{aligned} 0^2 + 0^2 + A \times 0 + B \times 0 + C &= 0 \\ C &= 0 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

点 $(4, 0)$ を通るので,

$$\begin{aligned} 4^2 + 0^2 + A \times 4 + B \times 0 + C &= 0 \\ 4A + C &= -16 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

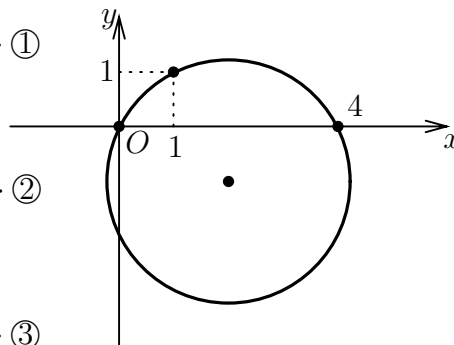
点 $(1, 1)$ を通るので,

$$\begin{aligned} 1^2 + 1^2 + A \times 1 + B \times 1 + C &= 0 \\ A + B + C &= -2 \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

②を③, ④に代入することで $A = -4$, $B = 2$ を得る.

これらの値を①に代入し,

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$$



28.5 3点 $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(-1, 2)$ を通る円の方程式を求めよ. (安川電機)

28.6 3点 $(3, -5)$, $(3, 1)$ および $(4, 0)$ を通る円の方程式を求めよ. (東洋高压)

28.7 円 $x^2 + y^2 = 25$ と直線 $2x + y = 10$ との交点の座標を求めよ. (京阪電鉄)

28.8 直線 $x + 2y = 2$ が円 $x^2 + y^2 = 1$ によって切りとられる弦の中点の座標を求めなさい. (トヨタ自動車)

28.9 $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 8$ の円と $x + y = 3$ の直線が交わってできる弦の中点の座標を求めよ. (日立製作所)

28.10 円 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ の半径を求めなさい. この円が x 軸によって切りとられる線分の長さを求めなさい. (トヨタ自動車)

28.11 円 $x^2 - 4x + y^2 + 2y = 0$ について, 次の問いに答えなさい. (トヨタ自動車)

(1) 円の半径を求めなさい.

(2) この円と直線 $y = 1$ の2つの交点を A , B とするとき, 線分 AB の長さを求めなさい.

28.12 次の 2 つの図形の交点を結ぶ直線の長さを求めよ. (沖電気)

$$x^2 + y^2 = 25, 2x - y = 5$$

28.13 直線 $x + 2y = 1$ が, 原点を中心とする半径 1 の円によって切りとられる線分の長さを求めよ. (I H I)

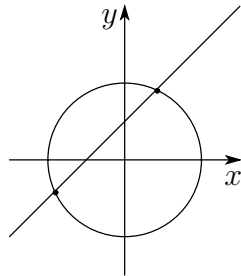
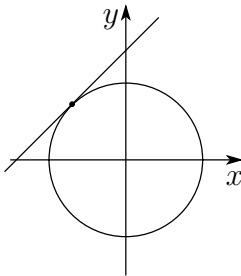
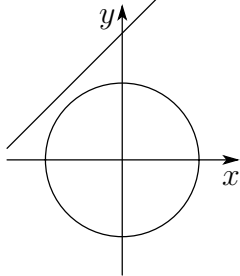
一般に,

$$\text{直線 } y = mx + n \cdots \textcircled{1}, \quad \text{円 } x^2 + y^2 = r^2 \cdots \textcircled{2}$$

について, ①を ②に代入し, 整理して

$$ax^2 + bx + c = 0$$

であるとき, この 2 次方程式の判別式 $D = b^2 - 4ac$ の符号から, 次のことがいえる.

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
共有点の個数	2 個	1 個	なし
円と直線の関係	2 点で交わる	1 点で接する	共有点なし
円と直線の位置関係			

例題 28.7 直線 $y = x + k$ が円 $x^2 + y^2 = 8$ に接するとき, 定数 k の値を求めよ.

【解】 $y = x + k \cdots \textcircled{1}, x^2 + y^2 = 8 \cdots \textcircled{2}$

とおいて, ①を ②に代入すると

$$x^2 + (x + k)^2 = 8$$

$$2x^2 + 2kx + k^2 - 8 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

①と ②は接するので, ③の判別式 $D = 0$ より

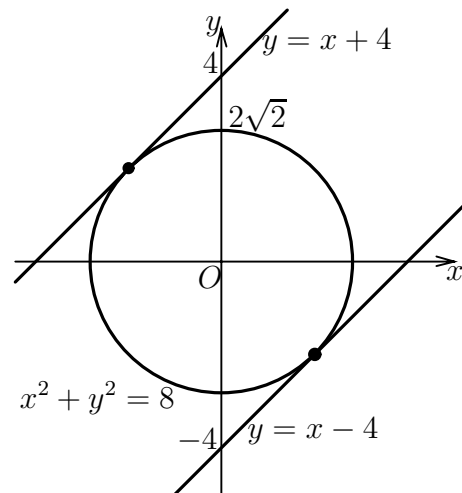
$$(2k)^2 - 4(2)(k^2 - 8) = 0$$

$$4k^2 - 8k^2 + 64 = 0$$

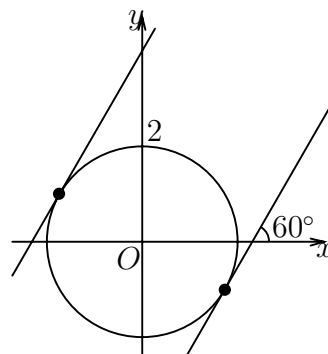
$$-4k^2 = -64$$

$$k^2 = 16$$

$$k = \pm 4$$



28.14 円 $x^2 + y^2 = 4$ に接し, x 軸の正の向きと 60° の角をつくる直線の方程式を求めよ.
(NEC フィールドサービス)



28.15 原点から円 $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$ に引いた接線のうち, 傾きが正となるものの方程式を求めなさい.
(トヨタ自動車)

28.16 原点より円 $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 18 = 0$ に引いた接線の方程式を求めよ. (トヨタ自動車)

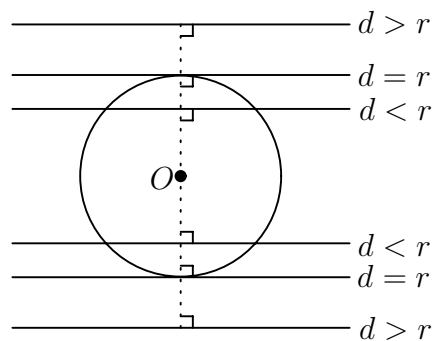
(円と直線の位置関係)

点 O を中心とする半径 r の円と直線 l の位置関係は, 円の中心 O と直線 l との距離を d とすると, 次の3つの場合に分かれる.

(1) $d < r \iff$ 2点で交わる

(2) $d = r \iff$ 1点で接する

(3) $d > r \iff$ 共有点なし



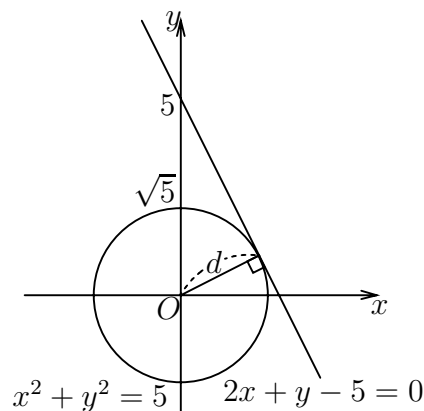
例 28.8 円 $x^2 + y^2 = 5$ と直線 $2x + y - 5 = 0$ の位置関係は, 円の中心は原点であり, 半径 r は

$$r = \sqrt{5}$$

また, 原点から直線 $2x + y - 5 = 0$ までの距離 d は

$$d = \frac{|2 \cdot 0 + 0 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

ゆえに, $d = r$ となり, 円と直線は1点で接する.



問 28.9 円 $x^2 + y^2 = 25$ と, 次の直線の位置関係を調べよ.

(1) $3x + 4y + 10 = 0$

(2) $3x + 4y - 30 = 0$

(3) $3x + 4y + 25 = 0$

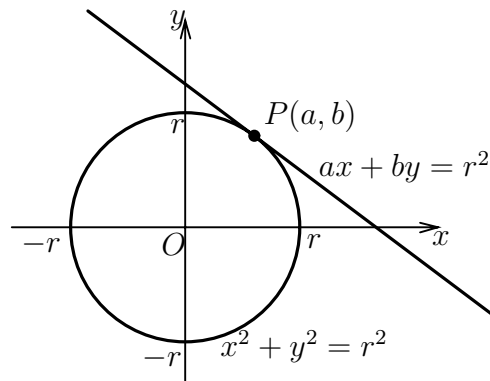
【答】 (1) 2 点で交わる (2) 共有点なし (3) 1 点で接する

(円周上の点における接線の方程式)

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $P(a, b)$ における接線の方程式は

$$ax + by = r^2$$

である.



例 28.10

円 $x^2 + y^2 = 5$ 上の点 $(2, 1)$ における接線の方程式は

$$2x + 1y = 5$$

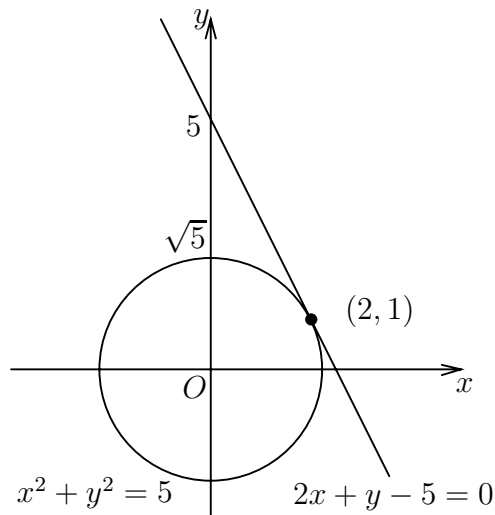
$$2x + y - 5 = 0$$

である.

また, この直線の方程式を

$$y = -2x + 5$$

としてもよい.



問 28.11 次の円周上の点における接線を求めよ.

(1) $x^2 + y^2 = 10$, $(3, 1)$

(2) $x^2 + y^2 = 13$, $(2, -3)$

(3) $x^2 + y^2 = 9$, $(2, \sqrt{5})$

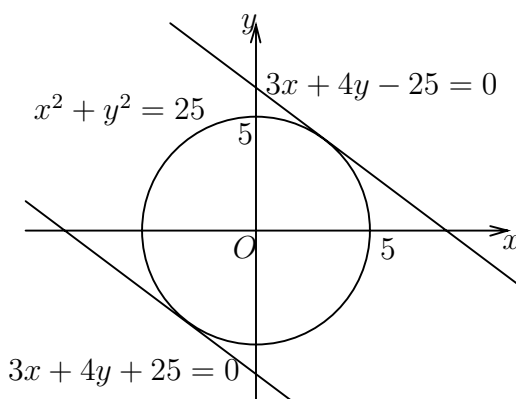
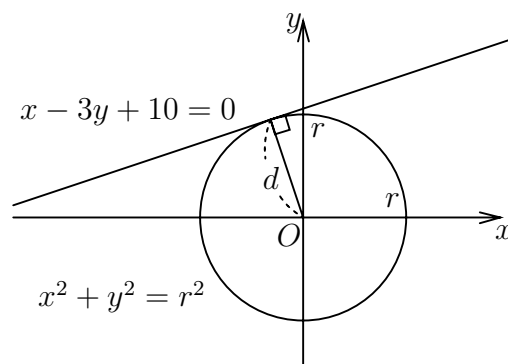
(4) $x^2 + y^2 = 9$, $(3, 0)$

【答】 (1) $3x + y - 10 = 0$ (2) $2x - 3y - 13 = 0$ (3) $2x + \sqrt{5}y - 9 = 0$ (4) $x = 3$ **例題 28.12** 直線 $3x + 4y + k = 0$ が円 $x^2 + y^2 = 25$ に接するように、定数 k の値を求めよ.【解】 円 $x^2 + y^2 = 25$ の中心は原点で、半径 r は 5. 原点から直線 $3x + 4y + k = 0$ までの距離 d は、

$$d = \frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|k|}{5}$$

直線と円が接するのは $d = r$ のときであるから

$$\frac{|k|}{5} = 5 \quad \text{より} \quad |k| = 25$$

ゆえに、 $k = \pm 25$ **問 28.13** 直線 $x - 3y + 10 = 0$ が円 $x^2 + y^2 = r^2$ に接するように、定数 r の値を求めよ.【答】 $r = \sqrt{10}$ **28.17** 直線 $3x + 4y = a$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ が接するような a の値を求めよ. (帝国石油)**28.18** 円 $x^2 + y^2 = 1$ と直線 $x - 2y = c$ とが 2 点で交わるような c の値の範囲を求めなさい. ☆ (トヨタ自動車)

例題 28.14 点 $A(1, 3)$ から円 $x^2 + y^2 = 5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ.

【解】 接点を $P(a, b)$ とすると,

P は円周上にあるから

$$a^2 + b^2 = 5 \quad \dots \textcircled{1}$$

また, P における円の接線の方程式は

$$ax + by = 5$$

であり, この直線が点 A を通るから

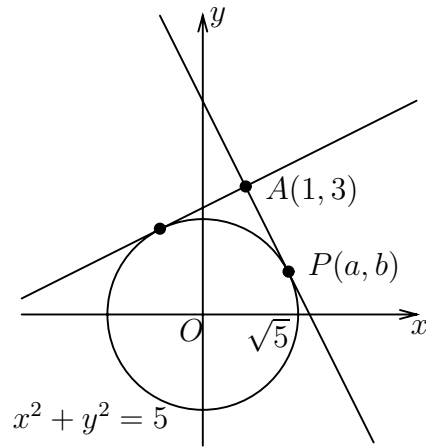
$$a + 3b = 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②から

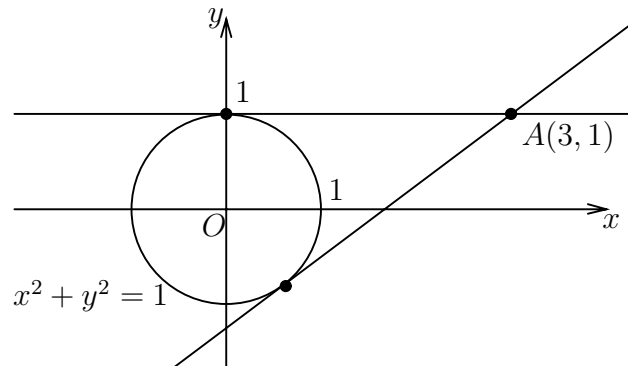
$$(a, b) = (2, 1), (-1, 2)$$

したがって,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{接点 } (2, 1) \\ \text{接線 } 2x + y = 5 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{接点 } (-1, 2) \\ \text{接線 } -x + 2y = 5 \end{array} \right\}$$



28.19 点 $A(3, 1)$ を通り, 円 $x^2 + y^2 = 1$ に接する直線の方程式と接点の座標を求めよ. ☆ (ブラザー工業)



実践問題 1 1

東芝

次の問いに答えよ.

1 $\frac{x+2}{x-1} \div \frac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} \times \frac{x-1}{x+1}$ の式を簡単にせよ.

2 2次関数 $y = x^2 - 4x + 1$ のグラフの頂点の座標を求めよ.

3 $(a+b)(x^2-y^2) + (y-x)(a^2-b^2)$ を因数分解せよ.

4 次の方程式, 不等式を解きなさい.

(1)
$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

(2) $\frac{x-5}{x^2-1} + \frac{2}{x-1} = -3$

(3) $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 < 0$

5 $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ を簡単にしなさい.

6 式 $(3+2i)a - (1-i)b = 1+4i$ を満たす実数 a, b の値を求めよ.

【答】

1 1

2 $(2, -3)$

3 $(a+b)(x-y)(x+y-a+b)$

4 (1) $(x, y) = (4, -3), (0, 5)$ (2) $x = -2$ (3) $x < -2, 1 < x < 3$

5 $2\sqrt{3}$

6 $a = 1, b = 2$

第 29 章 不等式の表す領域

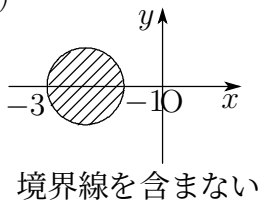
(円の内部・外部)

$(x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2$ の表す領域は、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の内部、
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 > r^2$ の表す領域は、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の外部。
 ただし、境界線を含まない。

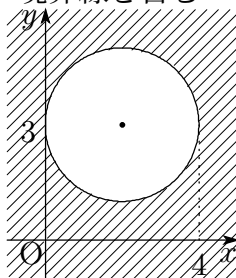
[補足] $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq r^2$ の表す領域は、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の内部、
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \geq r^2$ の表す領域は、円 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ の外部。
 ただし、境界線を含む。

問 29.1 次の斜線で示した領域を表す不等式を求めよ。

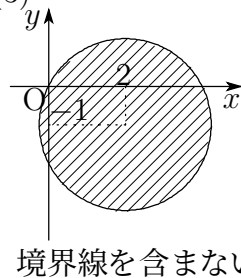
(1)



(2) 境界線を含む



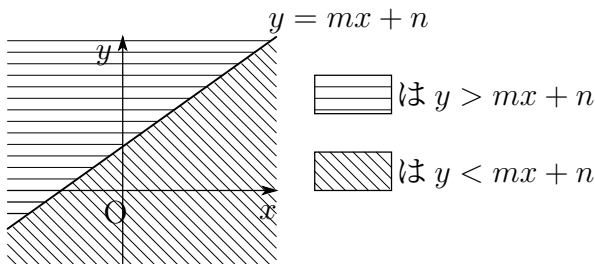
(3)



【答】 (1) $(x+2)^2 + y^2 < 1$ (2) $(x-2)^2 + (y-3)^2 \geq 4$ (3) $(x-2)^2 + (y+1)^2 < 5$

(直線の上側・下側) 直線 $y = mx + n$ は平面を 2 つの部分に分ける。

$y > mx + n$ の表す領域は直線の上側、 $y < mx + n$ の表す領域は直線の下側。
 ただし、境界線は含まない。



[補足] $y \geq mx + n$ の表す領域は直線の上側、 $y \leq mx + n$ の表す領域は直線の下側。

ただし、境界線を含む。

例 29.2 不等式 $x - y - 2 \geq 0$ の表す領域は、
変形して

$$-y \geq -x + 2$$

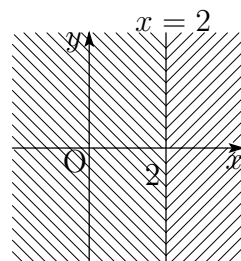
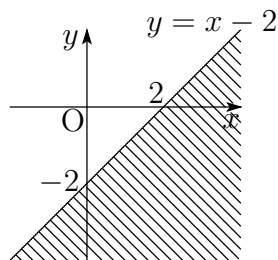
$$y \leq x - 2$$

この不等式の表す領域は
直線 $y = x - 2$ の下側。ただし、境界線を含む。

例 29.3 直線 $x = 2$ は、平面を2つの部分に分ける。

$x > 2$ の表す領域は、この直線の右側、

$x < 2$ の表す領域は、この直線の左側、
ただし、境界線を含まない。



例題 29.4 次の2つの不等式をともに満たす領域を図示せよ。 $x < 2$ $x > 2$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 9 & \text{①} \\ y > x + 2 & \text{②} \end{cases}$$

【解】

①の表す領域は

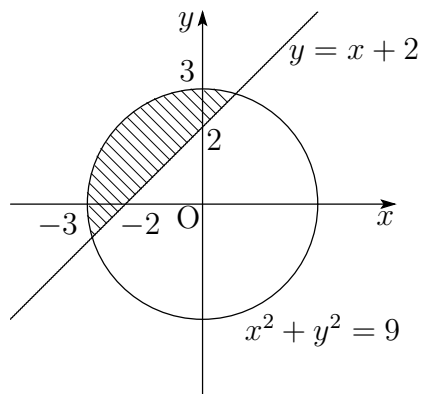
円 $x^2 + y^2 = 9$ の内部。

②の表す領域は

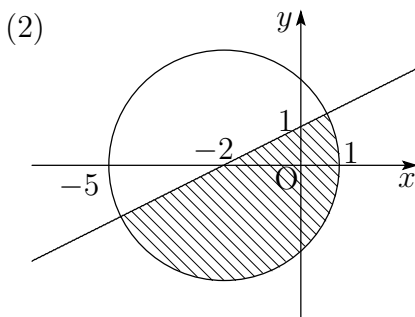
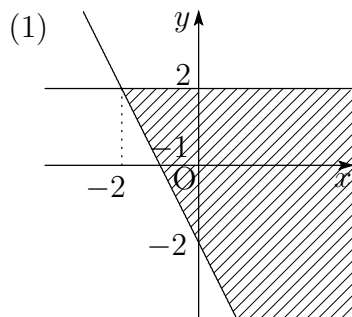
直線 $y = x + 2$ の上側。

よって、この2つの領域の共通
な部分が求める領域である。

ただし、境界線を含まない。

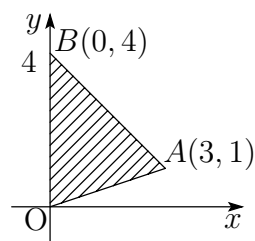


問 29.5 斜線で示した領域を表す不等式の組を求めよ。ただし、境界線を含む。



【答】 (1) $\begin{cases} y \leq 2 \\ y \geq -2x - 2 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} (x + 2)^2 + y^2 \leq 9 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$

例題 29.6 3点 $O(0,0)$, $A(3,1)$, $B(0,4)$ があるとき, $\triangle OAB$ の内部を領域とする不等式の組を求めよ. ただし, 境界線を含まない.



【解】

直線 OA の方程式は $y = \frac{1}{3}x$

直線 AB の方程式は $y = -x + 4$

直線 BO の方程式は $x = 0$

したがって, $\triangle OAB$ の表す領域は

直線 OA については, その上側であるから

$$y > \frac{1}{3}x$$

直線 AB については, その下側であるから

$$y < -x + 4$$

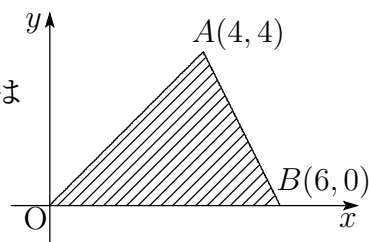
直線 BO については, その右側であるから

$$x > 0$$

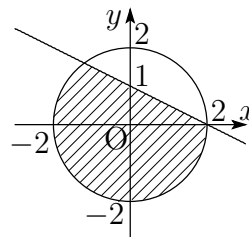
領域は, 上の 3つの不等式のすべてを満たすから, 求める不等式の組は

$$\begin{cases} y > \frac{1}{3}x \\ y < -x + 4 \\ x > 0 \end{cases}$$

29.1 次の斜線部を不等式で表せ. ただし, 境界線は含まないものとする. (呉羽紡績)

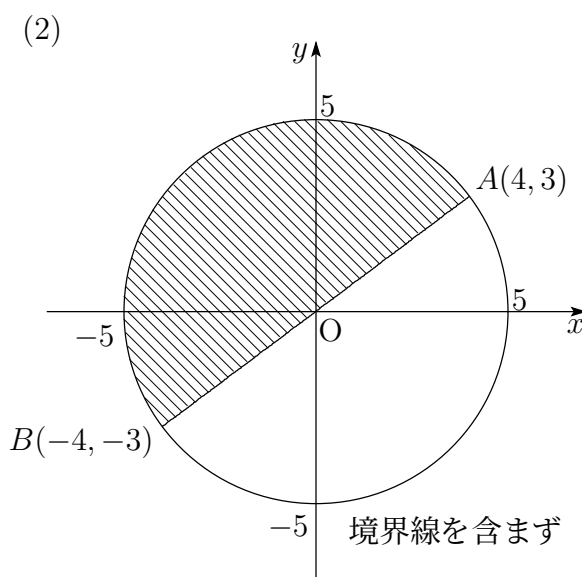
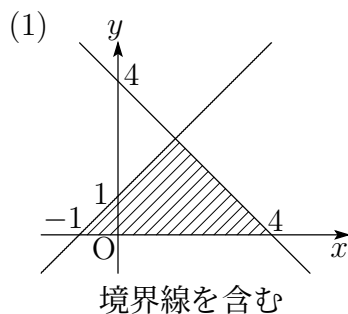


29.2 右の斜線部分を不等式を用いて表せ. ただし, 境界線は含まない. (マツダ)



29.3 次の斜線をつけた部分を不等式で表せ.

(コスモ石油)

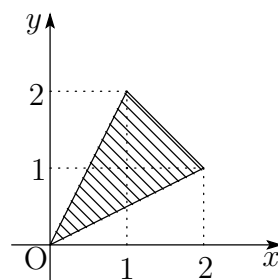


29.4 右図の斜線で示された領域について、次の問いに答えよ。ただし、境界を含む。

(トヨタ車体)

(1) 連立不等式で表せ.

(2) 面積を求めよ.



29.5 次の連立不等式を満たす点 (x, y) の存在する範囲を斜線で示し、その面積を求めよ。

(日本電池)

$$\begin{cases} y \geq 2x - 4 \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq -x + 2 \end{cases}$$

29.6 次の不等式の表す領域を図示せよ.

(日石三菱)

$$\begin{cases} x < 4 \\ 2y - x < 2 \\ 4x + 3y > 12 \end{cases}$$

29.7 次の不等式の表す領域を図示せよ.

(NKK)

$$\begin{cases} y \leq x \\ x - 2y \leq 2 \\ x + 2y \leq 4 \end{cases}$$

29.8 次の不等式を満たす領域を図示せよ.

(葵精機)

$$1 < x^2 + y^2 < 4$$

29.9 3直線 $y = x + 1$, $x + 2y = 5$, $2x + y = 7$ によって囲まれた図形の内部を表す式をかけ. ただし, 境界線を含まない. (ダイハツ)

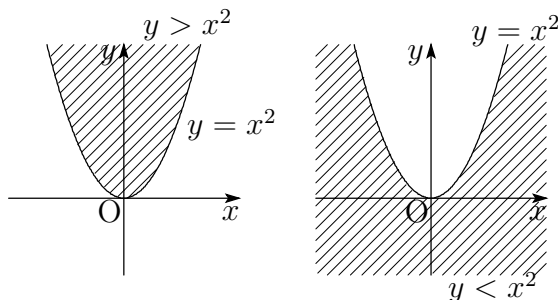
境界線が直線の場合と同様に, 放物線が境界の場合も次のことがいえる.

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を F とする.

$y > ax^2 + bx + c$ の表す領域は, 放物線 F の上側.

$y < ax^2 + bx + c$ の表す領域は, 放物線 F の下側.

例えば, $y > x^2$, $y < x^2$ の表す領域は, それぞれ下の図の斜線部分である. ともに, 境界線を含まない.

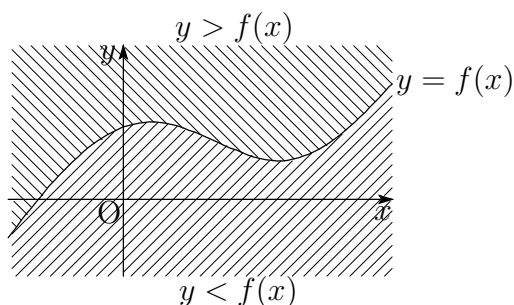


(不等式の表す領域)

$y > f(x)$ の表す領域は, 曲線 $y = f(x)$ の上側.

$y < f(x)$ の表す領域は, 曲線 $y = f(x)$ の下側.

ただし, 境界線を含まない.



29.10 次の不等式を同時に満たす領域を図示せよ.

(いすゞ自動車)

$$(1) \begin{cases} y \geq x^2 - 2x - 3 \\ y \leq x - 3 \end{cases}$$

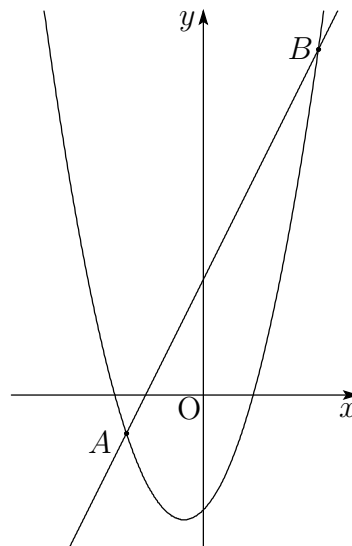
$$(2) \begin{cases} y \geq x^2 - 2x \\ y \leq -x^2 + 4x \end{cases}$$

29.11 2つの不等式 $y \geq x^2$, $y \leq x + 2$ を同時に満たす領域を図示せよ. (九州電力)

$$29.12 \text{ 領域 } \begin{cases} y \geq x^2 \\ y \leq 2x \\ y + x \leq 2 \end{cases} \text{ を図示せよ.} \quad (\text{日本精工})$$

29.13 次の問いに答えよ.

(日本精工)

(1) $y = x^2 + x - 3$ と $y = 2x + 3$ の交点 A , B の座標を求めよ.
$$(2) \begin{cases} 2x + 3 > y > x^2 + x - 3 \\ x > 0 \end{cases} \text{ を満たす部分を斜線で図示せよ.}$$
**例題 29.7** 不等式 $(x - y + 1)(2x + y - 1) < 0$ の表す領域を図示せよ.

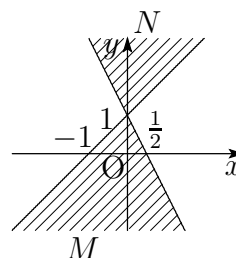
[解説] $AB < 0 \iff A > 0, B < 0$ または $A < 0, B > 0$ であるから, この領域は2組の連立方程式で表される.

【解】 与えられた不等式から

$$\text{i) } \begin{cases} x - y + 1 > 0 \\ 2x + y - 1 < 0 \end{cases}$$

または

$$\text{ii) } \begin{cases} x - y + 1 < 0 \\ 2x + y - 1 > 0 \end{cases}$$



よって、連立不等式 i), ii) の表す領域を、それぞれ M , N とすると求める領域は $M \cup N$ で、図のようになる。ただし、境界線を含まない。

29.14 次の不等式の表す領域を図示せよ。

(ダイハツ)

$$(y - x^2)(y - x - 2) < 0$$

29.15 次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(1) (x^2 + y^2 - 4)(x + y) < 0$$

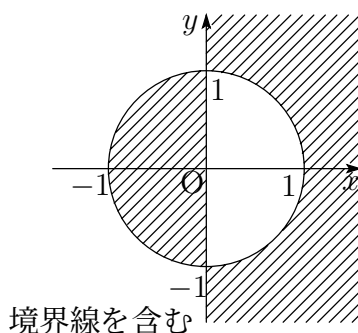
(東京光学)

$$(2) (x^2 + y^2 - 4)(x^2 - y) > 0$$

(安川電機)

29.16 次の図の斜線部分に含まれる点 (x, y) は、次のうちどの条件を満足するものといえるか。次のア～エから 1 つ選び、記号で答えよ。

(トヨタ自動車)



境界線を含む

ア. $x \geq 0$ かつ $x^2 + y^2 \leq 1$

イ. $x \geq 0$ または $x^2 + y^2 \leq 1$

ウ. $(x \geq 0 \text{ または } x^2 + y^2 \geq 1) \text{ かつ } (x \leq 0 \text{ または } x^2 + y^2 \leq 1)$

エ. $x(x^2 + y^2 - 1) \geq 0$

実践問題 1 2

東芝

次の問いに答えよ.

- 1 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき, θ の値を求めよ. ただし, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ である.
- 2 集合 A, B について, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\overline{A} \cap B = \{2, 3, 6\}$, $A \cap \overline{B} = \{1, 8\}$ であるとき, 集合 A を求めよ.
- 3 円 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$ の中心の座標を求めよ.
- 4 1 から 100 までの整数について, 3 または 5 で割り切れる整数は何個あるか.
- 5 整式 $P(x)$ を $x + 2$ で割った余りが 5 のとき, $(2x - 1)P(x)$ を $x + 2$ で割ったときの余りを求めよ.
- 6 2 辺の長さがそれぞれ $3\sqrt{3}$, 6 で, その 2 辺の間の角の大きさが 30° の三角形の面積を求めよ.
- 7 点 $(2, 3)$ を通り, 直線 $3x - 4y + 5 = 0$ に垂直な直線の方程式を求めよ.

【答】

- 1 150°
- 2 $A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$
- 3 $(1, -1)$
- 4 47 個
- 5 -25
- 6 $\frac{9}{2}\sqrt{3}$
- 7 $4x + 3y - 17 = 0$

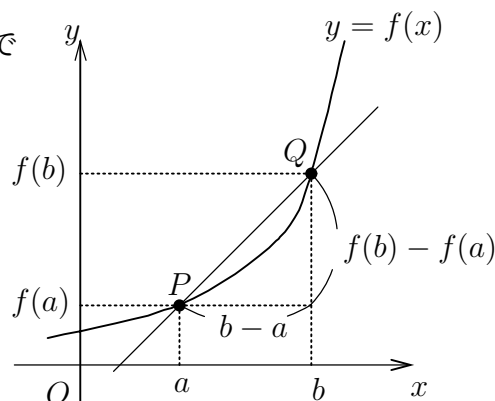
第 30 章 微分

関数 $y = f(x)$ において, x が a から b まで変化するときの y の変化量 $f(b) - f(a)$ を, x の変化量 $b - a$ で割った値

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{①}$$

を, x が a から b まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率という.

①の値は, $y = f(x)$ のグラフ上の2点 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ を結ぶ直線の傾きを表している.



(平均変化率) 関数 $y = f(x)$ において, x が a から b までの平均変化率は

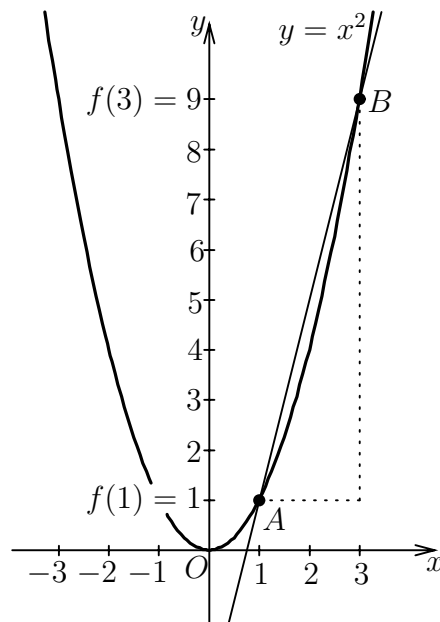
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

例 30.1 $y = x^2$ において, x が 1 から 3 まで変化するときの y の平均変化率は

【解】 $f(x) = x^2$ とおくと

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{9 - 1}{2} = 4$$

これから線分 AB の傾きは 4



30.1 関数 $y = x^2 + 3x - 4$ について, x が -1 から 2 まで変化するときの平均変化率を求めよ. (三菱電機)

●微分係数と接線の傾き

関数 $y = f(x)$ において, x が a から $a + h$ まで変化するときの $f(x)$ の平均変化率は

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad ①$$

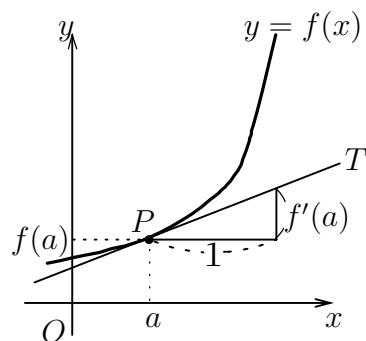
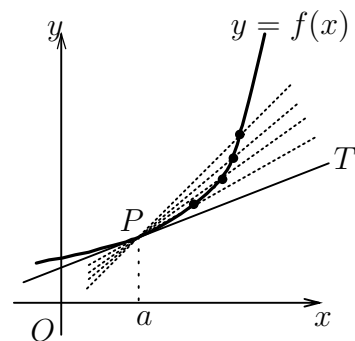
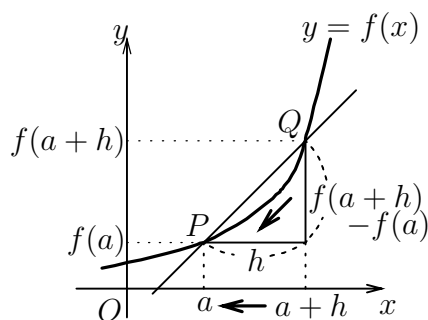
この式で h を限りなく 0 に近づけたときの極限值, すなわち

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

を, 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における**微分係数**といい, $f'(a)$ で表す.

①は, 直線 PQ の傾きであり, h を限りなく 0 に近づければ, 点 Q は, 関数 $y = f(x)$ の表す曲線に沿って点 P に近づき, 直線 PQ は, 傾きが $f'(a)$ である直線 PQ に近づく.

点 P を通り, 傾きが $f'(a)$ である直線 PT を, 点 P におけるこの曲線の**接線**といい, P を**接点**という.



(微分係数) 関数 $y = f(x)$ の $x = a$ における微分係数は,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(接線の傾き) 曲線 $y = f(x)$ の $x = a$ である点における接線の傾きは,

$$f'(a)$$

例題 30.2 次の極限値を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1}$$

【解】

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x+1} = \frac{3}{2}$$

[補足] 約分せずに、代入すると $\frac{0}{0}$ の不定形になる．例えば、 $x \rightarrow 1$ で不定形になるとすれば、分母も分子も $x-1$ を因数にもつ．

30.2 次の極限値を求めよ．

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} 3(5-x) \quad (\text{トヨタ自動車})$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x) \quad (\text{日本光学})$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \quad (\text{マツダ})$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + x^2}{x + x^2} \quad (\text{豊田自動織機})$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - x - 2} \quad (\text{日産自動車})$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - x - 6} \quad (\text{シチズン})$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{2x^2 - 7x + 6} \quad (\text{京阪電気鉄道})$$

30.3 次の極限値を求めよ．

$$(1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3} \quad (\text{日本コンデンサー工業})$$

$$(2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \quad (\text{青木建設})$$

例題 30.3 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 3x + 2} = 5$ が成り立つように、定数 a, b の値を定めよ．

[解説] $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = 0$ であるが、極限値が存在するので、 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax + b) = 0$ である．

【解】 極限值が存在することから、 $\lim_{x \rightarrow 2}(x^2 + ax + b) = 0$ であるから、

$$4 + 2a + b = 0 \quad \text{よって} \quad b = -2a - 4 \quad \cdots \textcircled{1}$$

①より、分子 $= x^2 + ax - 2a - 4 = (x - 2)(x + a + 2)$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + ax + b}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + a + 2)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + a + 2}{x - 1} = a + 4$$

よって、 $a + 4 = 5$ であるから $a = 1$ 、また ①より $b = -6$

(答) $a = 1, b = -6$

30.4 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 + x + b}{x - 1} = 3$ が成り立つように、定数 a, b を求めなさい。 (沖電気)

30.5 次の等式が成り立つように、定数 a, b の値を求めなさい。 (東北電力)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x^2 - x - 2} = \frac{5}{3}$$

(x, x^2, x^3, x^4 の導関数)

$$(x)' = 1, \quad (x^2)' = 2x, \quad (x^3)' = 3x^2, \quad (x^4)' = 4x^3$$

(x^n の導関数)

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

(定数の導関数)

c を定数とすると、 $f(x) = c$ の導関数は

$$(c)' = 0$$

一般に、関数 $f(x), g(x)$ に対して、次の式が成り立つ。

(微分の計算公式)

$$\{kf(x)\}' = k f'(x) \quad \text{ただし、} k \text{ は定数}$$

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$$

$$\{f(x) - g(x)\}' = f'(x) - g'(x)$$

例題 30.4 次の関数を微分せよ。

(1) $y = 2x^3 - 5x + 4$

(2) $y = x^2(4x - 3)$

【解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad y' &= (2x^3 - 5x + 4)' \\
 &= 2(x^3)' - 5(x)' + (4)' \\
 &= 2 \times 3x^2 - 5 \times 1 + 0 = 6x^2 - 5
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad y = x^2(4x - 3) = 4x^3 - 3x^2 \text{ であるから}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= (4x^3 - 3x^2)' \\
 &= 4(x^3)' - 3(x^2)' \\
 &= 4 \times 3x^2 - 3 \times 2x = 12x^2 - 6x
 \end{aligned}$$

30.6 次の関数を微分せよ.

$$(1) \quad y = 2x^2 - 3x + 16 \quad (\text{別府化学})$$

$$(2) \quad y = x^3 + 3x^2 - 5x - 1 \quad (\text{住友電気})$$

$$(3) \quad f(x) = 3x^4 + 4x^2 + 5 \quad (\text{住友電工})$$

$$(4) \quad y = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 9 \quad (\text{旭化成})$$

$$(5) \quad y = (5x + 4)(2x + 1) \quad (\text{三菱重工})$$

$$(6) \quad y = (2x - 3)(3x - 2) \quad (\text{佐世保重工})$$

$$(7) \quad f(x) = (x + 1)(x^2 - 3x + 5) \quad (\text{神戸製鋼})$$

$$(8) \quad y = (x - 2)(x^2 + 2x + 4) \quad (\text{三洋電機})$$

$$(9) \quad y = (x^2 + 1)(2x - 5) \quad (\text{NECフィールドサービス})$$

$$(10) \quad y = (x^2 - 1)(x^2 + x + 1) \quad (\text{九州電力})$$

$$(11) \quad y = (2 - 3x)^2 \quad (\text{清水建設})$$

$$(12) \quad y = x(x^2 + 1)^2 \quad (\text{大日本電線})$$

$$(13) \quad y = (2x + 5)(3x + 2)(2x + 4) \quad (\text{東芝})$$

関数 $y = f(x)$ の導関数を表す記号は $f'(x)$ の他に、次の記号等も使われる.

$$y', \quad \{f(x)\}, \quad \frac{dy}{dx}$$

30.7 次の問いに答えよ.

(1) $\frac{d}{dx}(5x^3)$ を計算せよ. (協和電設)

(2) $\frac{d}{dx}(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 4)$ を計算せよ. (東芝)

(3) $y = 3x^2 + x + 4$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ. (出光興産)

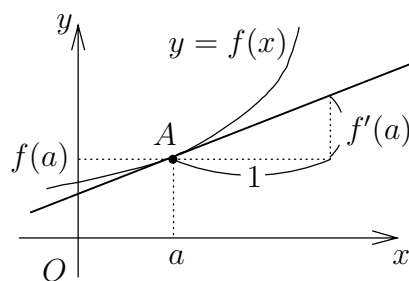
(4) $y = (3x + 2)^2$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ を求めよ. (NECエンジニアリング)

●接線の方程式

曲線 $y = f(x)$ 上の $x = a$ である点における y 座標は $f(a)$ であり, 接線の傾きは $f'(a)$ であるので, 接線の方程式は次のようになる.

(接線の方程式)

曲線 $y = f(x)$ 上の $x = a$ の点における接線は
 $y - f(a) = f'(a)(x - a)$



点 (a, b) を通り, 傾き m の直線は,
 $y - b = m(x - a)$

例題 30.5 放物線 $y = x^2 - 3x$ 上の $x = 2$ の点における接線の方程式を求めよ.

【解】 $f(x) = x^2 - 3x \quad \dots \textcircled{1}$

とおくと,

$$f(2) = 2^2 - 3 \times 2 = -2$$

である. また, ①より

$$f'(x) = 2x - 3$$

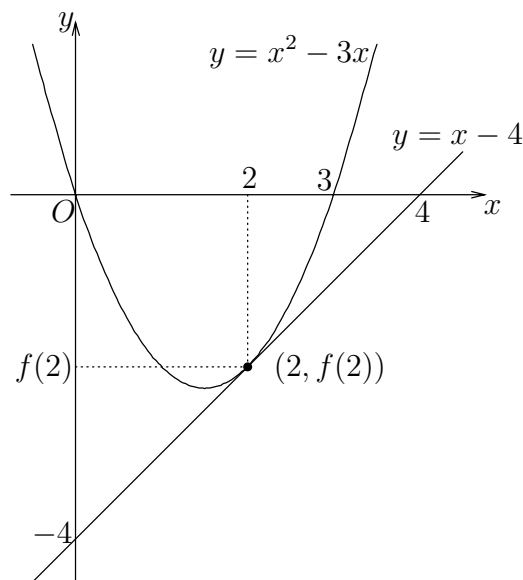
なので,

$$f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$$

ゆえに, 求める接線の方程式は

$$y - (-2) = 1(x - 2)$$

$$y = x - 4$$



30.8 $f(x) = x^2$ のとき, $f'(a)$ を求めよ. (協和電設)

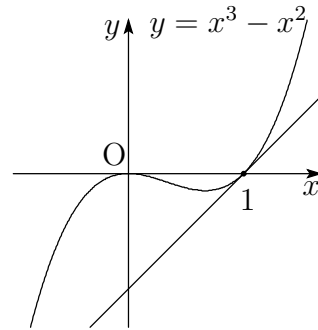
30.9 次の関数の $x = 2$ における微分係数を求めよ. (日石三菱)

$$f(x) = (x^2 - 3)^2$$

30.10 $y = x^2 - 2x - 3$ 上の点 $(3, 0)$ における接線の方程式を求めよ. (九州電力)

30.11 曲線 $y = x^3 - 3x + 2$ 上の点 $(2, 4)$ における接線の方程式を求めよ. (豊田工機)

30.12 曲線 $y = x^3 - x^2$ の $x = 1$ における接線の方程式を求めよ. (三洋電機)



30.13 $y = x^2 - 6x + 1$ について, 次の問いに答えよ. (NKK)

- (1) グラフ上の点 $A(5, -4)$ での接線の方程式を求めよ.
- (2) 点 A において接線の直交する直線の方程式を求めよ.
- (3) 上記の2本の直線と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ.

30.14 $y = 2x^2 - 4x - 1$ について, 次の問いに答えよ. (徳山曹達)

- (1) 頂点の座標
- (2) 原点に関して対称な方程式
- (3) x 軸の正の方向に4, y 軸の負の方向に3だけ平行移動した方程式
- (4) $x = 2$ における接線の方程式

例題 30.6 点 $P(0, -1)$ から放物線 $y = x^2$ に引いた接線の方程式を求めよ.

【解】 接点の x 座標を a とおくと、接点 A の座標は $A(a, a^2)$ である.

$$y = x^2$$

より,

$$y' = 2x$$

上式から、この接線の傾きは $2a$ である.

このときの接線の方程式は,

$$y - a^2 = 2a(x - a)$$

$$y = 2ax - a^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この接線が点 $P(0, -1)$ を通るので,

$$-1 = 2a \times 0 - a^2$$

$$a^2 = 1$$

ゆえに、 $a = 1$ または $a = -1$

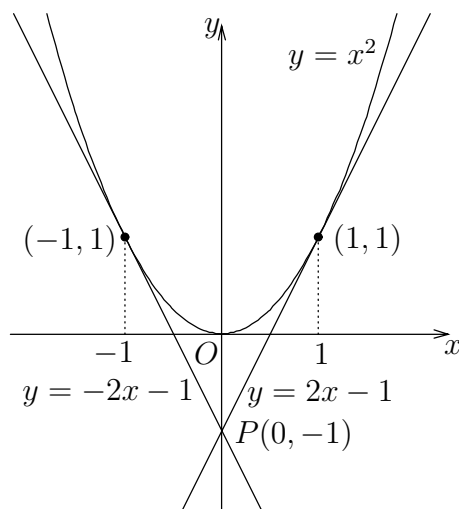
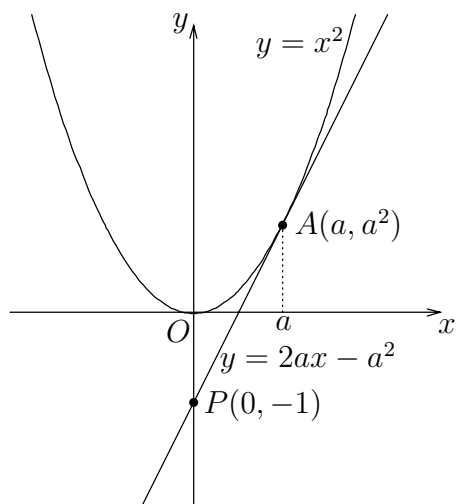
これを $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$a = 1 \quad \text{のとき, } y = 2x - 1$$

$$a = -1 \quad \text{のとき, } y = -2x - 1$$

よって、求める接線の方程式は,

$$(\text{答}) \ y = 2x - 1, \ y = -2x - 1$$



30.15 点 $(1, -3)$ を通って $y = x^2$ に接する接線の方程式を求めよ. (日立製作所)

30.16 放物線 $y = x^2 + 3x + 1$ に接し、点 $(0, -3)$ を通る直線の方程式を求めよ. (日本特殊鋼)

30.17 放物線 $y = x^2 + 3$ へ点 $(1, 0)$ から引いた接線の方程式を求める問いに対して空欄 (1)~(10) を解答せよ. (NEC フィールドサービス)

点 $(1, 0)$ から曲線 $y = x^2 + 3$ に引いた接線の接点を $A(a, a^2 + 3)$ とし A における接点の方程式を求める.

$$\text{傾き } f(x) = x^2 + 3 \quad f'(x) = 2x$$

$$f(a) = a^2 + 3 \quad f'(a) = \boxed{(1)}$$

次に、点 A を通り傾き $\boxed{\text{(2)}}$ の直線の方程式は

$$y - (a^2 + 3) = \boxed{\text{(3)}}(x - a)$$

$$y = \boxed{\text{(4)}}$$

これが点 $(1, 0)$ を通るときの a の値は

$$a = \boxed{\text{(5)}} \quad \text{と} \quad a = \boxed{\text{(6)}} \quad \text{である.}$$

したがって接線の方程式は

$$y = \boxed{\text{(7)}}, \quad y = \boxed{\text{(8)}}$$

また、接点の座標は

$$\boxed{\text{(9)}}, \quad \boxed{\text{(10)}}$$

●関数の増加・減少

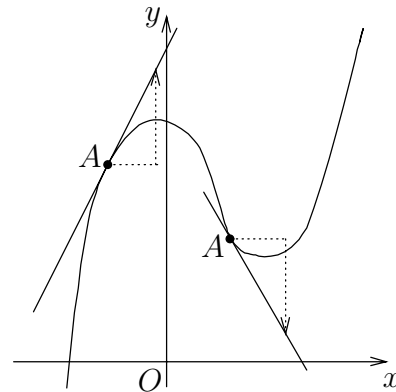
図のように、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $A(a, f(a))$ における接線が右上がりならば、 $y = f(x)$ は点 A の近くで増加し、右下がりならば、減少している。

また $f'(a) > 0$ ならば接線は右上がり、 $f'(a) < 0$ ならば接線は右下がりなので、次のことがいえる。

(関数の増減と $f'(x)$ の符号)

$f'(x) > 0$ となる x の範囲で $f(x)$ は増加する

$f'(x) < 0$ となる x の範囲で $f(x)$ は減少する。



右の図のように、関数 $f(x)$ が $x = a$ の前後で増加から減少に変わるとき、

$f(x)$ は $x = a$ で極大であるといい、

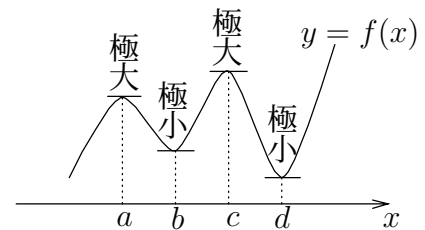
$f(a)$ を極大値という。

また、関数 $f(x)$ が $x = b$ の前後で減少から増加に変わるとき、

$f(x)$ は $x = b$ で極小であるといい、

$f(b)$ を極小値という。

極大値と極小値をまとめて極値という。



$f'(x)$	+	-	+	-	+
$f(x)$	↗	↘	↗	↘	↗

関数 $f(x)$ が $x = \alpha$ で極値をとれば、 $f(x)$ は $x = \alpha$ の前後で、増減の状態が変わる。すなわち $f'(x)$ の符号が変わるから

$$f'(\alpha) = 0$$

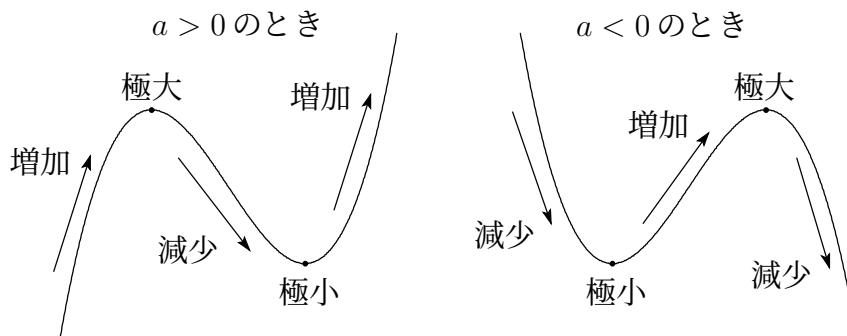
となる。

(極大・極小) $f'(\alpha) = 0$ であるとき、 $f'(x)$ の符号が $x = \alpha$ で
 正から負に変わるとき、 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極大となり、
 負から正に変わるとき、 $f(x)$ は $x = \alpha$ で極小となる。

一般に、3次関数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において、 $y' = 0$ が異なる2つの実数解をもつとき、極大値と極小値をもつ。また、グラフの増減は次のようになる。

$a > 0$ のとき 増加 $\Rightarrow$ 減少 $\Rightarrow$ 増加

$a < 0$ のとき 減少 $\Rightarrow$ 増加 $\Rightarrow$ 減少



例題 30.7 関数 $y = x^3 - 3x$ の極値を求めよ。

[解説] 関数 $y = x^3 - 3x$ において、 $y' = 0$ の解は、 $x = -1$ 、 $x = 1$ の2つの解をもち、 x^3 の係数は1(正)であるから、グラフの増減は
 増加 $\Rightarrow$ 減少 $\Rightarrow$ 増加

【解】 $y = x^3 - 3x$ を微分すると

$$y' = 3x^2 - 3$$

極値をとるとき、 $y' = 0$ であるので

$$3x^2 - 3 = 0$$

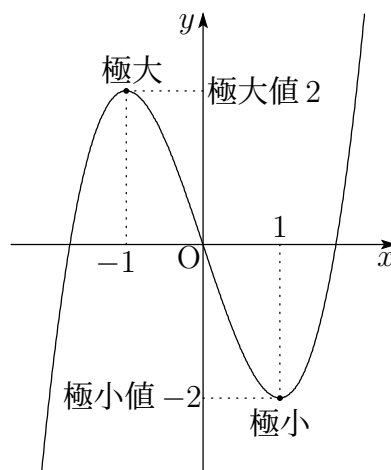
$$x = \pm 1$$

$$\text{極値は } x = -1 \text{ のとき } y = 2$$

$$x = 1 \text{ のとき } y = -2$$

極値は、 $x = -1$ のとき $y = 2$

$x = 1$ のとき $y = -2$



(答) $x = -1$ のとき極大値2、 $x = 1$ のとき極小値-2

30.18 $y = x^3 - 3x - 2$ の極値を求め、グラフをかけ。 (東芝府中)

30.19 $y = x^3 - 3x^2 - 9$ のグラフをかけ。 (東洋運搬機)

30.20 $y = x^3 - 3x - 1$ のグラフをかけ。 (本田技研)

30.21 次の関数の極大値と極小値を求めよ。

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$ (日本鑄造)

(2) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$ (東京計器)

(3) $y = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ (関東電気)

(4) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ (日本電池)

(5) $y = \frac{1}{5}(x^3 - 3x^2 - 9x)$ (東亜燃料)

30.22 $y = -x^3 - 6x^2 - 9x + 1$ について、次の問いに答えよ。 (川崎製鉄)

(1) y 軸との交点の座標を求めよ。

(2) 極大値・極小値を求めよ。

(3) グラフをかけ。

30.23 曲線 $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ は点 $(1, 4)$ を通り、この点における接線の傾きは -3 である。 (三井東圧化学)

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の極大値、極小値を求めよ。

(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフをかけ。

例題 30.8 1 辺の長さが 18cm の長方形の四すみから同じ大きさの正方形を切り取って箱を作るとき、この箱の容積を最大にするには切り取る正方形の 1 辺の長さをいくらにすればよいか。 (日本特殊機器)

【解】 切り取る正方形の1辺の長さを x cm とし、箱の容積を y cm³ とすれば、

$$\begin{aligned} y &= x(18 - 2x)^2 \\ &= 4(x^3 - 18x^2 + 81x) \end{aligned}$$

微分すると

$$\begin{aligned} y' &= 4(3x^2 - 36x + 81) \\ &= 12(x^2 - 12x + 27) \\ &= 12(x - 3)(x - 9) \end{aligned}$$

$y' = 0$ の解は、 $x = 3, 9$

$x = 3$ のとき極大

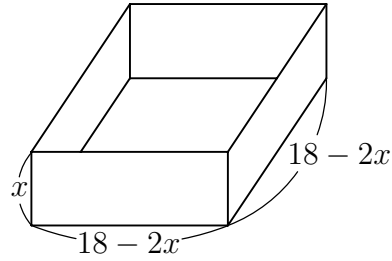
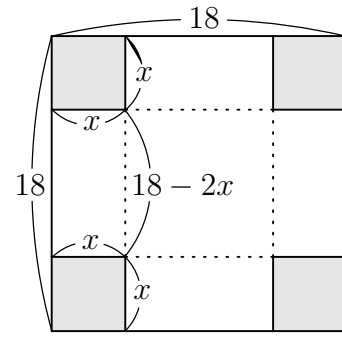
$x = 9$ のとき極小

ところで、 x の取り得る値の範囲は

$$0 < x < 9$$

である。よって、 $x = 3$ のとき最大になる。

(答) 3cm にすればよい。



30.24 1辺が 30cm の正方形のブリキの四すみから同じ大きさの正方形を切り取り、四方を折り曲げて作った箱の容積を最大にしたい。切り取る正方形の1辺の長さをどれだけにすればよいか。またそのときの容積はどれだけか。(愛知機械)

30.25 横 15cm、縦 8cm の長方形の厚紙の四すみから同じ大きさの正方形を切り取って箱を作るとき、この箱の容積を最大にするには切り取る正方形の1辺の長さをいくらにすればよいか。(日本ピストンリング)

30.26 幅 25cm、長さ 40cm の厚紙の四隅から正方形を切り取り箱を作るとき、その容積をできるだけ大きくするには、1辺が何 cm の正方形を切り取ればよいか。(いすゞ自動車)

例題 30.9 3次関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が、 $x = 1, x = 5$ で極値をとり、極小値が -28 であるように、定数 a, b, c の値を定め、極大値を求めよ。

【解】 x^3 の係数は1(正)より $x = 5$ のとき極小値 -28 をとるので

$$5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + c = -28$$

$$25a + 5b + c = -153 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$ を微分して, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$x = 1, 5$ のとき, $f'(x) = 0$ なので

$$3 \times 1^2 + 2a \times 1 + b = 0, \quad 3 \times 5^2 + 2a \times 5 + b = 0$$

の2式から $a = -9, b = 15$

これを $\textcircled{1}$ に代入して $c = -3$.

よって, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$

$x = 1$ のとき極大となるので, $f(1) = 1^3 - 9 \times 1^2 + 15 \times 1 - 3 = 4$

(答) $a = -9, b = 15, c = -3, x = 1$ のとき極大値 4

30.27 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = 0$ で極大, $x = 2$ で極小となる. 次の問いに答えよ. (電源開発)

(1) a, b の値を求めよ.

(2) 極小値が 2 であるとき, 極大値を求めよ.

30.28 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ が $x = 1$ のとき極大値 3, $x = 3$ のとき極小値が得られる. この関数を求め, 極小値を求めよ. (NEC)

30.29 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ において, $x = -2$ のとき極大値が 44, $x = 4$ のとき極小値が -64 であるとき, a, b, c, d の値を求めよ. (九州電力)

30.30 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 4$ が極大値・極小値をもつとき a の値の範囲を求めよ. ☆ (三菱電機)

[解説] 3 次関数が極大値・極小値をもつ

$$\iff y' = 0 \text{ が異なる 2 つの実数解をもつ } \iff y' = 0 \text{ の判別式 } D > 0$$

実践問題 13

東芝

次の問いに答えよ.

1 次の計算をなさい.

(1) 次の式を簡単にせよ.

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}}$$

(2) 次の2重根号を外しなさい.

$$\sqrt{4 - \sqrt{15}}$$

2 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の2つの解を α, β とすると, α^2, β^2 もこの方程式の解であるという. この時の a, b の値を求めよ. ただし, $a \neq 0, b \neq 0$ とする.

3 1桁の自然数の集合 U を全体集合として, 集合 A, B を次のように定義する.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B = \{x | x^2 < 10, x \in U\}$$

この時, 次の集合の元 (要素) を示せ.

$$\overline{A \cup B}$$

4 $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ の時, $\sin^3 x + \cos^3 x$ の値を求めよ.

【答】

1 (1) x (2) $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$

2 $a = 1, -2, b = 1$

3 $\{6, 7, 8, 9\}$

4 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

第 31 章 積分

(x^n の不定積分) n が 0 または正の整数のとき,

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

例 31.1 $\int x^4 dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{1}{5} x^5 + C$

(不定積分の計算公式)

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx \quad \text{ただし, } k \text{ は定数}$$

$$\int \{f(x) + g(x)\} dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int \{f(x) - g(x)\} dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$$

例 31.2 $\int 5x dx = 5 \int x dx = 5 \times \frac{1}{2} x^2 + C = \frac{5}{2} x^2 + C$

例 31.3

$$\begin{aligned} & \int (6x^2 - 2x + 2) dx \\ &= 6 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 2 \int dx \\ &= 6 \times \frac{1}{3} x^3 - 2 \times \frac{1}{2} x^2 + 2 \times x + C \\ &= 2x^3 - x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

(i) $\int 1 dx$ はふつう 1 を省略して, $\int dx$ とかく.

(ii) 積分定数はまとめて 1 つの C で表す.

例 31.4 x 以外の文字でも同様に積分することができる.

$$\int (t^2 - t) dt = \frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 + C$$

例 31.5 展開してから積分する.

$$\begin{aligned}\int (x+2)(x-1) dx &= \int (x^2 + x - 2) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + C\end{aligned}$$

31.1 次の不定積分を求めよ.

$$(1) \int \frac{1}{2}x dx \quad (\text{三菱重工})$$

$$(2) \int (x+2) dx \quad (\text{日立エレクトロニクス})$$

$$(3) \int (3x^2 - 4x + 3) dx \quad (\text{マツダ})$$

$$(4) \int (x^3 - x - 1) dx \quad (\text{NEC})$$

$$(5) \int (2x^3 - 6x + 3) dx \quad (\text{日本輸送機})$$

$$(6) \int ax^n dx \quad (\text{KDD})$$

$$(7) \int x(1+x^2) dx \quad (\text{九州電力})$$

$$(8) \int (x-1)^2 dx \quad (\text{トヨタ自動車})$$

31.2 次の関数を積分せよ.

$$(1) f(x) = 3x^2 + 2x - 1 \quad (\text{殖産住宅})$$

$$(2) f(x) = (x-2)(x+1) \quad (\text{豊和工業})$$

例題 31.6 $f'(x) = 2x - 3$, $f(0) = 1$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ.

【解】 関数 $f(x)$ は, $f'(x) = 2x - 3$ の不定積分であるから

$$f(x) = \int (2x - 3) dx = x^2 - 3x + C$$

ここで, $f(0) = 1$ より

$$0^2 - 3 \cdot 0 + C = 1 \quad \text{よって} \quad C = 1$$

したがって, 求める関数 $f(x)$ は,

$$f(x) = x^2 - 3x + 1$$

31.3 $f(1) = 2$, $f'(x) = (2x - 3)(x + 2)$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ. (NEC フィールドサービス)

関数 $f(x)$ の不定積分の 1 つを $F(x)$ とするとき, $F(x)$ に $x = b$ を代入した値から $x = a$ を代入した値を引いた

$$F(b) - F(a)$$

を, $f(x)$ の a から b までの**定積分**といい

$$\int_a^b f(x) dx$$

で表す. a をこの定積分の**下端**, **上端**という.

また, $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ とかくことにすると, 次のようになる.

(定積分)

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ のとき,}$$

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$(i) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(ii) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

例 31.7 関数 $f(x) = 2x$ の不定積分の 1 つは $F(x) = x^2$ であるので,

$$\int_{-1}^2 2x dx = [x^2]_{-1}^2 = 2^2 - (-1)^2 = 3$$

上の例で, $f(x) = 2x$ の不定積分は $F(x) = x^2 + C$ であるが, 定積分の値は

$$\int_{-1}^2 2x dx = [x^2 + C]_{-1}^2 = \{2^2 + C\} - \{(-1)^2 + C\} = 3$$

のように C の値のとり方に関係しないので, 定積分の計算では積分定数 C は考えなくてよい.

例 31.8

(1)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 5x^2 dx &= \left[\frac{5}{3}x^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \left\{ \frac{5}{3}(1)^3 \right\} - \left\{ \frac{5}{3}(-1)^3 \right\} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_{-1}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{3} \times 2^3 - 2 \times 2^2 + 3 \times 2 \right\} - \left\{ \frac{1}{3} \times (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) \right\} = 6 \end{aligned}$$

31.4 次の定積分の値を求めよ.

$$(1) \int_1^3 x^3 dx \quad (\text{住友電工})$$

$$(2) \int_1^2 (3x - 2) dx \quad (\text{日石三菱})$$

$$(3) \int_0^1 (x^2 + 1) dx \quad (\text{安川電機})$$

$$(4) \int_1^3 (x + 3)(x - 1) dx \quad (\text{大福機工})$$

$$(5) \int_1^4 (x + 1)^2 dx \quad (\text{前田建設工業})$$

$$(6) \int_{-1}^1 (x + 4)(2x - 1) dx \quad (\text{九州電力})$$

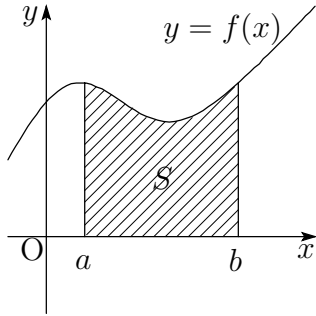
$$(7) \int_1^3 x(x + 1)(x + 2) dx \quad (\text{日石三菱})$$

$$(8) \int_{-1}^2 (5x^4 - 6x^2 + 1) dx \quad (\text{NECエンジニアリング})$$

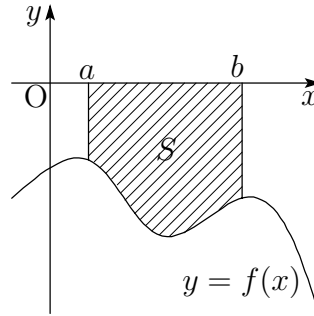
$$\mathbf{31.5} \quad \int_0^x (3t^2 - 2t - 2) dt = 12 \text{ を満たす実数 } x \text{ の値を求めよ.} \quad (\text{関西電力})$$

(x 軸との間の面積) $a \leq x \leq b$ で $f(x) \geq 0$ のとき

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

 $a \leq x \leq b$ で $f(x) \leq 0$ のとき

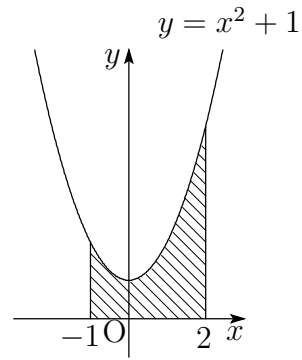
$$S = \int_a^b \{-f(x)\} dx$$



例題 31.9 放物線 $y = x^2 + 1$ と x 軸および 2 直線 $x = -1$, $x = 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

【解】

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^2 (x^2 + 1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_{-1}^2 \\
 &= \left\{ \frac{1}{3} \times 2^3 + 2 \right\} - \left\{ \frac{1}{3} \times (-1)^3 + (-1) \right\} \\
 &= 6
 \end{aligned}$$



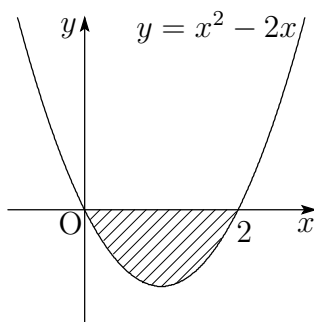
例題 31.10 放物線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ.

【解】放物線 $y = x^2 - 2x$ と x 軸との交点の x 座標は

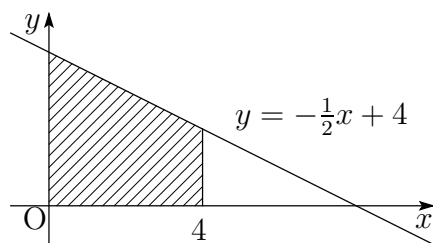
$$x^2 - 2x = 0 \quad \text{から} \quad x = 0, 2$$

$0 \leq x \leq 2$ では、放物線は x 軸の下方にあるから、求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{-(x^2 - 2x)\} dx \\ &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - (0) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

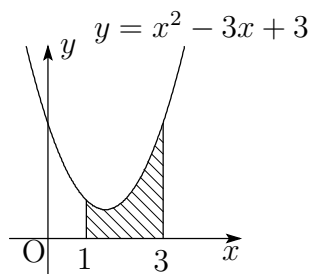


31.6 直線 $y = -\frac{1}{2}x + 4$ と直線 $x = 4$, x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.
(きんでん)

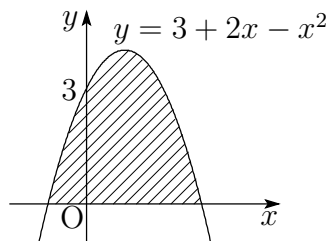


31.7 図の斜線部の面積を求めよ.

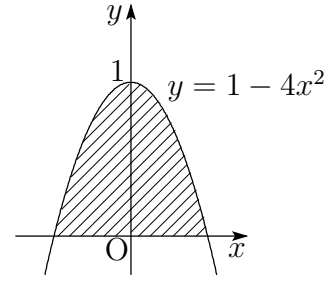
(NEC フィールド サービス)



31.8 放物線 $y = 3 + 2x - x^2$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ. (日立研究所)

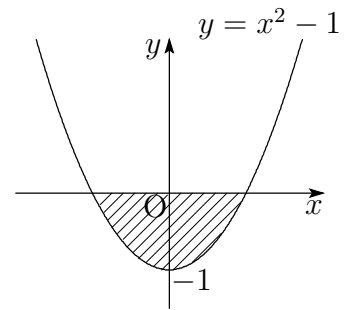


31.9 放物線 $y = 1 - 4x^2$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ. (トヨタ自動車)



31.10 $y = x^2 - x + 3$ と x 軸, 直線 $x = 1$, $x = 3$ で囲まれた部分の面積を求めよ.
(ニッシン工業)

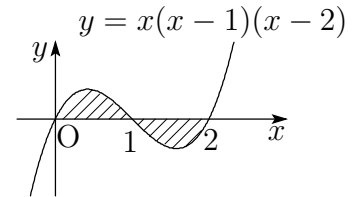
31.11 $y = x^2 - 1$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ. (日本住宅公団)



31.12 x 軸と $y = x^2 - 9x + 18$ で囲まれた図形の面積を求めよ. (本州四国連絡橋公団)

例題 31.11 曲線 $y = x(x-1)(x-2)$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ.

【解】 曲線 $y = x(x-1)(x-2)$ と x 軸との交点の x 座標は $x = 0, 1, 2$ である. グラフは
 $0 < x < 1$ のとき x 軸の上側,
 $1 < x < 2$ のとき x 軸の下側
 にあるから, 求める面積 S は



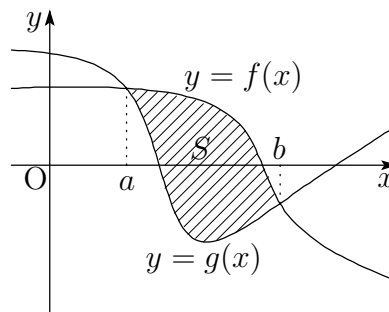
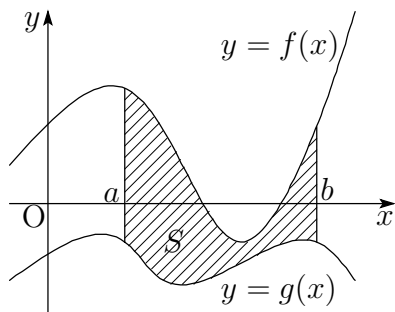
$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 x(x-1)(x-2) dx + \int_1^2 \{-x(x-1)(x-2)\} \\
 &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\
 &= \left(\frac{1}{4} - 1 + 1 \right) - (0) + (-4 + 8 - 4) - \left(-\frac{1}{4} + 1 - 1 \right) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

31.13 曲線 $y = x^3 - 6x^2 + 8x$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ. (日本電池)

31.14 $y = -(x-1)(x-2)(x-3)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ. (安川電機)

(2 曲線間の面積)

$$a \leq x \leq b \text{ で } f(x) \geq g(x) \text{ のとき } S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$



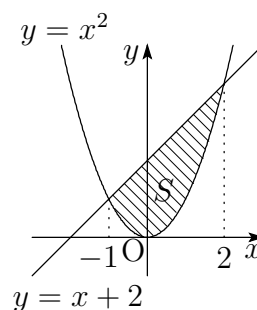
例題 31.12 放物線 $y = x^2$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ. (日本道路公団)

【解】 放物線と直線の交点の座標は、方程式 $x^2 = x + 2$ の解である. これを解くと

$$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x+1)(x-2) &= 0 \\ x &= -1, 2 \end{aligned}$$

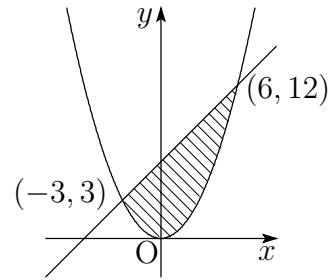
$-1 < x < 2$ では、直線 $y = x + 2$ が上側で、放物線 $y = x^2$ が下側なので、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(x+2) - x^2\} dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^2 \\ &= \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

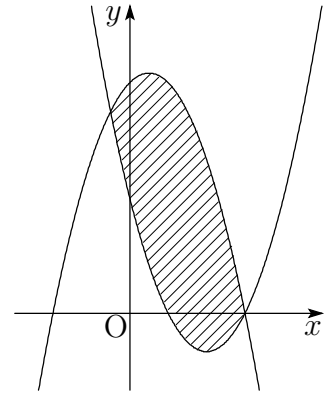


31.15 直線と放物線の方程式が $y = \ell x + m$, $y = nx^2$ のとき次の問いに答えよ. (日立ソフトウェアエンジニアリング)

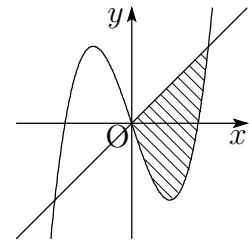
- (1) ℓ , m , n を求めよ.
- (2) 斜線部の面積を求めよ.



31.16 2つの放物線 $y = x^2 - 4x + 3$, $y = 6 + x - x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ. (三菱電機)



31.17 曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = x$ で囲まれる部分の面積を求めよ. ただし, その領域は $x \geq 0$ とする. (関東自動車工業)



31.18 $y = -x + 5$ と $y = x^2 - 1$ をグラフに表し, 囲まれる部分の面積を求めよ. (東レ)

31.19 $y = (x - 1)^2$ と $y = x + 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ. (日本道路公団)

31.20 $4y = x^2$ と $y = x$ で囲まれた部分の面積を求めよ. (日本航空)

31.21 領域 $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x^2 - 2x + y \leq 0 \end{cases}$ の面積を求めよ. (NEC)

31.22 $y = x^2 - ax$ ($a > 0$) と x 軸とで囲まれた部分の面積が 36 になるとき a の値を求めよ. (NEC フィールドサービス)

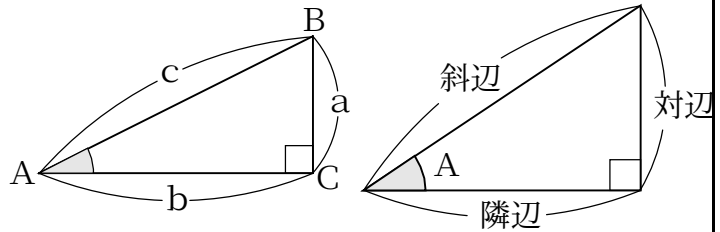
31.23 $y = x^3 - 3x + 2$ の極値を求め, 直線 $y = 2$ とグラフの囲む面積を求めよ. (NEC フィールドサービス)

31.24 $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ 上の点 $(1, -2)$ における接線と曲線によって囲まれた部分の面積を求めよ. ☆ (日立製作所)

第 32 章 三角比

(三角比)

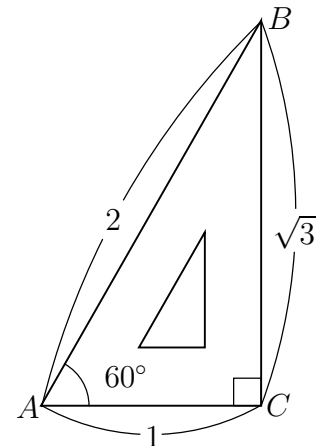
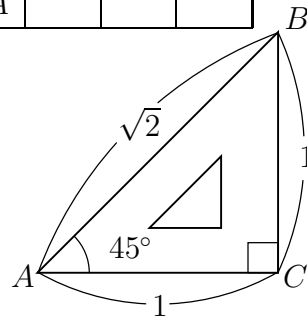
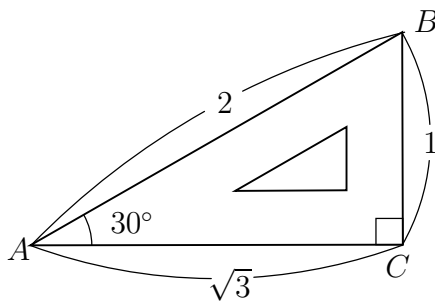
$$\begin{aligned} \text{正弦: } \sin A &= \frac{a}{c} \\ \text{余弦: } \cos A &= \frac{b}{c} \\ \text{正接: } \tan A &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$



32.1 30° , 45° , 60° の三角比の値を書き入れよ.

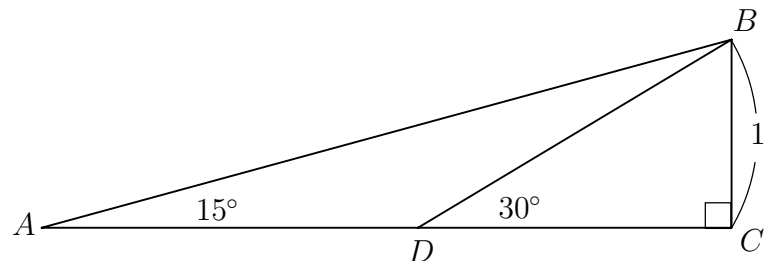
(豊田工機)

	30°	45°	60°
$\sin A$			
$\cos A$			
$\tan A$			



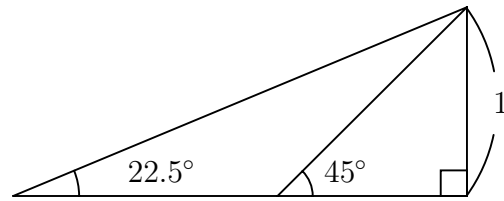
32.2 下の図を利用して $\tan 15^\circ$ の値を求めよ.

(アマダワシノ機械)



32.3 次の図を利用して $\tan 22.5^\circ$ の値を求めよ.

(ハザマ)

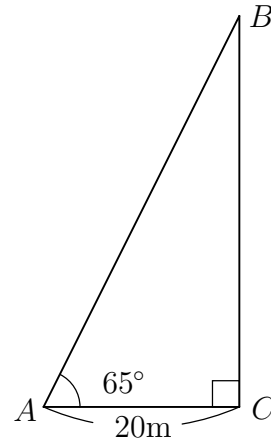


例題 32.1 図のような直角三角形 ABC において, BC の長さを求めよ. ただし, $\sin 65^\circ = 0.9063$, $\cos 65^\circ = 0.4226$, $\tan 65^\circ = 2.1445$ である.

【解】 $\frac{BC}{AC} = \tan 65^\circ$ から

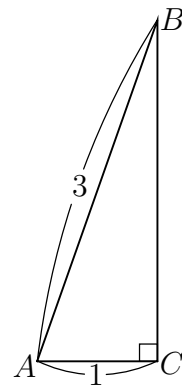
$$\begin{aligned} BC &= AC \times \tan 65^\circ \\ &= 20 \times 2.1445 = 42.89 \end{aligned}$$

【答】 約 43m

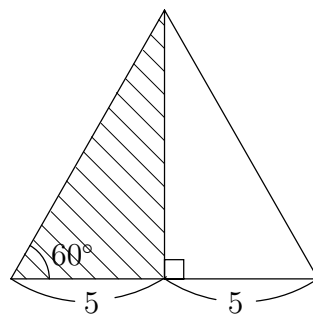


32.4 長さ 5m のはしごが建物に立てかけてある. はしごと地面のつくる角は 65° である. はしごの上端は地面から何 m のところにあるか. 小数第 1 位まで求めよ. ただし, $\sin 65^\circ = 0.9063$, $\cos 65^\circ = 0.4226$, $\tan 65^\circ = 2.1445$ である. (トヨタ自動車)

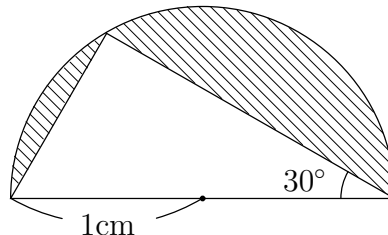
32.5 右の図において, $\cos A = \frac{1}{3}$ のとき, $\sin A$, $\tan A$ の値を求めよ.
(大阪ガス)



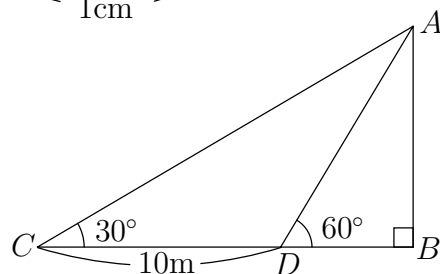
32.6 右図の斜線部の面積を求めよ．ただし，長さの単位は cm とする．
(大阪トヨペット)



32.7 右の図のように，半径 1cm の円に，直径を 1 辺とする三角形が内接している．斜線部の面積を求めよ．
(クボタ)



32.8 次の図において， AB の長さを求めよ．(浦和土建工業)



例題 32.2 次の図において， OC 間の距離を求めよ．

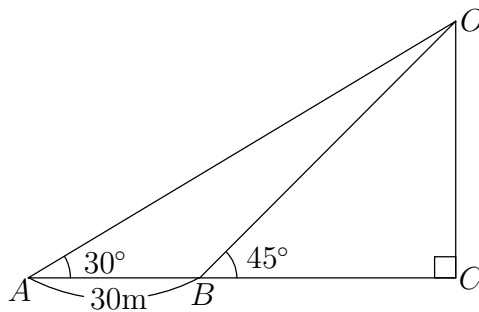
(阪神土木工業)

【解】 $BC = OC = x$ m とする． $\triangle OAC$ において

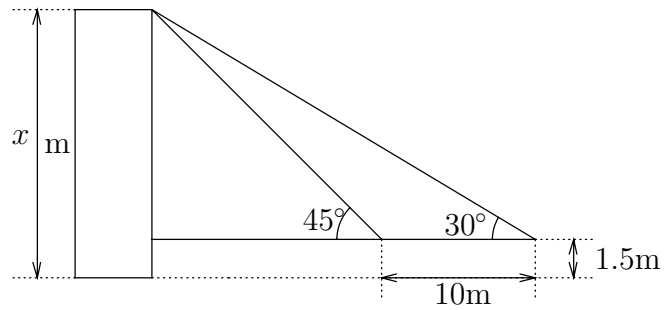
$$\begin{aligned}\frac{OC}{AC} &= \tan 30^\circ \quad \text{より} \\ \frac{x}{30+x} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{3}x &= 30+x \\ (\sqrt{3}-1)x &= 30\end{aligned}$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{3}-1} = 15(\sqrt{3}+1)$$

【答】 $15(\sqrt{3}+1)$ m



32.9 次の建物の高さ x を求めよ. ただし, m 以下小数第1位まで求めよ. (大木建設)

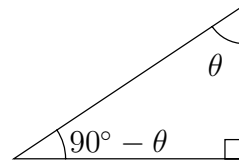


(($90^\circ - \theta$) の三角比)

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$



例 32.3

$$(1) \sin 62^\circ = \sin(90^\circ - 28^\circ) = \cos 28^\circ$$

$$(2) \cos 73^\circ = \cos(90^\circ - 17^\circ) = \sin 17^\circ$$

$$(3) \tan 55^\circ = \tan(90^\circ - 35^\circ) = \frac{1}{\tan 35^\circ}$$

問 32.4 次の三角比を 45° より小さい角の三角比で表せ.

$$(1) \sin 62^\circ$$

$$(2) \cos 83^\circ$$

$$(3) \tan 59^\circ$$

【答】 (1) $\cos 28^\circ$ (2) $\sin 7^\circ$ (3) $\frac{1}{\tan 31^\circ}$

(正接と正弦・余弦の関係)

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

◎次の関係も成り立つ.

$$\sin A = \cos A \tan A$$

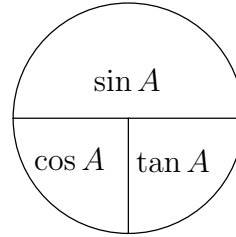
$$\cos A = \frac{\sin A}{\tan A}$$

問 32.5

(1) $\sin A = 0.8$, $\cos A = 0.6$ のとき, $\tan A$ の値を求めよ.

(2) $\tan A = \frac{3}{4}$, $\cos A = \frac{4}{5}$ のとき, $\sin A$ の値を求めよ.

(3) $\sin A = \frac{2}{3}$, $\tan A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ のとき, $\cos A$ の値を求めよ.



【答】 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

(正弦と余弦の関係)

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

◎ $\sin A$ か $\cos A$ の一方の値が分かれば, 他方の値も計算により求めることができる.

例 32.6 $\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ = 1$, $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$

32.10 次の式の値を求めよ.

(1) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$ (YKK)

(2) $(4 + \sqrt{2})(4 - \sqrt{2}) \cos 60^\circ$ (きんでん)

(3) $\tan 45^\circ - \cos 60^\circ$ (東京光学)

(4) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$ (日本特殊機器)

(5) $\cos 45^\circ + \sin 60^\circ - \tan 45^\circ$ (山崎製パン)

(6) $\tan 45^\circ \sin 60^\circ$ (第一貨物自動車)

(7) $4(\sin 30^\circ)(\cos 45^\circ)$ (山陽パルプ)

(8) $\sin 60^\circ \tan 30^\circ - \cos 30^\circ$ (九州電力)

(9) $(1 + \sin 45^\circ + \sin 30^\circ)(1 - \cos 45^\circ + \cos 60^\circ)$ (ナビックスライン)

(10) $\sin^2 23^\circ + \sin^2 67^\circ$ (大西衣料)

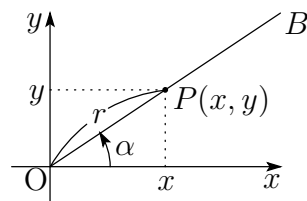
(11) $\frac{\sin 45^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ + \cos 60^\circ}$ (NECエンジニアリング)

(座標を用いた三角比の定義)

右の図のように、座標平面上で、 x 軸の正の部分となす角の大きさを α とするとき、半直線 OB 上に任意の点 $P(x, y)$ をとる。 $OP = r$ として次のように三角比を定義する。

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}, \quad \cos \alpha = \frac{x}{r}, \quad \tan \alpha = \frac{y}{x}$$

ただし、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

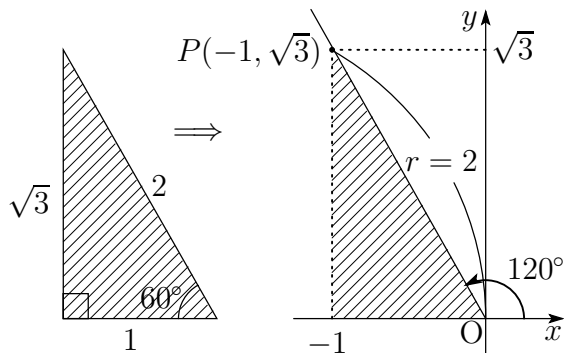


例 32.7 x 軸の正の部分と 120° の角をなす半直線上に $OP = 2$ ($r = 2$) となる点 P の座標は $(-1, \sqrt{3})$ であるから

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$$

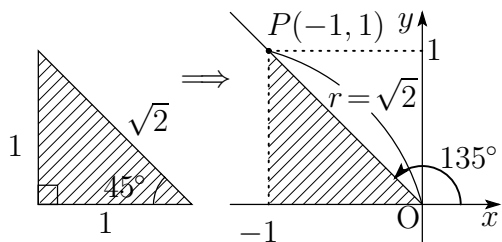


例 32.8 x 軸の正の部分と 135° の角をなす半直線上に $OP = \sqrt{2}$ ($r = \sqrt{2}$) となる点 P の座標は $(-1, 1)$ であるから

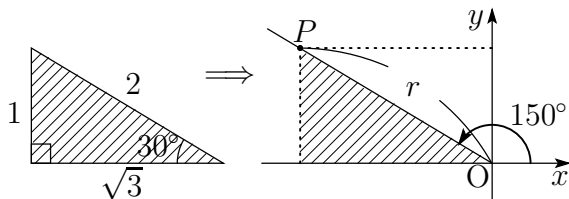
$$\sin 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 135^\circ = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$$



問 32.9 下の図において r および点 P の座標を定め、 $\sin 150^\circ$, $\cos 150^\circ$, $\tan 150^\circ$ の値を求めよ。



【答】 $r = 2$, $P(-\sqrt{3}, 1)$, $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

(単位円による三角比の定義)

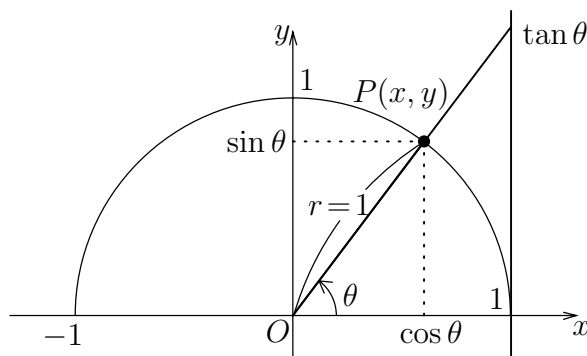
半径 1 の円周上に点 $P(x, y)$ をとり、点 P と x 軸の正の部分となす角を θ とすると、 $r = 1$ なので

$$\sin \theta = y$$

$$\cos \theta = x$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

$\tan \theta$ は、線分 OP の傾きを表す。

**例 32.10** 単位円による三角比の定義から

(1) $\theta = 0^\circ$ のとき、 $P(1, 0)$ なので

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \tan 0^\circ = \frac{0}{1} = 0$$

(2) $\theta = 90^\circ$ のとき、 $P(0, 1)$ なので

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \tan 90^\circ \text{ は定義されない}$$

(3) $\theta = 180^\circ$ のとき、 $P(-1, 0)$ なので

$$\sin 180^\circ = 0, \quad \cos 180^\circ = -1, \quad \tan 180^\circ = \frac{0}{-1} = 0$$

これまでの三角比の値とその符号についてまとめると、次のとおりである。

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
$\sin \theta$	0	+	1	+	0
$\cos \theta$	1	+	0	-	-1
$\tan \theta$	0	+	なし	-	0

$$0 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$\tan \theta$ は任意の実数値をとる

(($180^\circ - \theta$) の三角比)

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

この公式を使うと、鈍角の三角比は鋭角の三角比で表すことができるので、巻末の表からその値が求められる。

例 32.11

$$(1) \sin 105^\circ = \sin(180^\circ - 75^\circ) = \sin 75^\circ$$

$$(2) \cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ$$

$$(3) \tan 155^\circ = \tan(180^\circ - 25^\circ) = -\tan 25^\circ$$

問 32.12 次の鈍角の三角比を鋭角の三角比で表せ.

(1) $\sin 100^\circ$

(2) $\cos 140^\circ$

(3) $\tan 165^\circ$

【答】 (1) $\sin 80^\circ$ (2) $-\cos 40^\circ$ (3) $-\tan 15^\circ$

問 32.13 次の三角比を求めよ.

(東芝日野)

(1) $\cos 120^\circ$

(2) $\sin 150^\circ$

(3) $\cos 90^\circ$

【答】 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0

32.11 次の式の値を求めよ.

(1) $\sin 90^\circ$

(マツダ, 豊田工機)

(2) $\tan 150^\circ + \sin 45^\circ$

(神戸製鋼)

(3) $\sin 135^\circ \sin 60^\circ + \sin 45^\circ$

(日本光学)

(4) $\frac{\cos 135^\circ}{\sin 120^\circ + \sin 30^\circ} - \frac{\sin 135^\circ}{\cos 120^\circ + \cos 30^\circ}$

(日本無線)

例題 32.14 θ は第2象限の角で, $\sin \theta = \frac{3}{5}$ のとき, $\cos \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ. (九州電力)

【解】

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ から}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

ここで, θ は鈍角より $\cos \theta < 0$ なので $\cos \theta = -\frac{4}{5}$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

【答】 $\cos \theta = -\frac{4}{5}, \quad \tan \theta = -\frac{3}{4}$

32.12 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) のとき, $\cos \theta$ の値を求めよ. (日本無線)

32.13 $\cos \theta = 0.8$ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) のとき, $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ. (東京ガス)

32.14 $(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$ を簡単にせよ. (日本特殊機器)

例題 32.15 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ. (日本無線)

【解】

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 \quad \Leftarrow \text{両辺を平方する} \\ \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta &= \frac{6}{4} \\ 1 + 2 \sin \theta \cos \theta &= \frac{3}{2} \\ \sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

32.15 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ のとき, $5 \sin \theta \cos \theta$ の値を求めよ. (NEC)

32.16 $\sin \theta + \cos \theta = a$ のとき, $\sin \theta \cos \theta$ を a を用いて表せ. (九州電力)

32.17 $y = (\sin \theta + p)(\cos \theta + p)$, $x = \sin \theta + \cos \theta$ のとき, y を x と p を用いて表せ. (関西電力)

32.18 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ の値を求めよ. (九州電力)

32.19 $\sin \theta + \cos \theta = a$ のとき, 次の式を a を用いて表せ. (葵精機)

(1) $\sin \theta \cos \theta$

(2) $\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta}$

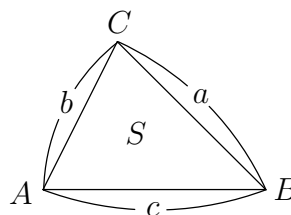
(3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$

32.20 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ のとき, $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ の値を求めよ. (富士通)

32.21 $\sin \alpha = 1 - \sin \beta$, $\cos \alpha = -\cos \beta$ のとき, $\sin \beta$ の値を求めよ. (日本住宅公団)

(三角形の面積)

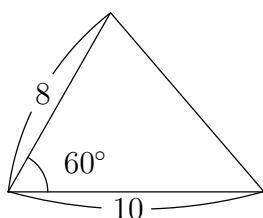
$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$$



32.22 次の三角形の面積を求めよ.

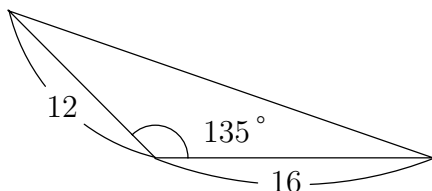
(1)

(トヨタ自動車)



(2)

(東芝)



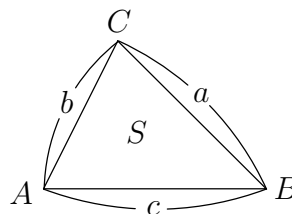
32.23 $\triangle ABC$ で $A = 30^\circ$, $b = 17$, $c = 15$ の面積を求めよ.

(三菱電機)

(ヘロンの公式)

$s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ のとき, 面積 S は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$



32.24 3 辺が次の長さの三角形の面積 S を求めよ.

(1) $a = 10\text{cm}$, $b = 7\text{cm}$, $c = 13\text{cm}$

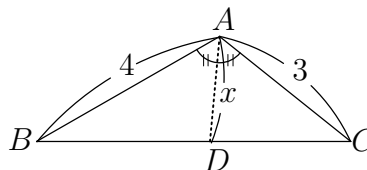
(日本特殊機器)

(2) 4cm , 5cm , 6cm

(大阪金属)

例題 32.16 三角形 ABC において, $b = 3$, $c = 4$, $A = 120^\circ$ とする. $\angle A$ の二等分線が BC と交わる点を D とするとき, 次の問いに答えよ. (トヨタ自動車)

(1) $AD = x$ として, $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の面積を x を用いて表せ.



(2) $\triangle ABC$ の面積は, $\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ の面積の和であることを利用して, x の値を求めよ.

【解】

$$(1) \triangle ABD = \frac{1}{2} \times 4x \sin 60^\circ = \sqrt{3}x$$

$$\triangle ACD = \frac{1}{2} \times 3x \sin 60^\circ = \frac{3}{4}\sqrt{3}x$$

$$(2) \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \sin 120^\circ = 3\sqrt{3} \text{ である.}$$

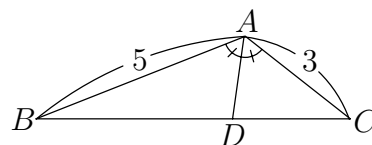
これらの 3 式を $\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ に代入すると

$$\sqrt{3}x + \frac{3}{4}\sqrt{3}x = 3\sqrt{3}$$

$$x + \frac{3}{4}x = 3$$

$$x = \frac{12}{7}$$

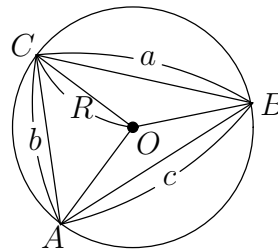
32.25 $\triangle ABC$ で, $A = 120^\circ$, $AB = 5$, $AC = 3$ のとき, $\angle A$ の二等分線と BC の交点を D としたとき, AD の長さを求めよ. (NTT)



(正弦定理)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

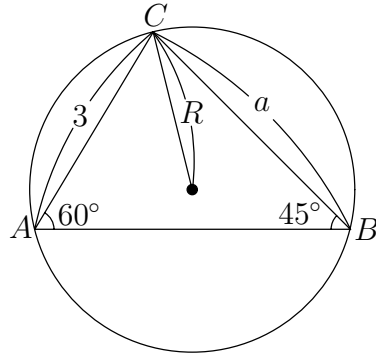
ただし, R は $\triangle ABC$ の外接円の半径



例題 32.17 $\triangle ABC$ で、 $A = 60^\circ$ 、 $B = 45^\circ$ 、 $b = 3$ のとき、 a の値と外接円の半径 R を求めよ。

【解】 正弦定理より

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin 60^\circ} &= \frac{3}{\sin 45^\circ} = 2R \\ \text{よって } a &= \frac{3}{\sin 45^\circ} \times \sin 60^\circ \\ &= 3 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \\ \text{また } R &= \frac{3}{\sin 45^\circ} \times \frac{1}{2} \\ &= 3 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

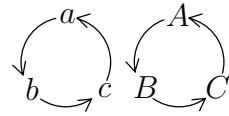
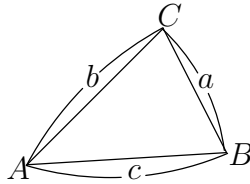


(余弦定理)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

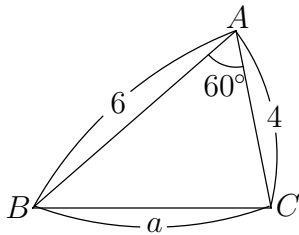
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

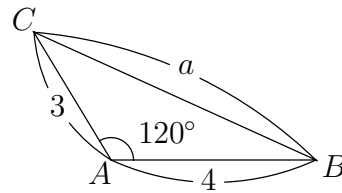


例題 32.18 次のような $\triangle ABC$ について、 a の値を求めよ。

(1)



(2)



【解】 余弦定理より

$$\begin{aligned}(1) \quad a^2 &= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \cos 60^\circ \\ &= 16 + 36 - 24 \\ &= 28\end{aligned}$$

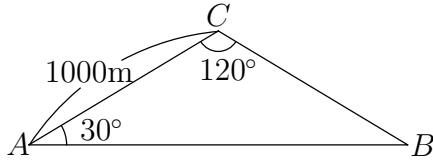
$$\text{よって, } a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad a^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \cos 120^\circ \\ &= 9 + 16 + 12 \\ &= 37\end{aligned}$$

$$\text{よって, } a = \sqrt{37}$$

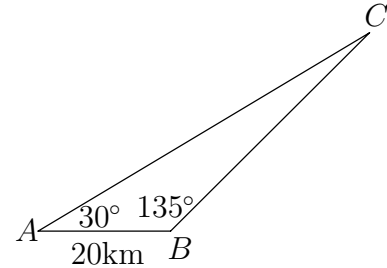
32.26 次の図において、 AB 間の距離を求めよ。

(日鉄電設工業)



32.27 $\triangle ABC$ で、 $A = 120^\circ$, $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$ のとき、 B と c を求めよ。(動力炉核燃料開発事業団)

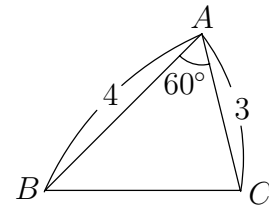
32.28 A 地から B 地を通り山頂 C までドライブすることになった。 A 地から B 地と山頂を見込む角は 30° であったが、 A 地から 20km 離れた B 地に着いてから、 A 地と山頂 C を見込む角を測ったら 135° であった。 B 地から山頂 C までの距離を求めよ。ただし、 $\sin 15^\circ = 0.25$ とする。(トヨタ自動車)



32.29 次の $\triangle ABC$ について、次の問いに答えなさい。(トヨタ自動車)

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

(2) BC の長さを求めなさい。

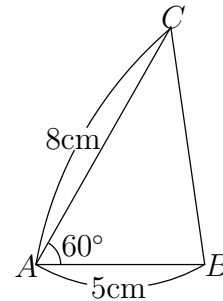


32.30 $\triangle ABC$ で $\angle A = 60^\circ$, $AB = 5\text{cm}$, $AC = 8\text{cm}$ とする。(中国電力)

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) BC の長さを求めよ。

(3) $\angle B$, $\angle C$ の正弦を求めよ。



32.31 $\triangle ABC$ において、次の関係があるとき、 a の長さを求めよ。(東洋高圧)

(1) $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$, $b = 7\text{cm}$

(2) $A = 120^\circ$, $b = 13\text{cm}$, $c = 9\text{cm}$

●内接円の半径

三角形 ABC の内接円の中心を O , 外接円の半径を r とすると

$\triangle OBC$, $\triangle OCA$, $\triangle OAB$ の面積はそれぞれ

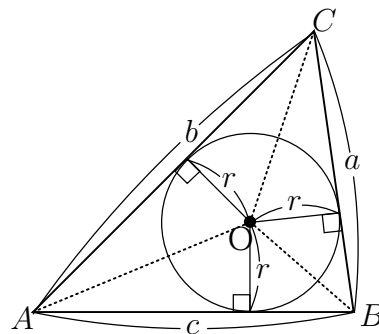
$$\frac{1}{2}ar, \quad \frac{1}{2}br, \quad \frac{1}{2}cr$$

であり, 三角形 ABC の面積を S とすると

$$\frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = S$$

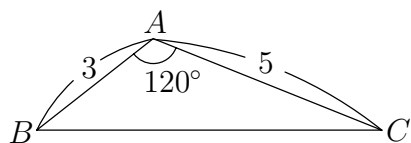
$$\frac{1}{2}r(a + b + c) = S$$

$$r = \frac{2S}{a + b + c}$$



32.32 次の $\triangle ABC$ の外接円と内接円の半径を求めなさい. ☆

(NEC)



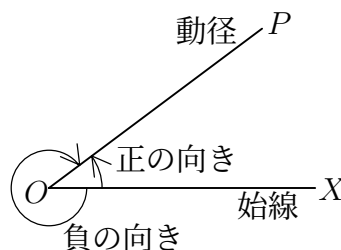
第 33 章 三角関数

●一般角

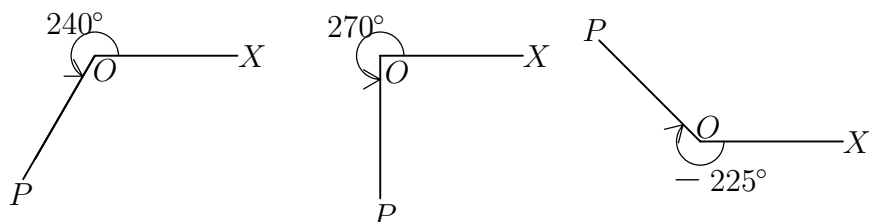
平面上で、半直線 OP が点 O を中心として回転するものとする。このとき、回転する半直線 OP を **動径** といい、 OP のはじめの位置 OX を **始線** という。

回転には、左回りと右回りの 2 つの向きがある。時計の針の回転と反対の向き、すなわち左回りを **正の向き**、右回りを **負の向き** という。

負の向きに回転してできる角の大きさは符号 $-$ をつけて表す。



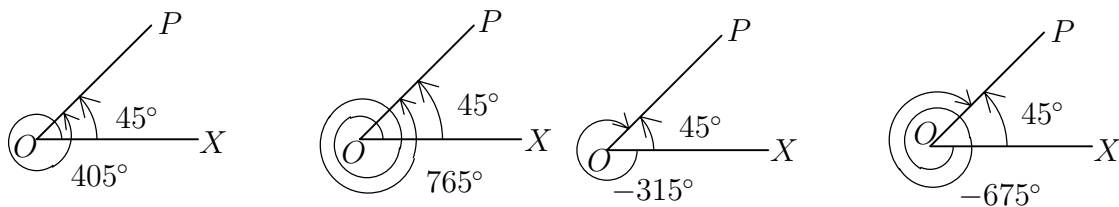
例 33.1 240° , 270° , -225° を表す動径 OP は、次のようになる。



動径は OP は、 360° または -360° 回転するともとの位置にもどるから、次の角を表す動径はすべて一致している。

$$45^\circ, \quad 45^\circ + 360^\circ = 405^\circ, \quad 45^\circ + 360^\circ \times 2 = 765^\circ$$

$$45^\circ - 360^\circ = -315^\circ, \quad 45^\circ - 360^\circ \times 2 = -675^\circ$$



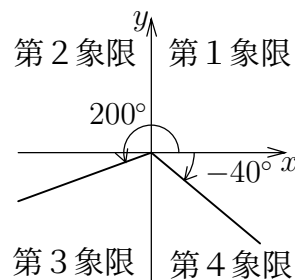
一般に、 n を整数とすると、角 α を表す動径と

$$\alpha + 360^\circ \times n$$

を表す動径は一致する。このように、 360° よりも大きい角や負の角を考えると、この角を**一般角**という。

座標平面上で、 x 軸の正の部分が始線とし、原点 O のまわりを回転する同径を表す一般角を考えると、動径のある象限にしたがって第1象限の角、第2象限の角、第3象限の角、第4象限の角という。

例 33.2 200° を表す動径は第3象限にあるから、 200° は第3象限の角である。また、 -40° は第4象限の角である。



問 33.3 次の角は第何象限の角か。

- (1) 280° (2) 1200°
(3) -125° (4) -650°

【答】 (1) 第4象限 (2) 第2象限 (3) 第3象限 (4) 第1象限

●三角関数

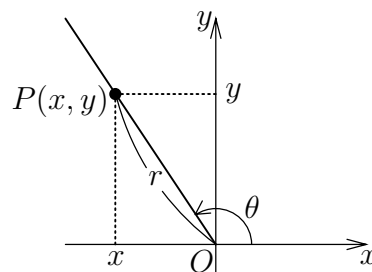
座標平面を利用して、一般角 θ についての $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を考えてみよう。

θ を表す動径上に、 $OP = r$ となる点 P をとり、 $P(x, y)$ とする。

このとき、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を P の座標 (x, y) と OP の長さ r を使って、次のように決める。

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

これらの値は、 OP の長さ r に関係なく θ の大きさだけに対応して決まるから、 θ の関数である。そこで、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を θ の**三角関数**という。



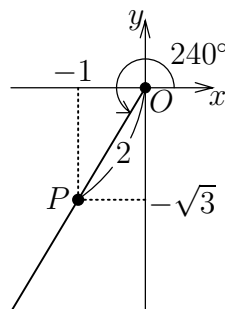
(θ の三角関数)

$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

例 33.4

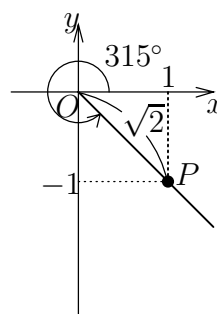
- (1) 240° を表す動径上に, $OP = 2$ となる点 P をとれば, $P(-1, -\sqrt{3})$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 240^\circ &= \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 240^\circ &= \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \tan 240^\circ &= \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}\end{aligned}$$



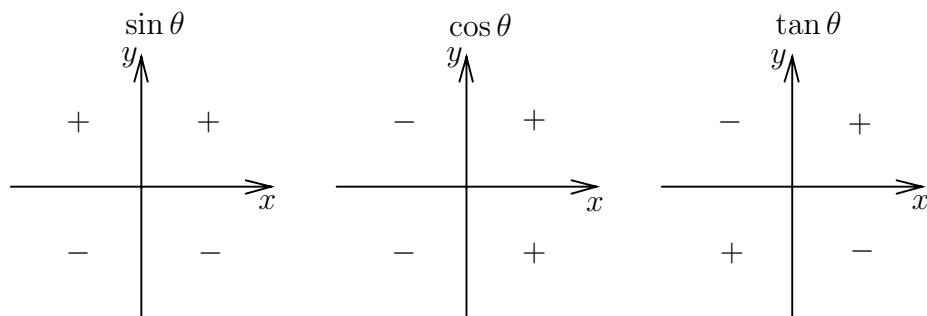
- (2) 315° を表す動径上に, $OP = \sqrt{2}$ となる点 P をとれば, $P(1, -1)$ であるから

$$\begin{aligned}\sin 315^\circ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos 315^\circ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tan 315^\circ &= \frac{-1}{1} = -1\end{aligned}$$



三角関数の決め方から, θ がどの象限の角であるかによって, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の符号が決まる.

たとえば, θ が第3象限の角であるとき, $x < 0$ であるから $\frac{x}{r} < 0$ となるので, $\cos \theta < 0$ である.



● 「 $360^\circ \times n + \theta$ 」の三角関数

n を整数とすると、 $360^\circ \times n + \theta$ を表す動径は、 θ を表す動径と一致するから、次の式が成り立つ。

($360^\circ \times n + \theta$)の三角関数

$$\sin(360^\circ \times n + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(360^\circ \times n + \theta) = \cos \theta$$

$$\tan(360^\circ \times n + \theta) = \tan \theta$$

例 33.5

$$(1) \sin 405^\circ = \sin(360^\circ + 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(2) \cos 780^\circ = \cos(360^\circ \times 2 + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$(3) \tan(-330^\circ) = \tan\{360^\circ \times (-1) + 30^\circ\} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

問 33.6 次の三角関数の値を求めよ。

$$(1) \sin 390^\circ$$

$$(2) \cos 765^\circ$$

$$(3) \tan(-315^\circ)$$

$$(4) \sin(-750^\circ)$$

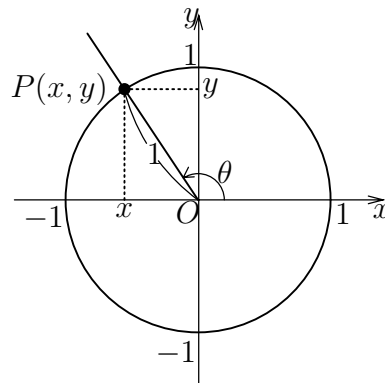
【答】 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) 1 (4) $-\frac{1}{2}$

原点を中心とする半径1の円を単位円という。 θ を表す動径と単位円との交点を $P(x, y)$ とすれば、 $OP = 1$ であるから

$$\sin \theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos \theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$



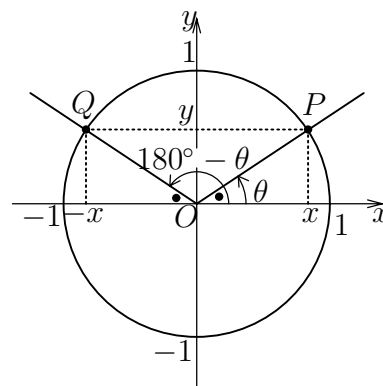
● 「 $180^\circ - \theta$ 」の三角関数

θ を表す動径と $180^\circ - \theta$ を表す動径とは、 y 軸に関して対称となるから、動径と単位円との交点をそれぞれ P, Q とし、 $P(x, y)$ とすれば、 $Q(-x, y)$ となる。したがって

$$\sin(180^\circ - \theta) = y = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$



(180° - θ)の三角関数

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

例 33.7 $\cos 130^\circ = \cos(180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ = -0.6428$

問 33.8 三角比の表を利用して、次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 165^\circ$

(2) $\cos 142^\circ$

(3) $\tan 130^\circ$

【答】 (1) 0.2588 (2) -0.7880 (3) -1.1918

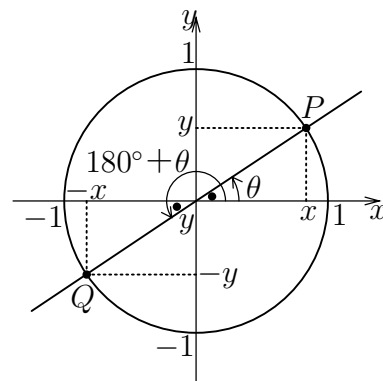
● 「 $180^\circ + \theta$ 」の三角関数

θ を表す動径と $180^\circ + \theta$ を表す動径とは、原点について対称となるから、動径と単位円との交点をそれぞれ P, Q とし、 $P(x, y)$ とすれば、 $Q(-x, -y)$ となる。したがって

$$\sin(\theta + 180^\circ) = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(\theta + 180^\circ) = -x = -\cos \theta$$

$$\tan(\theta + 180^\circ) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan \theta$$



$(180^\circ + \theta)$ の三角関数

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$$

例 33.9 $\sin 230^\circ = \sin(180^\circ + 50^\circ) = -\sin 50^\circ = -0.7660$

問 33.10 次の三角関数の値を求めよ.

(1) $\sin 250^\circ$

(2) $\cos 190^\circ$

(3) $\tan 216^\circ$

【答】 (1) -0.9397 (2) -0.9848 (3) 0.7265

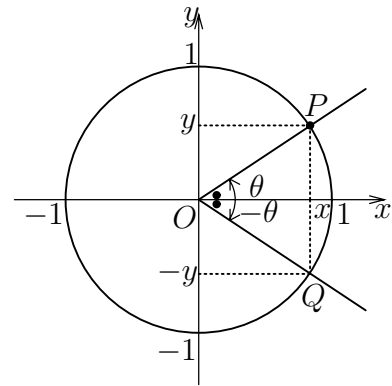
● 「 $-\theta$ 」 の三角関数

θ を表す動径と $-\theta$ を表す動径とは, x について対称となるから, 動径と単位円との交点をそれぞれ P, Q とし, $P(x, y)$ とすれば, $Q(x, -y)$ となる. したがって

$$\sin(-\theta) = -y = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = x = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan \theta$$

 **$(-\theta)$ の三角関数**

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

例 33.11

(1) $\sin(-15^\circ) = -\sin 15^\circ = -0.2588$

(2) $\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

問 33.12 次の三角関数の値を求めよ.

(1) $\sin(-30^\circ)$

(2) $\cos(-72^\circ)$

(3) $\tan(-15^\circ)$

【答】 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 0.3090 (3) -0.2679

これらの三角関数の公式より，一般角の三角関数の値は，すべて 0° から 90° までの三角関数に直して求めることができる.

例 33.13

$$\begin{aligned}\sin(-570^\circ) &= -\sin 570^\circ = -\sin(360^\circ + 210^\circ) \\ &= -\sin 210^\circ = -\sin(180^\circ + 30^\circ) \\ &= -(-\sin 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

問 33.14 次の三角関数の値を求めよ.

(1) $\cos(-420^\circ)$

(2) $\sin 855^\circ$

(3) $\tan 690^\circ$

(4) $\cos 565^\circ$

(5) $\sin(-700^\circ)$

(6) $\tan(-850^\circ)$

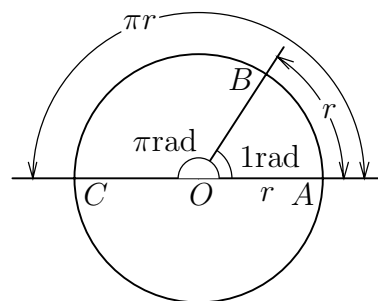
【答】 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) -0.9063 (5) 0.3420 (6) 1.1918

●弧度法

これまでは、角の大きさを表すのに、直角の $\frac{1}{90}$ である 1 度を単位として用いてきた。さらに、1 度の $\frac{1}{60}$ を 1 分、1 分の $\frac{1}{60}$ を 1 秒と定める。度、分、秒を単位とする角の表し方を**度数法**という。

ここで、角の大きさの新しい表し方として、弧度法について学ぼう。

右の図のように、中心 O 、半径 r の円の周上に、長さ r の弧 AB をとる。弧 AB に対する中心角 AOB を考えると、この角の大きさは、半径 r に関係なく、一定である。そこで、この大きさの角を、角を測る単位として用い、これを 1 ラジアン (radian) または 1 弧度という。1 ラジアンを単位とする角の表し方を**弧度法**という。



半円の弧 AC の長さは πr であるから、 180° は π ラジアンである。

1° は $\frac{\pi}{180}$ ラジアン、 1 ラジアン $= \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ = 57.2957\dots^\circ$
 180° が弧度法では π であることをもとにして、次の表が得られる。

度数法	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

問 33.15 次の角を、度数は弧度に、弧度は度数に、それぞれ書き直せ。

- (1) 15° (2) -60° (3) $\frac{8}{5}\pi$ (4) $\frac{5}{12}\pi$

【答】 (1) $\frac{\pi}{12}$ (2) $-\frac{\pi}{3}$ (3) 288° (4) 75°

33.1 次の三角関数の値を求めよ。

- (1) $\cos 840^\circ$ (九州電力)
 (2) $\cos 960^\circ$ (NTT)
 (3) $\cos(-270^\circ)$ (豊田工機)
 (4) $\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{5}{6}\pi$ (大和ハウス)
 (5) $-\sin 45^\circ \cos(-300^\circ) + \sin 510^\circ \cos 405^\circ$ (九州電力)

33.2 次の値を求めよ。 (安川電機)

- (1) $\tan 210^\circ$ (2) $-\cos 150^\circ$ (3) $\sin(-120^\circ)$

●三角関数の相互関係

θ を表す動径と、単位円との交点を $P(x, y)$ とすると

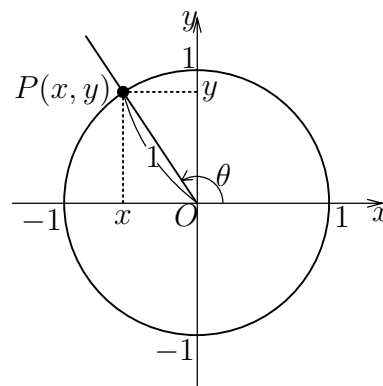
$$\sin \theta = y, \quad \cos \theta = x$$

であるから

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

また、 $x^2 + y^2 = OP^2 = 1$ であるから

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = x^2 + y^2 = 1$$



(三角関数の相互関係)

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

例題 33.16 θ が第 4 象限の角で、 $\cos \theta = \frac{3}{4}$ のとき、 $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。

【解】 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

θ は第 4 象限の角であるから $\sin \theta < 0$

$$\text{よって} \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{7}}{4} \div \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

33.3 θ が第 4 象限の角で $\cos \theta = \frac{12}{13}$ のとき $\sin \theta$ の値を求めよ。 (NTT)

33.4 θ が第 3 象限の角で $\cos \theta = -\frac{3}{4}$ のとき $\sin \theta$ と $\tan \theta$ の値を求めよ。 (九州電力)

33.5 θ が第 2 象限の角であって $\sin \theta = \frac{3}{5}$ であるとき、 $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよ。
(那須電機鉄工)

33.6 θ が第3象限の角で $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ のとき, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ. (富士重工)

● $\sin \theta$ と $\cos \theta$ のグラフ

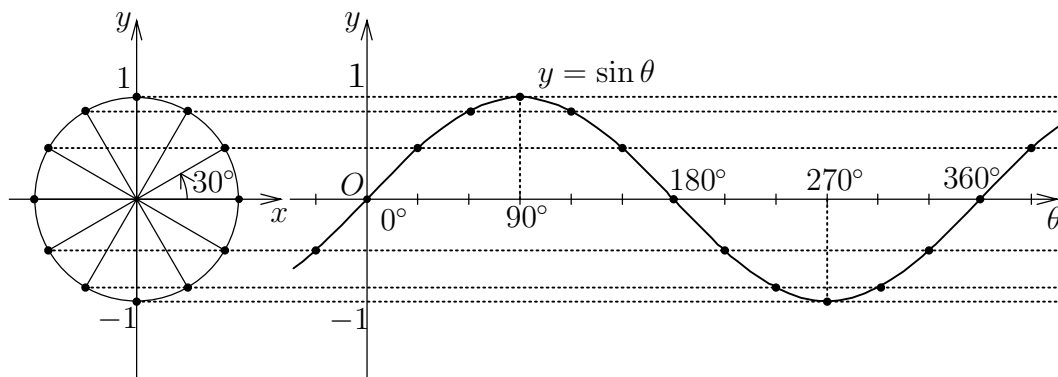
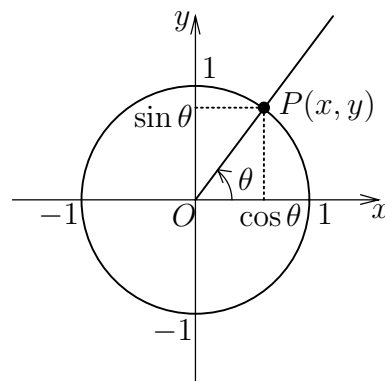
θ を表す動径と単位円の交点を $P(x, y)$ とすると

$$\sin \theta = y \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\cos \theta = x \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから, θ の変化にともなう $\sin \theta$ の値の変化は, 点 P の y 座標をみればよい.

①を用いて, $y = \sin \theta$ は次のようにしてかくことができる.



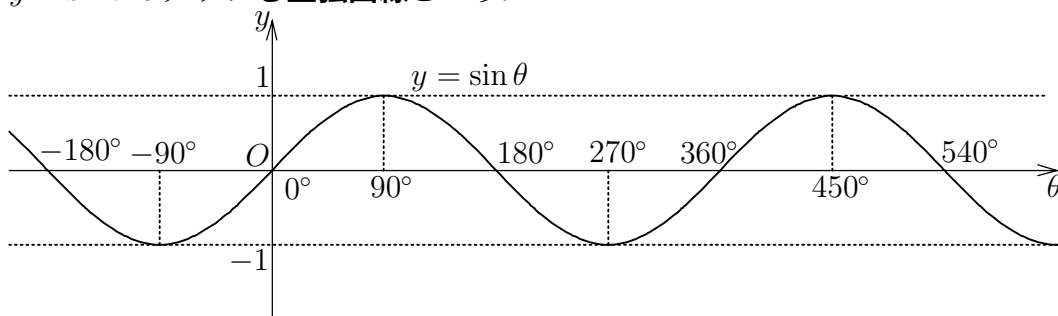
前に学んだように

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$$

が成り立つから, $\sin \theta$ の値は 360° ごとに同じ変化を繰り返す.

したがって, $y = \sin \theta$ のグラフは 360° ごとに同じ形を繰り返し, 次のようになる. この 360° を $\sin \theta$ の**周期**という.

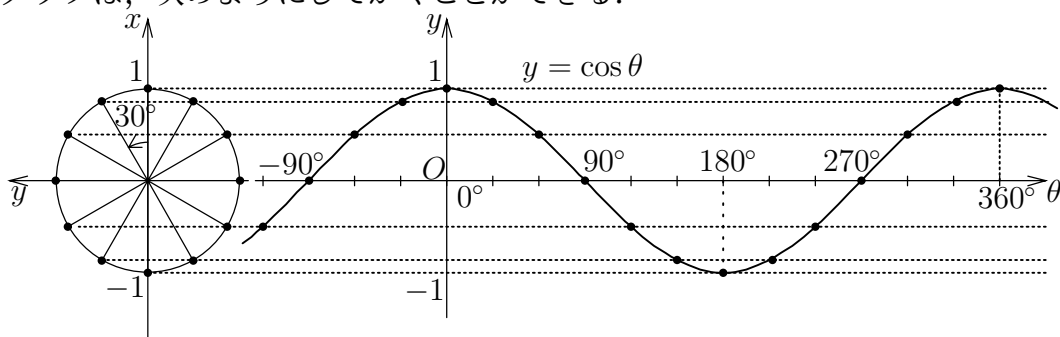
$y = \sin \theta$ のグラフを**正弦曲線**という.



前のページの②を用いると、関数

$$y = \cos \theta$$

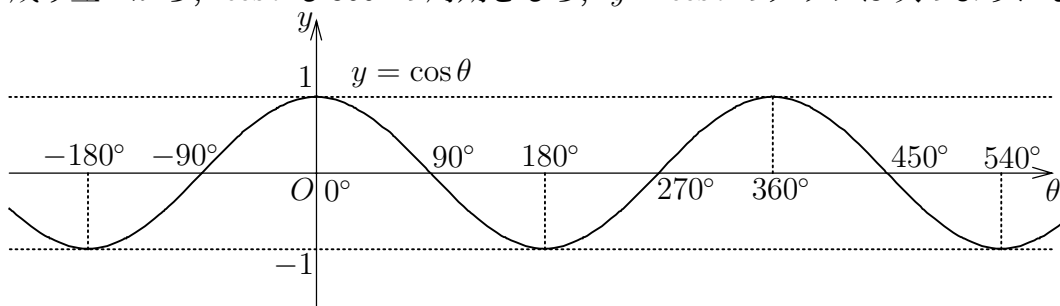
のグラフは、次のようにしてかくことができる。



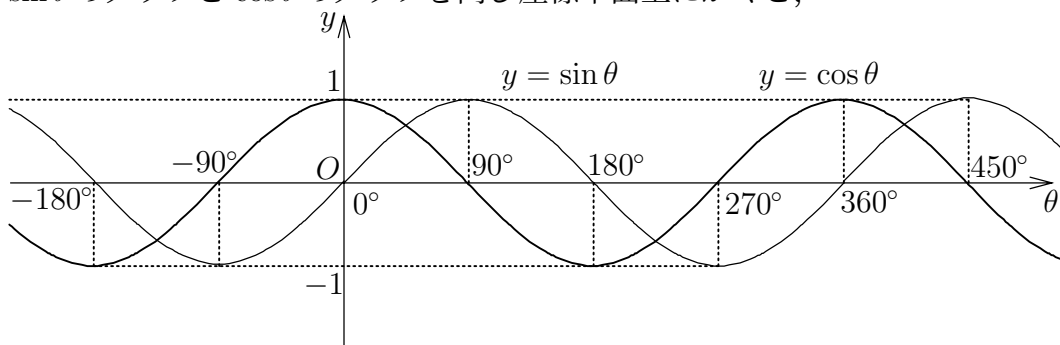
また、

$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$$

が成り立つから、 $\cos \theta$ も 360° の周期をもち、 $y = \cos \theta$ のグラフは次のようになる。

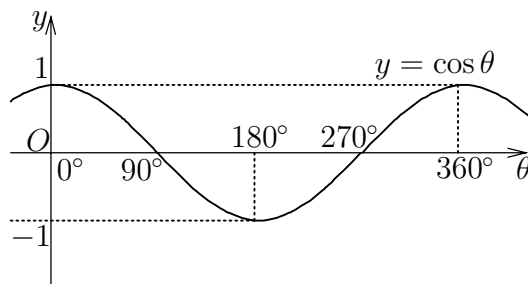
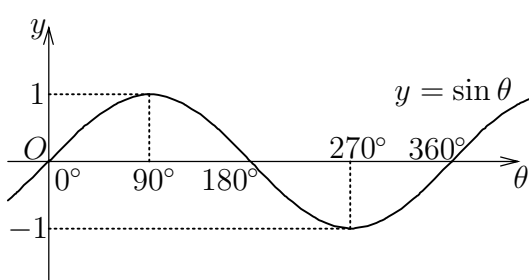


$\sin \theta$ のグラフと $\cos \theta$ のグラフを同じ座標平面上にかくと、

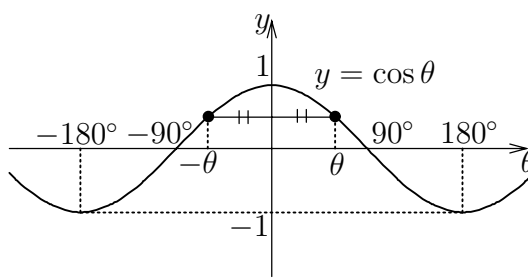
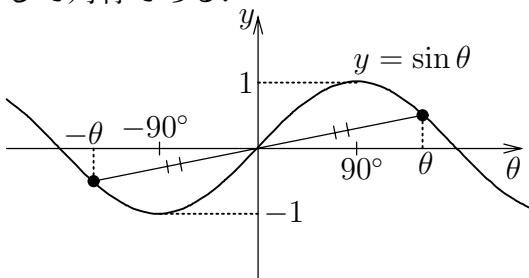


上の図から、 $y = \cos \theta$ のグラフは、 $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸の方向に -90° だけ平行移動したものである。

$y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ のグラフのように, 一定の範囲にある部分が繰り返し現れる関数を**周期関数**という. $y = \sin \theta$, $y = \cos \theta$ は, どちらも 360° を周期とする周期関数である.



また, $y = \sin \theta$ のグラフは, 原点に関して対称, $y = \cos \theta$ のグラフは, y 軸に関して対称である.



($y = \sin \theta$ の特徴)

1 360° を周期とする関数

2 関数の取る値の範囲は

$$-1 \leq y \leq 1$$

3 グラフは原点に関して対称

($y = \cos \theta$ の特徴)

1 360° を周期とする関数

2 関数の取る値の範囲は

$$-1 \leq y \leq 1$$

3 グラフは y 軸に関して対称

問 33.17 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で, 次の式を満たす θ をグラフから求めよ.

(1) $\sin \theta = 0$

(2) $\sin \theta = 1$

(3) $\sin \theta = -1$

(4) $\cos \theta = 0$

(5) $\cos \theta = 1$

(6) $\cos \theta = -1$

【答】 (1) $\theta = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$ (2) $\theta = 90^\circ$ (3) $\theta = 270^\circ$ (4) $\theta = 90^\circ, 270^\circ$
 (5) $\theta = 0^\circ, 360^\circ$ (6) $\theta = 180^\circ$

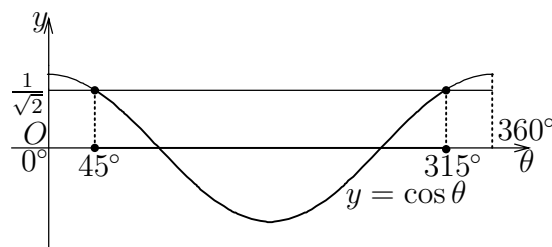
例題 33.18 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で、 $\cos \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ を満たす θ の範囲を求めよ.

【解】 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となるのは $\theta = 45^\circ, 315^\circ$ であるから右のグラフより、求める θ の範囲は

$$45^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$$



問 33.19 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき、次の不等式を満たす θ の範囲を求めよ.

(1) $\sin \theta > \frac{1}{2}$ (2) $\cos \theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答】 (1) $30^\circ < \theta < 150^\circ$ (2) $0^\circ \leq \theta \leq 150^\circ, 210^\circ \leq \theta < 360^\circ$

例 33.20 $y = 2 \sin \theta$ ①

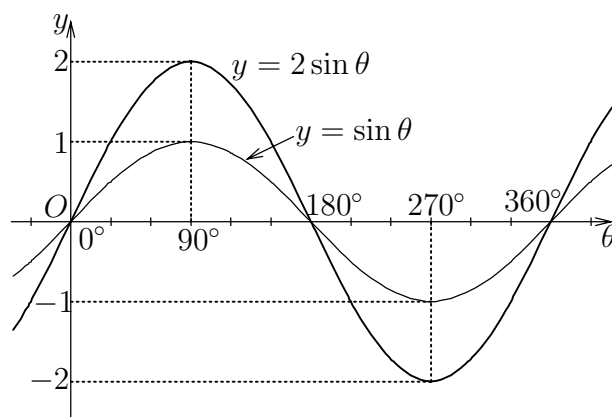
のグラフをかいてみよう.

①のグラフは、 θ に対応する y の値が

$$y = \sin \theta \quad \text{②}$$

の 2 倍であるから、②のグラフを y 軸方向に 2 倍だけ拡大したものである.

①の周期は 360° で、最大値は 2, 最小値は -2 である.



例 33.21 $y = 2 \cos \theta$ ①

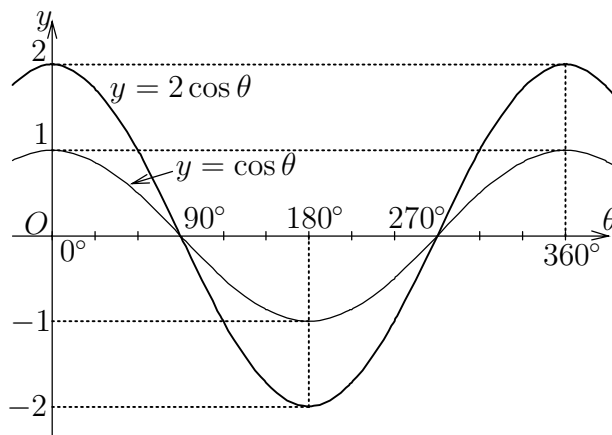
のグラフをかいてみよう.

①のグラフは、 θ に対応する y の値が

$$y = \cos \theta \quad \text{②}$$

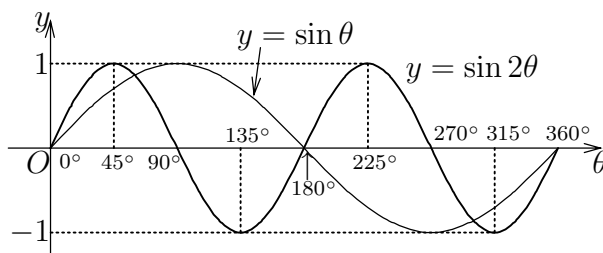
の 2 倍であるから、②のグラフを y 軸方向に 2 倍だけ拡大したものである.

①の周期は 360° で、最大値は 2, 最小値は -2 である.



例題 33.22 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で, $y = \sin 2\theta$ のグラフをかけ.

【解】 $\theta = \frac{\alpha}{2}$ のときの $\sin 2\theta$ の値と, $\theta = \alpha$ のときの $\sin \theta$ の値が常に等しい. このグラフは, y 軸をもとにして θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ縮小したものである.



上の例題からわかるように, $\sin 2\theta$ の周期は $\sin \theta$ の周期 360° の $\frac{1}{2}$ 倍, すなわち 180° である.

一般に, k を正の定数とすると, $\sin k\theta$, $\cos k\theta$ の周期は, ともに 360° の $\frac{1}{k}$ 倍である. 例えば, $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ の周期は, ともに 360° の 2 倍, すなわち 720° である.

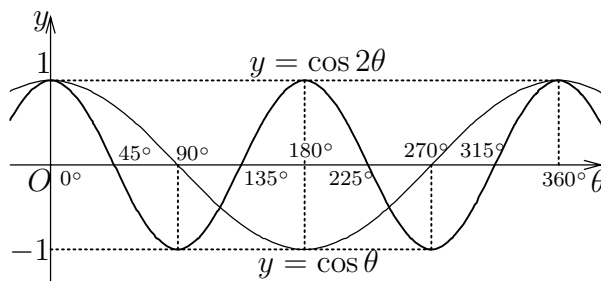
問 33.23 $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ の範囲で, 次の関数のグラフをかけ. また, 周期はいくらか.

(1) $y = \cos 2\theta$

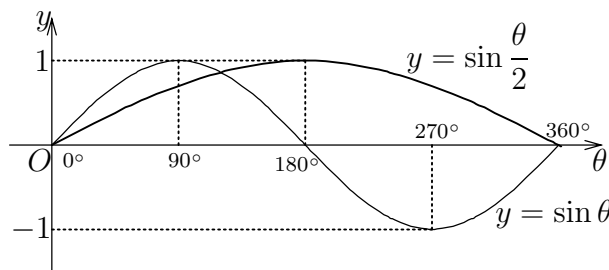
(2) $y = \sin \frac{\theta}{2}$

【解】

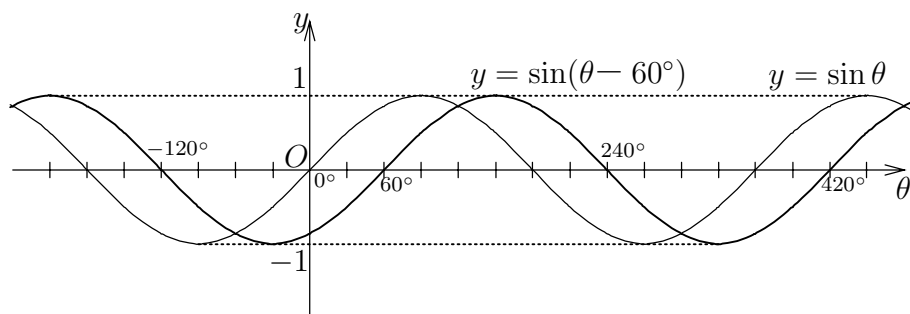
(1) 周期は 180° . $y = \cos 2\theta$ のグラフは $y = \cos \theta$ のグラフを y 軸をもとにして θ 軸方向に $\frac{1}{2}$ に縮小したものである.



(2) 周期は 720° . $y = \sin \frac{\theta}{2}$ のグラフは $y = \sin \theta$ のグラフを y 軸をもとにして θ 軸方向に 2 倍に拡大したものである.

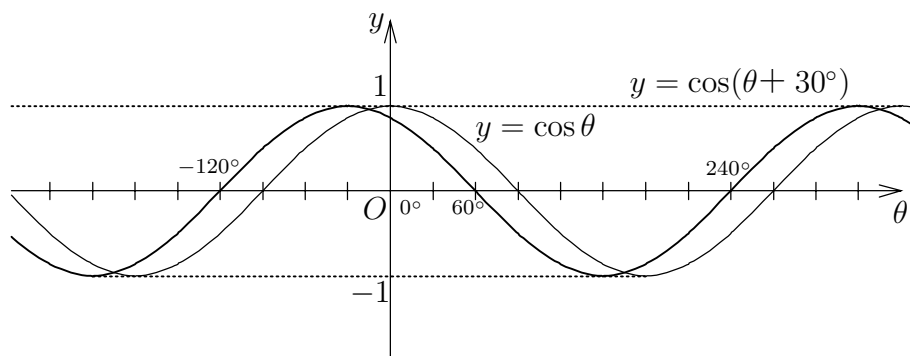


例 33.24 $y = \sin(\theta - 60^\circ)$ のグラフをかいてみよう. $\theta = \alpha + 60^\circ$ のときの $\sin(\theta - 60^\circ)$ の値と, $\theta = \alpha$ のときの $\sin \theta$ の値は常に等しい. したがって, このグラフは $y = \sin \theta$ のグラフを θ 軸方向に 60° だけ平行移動したものであり, 下の図のようになる.



問 33.25 $y = \cos(\theta + 30^\circ)$ のグラフをかけ.

【解】 $y = \cos(\theta + 30^\circ)$ のグラフは $y = \cos \theta$ のグラフを θ 軸方向に -30° だけ平行移動したものである.



33.7 三角関数 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ のグラフをかけ. (葵精機)

33.8 三角関数 $y = \cos(x - 30^\circ)$ のグラフをかけ. (大隈鉄工所)

● $y = \tan \theta$ のグラフ

角 θ の動径と単位円との交点を $P(a, b)$ とすると、
 $\tan \theta = \frac{b}{a}$ であり、 $\tan \theta$ は直線 OP の傾きを表す。

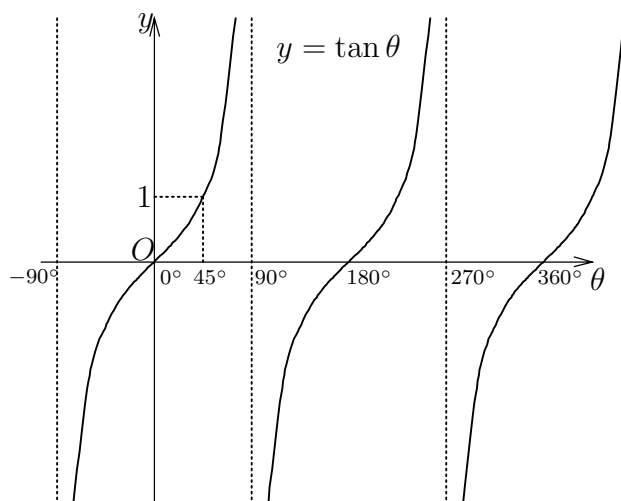
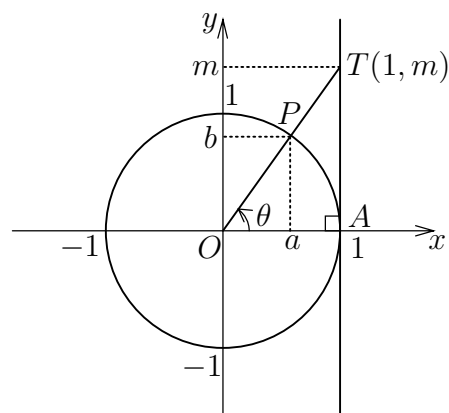
ゆえに、点 $A(1, 0)$ における単位円の接線と角 θ の動径との交点を $T(1, m)$ とすると

$$\tan \theta = m$$

また、

$$\tan(\theta + 180^\circ) = \tan \theta$$

が成り立つから、 $\tan \theta$ は 180° の周期をもつ。



$\tan \theta$ は、 θ が $\dots, -90^\circ, 90^\circ, 270^\circ, \dots$ では定義されないが、 θ がそれらに限りなく近づくと、グラフは、 y 軸に平行な直線 $\dots, \theta = -90^\circ, \theta = 90^\circ, \theta = 270^\circ, \dots$ に限りなく近づく。一般に原点から遠ざかるにつれてグラフが限りなく近づく直線を、そのグラフの**漸近線**という。

($y = \tan \theta$ のグラフ)

- 1 180° を周期とする関数である。
- 2 関数はすべての実数値をとる。
- 3 グラフの漸近線は、直線 $\dots, \theta = -90^\circ, \theta = 90^\circ, \theta = 270^\circ, \dots$ 。
- 4 グラフは原点に関して対称である。

33.9 $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ であるとき $\tan(x - 10^\circ) = \sqrt{3}$ を満足する x を求めよ. (シチズン)

33.10 $\sin x = \frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$) を解け. (シチズン)

33.11 $\cos 2x = \frac{1}{2}$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$) を解け. (トヨタ車体)

33.12 次の方程式と不等式を解け. ただし, $(0 \leq x \leq 2\pi)$ とする. (NEC)

$$(1) \sqrt{3} - 3 \tan x = 0 \qquad (2) \cos x > -\frac{1}{2}$$

●加法定理

(正弦・余弦の加法定理)

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \quad & \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ & \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{2} \quad & \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ & \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

例 33.26

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

33.13 次の値を求めよ.

(1) $\sin 75^\circ$ (栗本鉄工所)

(2) $\cos 75^\circ$ (徳山曹達)

(3) $\sin 15^\circ$ (九州電力, 日本無線, 東芝, NEC, 三菱電機)

(4) $\sin 165^\circ$ (キャノン)

(5) $\sin 15^\circ + \cos 45^\circ$ (日本特殊機器)

(6) $\cos 75^\circ \sin 15^\circ$ (NEC)

(正接の加法定理)

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

例 33.27

$$\begin{aligned}\tan 105^\circ &= \tan(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{1 - 3} = -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

問 33.28 $\tan 15^\circ$ の値を求めよ.

【答】 $2 - \sqrt{3}$

33.14 $\tan 75^\circ$ の値を求めよ.

(飯沼コンサルタント)

加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

で、 β を α に置き換えると、次の 2 倍角の公式が得られる。

(2 倍角の公式)

$$\mathbf{1} \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\mathbf{2} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\mathbf{3} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ を利用すると

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 2 \cos^2 \alpha - 1$$

ともかける。

例題 33.29 等式 $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \tan \alpha$ を証明せよ。 (マツダ)

【解】

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + (2 \cos^2 \alpha - 1)} \\ &= \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha \end{aligned}$$

問 33.30 次の等式を証明せよ。

$$(1) \quad (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$$

$$(2) \quad \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \quad (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 1 + \sin 2\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= 1 \times \cos 2\alpha = \cos 2\alpha \end{aligned}$$

33.15 次の問いに答えよ.

(ヤンマーディーゼル)

(1) $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x \cos y$ を証明せよ.

(2) (1) を利用して $\sin 75^\circ \times \cos 15^\circ$ を計算せよ.

33.16 次の等式を証明せよ.

(1) $\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha) = \sqrt{2} \cos \alpha$ (マツダ)

(2) $\sin^2(45^\circ + \alpha) + \sin^2(45^\circ - \alpha) = 1$ (安川電機)

(3) $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A+B) \sin(A-B)$ (トヨタ自動車)

33.17 $\triangle ABC$ がある. $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $BC = 10\sqrt{2}$ であるとき, AB の長さを求めよ. (電源開発)

例題 33.31 α が第2象限の角で, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ のとき $\sin 2\alpha$ と $\cos 2\alpha$ の値を求めよ.

【解】 $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

α が第2象限の角より $\cos \alpha < 0$ なので

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

したがって

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &= 2 \times \frac{4}{5} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25} \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25} \end{aligned}$$

33.18 $\cos \theta = \frac{4}{5}$ のとき $\sin 2\theta$ はいくらか. ただし, θ は鋭角である. (日本道路公団)

33.19 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \beta = \frac{1}{3}$ のとき, $\cos(\alpha - \beta)$ を求めなさい. ただし, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$ とする. (安川電機)

33.20 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{2}$ のとき $\sin 2\theta$ の値を求めよ. (日産自動車)

33.21 $x^2 + px + q = 0$ の解を $\tan \alpha$, $\tan \beta$ とするとき, $\tan(\alpha + \beta)$ の値を p , q を用いて表せ. ☆ (佐世保重工業)

33.22 $\theta = 18^\circ$ のとき, $\sin 2\theta = \cos 3\theta$ が成り立つことを利用して $\sin \theta$ の値を求めよ. ☆ (ユニチカ)

例題 33.32 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき, 次の等式を満たす θ を求めよ.

$$\cos 2\theta + 3 \cos \theta + 2 = 0$$

【解】 $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$ であるから

$$2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 1 = 0$$

$$(\cos \theta + 1)(2 \cos \theta + 1) = 0$$

$0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ であるから

$$\cos \theta = -1 \quad \text{のとき} \quad \theta = 180^\circ$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \text{のとき} \quad \theta = 120^\circ, 240^\circ$$

【答】 $\theta = 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ$

33.23 $2 \sin^2 x - \sin x = 0$ ($0^\circ \leq x \leq 360^\circ$) を解け. (日本内燃機)

33.24 $2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 2 = 0$ の θ を求めよ (ただし, $0 \leq \theta < 2\pi$). (自動車機械工具協会)

33.25 次の方程式と不等式を解け. ただし, $0 \leq x \leq 2\pi$ とする. (NEC)

$$(1) 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \qquad (2) 2 \sin^2 x - \sin x - 1 < 0$$

33.26 $\cos \theta + \sin^2 \theta = -1$ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) のとき, θ を求めよ. (九州電力)

33.27 $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき, $2 \cos^2 x + \sin x = 1$ を解け. (九州電力)

33.28 $\cos^2 \theta + 2 \sin \theta + 2 = 0$ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) を解け. (高砂空調サービス)

33.29 $2 \sin^2 x + \cos x - 1 = 0$ ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) を解け. (東京ガス)

33.30 $2 \sin^2 \theta + 5 \cos \theta - 4 = 0$ ($0^\circ \leq \theta < 360^\circ$) を解け. (九州電力)

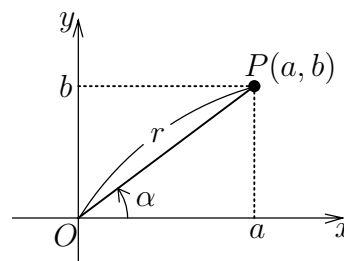
33.31 $3 \sin x - \cos 2x = 1$ ($0 \leq x < 2\pi$) を解け. (日本無線)

●三角関数の合成

一般に点 $P(a, b)$ をとり, x 軸の正の部分を出発線とするときの動径 OP の表す角の1つを α とする.

$OP = r$ とすると

$$\begin{aligned} a \sin \theta + b \cos \theta &= r \left(\frac{a}{r} \sin \theta + \frac{b}{r} \cos \theta \right) \\ &= r(\cos \alpha \sin \theta + \sin \alpha \cos \theta) \\ &= r \sin(\theta + \alpha) \end{aligned}$$



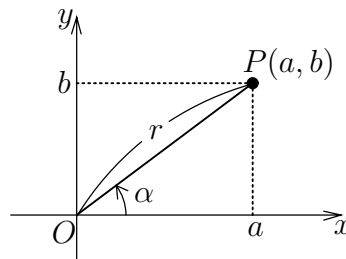
ここで, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ である.

(三角関数の合成)

$$a \sin \theta + b \cos \theta = r \sin(\theta + \alpha)$$

ただし,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{r}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{r} \end{aligned}$$



例題 33.33 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ.

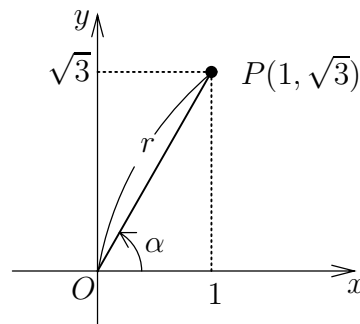
【解】 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta$ の $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の係数を座標とする点 $P(1, \sqrt{3})$ をとると

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

また, $\cos \alpha = \frac{1}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より

$$\alpha = 60^\circ$$

【答】 $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 2 \sin(\theta + 60^\circ)$



問 33.34 次の式を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ.

(1) $\sin \theta + \cos \theta$ (2) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$

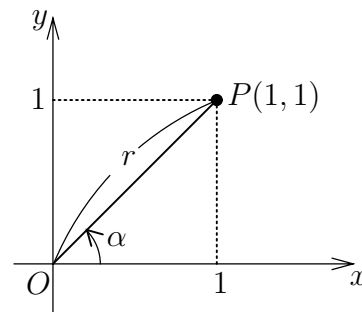
【解】

(1) $\sin \theta + \cos \theta$ の $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の係数を座標とする点 $P(1, 1)$ をとる.

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

また, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$\alpha = 45^\circ$$



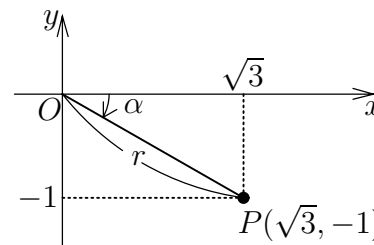
【答】 $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$

(2) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ の $\sin \theta$ と $\cos \theta$ の係数を座標とする点 $P(\sqrt{3}, -1)$ をとる.

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

また, $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{-1}{2}$ であるから

$$\alpha = -30^\circ$$



【答】 $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 2 \sin(\theta - 30^\circ)$

例題 33.35 関数 $y = \sin \theta + \cos \theta$ の最大値, 最小値を求めよ.

【解】 $y = \sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$ であり,

$$-1 \leq \sin(\theta + 45^\circ) \leq 1$$

なので, y のとる値の範囲は

$$-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$$

である. よって, 最大値は $\sqrt{2}$, 最小値は $-\sqrt{2}$

問 33.36 関数 $y = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ の最大値, 最小値を求めよ.

【答】 最大値 2, 最小値 -2

例題 33.37 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ のとき, 方程式 $\sin \theta - \cos \theta = 1$ を解け.

【解】 左辺を変形して

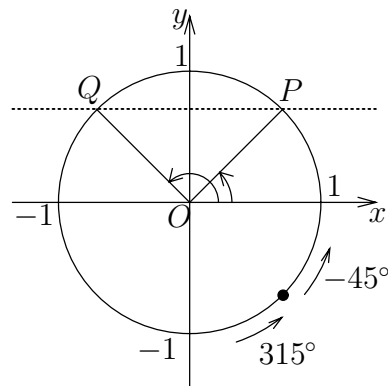
$$\sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ) = 1$$

となる. $t = \theta - 45^\circ$ とおき,

$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (-45^\circ \leq t < 315^\circ)$$

から $t = 45^\circ, 135^\circ$ を得る.

よって, $t = \theta - 45^\circ$ より, 解は $\theta = 90^\circ, 180^\circ$



33.32 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$ ($0^\circ \leq x < 360^\circ$) を解け. (東芝)

33.33 $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 2$ ($0^\circ < \theta < 180^\circ$) のとき θ を求めよ. (九州電力)

33.34 $\sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta = 1$ ($0^\circ \leq \theta < 2\pi$) を解け. (小松製作所)

例題 33.38 $y = 2 \sin \theta + \cos 2\theta$ の $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ における最大値とそのときの θ の値を求めよ. (日本航空電子工業)

【解】 $t = \sin \theta$ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$) とおくと $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$ より

$$y = -2t^2 + 2t + 1 \quad (0 \leq t \leq 1)$$

となり, 右辺を変形して

$$y = -2 \left(t - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{2}$$

となるので, $t = \frac{1}{2}$ ($\theta = 30^\circ$) のとき最大値 $\frac{3}{2}$ となる.

【答】 $\theta = 30^\circ$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$

33.35 $y = 4 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta - 3$ の最大値・最小値を求めよ. (九州電力)

33.36 $y = 2 \sin x + \cos 2x$ ($0 \leq x < 2\pi$) の最大値・最小値とそのときの x の値を求めよ. (本州四国連絡橋公団)

33.37 $y = \cos 2x - \sin 2x$ ($0 \leq x < 2\pi$) の最大値・最小値を求めよ. (日本無線)

第 34 章 指数

(0や負の整数の指数)

$a \neq 0$, n が正の整数のとき

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

例 34.1 (1) $3^0 = 1$ (2) $3^{-1} = \frac{1}{3}$ (3) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

問 34.2 次の にあてはまる数をかき入れよ.

(1) $5^{-2} = \frac{1}{5^{\square}} = \frac{1}{\square}$ (2) $0.001 = \frac{1}{10^{\square}} = 10^{\square}$

【答】 (1) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ (2) $0.001 = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

例 34.3

(1) $3^3 = 27$ なので $\sqrt[3]{27} = 3$

(2) $(-2)^3 = -8$ なので $\sqrt[3]{-8} = -2$

(3) $2^4 = 16$ なので $\sqrt[4]{16} = 2$

(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$ なので $\sqrt[4]{\frac{1}{16}} = \frac{1}{2}$

問 34.4 次の値を求めよ.

(1) $\sqrt[3]{8}$ (2) $\sqrt[4]{10000}$ (3) $\sqrt[3]{64}$ (4) $-\sqrt[3]{27}$
 (5) $\sqrt[4]{81}$ (6) $\sqrt[4]{1}$ (7) $\sqrt[5]{32}$ (8) $\sqrt[3]{-125}$

【答】 (1) 2 (2) 10 (3) 4 (4) -3 (5) 3 (6) 1 (7) 2 (8) -5

(正の分数指数) m, n が正の整数のとき

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

例 34.5

$$(1) 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}, \quad 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

$$(2) 4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{16}, \quad 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$$

注意： $\sqrt[n]{a}$ を $\sqrt[n]{a}$ とかく.**問 34.6** 次の数を根号を使って表せ.

$$(1) 6^{\frac{1}{2}} \quad (2) 5^{\frac{3}{2}} \quad (3) 10^{\frac{3}{4}} \quad (4) 7^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{【答】} \quad (1) \sqrt{6} \quad (2) \sqrt{5^3} \quad (3) \sqrt[4]{10^3} \quad (4) \sqrt[3]{7}$$

34.1 $a^{1.5}$ を根号を用いて表せ.

(九州電力)

問 34.7 次の数を分数の指数を使って表せ.

$$(1) \sqrt{10} \quad (2) \sqrt[3]{5} \quad (3) \sqrt[4]{2^3} \quad (4) \sqrt[4]{a} \quad (5) \sqrt[5]{a^2}$$

$$\text{【答】} \quad (1) 10^{\frac{1}{2}} \quad (2) 5^{\frac{1}{3}} \quad (3) 2^{\frac{3}{4}} \quad (4) a^{\frac{1}{4}} \quad (5) a^{\frac{2}{5}}$$

指数が負の整数や0であるとき, 例えば

$$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}, \quad 5^0 = 1$$

である. 指数が負の分数の場合も, つぎのことがいえる.

(負の分数指数)

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$\text{例 34.8} \quad (1) 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (2) 2^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$$

問 34.9 次の数を根号を用いて表せ.

$$(1) 4^{-\frac{1}{2}} \quad (2) 2^{-\frac{3}{2}} \quad (3) 6^{-\frac{1}{2}} \quad (4) a^{-\frac{5}{4}} \quad (5) a^{-\frac{1}{5}}$$

$$\text{【答】} \quad (1) \frac{1}{2} \quad (2) \frac{1}{\sqrt{2^3}} \quad (3) \frac{1}{\sqrt{6}} \quad (4) \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}} \quad (5) \frac{1}{\sqrt[5]{a}}$$

問 34.10 次の数を a^p の形で表せ.

$$(1) \frac{1}{\sqrt[3]{24}} \quad (2) \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \quad (3) \frac{1}{\sqrt{10}} \quad (4) \frac{1}{(\sqrt[3]{a})^5} \quad (5) \frac{1}{(\sqrt[6]{a^5})^2}$$

【答】 (1) $2^{-\frac{4}{3}}$ (2) $3^{-\frac{1}{4}}$ (3) $10^{-\frac{1}{2}}$ (4) $a^{-\frac{5}{3}}$ (5) $a^{-\frac{5}{3}}$

指数がどんな有理数であっても, 次の指数法則が成り立つ.

(指数法則)

p, q を有理数とすると

$$\text{i) } a^p \times a^q = a^{p+q} \quad \text{ii) } (a^p)^q = a^{pq} \quad \text{iii) } (ab)^p = a^p a^p$$

例 34.11

$$(1) 8^{\frac{5}{3}} = (2^3)^{\frac{5}{3}} = 2^5 = 32$$

$$(2) 81^{-\frac{1}{4}} = (3^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$(3) 32^{-0.6} = (2^5)^{-\frac{3}{5}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$(4) \left\{ \left(\frac{8}{27} \right)^{\frac{5}{3}} \right\}^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{8}{27} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$$

34.2 次の値を求めよ.

$$(1) \left(\frac{2}{3} \right)^0 \quad \text{(三菱重工)}$$

$$(2) \sqrt[3]{-27} \quad \text{(国策パルプ)}$$

$$(3) 27^{-\frac{2}{3}} \quad \text{(NTT)}$$

$$(4) 125^{-\frac{4}{3}} \quad \text{(東芝機械)}$$

$$(5) 25^{-1.5} \quad \text{(日本テレビ)}$$

$$(6) \left(\frac{25}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad \text{(ダイハツ)}$$

$$(7) \left(-\frac{1}{3} \right)^{-3} \quad \text{(日本ガイシ)}$$

$$(8) (\sqrt[6]{4})^3 \quad \text{(九州電力)}$$

$$(9) \left(\sqrt[3]{\frac{1}{27}} \right)^{-1} \quad (\text{九州電力})$$

$$(10) \left\{ \left(\frac{9}{16} \right)^{-\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{2}{3}} \quad (\text{西日本新聞})$$

$$(11) 27^{\frac{1}{3}} + (64^{\frac{1}{6}})^2 \quad (\text{ディーゼル機器})$$

$$(12) 8^{\frac{1}{2}} \times 8^{-\frac{5}{3}} \times 8^{\frac{3}{2}} \quad (\text{九州電力})$$

$$(13) 8^{\frac{1}{4}} \times 8^{-\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{3}{4}} \quad (\text{アイシン精機})$$

$$(14) \left(\frac{9}{25} \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{27}{125} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (\text{三菱海運})$$

$$\mathbf{34.3} \quad 25^{-1.5}, 81^{-\frac{5}{4}} \text{の大小をいえ.} \quad (\text{九州電力})$$

34.4 次の計算をせよ.

$$(1) \frac{(3^{-2})^3}{3^{-4}} \times 3^3 \quad (\text{トヨタ中央研究所})$$

$$(2) (x^{-1}y)^{-5} \div x^2y^{-3} \quad (\text{川崎製鉄})$$

例 34.12

$$\begin{aligned} (1) \sqrt[6]{2} \times \sqrt{8} \times \sqrt[3]{2} &= \sqrt[6]{2} \times \sqrt{2^3} \times \sqrt[3]{2} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{1}{6} + \frac{3}{2} + \frac{1}{3}} = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sqrt{a^3} \div (\sqrt[4]{a})^5 &= a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{5}{4}} \\ &= a^{\frac{3}{2} - \frac{5}{4}} = a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

$$\mathbf{34.5} \quad (\sqrt[3]{2} \times 2 \div \sqrt{2^3})^{-12} \text{を計算せよ.} \quad (\text{九州電力})$$

例題 34.13 次の等式が成り立つような x の値を求めよ.

$$(1) \quad 3^{x+1} = \frac{1}{27} \quad (\text{スズキ自動車})$$

$$(2) \quad 3^x = 9^{x-1} \quad (\text{NTT})$$

【解】

$$\begin{array}{ll} (1) & 3^{x+1} = 3^{-3} \\ & \text{よって } x+1 = -3 \\ & \quad \quad x = -4 \\ (2) & 3^x = (3^2)^{x-1} \\ & 3^x = 3^{2x-2} \\ & \text{よって } x = 2x-2 \\ & \quad \quad x = 2 \end{array}$$

34.6 次の等式が成り立つような x の値を求めよ.

$$(1) \quad 2^x = \frac{1}{16} \quad (\text{スズキ自動車})$$

$$(2) \quad 2^x = \frac{32}{\sqrt{2}} \quad (\text{KDD})$$

$$(3) \quad 2^{x+1} = 64 \quad (\text{三井東洋高圧})$$

$$(4) \quad 5^{x-2} = \frac{1}{125} \quad (\text{キャノン})$$

$$(5) \quad 5^{x+3} = \frac{1}{625} \quad (\text{豊和工業})$$

$$(6) \quad \left(\frac{1}{5}\right)^x = 125 \quad (\text{日本テレビ})$$

$$(7) \quad 4^{3x+2} = 32 \quad (\text{東洋高圧})$$

$$(8) \quad 9^x = 27^{x-1} \quad (\text{中国電力})$$

$$(9) \quad 36^x = 216 \times 6^{x+1} \quad (\text{NEC})$$

例題 34.14 方程式 $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$ を解け.

【解】 $4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$ を利用する.

$$4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$$

$$(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$$

ここで,

$$2^x = t \quad \dots \textcircled{1} \text{とおくと}$$

$$t^2 - 5t - 24 = 0$$

$$(t+3)(t-8) = 0$$

$$t = -3, 8$$

ところで, $2^x > 0$ であるから $t = 8$ となり, ①より

$$2^x = 8$$

を解いて, $x = 3$

34.7 次の方程式を解け.

$$(1) \quad 4^x + 2^x = 20 \quad \text{(三菱重工)}$$

$$(2) \quad 4^x + 8 = 9 \times 2^x \quad \text{(大阪ガス)}$$

$$(3) \quad 9^x - 2 \times 3^{x+1} = 3^3 \quad \text{(東邦ガス)}$$

$$(4) \quad 4^{x+1} - 3 \times 2^{x+3} + 32 = 0 \quad \text{(東芝)}$$

$$(5) \quad 2^{x+2} - 2^{-x} + 3 = 0 \quad \text{(日立ソフトウェアエンジニアリング)}$$

$$(6) \quad 2^{2x+1} + 2^{3x} = 5 \times 2^{x+4} \quad \text{(マツダ)}$$

例題 34.15 連立方程式 $\begin{cases} 3^x + 3^y = 30 \\ 3^{x+y+1} = 243 \end{cases}$ を解け.

【解】 $3^x = A \cdots \textcircled{1}$, $3^y = B \cdots \textcircled{2}$ とおくと,
 $3^x + 3^y = 30$ より

$$A + B = 30 \cdots \textcircled{3}$$

$$3^{x+y+1} = 243 \text{ より}$$

$$3^x \cdot 3^y \cdot 3^1 = 243$$

$$A \cdot B \cdot 3 = 243$$

$$AB = 81 \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ より

$$\begin{cases} A = 3 \\ B = 27 \end{cases}, \quad \begin{cases} A = 27 \\ B = 3 \end{cases}$$

よって, $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ より

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

34.8 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 2^x + 2^y = 40 \\ 2^{x+y} = 256 \end{cases} \quad (\text{三菱電機})$$

$$(2) \begin{cases} 2^x = 8^{y+1} \\ 9^y = 3^{x-9} \end{cases} \quad (\text{三菱電機})$$

実践問題 14

東芝

次の問いに答えよ.

- 1 2つの2次方程式 $x^2 + 4x - m^2 - 5m = 0$, $x^2 - 2mx + 2m^2 - 16 = 0$ がいずれも異なる2つの実数解を持つときの m の値の範囲を求めよ.
- 2 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$, $g(x) = x^3 + x^2 + (2a + b)x + 2b$ について, $x + 1$ が共通の公約数であるとき,
 - (1) 実数 a , b の値を求めよ.
 - (2) このときの $f(x)$, $g(x)$ の最大公約数を求めよ.
- 3 半径 R の円に内接する三角形 ABC の頂角 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の大きさがそれぞれ A , B , C で, 辺 BC , CA , AB の長さをそれぞれ a , b , c とすると, $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C$ が成立するとき, A は何度になるかを求めよ.
- 4 単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の上に3点 $P(0, 1)$, $Q(1, 0)$, $R(a, b)$ がある. 点 R は第1象限にあり, 線分 PR の長さ $\overline{PR}$ が1である.
 - (1) a , b の値を求めよ.
 - (2) 原点を O とすると $\tan \angle ROQ + \cos \angle ROQ$ の値を求めよ.

【答】

- 1 $-1 < m < 4$
- 2 (1) $a = -1$, $b = -2$ (2) $x^2 + 3x + 2$
- 3 $A = 90^\circ$
- 4 (1) $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{1}{2}$ (2) $\frac{5}{6}\sqrt{3}$

第 35 章 対数

(対数の定義)

$$M = a^m \iff m = \log_a M \quad (m \text{ は対数, } a \text{ は底, } M \text{ は真数})$$

ただし, $a > 0, a \neq 1, M > 0$

例 35.1

$$(1) 8 = 2^3 \iff 3 = \log_2 8$$

$$(2) \frac{1}{2} = 2^{-1} \iff -1 = \log_2 \frac{1}{2}$$

$$(3) 1 = 2^0 \iff 0 = \log_2 1$$

問 35.2 次の $\square$ にあてはまる数を記入せよ.

$$(1) 9 = 3^2 \iff \square = \log_3 \square$$

$$(2) 10^\square = \square \iff \log_{10} 1000 = 3$$

【答】 (1) 2, 9 (2) 3, 1000

問 35.3 次の式を $m = \log_a M$ の形で表せ.

$$(1) 125 = 5^3 \quad (2) \frac{1}{8} = 2^{-3} \quad (3) \sqrt{10} = 10^{\frac{1}{2}}$$

【答】 (1) $3 = \log_5 125$ (2) $-3 = \log_2 \frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{2} = \log_{10} \sqrt{10}$

問 35.4 次の式を $M = a^m$ の形で表せ.

$$(1) \log_7 49 = 2 \quad (2) \log_5 1 = 0 \quad (3) \log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$$

【答】 (1) $49 = 7^2$ (2) $1 = 5^0$ (3) $3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

35.1 次の式を満たす x の値を求めよ.

$$(1) \log_x 216 = 3 \quad \text{(松下電器)}$$

$$(2) \log_{81} x = \frac{1}{4} \quad \text{(富士通)}$$

(対数の性質)

$$\text{I} \quad \log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$$

$$\text{II} \quad \log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N$$

$$\text{III} \quad \log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\text{IV} \quad \log_a (M^p) = p \log_a M$$

[証明]

$$a^0 = 1 \text{ より } \log_a 1 = 0, \quad a^1 = a \text{ より } \log_a a = 1$$

$$, \quad \log_a M = m, \quad \log_a N = n \text{ とおくと}$$

$$M = a^m, \quad N = a^n$$

したがって

$$M \times N = a^m \times a^n = a^{m+n}, \quad \frac{M}{N} = a^m \div a^n = a^{m-n}$$

よって

$$\begin{aligned} \log_a (M \times N) &= m + n \\ &= \log_a M + \log_a N \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log_a \frac{M}{N} &= m - n \\ &= \log_a M - \log_a N \end{aligned}$$

$$\log_a M = m \text{ とおくと } M = a^m$$

したがって

$$M^p = (a^m)^p = a^{m \times p}$$

よって

$$\log_a M^p = m \times p = p \log_a M$$

例 35.5

$$(1) \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5 \log_2 2 = 5 \times 1 = 5$$

$$(2) \log_2 \sqrt[3]{4} = \log_2 \sqrt[3]{2^2} = \log_2 2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \log_2 2 = \frac{2}{3}$$

$$(3) \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 1 - \log_3 9 = 0 - \log_3 3^2 = -2 \log_3 3 = -2$$

35.2 次の値を求めよ.

- (1) $\log_2 8$ (NTT)
 (2) $\log_2 \sqrt{8}$ (九州電力)
 (3) $\log_{10} 1$ (三菱重工)
 (4) $\log_{10} \frac{1}{1000}$ (トヨタ自動車)
 (5) $\log_{10} 0.1$ (マツダ)
 (6) $\log_{10} 0.001$ (九州電力)
 (7) $\log_2 \frac{1}{2}$ (ニッシン工業)
 (8) $\log_3 \frac{1}{81}$ (東芝)
 (9) $\log_{0.5} 0.5$ (住友精密工業)
 (10) $\log_2 \cos 60^\circ$ (大阪変圧器)

35.3 次の問いで正しいものには○, 正しくないものには×をつけなさい. (トヨタ自動車)

- (1) $\log_a 1 = a$ (2) $\log_a a = 1$ (3) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
 (4) $\frac{D}{A} + \frac{C}{B} = \frac{AD}{AB} + \frac{AC}{AB}$ (5) $A^m \times A^n = A^{mn}$

例題 35.6 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ を用いて, 次の値を計算せよ.

- (1) $\log 864$ (NHK)
 (2) $\log 5$ (富士重工)

【解】 [注意] 底が 10 のとき, $\log_{10} 5$ の底を省略して $\log 5$ とかくことがある.

$$\begin{aligned} (1) \log 864 &= \log(2^5 \times 3^3) = \log 2^5 + \log 3^3 \\ &= 5 \log 2 + 3 \log 3 \\ &= 5 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771 = 2.9363 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \log 5 &= \log \frac{10}{2} \\ &= \log 10 - \log 2 \\ &= 1 - 0.3010 = 0.6990 \end{aligned}$$

35.4 $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ を用いて, 次の値を計算せよ.

- (1) $\log_{10} 6$ (日立)
- (2) $\log_{10} 20$ (九州電力)
- (3) $\log 60$ (九州電力)
- (4) $\log 6000$ (九州電力)
- (5) $\log_{10} 6 + \log_{10} 2$ (日本特殊機器)
- (6) $\log_{10} 8^2$ (日本特殊機器)
- (7) $\log \frac{1}{6}$ (三菱海運)
- (8) $\log 1.5$ (トウソク)
- (9) $\log 0.2$ (九州電力)
- (10) $\log 0.125$ (安川電機)
- (11) $\log 1.08$ (九州電力)

35.5 $\log 8.5 = 0.9294$ のとき, 次の対数をいえ. (日産自動車)

- (1) $\log 85$ (2) $\log 850$ (3) $\log \sqrt{85}$

例題 35.7 次の式を簡単にせよ.

- (1) $\log_2 6 + \log_2 3 - \log_2 9$ (2) $3 \log_3 2 - \log_3 24$

【解】

$$\begin{aligned} (1) \log_2 6 + \log_2 3 - \log_2 9 &= \log_2 \frac{6 \times 3}{9} \\ &= \log_2 2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 3 \log_3 2 - \log_3 24 &= \log_3 2^3 - \log_3 24 \\ &= \log_3 \frac{2^3}{24} \\ &= \log_3 \frac{1}{3} \\ &= \log_3 3^{-1} \\ &= -\log_3 3 = -1 \end{aligned}$$

35.6 次の式を簡単にせよ.

$$(1) \log_2 8 + 3 \log_3 81 \quad (\text{九州電力})$$

$$(2) \log_{10} 5 + \log_{10} 2 \quad (\text{豊田工機})$$

$$(3) \log 25 + \log 4 \quad (\text{KNサービス})$$

$$(4) \log_2 24 - \log_2 3 \quad (\text{NTT})$$

$$(5) \log_2 6 - \log_2 \frac{3}{4} \quad (\text{日立ソフトウェアエンジニアリング})$$

$$(6) \log_2 8 - \log_2 \frac{3}{4} + \log_2 6 \quad (\text{中部電力})$$

$$(7) \log_3(4 - \sqrt{7}) + \log_3(4 + \sqrt{7}) \quad (\text{東北電力})$$

$$(8) \log_{10} 2 + \log_{10} \sqrt{15} - \log_{10} \sqrt{0.6} \quad (\text{NTT})$$

$$(9) \log_{10} \frac{4}{25} + 2 \log_{10} 5 \quad (\text{清水建設})$$

$$(10) \log_{10} 25 - 2 \log_{10} \frac{1}{2} \quad (\text{TOTO})$$

$$(11) \log \frac{5}{3} + 2 \log \frac{2}{5} - \log \frac{8}{3} \quad (\text{マツダ})$$

$$(12) \log 45 - 3 \log 3 + \log \frac{3}{5} \quad (\text{安川電機})$$

$$(13) 2 \log \frac{5}{3} - \log \frac{9}{4} + 2 \log 3 + \frac{1}{2} \log 81 \quad (\text{日本自動車機械工具協会})$$

$$(14) -\frac{1}{2} \log_{10} 3 + \frac{1}{2} \log_{10} 6 + \frac{1}{2} \log_{10} 5 \quad (\text{九州電力})$$

a, b を 1 でない正の定数とする. $M = a^m$ の両辺に b を底とする対数をとると

$$\log_b M = \log_b a^m \quad \text{すなわち} \quad \log_b M = m \log_b a$$

$m = \log_a M$ であり, $\log_b a \neq 0$ であるから, 次の公式が成り立つ.

(底の変換公式)

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

例 35.8 底の変換公式を用いると、次のように計算できる.

$$(1) \log_{32} 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 32} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^5} = \frac{3 \log_2 2}{5 \log_2 2} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} (2) \log_3 2 \cdot \log_4 27 &= \log_3 2 \times \frac{\log_3 27}{\log_3 4} \\ &= \log_3 2 \times \frac{3}{2 \log_3 2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

35.7 次の式を簡単にせよ.

- (1) $\log_9 27$ (大福機工)
- (2) $\log_{25} 125$ (NTT)
- (3) $\log_8 2$ (キャノン)
- (4) $\log_4 \sqrt[3]{2}$ (九州電力)
- (5) $\log_{100} 10\sqrt{10}$ (大阪変圧器)
- (6) $\log_{\frac{1}{4}} 2$ (日本水産)
- (7) $\log_{\sqrt{3}} 9$ (東邦ガス)
- (8) $\log_3 2 \times \log_8 9$ (九州電力)
- (9) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 8$ (清水建設)
- (10) $(\log_2 3 + \log_4 9)(\log_3 4 + \log_9 2)$ (NTT)

35.8 $\log 2 = 0.3010$ を用いて、次の計算をせよ. (大福機工)

- (1) $\log_{0.5} 4$ (2) $\log_{0.4} 5$

35.9 $\log_2 3 = a$, $\log_3 11 = b$ として, $\log_{44} 66$ を a , b を用いて表せ. (東芝)

35.10 $\log A = x$, $\log B = y$, $\log C = z$ のとき, 次の値を x , y , z を用いて表せ.
(中川電気)

- (1) $\log_A B$ (2) $\log_{AB} C$ (3) $\log_{\frac{C}{B}} A$

35.11 $10^{2 \log 2}$ の値を求めよ. (帝人)

例題 35.9 3^{10} は何桁の数か. ただし $\log 3 = 0.4771$ とする. (KDD)

【解】 $\log_{10} 3^{10} = 10 \times \log_{10} 3 = 10 \times 0.4771 = 4.771$

ゆえに

$$\begin{aligned} 4 &\leq \log_{10} 3^{10} < 5 \\ 4 \log_{10} 10 &\leq \log_{10} 3^{10} < 5 \log_{10} 10 \\ \log_{10} 10^4 &\leq \log_{10} 3^{10} < \log_{10} 10^5 \end{aligned}$$

よって

$$10^4 \leq 3^{10} < 10^5$$

したがって, 3^{10} は 5 桁の整数である.

35.12 3^{18} は何桁の数か. ただし, $\log 3 = 0.4771$ とする. (関西電力)

35.13 12^{12} は何桁の数か. ただし, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ とする. (三菱電機)

35.14 年利率 0.08 で元利合計が元金の 2 倍になるのは何年後か. ただし $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$ とする. (九州電力)

35.15 ある電車会社の乗客数は毎年 1 割ずつ増加するものとすれば, 乗客数がはじめて今年の 2 倍になるのは何年後か. $\log 11 = 1.0453$, $\log 20 = 1.3010$ とする. (小田急)

35.16 $\frac{50}{49}$ を何乗したら, はじめて 1000 より大きくなるか. ただし, $\log 7 = 0.8451$, $\log 2 = 0.3010$ とする. (ブラザー工業)

35.17 次の方程式を解け.

(1) $2^x - 2^{-x} = \frac{8}{3}$ (九州電力)

(2) $4^{x+1} - 3 \times 2^{x+2} + 5 = 0$ (東芝)

例題 35.10 方程式 $\log_2 x + \log_2(x-1) = 1$ を解け.

【解】 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x-1 > 0$

すなわち $x > 1 \quad \cdots \textcircled{1}$

方程式を変形すると $\log_2 x(x-1) = 1$

ゆえに $x(x-1) = 2^1$

よって $x^2 - x - 2 = 0$

$$(x+1)(x-2) = 0$$

$\textcircled{1}$ の $x > 1$ に注意して $x = 2$

35.18 次の方程式を解け.

- (1) $\log_{10}(x-3) = 2$ (NTT)
- (2) $\log(2x+1) + \log 5 = 2$ (日本金属)
- (3) $\log_6 x + \log_6(x-5) = 2$ (小松製作所)
- (4) $\log x + \log(x-3) = 1$ (京王電鉄)
- (5) $\log x + \log(x-15) = 2$ (トヨタ自動車)
- (6) $\log(x+1) + \log(x-2) = 1$ (日産ディーゼル)
- (7) $\log(x+2) + \log(x+5) = 1$ (日立マクセル)
- (8) $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$ (中川電気)
- (9) $\log_{10} 3x - \log_{10} 4 + \log_{10} 4x - \log_{10} 3 = 1$ (九州電力)
- (10) $\log(2x-1) + \log(x-9) = 2$ (阪神内燃機)
- (11) $\log_{10}(4x-3) + \log_{10}(3x-4) = 1$ (九州電力)
- (12) $\log(x+6) = 1 - \log(x-4)$ (日本無線)
- (13) $\log(x^2 - 5x) = \log(x+4) + \log(x-7) + \log 2$ (いすゞ自動車)
- (14) $\log(4x+1) + \log(2x+1) = (2\log 3 + \log 5) - \log 3$ (KDD)
- (15) $\log(x^3 - 6x^2 + 12x - 7) - \log(x-1) = 0$ (東邦ガス)
- (16) $\log_2(x-4) - \log_4(x-1) = 0$ (徳山曹達)
- (17) $2\log(2x+1) + \log(x+1) = 0$ (九州電力)

35.19 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} x - y = 3 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \quad (\text{住友機械工業})$$

$$(2) \begin{cases} x + 2y = 9 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases} \quad (\text{K D D})$$

$$(3) \begin{cases} \log(x - y) + \log(7x - 8y) = 2 \\ \log(x^3 + y^3) - \log(x^2 - xy + y^2) = 1 \end{cases} \quad (\text{日本光学})$$

実践問題 15

NKK

次の問いに答えよ.

1 次の計算をなさい.

(1) $(2x^3 - 3xy + 2xy^2 - 8y^3) \div (x - 2y)$

(2) $\frac{x^2 + 8x + 16}{x^2 - 9} \div \frac{x + 4}{x - 3}$

2 A 地点と B 地点の距離が 20km あり, 甲は A 地点を時速 4km で 7 時に, 乙は同 A 地点を甲より 50 分遅れて時速 6km で B 地点に向って出発したとき, 次の設問に答えなさい. ただし, 甲, 乙とも歩く速さは一定とする.

(1) 乙が甲に追いつくのは何時何分か.

(2) 乙が甲に追いつくのは A 地点より何 km の地点か.

(3) 乙が B 地点に到着したとき, 甲は B 地点より何 km の地点を歩いているか.

3 $3x + 2y = 6$ のとき次の問に答えなさい.

(1) x 軸との交点

(2) y 軸との交点

(3) x 軸に関して対称な方程式

4 $-1 \leq x \leq 1$ のとき $y = x^2 - 4x + 3$ の最大値, 最小値を求めなさい.

【答】

1 (1) $2x^2 + x + 4$ (2) $\frac{x + 4}{x + 3}$

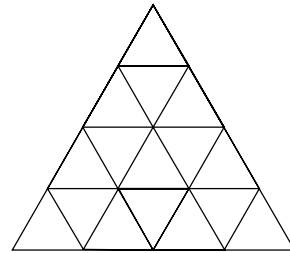
2 (1) 9 時 30 分 (2) 10km (3) $\frac{10}{3}$ km 手前

3 (1) (2, 0) (2) (0, 3) (3) $3x - 2y = 6$

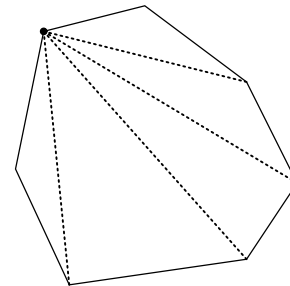
4 $x = -1$ のとき最大値 8, $x = 1$ のとき最小値 0

第 36 章 個数の処理

36.1 図の中に，いろいろな大きさや向きの三角形がある．全部でいくつあるか．その個数を求めよ．
(九州電工)



36.2 右の図の凸七角形の対角線の総数を求めよ．
(大西衣料)

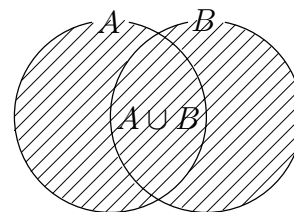
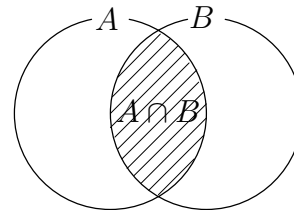


●集合の記号と要素の数

1つ1つの集合を表すのに， A ， B ， C ， $\dots$ などの大文字を使う．

2つの集合の両方に共通に含まれている要素全体の集合を， A と B の**共通部分**といい， $A \cap B$ で表す．

また，2つの集合 A と B の一方，あるいは，両方に含まれている要素全体の集合を A と B の**和集合**といい， $A \cup B$ で表す．



(集合の要素の個数)

2つの集合 A, B について, その個数を $n(A), n(B)$ とすると

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

例題 36.1 生徒 40 人で万年筆を持っている人が 18 人, 鉛筆を持っている人が 20 人, どちらも持っていない人が 6 人です. どちらも持っている人は何人ですか. (日産工機)

【解】 万年筆を持っている人の集合を A , 鉛筆を持っている人の集合を B とすると

$$n(A) = 18, n(B) = 20$$

少なくとも一方を持っている人は

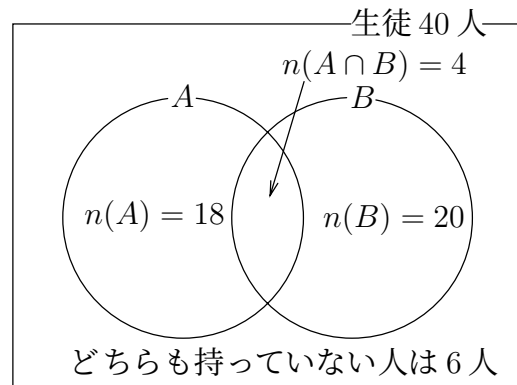
$$n(A \cup B) = 40 - 6 = 34$$

以上のことから

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$34 = 18 + 20 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 4 \quad (\text{答}) 4 \text{ 人}$$



36.3 50 人のクラスで数学 2 題を出し, 全然できなかったのが 5 名で, 1 題目ができたのが 30 名, 2 題目ができたのが 40 名であった. 2 題ともできたのは何名か. (青木建設)

36.4 ある 45 人のクラスで英語と数学のテストを行った. 英語が 80 点以上の人が 26 人, 数学が 80 点以上の人が 20 人で, 両方とも 80 点未満の人が 9 名であった. このとき, 英語と数学の両方とも 80 点以上の人は何人か. (日本特殊機器)

36.5 40 人のクラスで兄のいる人は 18 人, 姉がいる人は 20 人, 兄も姉もない人は 5 人である. 兄がいて姉がいない人は何人か. (東芝)

36.6 45 人のクラスで数学と国語のテストを行った. 数学が 85 点以上の人が 20 人で, 国語が 85 点以上の人が 26 人で, 両方とも 85 点未満の人が 7 名であった. このとき数学のみ 85 点以上だった人は何人か. (日本特殊機器)

36.7 全体集合が 1 から 100 までの自然数で, A は 6 の倍数の集合, B は 8 の倍数の集合のとき, $A \cup B$ の元の個数を求めよ. (NTT)

36.8 1 から 100 までの整数について 2 の倍数でも 3 の倍数でもない整数の個数を求めなさい。
(トヨタ自動車)

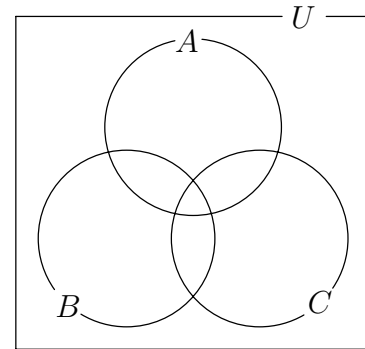
集合の要素の個数

3 つの集合 A , B , C について, その個数を $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$ とすると

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) = & n(A) + n(B) + n(C) \\ & - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

36.9 ある会合に 100 人が交通機関を利用して来るとき, 各交通機関を利用した人数は次のとおりであった.

電車 32 人, バス 37 人, 鉄道 32 人,
電車とバス 11 人, 電車と鉄道 9 人,
バスと鉄道 8 人, 電車とバスと鉄道 3 人
このとき, 以下の問いに答えよ。 (YKK)



- (1) いずれも利用しなかった人数
- (2) 電車だけを利用した人数
- (3) バスだけを利用した人数
- (4) 鉄道だけを利用した人数

36.10 1 から 10000 までの整数で 2 か 3 か 5 で割り切れる数は何個あるか。 (東京ガス)

36.11 大小 2 個のさいころを投げるとき, 目の和が 8 以下になる場合はいく通りあるか。 (神戸生糸)

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(順列の数) 異なる n 個のものから r 個取る順列の数は

$${}_nP_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r \text{ 個の積}}$$

例 36.2

(1) ${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$

(2) ${}_7P_2 = 7 \times 6 = 42$

問 36.3 次の値を求めよ.

(1) ${}_5P_4$

(2) ${}_{10}P_2$

(3) ${}_8P_3$

(4) ${}_4P_4$

【答】 (1) 120 (2) 90 (3) 336 (4) 24

36.12 ${}_3P_2 \times {}_3P_3$ を計算せよ. (マツダ)

36.13 ある公園には6つの門がある. いまこの公園の任意の門から他の門へ通り抜けるには, いく通りの方法があるか. (リコー)

36.14 10人の選手の中から走る順番を決めて4人を選びたい. この選び方は何通りあるか. (J R)

36.15 A, B, C, D の4人を一列に並べる方法は何通りか. (中国電力)

36.16 6色の絵の具を用いて4つの国を色別に塗りたい. 何通りの塗り方があるか. (栗本鉄工所)

36.17 男5人, 女4人を1人おきに1列に並べるとき, その並べ方は何通りあるか. (別府化学)

36.18 1, 2, 3, 4, 5の5個の数字から異なる3個をとって並べた3桁の整数のうち, 5の倍数はいくつあるか. (読売新聞)

36.19 1から7までの数を書いたカードが1枚ずつある. これを並べてできる2桁の整数のうち偶数はいく通りありますか. (デンソー)

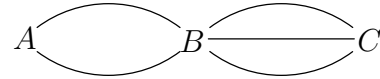
36.20 0, 1, 2, 3 の 4 個の数字を並べて, 次の数はいくつ作れるか. (キャノン)

(1) 3 けたの整数

(2) 4 けたの偶数

36.21 7 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 から相異なる 5 個の数字をとって作る五位の数のうち, 25 で割り切れる数はいくつあるか. (栗本鉄工所)

36.22 右図のような道がある. X, Y の 2 人が同時に A を出発し, 必ず別の道を通して C に行く方法は, 何通りあるか. (中国電力)



(重複順列)

異なる n 個から r 個取った重複順列の数は n^r

36.23 1, 2, 3, 4, 5 の 5 種類の数字ある. これだけを使用して, 4 けたの数を作る場合何通りできるか. ただし, 同じ数字を何回使っても差し支えない. (大阪金属)

36.24 0, 1, 2, 3, 4 の 5 種類の数字を使って 3 けたの整数はいくつ作れるか. ただし, 同じ数字をくり返し使ってもよいものとする. (住友金属鉱山)

36.25 当社には縦に並んだ 6 個のランプよりなる幹部呼出標識がある. このランプを 1 個以上つけることにより各人の呼出しが決まっている. この標識で総計何人の呼出しができるか. (マツダ)

36.26 異なる 3 個のボールを異なる 3 個の箱に入れるとき, 1 つの箱にいくつ入れてもよいし, ボールを入れない箱があってもよいことにした場合, ボールの入れ方は何通りあるか. (電源開発)

(円順列)

異なる n 個のものの円順列の数は $(n-1)!$

36.27 5 人の子供が手をつないで輪をつくる方法はいく通りか. (さくら銀行)

(組合せ) 異なる n 個のものから r 個取る組合せの数 ${}_nC_r$ は

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\times 3\times 2\times 1}$$

例 36.4

$$(1) {}_6C_3 = \frac{{}_6P_3}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

$$(2) {}_7C_4 = \frac{{}_7P_4}{4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 35$$

問 36.5 次の値を求めよ.

(1) ${}_6C_2$

(2) ${}_7C_3$

(3) ${}_8C_3$

(4) ${}_4C_4$

【答】 (1) 15 (2) 35 (3) 56 (4) 1

 $({}_nC_r \text{ と } {}_nC_{n-r} \text{ の関係})$

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

ただし, ${}_nC_n = 1$ であるから,
 ${}_nC_{n-n} = {}_nC_0 = 1$
 と決める.

$$\text{例 36.6 } {}_9C_7 = {}_9C_2 = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36$$

問 36.7 次の値を求めよ.

(1) ${}_8C_6$

(2) ${}_{12}C_{11}$

(3) ${}_{20}C_{17}$

【答】 (1) 28 (2) 12 (3) 1140

36.28 ${}_5C_4$ を計算せよ.

(KDDI)

36.29 10 人の中から 4 人を選ぶ方法は何通りあるか.

(JR)

36.30 10 冊の異なる書物の中から 3 冊を選ぶ方法は何通りあるか.

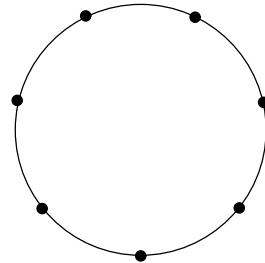
(呉造船)

36.31 8 チームのリーグ戦を行う場合, 全部で何試合になるか.

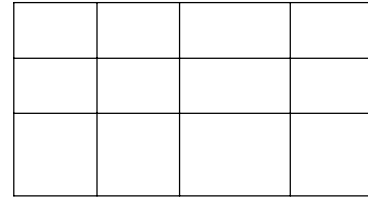
(日本開発銀行)

36.32 右の図のように, 円周上に 7 つの点をとったとき, そのうちの 3 点を頂点とする三角形はいくつできるか.

(コスモ証券)



36.33 次の図の中に長方形はいくつあるか. (野村証券)



36.34 3本の平行線とこれに交わる4本の平行線によって作られる平行四辺形の総数を求めよ. (三菱電機)

36.35 運動会で背番号1, 2, 3, 4, 5をつけた5人の選手が競走するとき, 着順が背番号と一致する選手が2人である場合の数を求めよ. (KDDI)

36.36 9人の子供を次のように分ける方法は何通りあるか. (トヨタ自動車)

- (1) 4人, 3人, 2人のグループに分ける方法
- (2) 3人ずつの3グループに分ける方法

実践問題 16

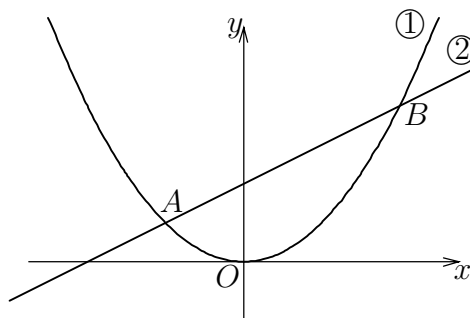
新日鐵

1 次の問いに答えなさい.

- (1) $\frac{1}{5} + \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{6}\right)$ を計算しなさい.
- (2) $4x^2 - 24x + 36$ を因数分解しなさい.
- (3) $x = -1$ が $x^2 + ax + 2 = 0$ の解である時, この方程式のもう 1 つの解を求めなさい.
- (4) $\frac{3\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ の分母を有理化しなさい.

2 下の図のように放物線 $y = ax^2 \cdots \textcircled{1}$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + b \cdots \textcircled{2}$ が 2 点 A, B で交わっている. 点 B の座標が $(4, 4)$ のとき, 次の問いに答えなさい.

- (1) a, b の値を求めよ.
- (2) 線分 AB の中点を通り, ②の直線と垂直に交わる直線の式を求めなさい.
- (3) 放物線 ①上に四角形 $OCBA$ が台形となるような点 C をとる. この点 C の座標を求めなさい.



3 A, B 2 個のサイコロを同時にふり, 出た目の数をそれぞれ a, b とする. 次の問いに答えなさい.

- (1) $a + b$ が 3 の倍数になるのは何通りあるか.
- (2) $2a + b = 10$ となる確率を求めなさい.

【答】

1 (1) $\frac{3}{40}$ (2) $4(x-3)^2$ (3) $x = -2$ (4) $5 - 2\sqrt{3}$

2 (1) $a = \frac{1}{4}, b = 2$ (2) $y = -2x + \frac{9}{2}$ (3) $C(2, 1)$

3 (1) 12 通り (2) $\frac{1}{12}$

第 37 章 確率

例 37.1 2つのさいころを同時に振るとき、2つの目の和が9になる事象 A の確率 $P(A)$ を求めよ.

【解】 2つの目の出方は、全部で
 $6 \times 6 = 36$ 通り
 そのうち、目の和が9になるのは
 $(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)$
 の4通りであるから

$$P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

	●	●●	●●●	●●●●	●●●●●	●●●●●●
●	2	3	4	5	6	7
●●	3	4	5	6	7	8
●●●	4	5	6	7	8	9
●●●●	5	6	7	8	9	10
●●●●●	6	7	8	9	10	11
●●●●●●	7	8	9	10	11	12

37.1 次のそれぞれの場合の確率を求めよ. (KDDI)

- (1) 50本の中に当たりくじが3本入っているくじを1本引いて当たる.
- (2) 2個のサイコロを投げるとき、出た目の和が6となる.

37.2 次の確率を求めなさい. (YKK)

- (1) 1つのサイコロを投げて1または2の目の出る確率
- (2) 2つのサイコロを投げて目の和が8になる確率

37.3 2個のサイコロを同時に投げて違う目の出る確率を求めよ. (YKK)

37.4 2個のサイコロを投げ、一方は1の目が出て他方は1以外の目が出る確率を求めよ. (日本住宅公団)

37.5 2個のさいころを同時に投げるとき、次の確率を求めよ. (三菱電機)

- (1) 出る目の和が4になる確率
- (2) 1と2の目が出る確率
- (3) 出る目の和が偶数となる確率

(4) 出る目の積が偶数となる確率

37.6 大小 2 つのサイコロを同時に投げるとき、以下の問いに答えよ。(新日鉄八幡)

(1) 出る目の和が 6 となる確率を求めよ.

(2) 出る目の数の積が 12 となる確率を求めよ.

(3) 大きいサイコロの出る目が 3 で、しかも 2 つのサイコロの出る目の数の和が 7 以上になる確率を求めよ.

37.7 A, B 2 個のサイコロを同時に振り、出た目の数をそれぞれ a, b とする. 次の間に答えなさい.(新日鉄八幡)

(1) $a + b$ が 3 の倍数になるのは何通りあるか.

(2) $2a + b = 10$ となる確率を求めよ.

例 37.2 3 枚の硬貨 10 円, 50 円, 百円を同時に投げるとき, 2 枚が表で 1 枚が裏となる事象 A の確率 $P(A)$ を求めよ.

【解】 3 枚の硬貨の表, 裏の出方は, 次のように全部で 8 通りある.

3 枚とも表…………… 1 通り

2 枚が表, 1 枚が裏… 3 通り

1 枚が表, 2 枚が裏… 3 通り

3 枚とも裏…………… 1 通り

このうち, 事象 A の個数は 3 個であるから

$$P(A) = \frac{3}{8}$$

	10 円	50 円	百円	
3 枚とも表	表	表	表	
2 枚が表 1 枚が裏	表	表	裏	事 象 A
	表	裏	表	
	裏	表	表	
1 枚が表 2 枚が裏	表	裏	裏	
	裏	表	裏	
3 枚とも裏	裏	裏	表	
	裏	裏	裏	

37.8 コインを 2 枚投げて, 両方とも裏が出る確率を求めよ.(NEC)

37.9 10 円玉を 2 枚投げるとき, 次の確率を求めよ.(マブチモーター)

(1) 2 枚とも裏である確率

(2) 表と裏が 1 枚ずつである確率

37.10 3 枚の硬貨がある. その 3 枚の硬貨を投げて, 2 枚が表になる確率を求めよ.(豊田工機)

例 37.3 0, 1, 2, 3 の数が 1 つずつ書かれている 4 枚のカードが袋に入っている。いま、この中から 2 枚のカードを引き、順に並べるとき、それが 2 けたの偶数となる確率を求めよ。

【解】 4 枚の中から 2 枚を取って並べる場合の数は

$${}_4P_2 = 4 \times 3 = 12 \text{ (通り)}$$

偶数であるためには、一の位は 0 または 2 なので、

- i) 一の位が 0 であるとき、十の位は 1~3 の 3 通り
- ii) 一の位が 2 であるとき、十の位は 1 と 3 の 2 通り

したがって、2 けたの偶数は全部で 5 通りできる。

よって、求める確率は $\frac{5}{12}$

問 37.4 0, 1, 2, 3, 4 の数が 1 つずつ書かれている 5 枚のカードが袋に入っている。いま、この中から 2 枚のカードを引き、順に並べるとき、それが 2 けたの偶数となる確率を求めよ。

【答】 $\frac{1}{2}$

37.11 男子生徒 4 人と女子生徒 1 人が横に一行に並ぶとき、女子生徒が左の端にくる確率を求めよ。
(愛知工業)

例 37.5 3 本の当たりくじを含む 10 本のくじの中から 2 本を引くとき、2 本とも当たりくじである確率を求めよ。

【解】 10 本のくじから 2 本引く場合の数は

$${}_{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45 \text{ (通り)}$$

このうち、当たりくじ 3 本の中から 2 本を引く場合の数は

$${}_3C_2 = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3 \text{ (通り)}$$

よって、求める確率は

$$\frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

37.12 21 本のくじの中に当たりくじが 7 本ある。2 回続けて引き、両方とも当たる確率を求めよ。
(中国電力)

37.13 自動車が10台ある．その中にあなたの好きな色の車が4台入っている．この10台の車の中から2台を取り出したとき，2台ともあなたの好きな色の車である確率を求めよ．ただし，答えは分数で書きなさい． (トヨタ自動車)

37.14 当たりくじ3枚，はずれくじ5枚がある．1回引いて当たりくじを引く確率はいくらか．また，3回引いて3回とも当たりくじを引く確率はいくらか． (岩崎通信機)

37.15 20個の製品の中に2個の不良品が入っている．この中から3個取り出すとき，3個とも良品である確率を求めよ． (マツダ)

37.16 次の問いに答えなさい． (新日鉄八幡)

- (1) 1, 2, 3, 4, 5の5つの数字を1回ずつ使ってできる3桁の整数は何通りあるか．
- (2) サイコロを投げるとき，出た目の数が5以上になる確率を求めよ．
- (3) 3本のくじのうちに2本の当たりくじが入っている．この3本から2本引くとき，2本とも当たりくじである確率を求めよ．

例題 37.6 赤球4個，白球3個，青球2個の計9個入っている袋の中から3個の球を取り出すとき，次の確率を求めよ．

- (1) 3個とも赤球である確率
- (2) 2個が赤球で，1個が白球である確率

【解】 9個の中から3個の球を取り出す場合の数は全部で

$${}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84 \quad (\text{通り})$$

- (1) 赤球4個の中から3個取り出される場合の数は

$${}_4C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = 4 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は $\frac{4}{84} = \frac{1}{21}$

- (2) 赤球4個の中から2個取り出され，白球3個の中から1個取り出される場合の数は

$${}_4C_2 \times {}_3C_1 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 3 = 18 \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率は $\frac{18}{84} = \frac{3}{14}$

37.17 赤玉 3 個と白玉 2 個が入っている箱の中から 2 個の玉を取り出すとき、白玉が 2 個出る確率を求めよ. (三井造船)

37.18 1, 2, 3, 4, 5 の数字を記入した 5 枚のカードがある. この中から同時に 2 枚取り出したとき、2 枚とも奇数である確率を求めよ. (きんでん)

37.19 赤玉 3 個、白玉 1 個、黒玉 2 個が入っている袋の中から任意に 3 個取り出すとき、3 個とも赤玉である確率を求めよ. (日立製作所)

37.20 袋の中に 3 個の白球、4 個の黒球、5 個の赤球が入っている. この中から 2 球取り出して、2 球とも白か 2 球とも黒である確率を求めよ. (大同毛織)

例題 37.7 袋の中に赤・黄・青・白・黒・茶の 6 個の球が入っている. この中から無心に 3 個の球を取り出すとき、次の確率を求めよ. (旭化成)

(1) 赤も黄も入っていない確率

(2) 赤と黄の少なくとも一方が入っている確率

【解】 6 個の中から 3 個の球を取り出す場合の数は全部で

$${}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20 \quad (\text{通り})$$

(1) 赤・黄以外の 4 個の中から 3 個取り出す場合の数は

$${}_4C_3 = 4 \quad (\text{通り})$$

よって、求める確率は $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

(2) (2) の事象は (1) の余事象であるので、

よって、求める確率は $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

37.21 次の確率を求めなさい. (YKK)

(1) 2 個のさいころを同時に投げるとき、目の和が 5 である確率

(2) 2 個のさいころを同時に投げるとき、目の和が 5 にならない確率

37.22 袋の中に、1, 2, 3, $\dots$, 9 の番号札がある. この中から 4 枚取り出すとき、次の確率を求めよ. (光洋精工)

(1) 1 および 6 の番号札が全然入らない.

(2) 1, 6 の少なくとも一方が入っている.

例題 37.8 3本の当たりくじがある10本のくじを、甲、乙の順に1本ずつ引くとき、甲が当たる確率と乙が当たる確率を求めよ。ただし、甲は引いたくじを戻さないものとする。

【解】 乙が当たる確率は、次の2つの事象に分けて考える。

i) 甲が当たり、乙が当たる確率

$$\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

ii) 乙がはずれ、甲が当たる確率

$$\frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

よって、上の2つの事象は互いに背反であるから、乙が当たる確率は

$$\frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \frac{3}{10}$$

また、甲の当たる確率は $\frac{3}{10}$ である。

(答) どちらも $\frac{3}{10}$

37.23 10本のくじのうち当たりくじが4本ある。第1番目に引く甲と第2番目に引く乙とでは、当たる確率に違いがあるか。(三菱重工)

[補足] くじ引きは何番目に引いても当たる確率は等しい。

(独立試行の定理)

事象 A の確率が p である独立試行において、 n 回の試行のうち、ちょうど r 回事象 A が起こる確率は

$${}_nC_rp^r q^{n-r} \quad \text{ただし, } q = 1 - p$$

例題 37.9 1つのさいころを4回振るとき、3の目が2回だけ出る確率を求めよ。

【解】 3の目が出る確率は $p = \frac{1}{6}$ なので、独立試行の定理により $n = 4$, $r = 2$, $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ なので

$${}_4C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^{4-2} = 6 \times \frac{5^2}{6^4} = \frac{25}{216}$$

問 37.10 1つの硬貨を 6 回投げたとき，表が 3 回だけ出る確率を求めよ．

【答】 $\frac{5}{16}$

37.24 10 円銅貨を 3 回続けて投げた場合，1 回でも表が出る確率はいくらか．また，3 回とも裏の出る確率はいくらか．ただし，表裏の出る確率は同一とする．（富士通ビジネスシステム）

実践問題 17

新日鐵

1 以下の問に答えなさい.

(1) $\frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right)$ を計算せよ.

(2) $72 = 2^a \times 3^b$ と表すとき, a と b の値を求めよ.

(3) $\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$ を計算せよ.

(4) $x^2 + 2x - 8$ を因数分解せよ.

(5) $\frac{ax-2}{3} - \frac{x-3a}{5} = 1$ の解が $x = -3$ のとき, a の値を求めよ.

2 放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ と直線 $y = \frac{1}{2}x + 1$ との交点を A, B とする. 以下の問いに答えよ.

(1) 点 A, B の座標を求めよ. (ただし, 点 A の x 座標 $<$ 点 B の x 座標)

(2) 原点 O と点 A, B を結んで作る $\triangle OAB$ の面積を求めよ.

(3) 点 B を頂点とし, 原点 O を通る放物線の方程式を求めよ.

3 大小2つのサイコロを同時に投げるとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 出る目の数の和が6となる確率を求めよ.

(2) 出る目の数の積が12となる確率を求めよ.

(3) 大きいサイコロの出る目が3で, しかも2つのサイコロの出る目の数の和が7以上になる確率を求めよ.

【答】

1 (1) $\frac{7}{30}$ (2) $a = 3, b = 2$ (3) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ (4) $(x-2)(x+4)$ (5) $a = -\frac{8}{3}$

2 (1) $A\left(-1, \frac{1}{2}\right), B(2, 2)$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

3 (1) $\frac{5}{36}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{12}$

第 38 章 数列

38.1 次の数列の規則を推定し、() にあてはまる数を記入せよ.

- (1) 1, 3, 5, 7, (), 11, ... (川崎製鉄)
- (2) 2, 4, (), 8, 10, ... (九州サトー)
- (3) 12, 22, 32, (), 52, ... (日本ニュークリアフュエル)
- (4) 15, 23, 31, 39, 47, (), 63, ... (三池合成)
- (5) 1, -2, -5, (), -11, -14, ... (日本特殊機器)
- (6) $1, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, (), \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots$ (三村化学工業)
- (7) $\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, (), 1\frac{1}{2}, 1\frac{5}{6}, \dots$ (トヨタ車体)
- (8) 1, -2, (), -8, 16, ... (日本特殊機器)
- (9) 4, -8, 16, (), 64, ... (富士化学工業)
- (10) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, (), \frac{1}{32}, (), \dots$ (デンソー)
- (11) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, (), \frac{1}{16}, (), \frac{1}{64}, \dots$ (武田薬品)
- (12) 7, (), 847, 9317, ... (デンソー)
- (13) 1, 2, 4, 7, 11, (), 22, ... (ホンダエスエフ九州)
- (14) 1, 2, 4, 7, (), 16, 22, ... (日本ニュークリアフュエル)
- (15) 1, 2, 4, (), 11, 16, ... (三村化学工業)
- (16) 1, 4, 8, (), 19, 26, ... (トヨタ車体)
- (17) 3, 4, 6, (), 13, 18, ... (トヨタ車体)

- (18) 5, 10, 17, 26, 37, (), ... (三村化学工業)
- (19) 2, 5, 10, 17, (), 37, ... (光洋精工)
- (20) 2, 5, (), 17, 26, 37, ... (富士化学工業)
- (21) 1, 3, 7, 15, (), 63, 127, ... (住友電工)
- (22) 1, 2, 6, 15, (), 56, 92, ... (東芝)
- (23) 1, 4, 9, 16, (), 36, 49, ... (光洋精工)
- (24) 1, 4, 9, (), 25, 36, ... (三菱自動車)
- (25) 4, 9, 16, (), 36, ... (九州サトー)
- (26) 14, 26, 34, 46, 54, (), 74, ... (日本ニュークリアフュエル)
- (27) 1, 2, 5, (), 9, 10, 13, ... (第一家庭電器)
- (28) 2, 4, 3, (), 4, 6, ... (川崎製鉄)
- (29) 13, 7, 10, 8, (), 9, 4, 10, ... (スズキ自動車)
- (30) 1, 2, 3, (), 3, 4, 3, 4, 5, ... (日産自動車)

38.2 次の数列を完成させよ.

(富士通ビジネスシステム)

- (1) 4, (), 14, 22, 32, (), ...
- (2) 100, 85, (), (), 52, 45, 40, ...
- (3) 1, 7, (), 22, 31, (), 52, ...
- (4) 5, 9, 14, (), 27, 35, (), ...

38.3 次の数列の () にあてはまる数を書きなさい.

(関東自動車)

- (1) 1, 3, 7, 15, (), 63, ...
- (2) 2, 5, (), 17, 26, ...
- (3) 1, 3, 4, (), 7, 9, 10, ...
- (4) 1, (), 9, 16, 25, ...
- (5) 1, 2, 4, 7, 11, (), ...

●等差数列の一般項

1 に順次 3 を加えると、数列

$$1, 4, 7, 10, 13, \dots$$

ができ、7 に順次 -4 を加えると、次の数列ができる.

$$7, 3, -1, -5, -9, \dots$$

このように、ある数に次々と一定の数を加えてできる数列を**等差数列**といい、その一定の数を**公差**という.

例 38.1 等差数列 $10, 7, 4, 1, -2, \dots$ では、

$$\text{初項が } 10, \quad \text{公差が } -3$$

である.

初項が a 、公差が d である等差数列は

$$a_1 = a, \quad a_2 = a + d, \quad a_3 = a + 2d, \quad a_4 = a + 3d, \quad \dots$$

と表されるから、一般に次のことが成り立つ.

(等差数列の一般項)

初項が a 、公差が d の等差数列の一般項は

$$a_n = a + (n - 1)d$$

例題 38.2 等差数列 $4, 7, 10, 13, \dots$ の一般項を求めよ. また、第 10 項を求めよ.

【解】 初項が 4、公差が 3 であるから、一般項 a_n は

$$a_n = 4 + (n - 1) \times 3 = 3n + 1$$

上式より、第 10 項は

$$a_{10} = 3 \times 10 + 1 = 31$$

例題 38.3 第 2 項が 1、第 6 項が -7 である等差数列の一般項を求めよ.

【解】 初項を a 、公差を d とすると、

第 2 項は $a_2 = a + d$ 、第 6 項は $a_6 = a + 5d$ なので

$$\begin{cases} a + d = 1 \\ a + 5d = -7 \end{cases}$$

を解いて、 $a = 3$ 、 $d = -2$. したがって一般項 a_n は、

$$a_n = 3 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 5$$

38.4 数列 3, 7, 11, 15, 19, ... の一般項を求めよ. (NTT)

38.5 次の () に適する数を入れ, その数列の一般項を求めよ.

(1) 1, 3, 5, 7, (), (), 13, 15, ... (毎日新聞)

(2) (), 8, 14, 20, (), (), 38, ... (三菱電機)

(3) (), 0, $\frac{1}{2}$, 1, ... (三菱電機)

(4) 1, 9, 17, 25, (), 41, ... (東武鉄道)

38.6 数列 2, 5, 8, 11, 14, ... の第 50 項を求めよ. (日本特殊機器)

38.7 等差数列 37, 34, 31, ... が初めて負になるのは何項目か. (日本航空)

38.8 2, 5, 8, 11, ... の何番目の数がはじめて 3 桁となるか. (小田急)

38.9 第 4 項が 11, 第 7 項が 26 の等差数列について, 次の問いに答えなさい. (トヨタ自動車)

(1) 公差を求めなさい.

(2) 第 30 項を求めなさい.

38.10 3 と 15 の間に 9 個の数をはさみ, 等差数列になるように一般項を求めよ. (日石三菱)

●等差数列の和

等差数列 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33 の和 S を求めてみよう.

$$S = 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30 + 33$$

加える順序を逆にしても和は変わらないから

$$S = 33 + 30 + 27 + 24 + 21 + 18 + 15 + 12$$

2つの式の両辺を対応する項どうしを加えると

$$\begin{array}{r} S = 12 + 15 + 18 + 21 + 24 + 27 + 30 + 33 \\ +) S = 33 + 30 + 27 + 24 + 21 + 18 + 15 + 12 \\ \hline 2S = 45 + 45 + 45 + 45 + 45 + 45 + 45 + 45 \end{array}$$

となるから

$$2S = 45 \times 8 \quad \text{よって} \quad S = \frac{45 \times 8}{2} = 180$$

次に、初項が a 、公差が d の等差数列の第 n 項までの和 S_n を求めてみよう。第 n 項を ℓ とすると

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \cdots + (\ell - 2d) + (\ell - d) + \ell$$

であり、加える順番を逆にすると

$$S_n = \ell + (\ell - d) + (\ell - 2d) + \cdots + (a + 2d) + (a + d) + a$$

である。この2式の両辺の対応する項どうしを加えると

$$2S_n = (a + \ell) \times n$$

よって

$$S_n = \frac{n(a + \ell)}{2}$$

となる。さらに、 $\ell = a + (n - 1)d$ を上式に代入すると

$$S_n = \frac{n\{2a + (n - 1)d\}}{2}$$

(等差数列の和)

初項 a 、末項 ℓ 、項数 n のとき $S_n = \frac{n(a + \ell)}{2}$

初項 a 、公差 d 、項数 n のとき $S_n = \frac{n\{2a + (n - 1)d\}}{2}$

例 38.4 等差数列 10, 12, 14, 16, 18, 20 の和は、
初項が 10、末項が 20、項数が 6 であるから、その和 S_6 は

$$S_6 = \frac{6(10 + 20)}{2} = 90$$

例題 38.5 等差数列 3, 8, 13, 18, $\cdots$, 68 の和を求めよ。

【解】 末項 68 の項数を n とすれば、

$$3 + (n - 1) \times 5 = 68 \quad \text{から} \quad n = 14$$

したがって、求める和を S_{14} とすれば

$$S_{14} = \frac{14 \times (3 + 68)}{2} = 497$$

38.11 次の数列の和を求めよ.

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + 50$ (ダイハツ)

(2) $113 + 114 + 115 + \cdots + 132$ (協和発酵)

(3) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \cdots, -\frac{57}{4}$ (中国電力)

(4) $1 + 2 + 3 + \cdots + 500$ (東芝)

(5) $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ (ローレルバンクマシン)

38.12 第59項が70で、第66項が84である等差数列の初項から第100項までの和を求めよ. (帝国石油)

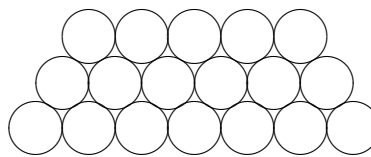
38.13 1から n までの自然数の和が1000を越える最小の n はいくらか. (製鉄化学)

38.14 100と200の間にある7の倍数の和を求めよ. (帝国石油)

38.15 製缶工場において、初日は500箱製造したが、毎日30箱ずつ製造能力を向上させて、1日に1000箱までにしようとした. 製造開始より何日目に目標を達成したか. またその日の終業までに合計何箱製造したか. (日本水産)

38.16 等差数列 $-50, -43, -36, \cdots$ の和が最小となるのは第何項か. また、和が正になるのは第何項か. (日立ソフトウェアエンジニアリング)

38.17 倉庫に積んである鋼棒の数を数えたい. 一番下の段は120本、最上段は96本であることは分かったが、その中間は邪魔物の陰で数えられない. この鋼棒は右図のように積んである. 鋼棒の本数を計算せよ. (浦賀船渠)



38.18 1から100までの整数で2または3で割り切れる数の総和を求めよ. (日本道路公団)

38.19 初項を -26 とする等差数列の第7項が4であるとき、和が正になるのは第何項目か. また各項を絶対値でとったとき、第30項までの和はいくらか. (日立ソフトウェアエンジニアリング)

●等比数列の一般項

1 に順次 3 をかけると、数列

$$1, 3, 9, 27, 81, \dots$$

ができ、2 に順次 $-\frac{1}{2}$ をかけると、次の数列ができる。

$$2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

このように、ある数に次々と一定の数をかけてできる数列を**等比数列**といい、その一定の数を**公比**という。

例 38.6

(1) 初項が 1、公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列は、

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

(2) 等比数列

$$2, -6, 18, -54, \dots$$

の初項は 2、公比は -3

初項が a 、公比が r である等比数列は

$$a_1 = a, \quad a_2 = ar, \quad a_3 = ar^2, \quad a_4 = ar^3, \quad \dots$$

と表される。したがって次のことがいえる。

(等比数列の一般項)

初項が a 、公比が r の等比数列の一般項 a_n は

$$a_n = ar^{n-1}$$

例 38.7 等比数列

$$9, 6, 4, \frac{8}{3}, \dots$$

の初項は 9、公比 $\frac{2}{3}$ である。よって、一般項 a_n は

$$a_n = 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

例題 38.8 第3項が28, 第5項が112の等比数列の初項と公比を求め, その一般項をいえ.

【解】 初項を a , 項比を r とすると

第3項は $a_3 = ar^2$, 第5項は $a_5 = ar^4$ なので

$$\begin{cases} ar^2 = 28 & \cdots \textcircled{1} \\ ar^4 = 112 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

であり, ②を①で割ると

$$r^2 = 4 \quad \text{から} \quad r = \pm 2$$

①より $r = 2$ のとき $a = 7$, $r = -2$ のとき $a = 7$

$$(\text{答}) \begin{cases} \text{初項 } 7, \text{ 公比 } 2, \text{ 一般項 } 7 \times 2^{n-1} \\ \text{初項 } 7, \text{ 公比 } -2, \text{ 一般項 } 7 \times (-2)^{n-1} \end{cases}$$

38.20 次の () にあてはまる数を入れ, 一般項を求めよ.

(1) 3, -6, 12, (), 48, ... (日本光学)

(2) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, (), $\frac{8}{54}$, ... (三菱電機)

(3) 1, -2, 4, (), 16, -32, ... (湯浅電池)

(4) 16, -4, 1, $-\frac{1}{4}$, (), (), ... (日商)

●等比数列の和

初項が a , 公比が r の等比数列の第10項までの和

$$S_{10} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^8 + ar^9 \quad \textcircled{1}$$

を求めてみよう. ①の両辺に r をかけると

$$rS_{10} = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^9 + ar^{10} \quad \textcircled{2}$$

①-②をつくると

$$\begin{array}{r} S_{10} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^8 + ar^9 \\ -) \quad rS_{10} = \quad ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^9 + ar^{10} \\ \hline S_{10} - rS_{10} = a \qquad \qquad \qquad - ar^{10} \\ (1-r)S_{10} = a(1-r^{10}) \end{array}$$

$$\text{よって } r \neq 1 \text{ のとき } S_{10} = \frac{a(1-r^{10})}{1-r}$$

$$\text{特に } r = 1 \text{ のときは, ①から } S_{10} = 10a$$

一般に、初項が a 、公比が r の等比数列の第 n 項までの和

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

は、次のようになる。

(等比数列の和)

初項 a 、公比 r 、項数 n の等比数列の和 S_n は

$$r \neq 1 \text{ のとき } S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

$$r = 1 \text{ のとき } S_n = na$$

例題 38.9 次の等比数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 3, 6, 12, 24, ...

(2) 1, -3, 9, -27, ...

【解】

(1) 初項が 3、公比が 2 であるから

$$\frac{3(2^n - 1)}{2 - 1} = 3(2^n - 1)$$

(2) 初項が 1、公比が -3 であるから

$$\frac{1\{1 - (-3)^n\}}{1 - (-3)} = \frac{1 - (-3)^n}{4}$$

38.21 1 日目には 1 円、2 日目には 2 円、3 日目には 4 円、... というように、毎日その前日の 2 倍ずつ貯金すると、30 日目にはおよそどれほどの金額になるか。ただし、 $2^{10} \doteq 1000$ として計算せよ。(三菱重工)

38.22 初項が 3、公比が 2 のとき、等比数列の和が 1533 だった。第何項までの和が 1533 になるか求めなさい。(日立研究所)

38.23 第 3 項が 2、第 6 項が $-\frac{1}{4}$ である等比数列の第 6 項までの和を求めよ。(扶桑相互銀行)

実践問題 18

デンソー

1 次の計算をしなさい.

$$(1) \{(8+5) \times 2\} - 18 \div 3$$

$$(2) (-2a^2b) \div (-ab)^2 \times ab^2$$

$$(3) \frac{3x-4}{5} - \frac{2x+3}{3}$$

$$(4) \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$

$$(5) \left(\sqrt{2} - \frac{4}{\sqrt{2}} \right)^2$$

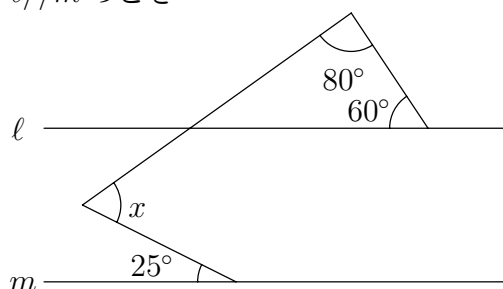
2 次の値を求めなさい.

$$(1) (x-1)^2 - \frac{5}{6}(x-1) + \frac{1}{6} = 0$$

$$(2) \frac{x-5}{3} < \frac{3x-8}{2}$$

$$(3) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 5 \\ 2x - y = -1 \end{cases}$$

(4) $\ell // m$ のとき



【答】

1 (1) 20 (2) $-2ab$ (3) $\frac{-x-27}{15}$ (4) $-\frac{1}{6}$ (5) 2

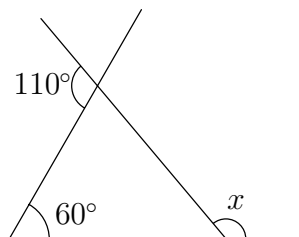
2 (1) $x = \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$ (2) $x > 2$ (3) $x = 4, y = 9$ (4) $x = 65^\circ$

第 39 章 図形

39.1 次の図形で $\angle x$, $\angle y$ を求めよ.

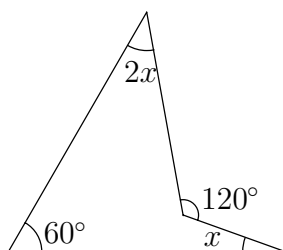
(1)

(NEC)



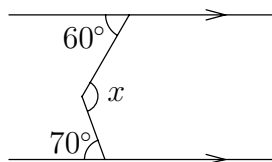
(2)

(日産自動車)



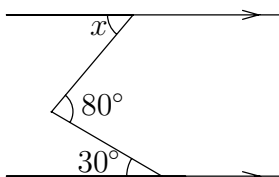
(3)

(セントラル自動車)



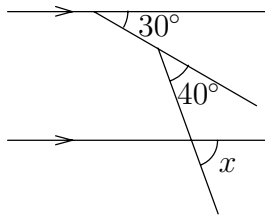
(4)

(トヨタ自動車)



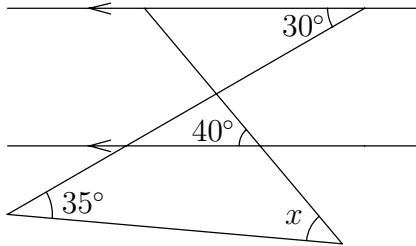
(5)

(日産自動車)



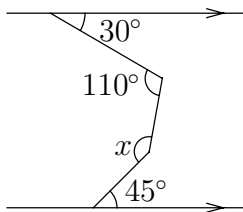
(6)

(トヨタ車体)



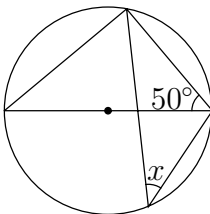
(7)

(NKK)



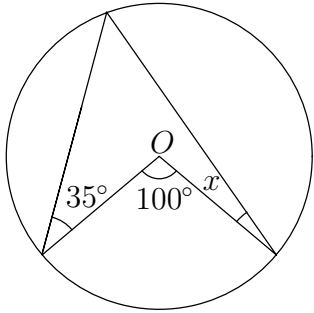
(8)

(住友金属鉱山)



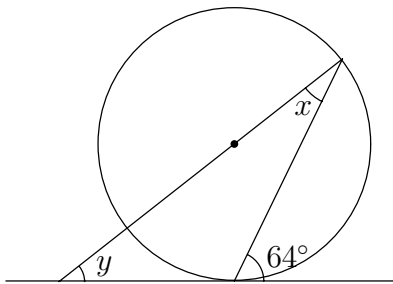
(9)

(NKK)



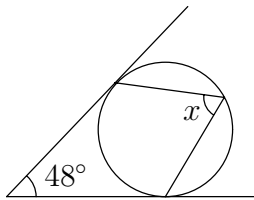
(10)

(いすゞ自動車)

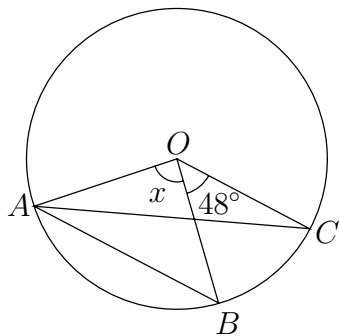


39.2 次の図で $\angle x$ の大きさを求めよ.

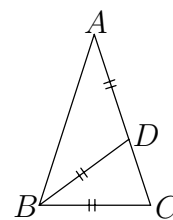
(住友電工)



39.3 次の図で $AB \parallel OC$ のとき, $\angle x$ の大きさを求めよ. (日立エンジニアリング)



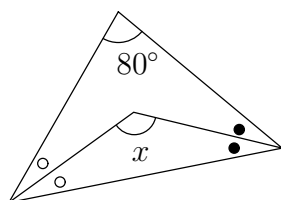
39.4 二等辺三角形 ABC で辺 AC の間に点 D をとり, $AD = BD = BC$ となるとき, $\angle ADB$ は何度か.
(京セラ)



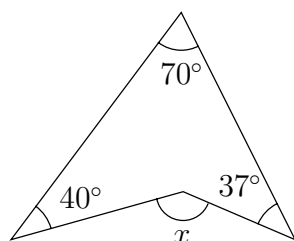
39.5 六角形の内角の和はいくらか.
(リコー)

39.6 次の図で $\angle x$ の値を求めよ.
(日立エレベーターサービス)

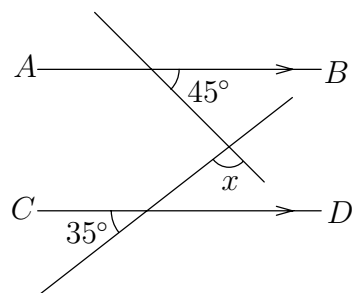
(1)



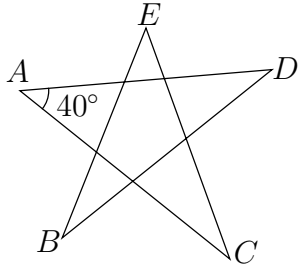
(2)



(3)



39.7 次の図で、 $\angle B + \angle C + \angle D + \angle E$ の値を求めよ. (労働金庫)



39.8 次の A 群の長さ・面積・体積を表す公式を B 群から選び記号で答えよ. (光洋精工)

(A 群)

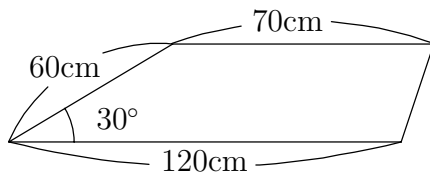
- | | | | |
|-------------|------------|------------|----------|
| (1) 三角形の面積 | (2) 円の周 | (3) 直方体の体積 | (4) 球の体積 |
| (5) 円錐の体積 | (6) 台形の面積 | (7) 球の表面積 | (8) 円の面積 |
| (9) 直方体の表面積 | (10) 円柱の体積 | | |

(B 群)

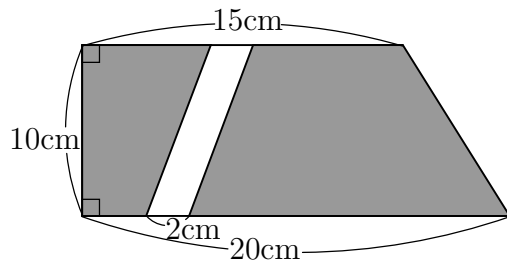
- | | | | |
|----------------|---------------------------|-------------------------|--------------------|
| A. $2\pi r$ | B. $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ | C. $4\pi r^2$ | D. abc |
| E. πr^2 | F. $\frac{1}{2}(a+b)h$ | G. $\frac{4}{3}\pi r^3$ | H. $\frac{1}{2}ah$ |
| I. $\pi r^2 h$ | J. $2(ab+bc+ca)$ | | |

39.9 次の図形の面積 (影) を求めよ.

(1) (岡山県貨物)

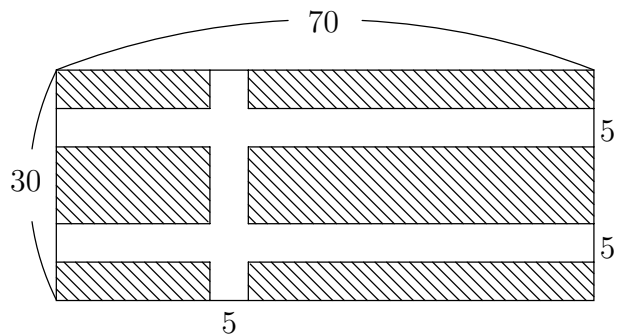


(2) (日本建工)



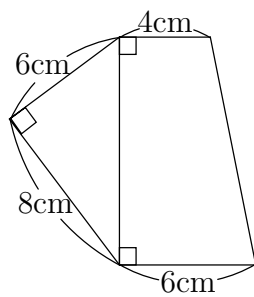
(3)

(ベスト設計)



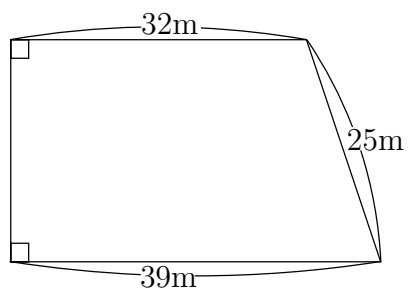
(4)

(日新舗道建設)



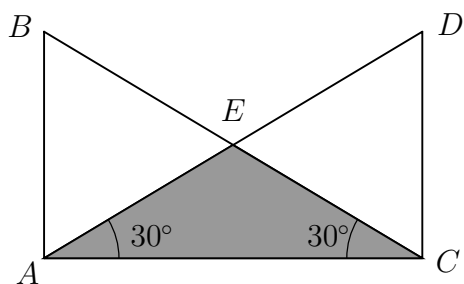
(5)

(愛知製鋼)



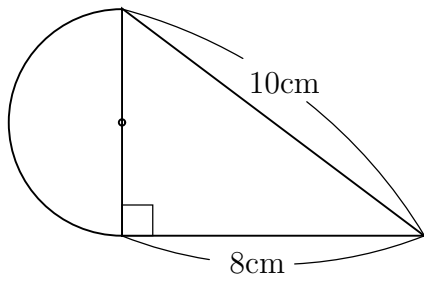
(6) $AB = 10\text{m}$, $\angle BAC = \angle DCA = 90^\circ$

(大木建設)



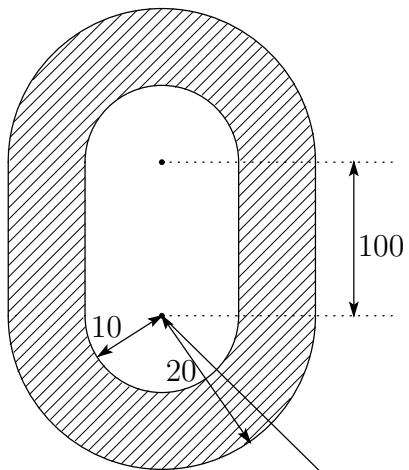
(7)

(小松インターナショナル)



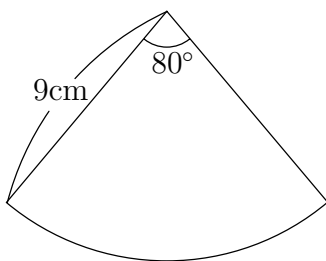
(8)

(日産自動車)



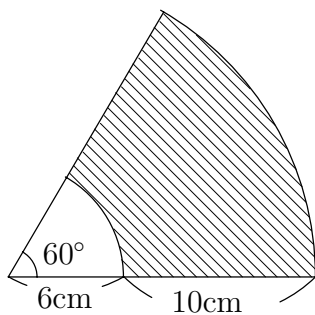
(9)

(日産自動車)



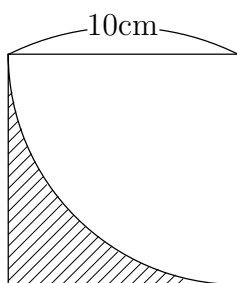
(10)

(山陽設計)



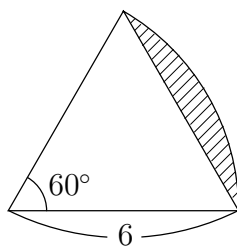
(11)

(日立製作所)



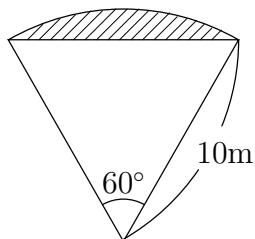
(12)

(東芝)



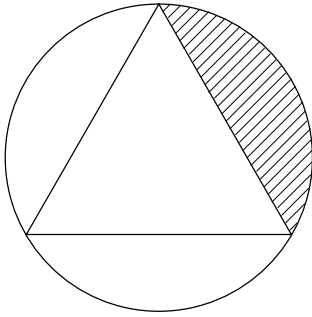
(13)

(出雲測量設計事務所)

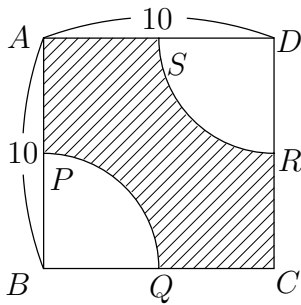


(14) 半径 10cm の円と正三角形

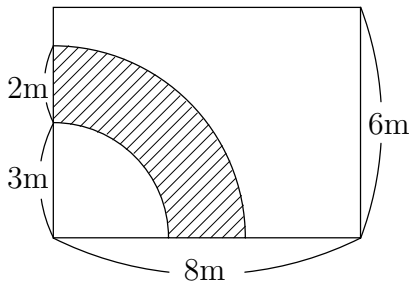
(NEC)



(15) 次の図で、影の部分の面積を求めよ。ただし、図で P, Q, R, S はそれぞれ正方形 $ABCD$ の中点である。 (オムロン)

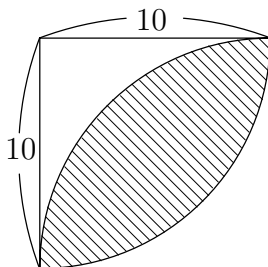


(16) 次の図のような長方形の土地に影の部分の道路を作った。道路を除いた土地の面積を求めよ。ただし、円周率は π として計算せよ。 (トヨタ自動車)



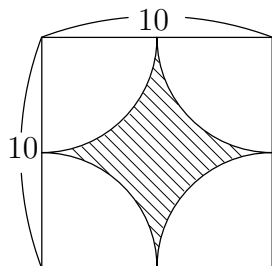
(17)

(日立造船)



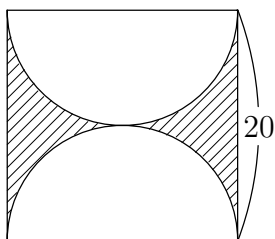
(18)

(三陽商会)



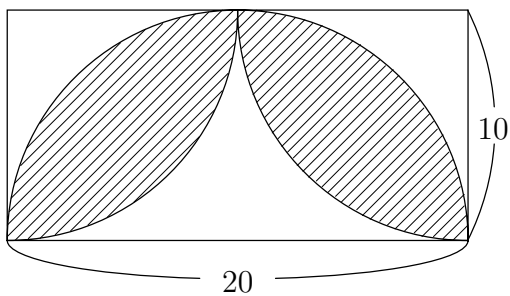
(19)

(日産自動車)



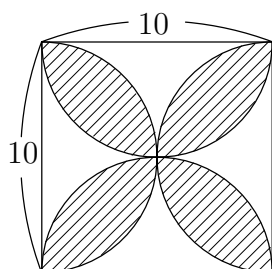
(20)

(Y K K)



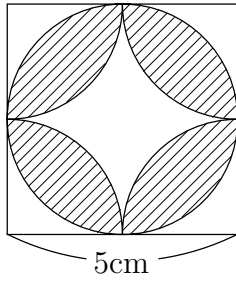
(21)

(神戸製鋼)



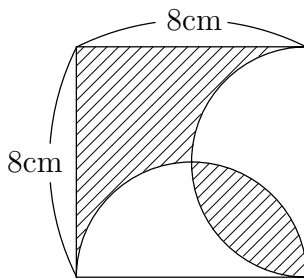
(22)

(壺山建設)



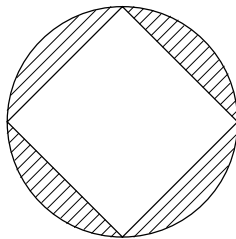
(23)

(日本建工)



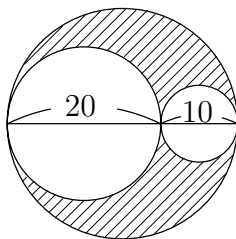
(24) 円の直径は 10cm, $\pi = 3.14$ とする.

(今西組)



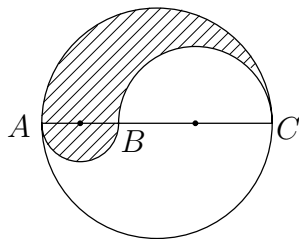
(25)

(日立化成)



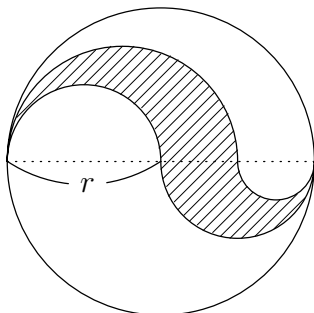
(26) $AB = 4\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$

(日本飛行機)



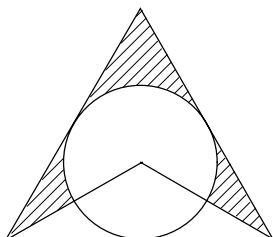
(27)

(平田機工)



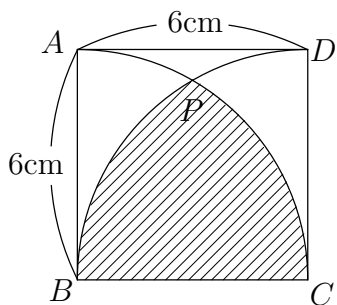
(28) 正三角形の内接円の半径は $\sqrt{3}$

(水資源開発事業団)

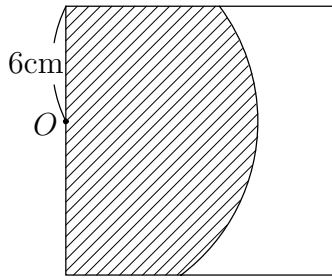


(29) 次の図で, $ABCD$ は正方形, APC , BPD はそれぞれ B , C を中心とする 4 円分の弧である. 斜線部分の面積を求めよ.

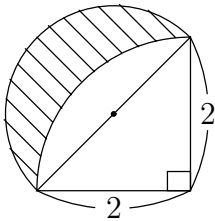
(レナウン)



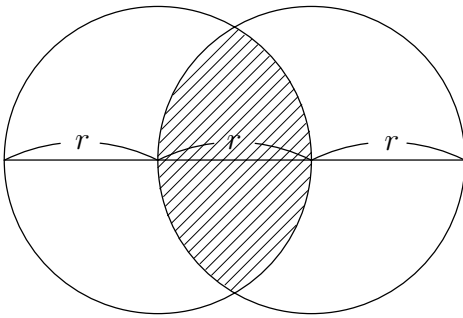
- (30) 次の図のように、点 O を中心とする半径 10cm の円と一辺が 14cm の正方形が交わった部分の面積を求めよ。
(リコーテクノネット)



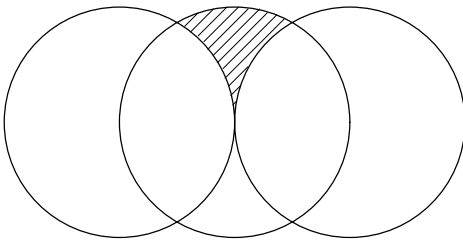
- (31) (川崎重工)



- (32) (東芝)

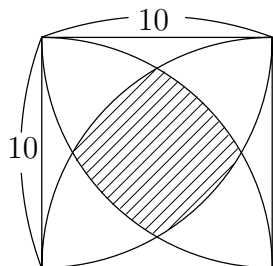


- (33) 半径 3cm の円 (三菱重工)



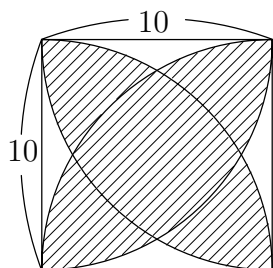
(34) ☆

(インフォメーションディベロップメント)



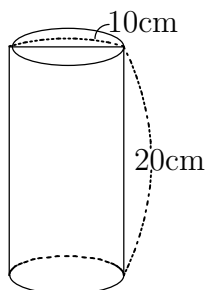
(35) ☆

(三菱電機)



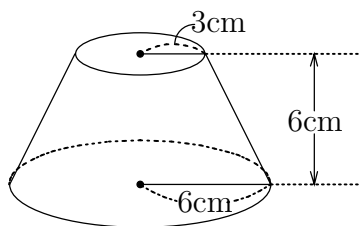
39.10 次の図の円柱の体積を求めよ.

(トヨタ自動車)

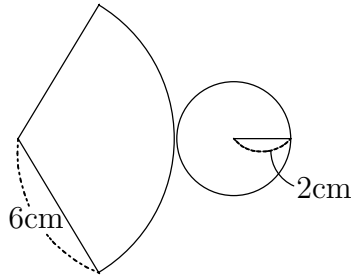


39.11 次の図の直円錐台の体積を求めよ.

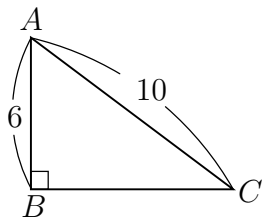
(ダイエー)



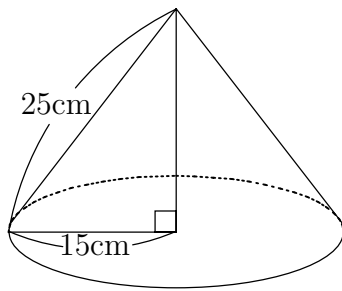
39.12 次の展開図で示される円錐の表面積と体積を求めよ. (中国銀行)



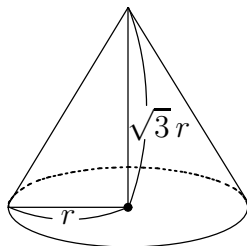
39.13 AB を軸として回転してできる立体の体積と表面積を求めよ. (富士通)



39.14 次の円錐の体積を求めよ. (本田技研)

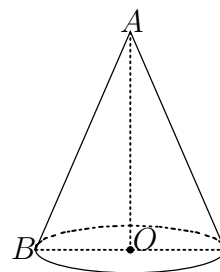


39.15 次の円錐の表面積を求めよ. (富士重工)

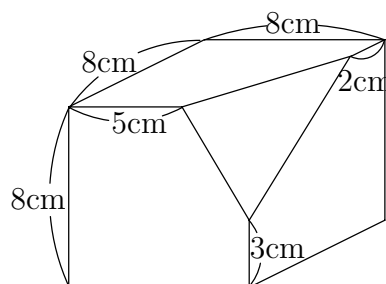


39.16 図のような $AB = 5\text{cm}$, $BO = 2\text{cm}$ の円錐がある．次の問に答えよ．
(住友金属鉱山)

- (1) 高さ AO を求めよ．
- (2) この円錐の体積を求めよ．
- (3) この円錐の表面積を求めよ．

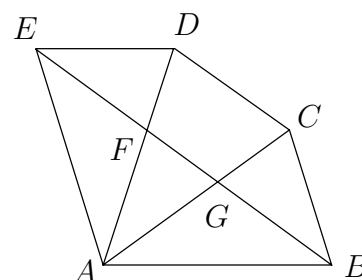


39.17 下の図は立方体のかどを平面で切り取ったものである．この立体の体積を求めよ．
(住友金属鉱山)



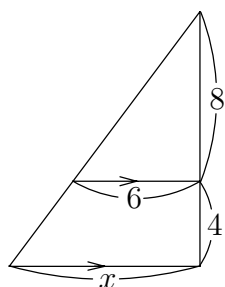
39.18 右の図のように，3つの合同な二等辺三角形を並べ，点 E と点 B を結び， AD , AC との交点をそれぞれ F , G とする．このとき $ED \parallel AB$ として，次の問に答えよ．
(KDD I)

- (1) $\angle CAB = x$ とおき， $\angle ABC$ を x を用いて表せ．
- (2) x を求めよ．
- (3) $\angle EBA$ を求めよ．
- (4) $\triangle BCG$ と合同な三角形を示せ．



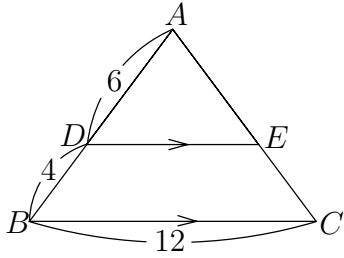
39.19 次の図で x の値を求めよ．

(日産自動車)



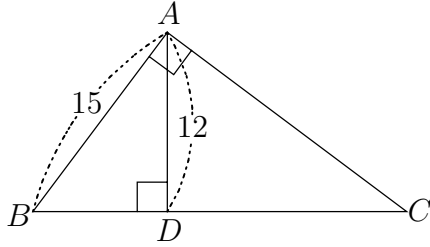
39.20 次の図において、 DE の長さを求めよ.

(いすゞ自動車)



39.21 次の直角三角形で、 BD と AC の長さを求めよ.

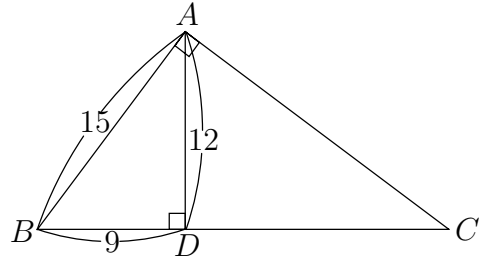
(山陽商会)



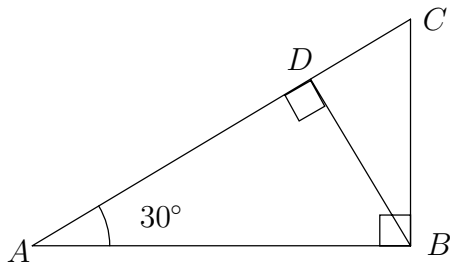
39.22 次の $\triangle ABC$ について、次の問いに答えよ.
(NEC)

(1) AC の長さを求めよ.

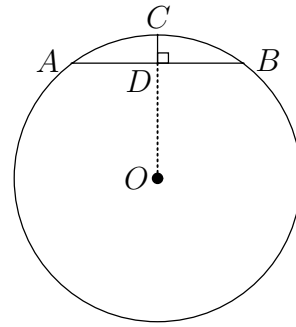
(2) DC の長さを求めよ.



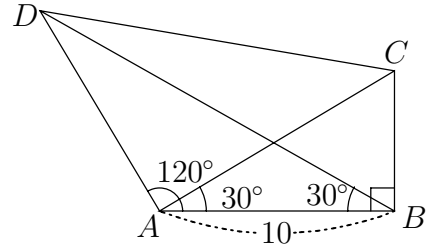
39.23 $AC = 10\text{cm}$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 90^\circ$ があり、 B から AC におろした垂線の足を D とする. このとき、 AB , BC , BD の長さを求めよ.
(東洋社)



39.24 次の図で $AB = 30\text{cm}$, $CD = 5\text{cm}$, $\angle CDE = 90^\circ$ のとき, 円の半径を求めよ. (西日本プラント工業)

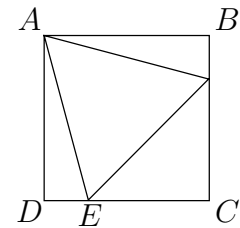


39.25 右の図の四角形 $ABCD$ で, $AB = 10$, $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle CAB = \angle DBA = 30^\circ$, $\angle BAD = 120^\circ$ である. このとき, 次の問いに答えよ. (KDD I)

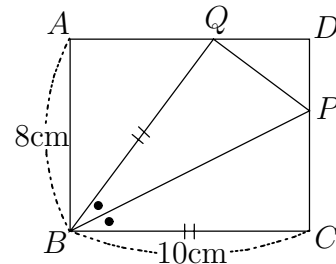


- (1) AC と BC の長さを求めよ.
- (2) $\triangle DAB$ はどんな三角形か.
- (3) DB の長さを求めよ.
- (4) $\triangle DAC$ はどんな三角形か.
- (5) DC の長さを求めよ.

39.26 一辺の長さが 5cm の正方形に図のように内接する正三角形がある. このとき DE の長さを求めよ. (東亜港湾工業)

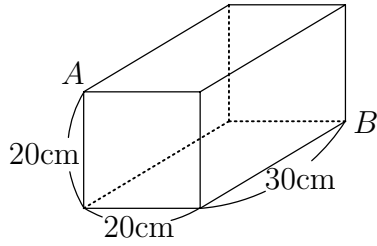


39.27 右の図の長方形 $ABCD$ で, $BC = BQ$ であり, BP は $\angle CBQ$ の二等分線である. このとき, 次の問いに答えよ. (KDD I)

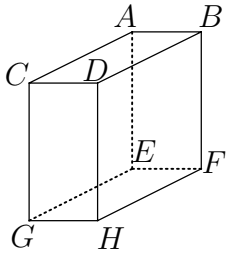


- (1) AQ の長さを求めよ.
- (2) $\triangle ABQ$ と相似な三角形を示せ.
- (3) PQ の長さを求めよ.
- (4) BP の長さを求めよ.

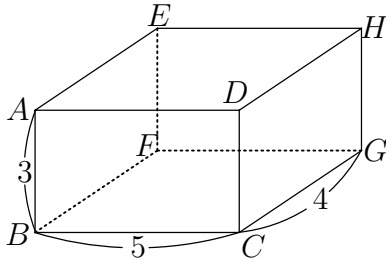
39.28 直方体の面状を点 A から点 B を結ぶときの最短距離を求めよ. (京セラ)



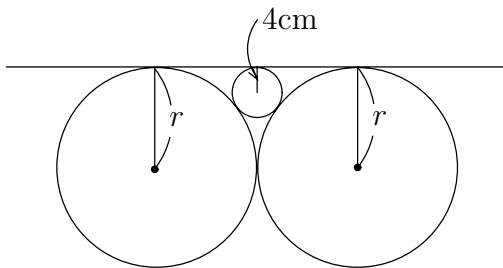
39.29 図の直方体について, $AB = 2\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$, $AE = 4\text{cm}$ のとき, AD と AH の長さを求めよ. (ニッシン工業)



39.30 次の図において AG の長さを求めなさい. (ハザマ)



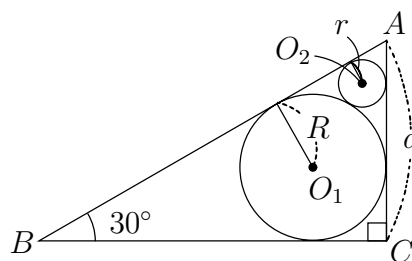
39.31 次の円の半径 r を求めなさい. (J R)



39.32 右の図のように円 O_1 は $\triangle ABC$ に内接し、円 O_2 は AB , AC , 円 O_1 に内接している. このとき次の問いに答えよ. (エルモ)

(1) O_1 の半径 R を求めよ.

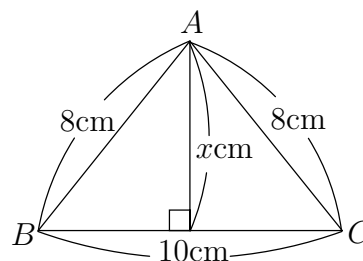
(2) O_2 の半径 r を求めよ.



39.33 下の $\triangle ABC$ について, 次の問いに答えよ. (日産自動車)

(1) x を求めよ.

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めよ.

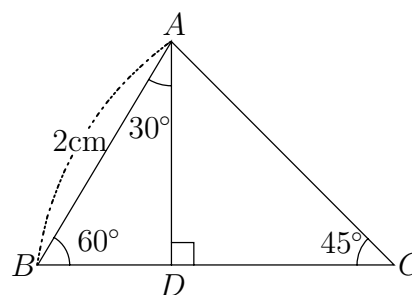


39.34 右の図で, $AB = 2\text{cm}$ とするとき, 次の問いに答えよ. (富士通ビジネスシステム)

(1) AD の長さはいくらか.

(2) AC の長さはいくらか.

(3) $\triangle ABC$ の面積はいくらか.



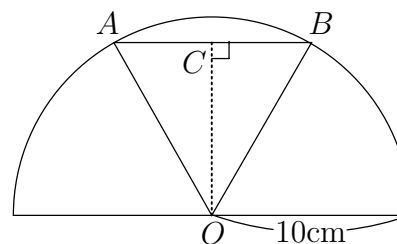
39.35 半径 10cm の半円に内接する $\triangle AOB$ で $\angle AOB = 60^\circ$ とするとき, 次の問いに答えよ. (星崎電機)

(1) AB の長さを求めよ.

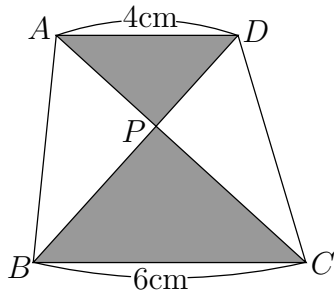
(2) OC の長さを求めよ.

(3) $\triangle AOB$ の面積を求めよ.

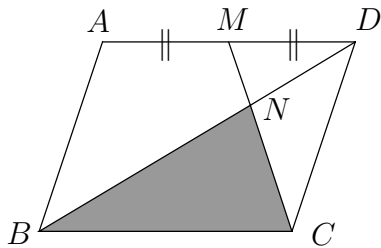
(4) 弧 AB の長さを求めよ.



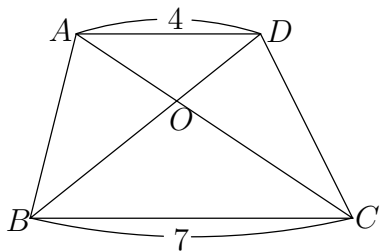
39.36 AD と BC が平行な台形がある．このとき， $\triangle APD$ の面積が 4cm^2 のとき， $\triangle BPC$ の面積を求めよ．
(ハザマ)



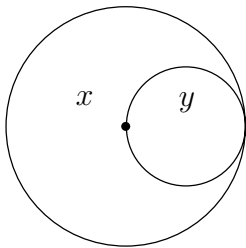
39.37 次の図で， $\triangle BCN$ の面積は平行四辺形 $ABCD$ の面積の何分の 1 か．(住友化学工業)



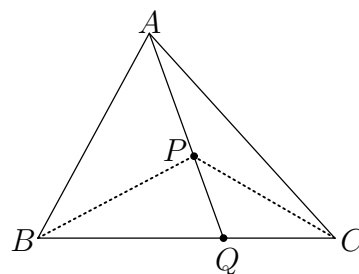
39.38 $AD \parallel BC$ のとき， $\triangle AOD$ ， $\triangle BOC$ の面積比を求めよ．(アドバンストディスプレイ)



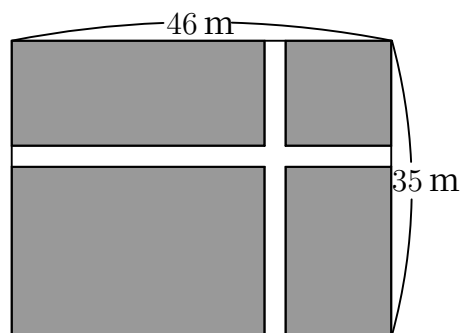
39.39 下の図において， x と y の面積比を求めなさい．
(九州大日本印刷)



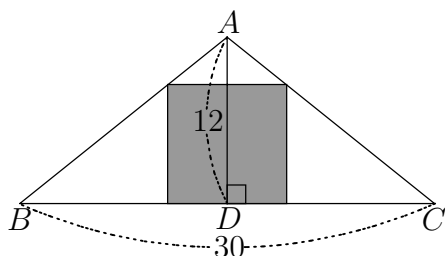
39.40 $\triangle ABC$ において、辺 BC を $5:3$ に内分する点を Q とし、さらに線分 AQ を $3:2$ に内分する点を P とします. $\triangle PBC$, $\triangle PCA$, $\triangle PAB$ の面積比を求めなさい.
(NKK)



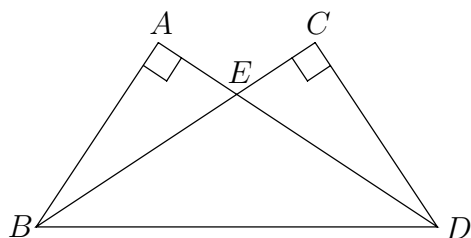
39.41 2辺がそれぞれ 35m, 46m の長方形の畑がある. この畑を図のように縦と横が同じ幅の道路を作ったところ面積が 1530m^2 になった. このとき、道幅を求めよ.
(三菱電機)



39.42 次の図で、二等辺三角形 ABC に内接している正方形の面積を求めよ. (住友電工)

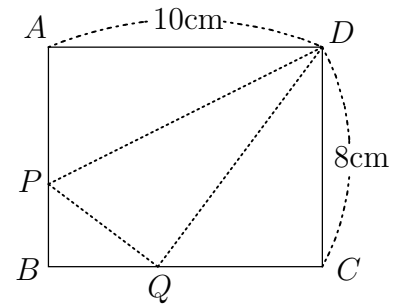


39.43 $AB = CD = 10\text{cm}$, $BC = AD = 15\text{cm}$ のとき, $\triangle BDE$ の面積を求めよ.
(東芝)

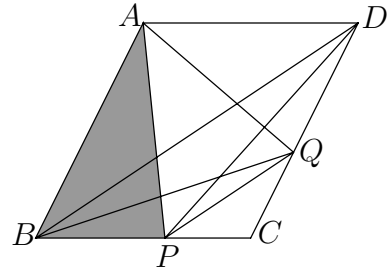


39.44 右の図のように、長方形を折り返し、 A が BC 上にくるようにし、その点を Q とする。このとき、次の問いに答えよ。(中国電力)

- (1) QC の長さを求めよ。
- (2) $\triangle DPQ$ の面積を求めよ。

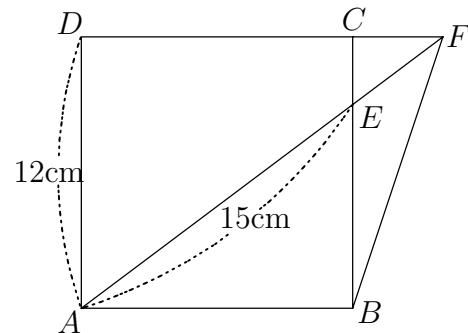


39.45 右の図のように平行四辺形 $ABCD$ の辺 BC 上に、中点でない点 P をとる。 P を通り対角線 BD に平行な直線を引き、 CD との交点を Q とし、 P と A , P と D , Q と A , Q と B をそれぞれ結ぶ。このとき、 $\triangle ABP$ と面積が等しい三角形をすべてあげよ。(KDDI)



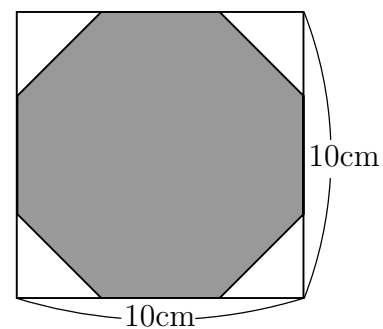
39.46 右の図の四角形 $ABCD$ は 1 辺の長さが 12cm の正方形であり、 F は 2 直線 DC , AE の交点である。このとき、次の問いに答えよ。(宝酒造)

- (1) $\triangle AEB$ の面積を求めよ。
- (2) $\triangle CEF$ の面積を求めよ。



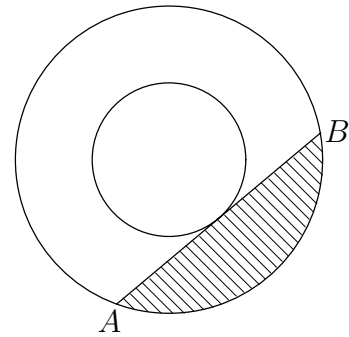
39.47 一辺の長さが 10cm である正方形に図のように内接する正八角形があるとき、次の問いに答えよ。(ダイキン工業)

- (1) 正八角形の一辺の長さを求めよ。
- (2) 正八角形の面積を求めよ。



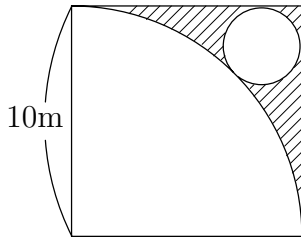
39.48 図の半径 4cm と 8cm の 2 つの同心円について、次の問いに答えなさい。(日立ソフトウェアエンジニアリング)

- (1) 弦 AB の長さ
- (2) 斜線部の面積

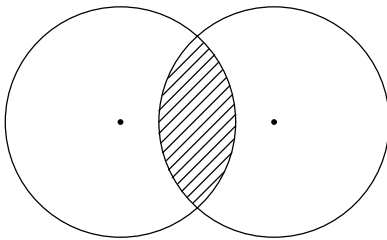


(日本鉄塔工業)

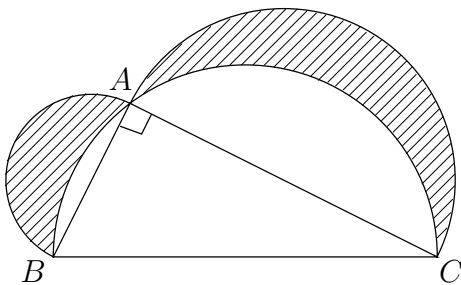
39.49 次の斜線部の面積を求めよ。



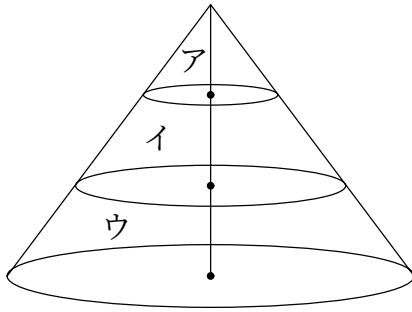
39.50 次の図で半径 $\sqrt{2}$ の 2 つの円によって囲まれた斜線部の面積を求めよ。ただし、2 つの円の中心間の距離を 2 とする。(西日本新聞)



39.51 次の図のように、直角三角形 ABC の辺 BC を直径とする半円の弧 BAC と AB , AC を直径とする半円の弧で囲まれた斜線部の面積を求めよ。ただし、 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ とする。(ムトウ)

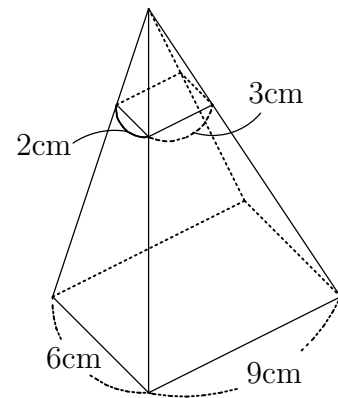


39.52 下の図は円錐の高さを三等分し、底面に平行な平面で切り取ったところを表している。このとき、切断されてできる 3 つの立体ア・イ・ウの部分の体積比を求めよ。
(愛知製鋼)

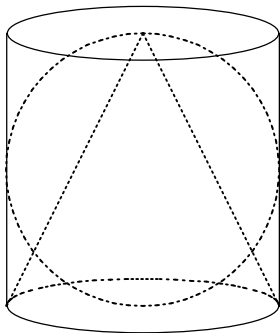


39.53 右の図のような四角すいがある。この高さは 15cm で、底面は縦 6cm、横 9cm の長方形である。このとき、次の問いに答えよ。
(ワシノ機械)

- (1) この四角すいを底面に平行に切ったときの切り口は縦 2cm、横 3cm の長方形である。角すい台の高さは何 cm になるか。
- (2) 小さい角すいともとの角すいとの体積比を求めよ。



39.54 次の図のような底面の直径 a 、高さ a の直円柱の体積を V_1 とする。この直円柱にちょうど入る球および直円すいの体積をそれぞれ V_2 、 V_3 とするとき、 $V_1 : V_2 : V_3$ の比を求めよ。
(大阪ガス)



実践問題 19

デンソー

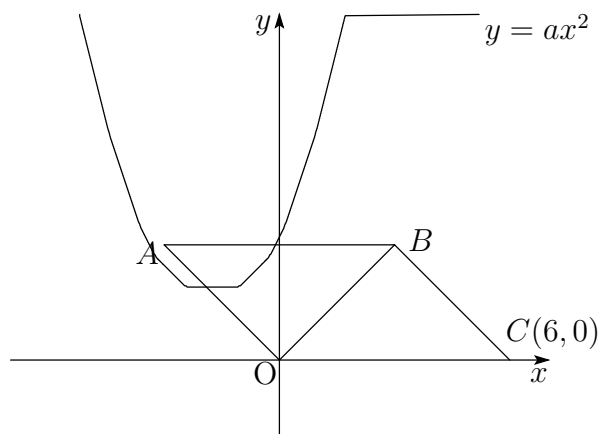
1 数 $\frac{3}{2}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ を大きい順に答えよ.

2 1本の定価が120円の鉛筆がある. この鉛筆をAの店では定価の10%引きで売っている. Bの店では1ダースまでは定価どおりで, 1ダースを超えると, 超えた1本につき定価の25%引きで売っている. 鉛筆を何本以上買うと, Bの店の方がAの店で買うより安くなるか.

3 右図のように関数 $y = ax^2$ ($a > 0$) のグラフ上に, 2点A, Bがあり, 線分ABはx軸に平行である. また, x軸上に点C(6, 0)があり, $OB = BC$ である. このとき次の問いに答えなさい.

(1) 点Bのy座標をaを使って表しなさい.

(2) $\triangle AOB$ がy軸を軸として1回転してできる立体の体積をVとし, $\triangle BOC$ がx軸を軸として1回転してできる立体の体積をV'とする. $V = V'$ となるときaの値を求めなさい.



【答】

1 $\frac{3}{\sqrt{2}} > \frac{3}{2} > \sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

2 21本以上

3 (1) $9a$ (2) $a = \frac{1}{6}$

解答

1.1 (p.1)

- (1) 3097
- (2) 1813
- (3) 6076
- (4) 170
- (5) 214
- (6) 14
- (7) 1001
- (8) 9
- (9) 18
- (10) 6
- (11) 525
- (12) 360

1.2 (p.2)

- (1) 0.521
- (2) 1
- (3) 1
- (4) 0.61
- (5) 1
- (6) 1.3
- (7) 67.2
- (8) 2.285

(9) 46.24

(10) 3.96

1.3 (p.2)

- (1) 21
- (2) 9
- (3) 8
- (4) 4
- (5) -1
- (6) 17
- (7) 1
- (8) -1
- (9) 15
- (10) -13.82
- (11) -0.03
- (12) 4
- (13) 5

1.4 (p.3)

- (1) 250
- (2) 72
- (3) 174
- (4) 62
- (5) 27
- (6) 7
- (7) -6

(8) -10

(9) 17

(10) 2

(11) -32

(12) 1

(13) -28

(14) -4

(15) -72

(16) -30

(17) 9

(18) -60

(19) -30

(20) 153

(21) -9

(22) 40

1.5 (p.4)

(1) 0

(2) 2683.2 m

(3) 987 kg

(4) $24\text{ 時間 }43\text{ 分 }39\text{ 秒}$

(5) $3\text{ 時間 }32\text{ 分 }25\text{ 秒}$

(6) 11254

1.6 (p.5)

(1) $-, \div$

(2) $\times, \div$

(3) $\div, \times$

(4) $-, +$

(5) $-, \div$

1.7 (p.5)

(1) $6543 + 2768 = 9313$

(2) $387 \times 3 = 1161$

1.8 (p.5)

(1) $\bigcirc$

(2) $\times$

(3) $\bigcirc$

(4) $\times$

(5) $\bigcirc$

(6) $\bigcirc$

(7) $\times$

(8) $\bigcirc$

1.9 (p.7)

(1) $\frac{13}{12}$

(2) $\frac{5}{12}$

(3) $\frac{7}{30}$

(4) $\frac{29}{8}$

(5) $\frac{2}{15}$

(6) $\frac{1}{5}$

(7) $\frac{2}{3}$	(27) $-\frac{5}{2}$
(8) $\frac{3}{10}$	(28) 3
(9) 3	(29) $\frac{29}{45}$
(10) $\frac{13}{5}$	(30) $\frac{5}{7}$
(11) $\frac{29}{12}$	(31) $-\frac{4}{21}$
(12) $-\frac{4}{5}$	(32) $-\frac{1}{6}$
(13) 0	(33) -4
(14) $\frac{65}{12}$	(34) -36
(15) 1	(35) -30
(16) $\frac{1}{20}$	(36) 72
(17) $\frac{17}{4}$	(37) 3
(18) $\frac{60}{13}$	1.10 (p.10)
(19) $-\frac{13}{30}$	(1) -1
(20) $\frac{1}{2}$	(2) $\frac{17}{76}$
(21) 3	(3) $\frac{6}{85}$
(22) $\frac{5}{6}$	(4) 2
(23) $-\frac{1}{6}$	(5) $\frac{4}{3}$
(24) $\frac{1}{2}$	(6) $\frac{50}{49}$
(25) $-\frac{9}{4}$	(7) $\frac{1}{10}$
(26) 1	(8) 4
	(9) $\frac{2}{7}$

2.1 (p.13)

- (1) 8
- (2) 400
- (3) 116,000
- (4) 384
- (5) 173.6
- (6) 890
- (7) 320
- (8) 11, 31, 12
- (9) 550
- (10) 6.25
- (11) 160

2.2 (p.15)

- (1) 1500
- (2) 2,200
- (3) 18
- (4) 1,800
- (5) 2
- (6) 2
- (7) 1.5

2.3 (p.15)

小 数	分 数	百分率	歩 合
0.45	$\frac{9}{20}$	45 %	4 割 5 分
1.25	$\frac{5}{4}$	125 %	12 割 5 分
0.65	$\frac{13}{20}$	65 %	6 割 5 分
0.001	$\frac{1}{1000}$	0.1 %	1 厘

2.4 (p.15)

- (1) 2100cc
- (2) 900 円
- (3) 2.5 %
- (4) 10.4 %
- (5) 1200 人
- (6) 60 %
- (7) 3,680 人
- (8) 5 倍

2.5 (p.16)

- (1) 1,920 円
- (2) 600 円, 5 割増
- (3) 10,000 円
- (4) 1,500 円
- (5) 400 円
- (6) 3,000 円
- (7) 960 円
- (8) 1,300 円
- (9) 1,950 円

2.6 (p.18)

- (1) 9 % の損失
- (2) 4 割増

2.7 (p.18)

- (1) 9 % 引

- (2) 500 円
- (3) 210 円
- (4) 500 円
- (5) 甲 3,000 円, 乙 7,000 円

2.8 (p.19)

- (1) 420 円
- (2) 36,000 円
- (3) 813,000 円
- (4) 1 割 1 分 6 厘 8 毛

3.1 (p.24)

- (1) $\frac{5}{6}ab$
- (2) $4x^2 - 2x - 2$
- (3) $6x^2 - 2x - 1$
- (4) $14y - 6$
- (5) $3ax + by - cz$
- (6) $2a^3 + a - 11$
- (7) $-3b^2 - b + 3$
- (8) $\frac{5a - 2b}{2}$
- (9) $\frac{3a + 4b}{6}$
- (10) $\frac{19}{6}a$
- (11) $6k - 2$
- (12) $-14x - 1$

3.2 (p.25)

- (1) $x^3 + 2x^2 - 3x - 3$
- (2) $5x^2 + 6x - 5$

3.3 (p.26)

- (1) x^9
- (2) $-\frac{2x^3}{y}$
- (3) $2a^2b^4$
- (4) $\frac{1}{2}x^3y^7z$
- (5) $\frac{12}{5}xz$
- (6) $-12a^6b^5$
- (7) $-2a^5b^7$
- (8) a^8b^7
- (9) $72x^7y^2$
- (10) $-x^{15}y^6$
- (11) $-a^{12}$
- (12) a^6
- (13) $9x^5y^7$
- (14) $4x^2y$
- (15) $-\frac{a}{2x^3y^2}$
- (16) $-\frac{1}{5}x$
- (17) $3a^4b^5$
- (18) a^8
- (19) $-2xy^4z$
- (20) $\frac{2b^2}{5a}$

3.4 (p.28)

(1) $x^2 - 7x + 1$

(2) $-a^2b + a^2bc$

(3) $3x - 5$

(4) $-832x^2 + 372x + 51$

(5) $-2x^2 + x$

(6) $-5x + 2y$

(7) $a + b + c$

(8) $2x^2 - 4xy + 6y^2$

(9) $-1 + ab - \frac{5}{3}c$

3.5 (p.29)

(1) 商 $-3x$, 余り 0

(2) 商 $2x^2 - x + 3$, 余り -2

(3) 商 $x^2 + 6x + 16$, 余り 47

(4) 商 $3x^2 - x + 1$, 余り 0

(5) 商 $p^2 + 3p + 2$, 余り 0

(6) 商 $x - 2$, 余り $6x + 1$

(7) 商 $2x - 3$, 余り -5

(8) 商 $a^2 - 3a + 1$, 余り 0

(9) 商 $2x^2 + xy + 4y^2$, 余り 0

4.1 (p.32)

(1) $6x^2 + 23x + 20$

(2) $6x^2 - 12x - 48$

(3) $15x^2 + x - 6$

(4) $14x^2 - 19x - 40$

(5) $6x^2 - 11xy - 10y^2$

(6) $8a^2 - 2ab - 3b^2$

(7) x

(8) $x^4 - 1$

(9) $x^3 - 7x - 6$

(10) $12x^2 + 12$

4.2 (p.34)

(1) $a^2 - b^2$

(2) $4p^2 - 9$

(3) $4a^2 - 4ab + b^2$

(4) $9x^2 - 24x + 16$

(5) $4x^2 - 12xy + 9y^2$

(6) $\frac{4}{9}a^2 - 2ab + \frac{9}{4}b^2$

(7) $x^4 - 6x^2 + 9$

(8) $9x^4 + 24x^2 + 16$

(9) $2a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ca$

(10) $4ab$

(11) 9

(12) $2a^2 + ab + 3b^2$

(13) $10x + 21$

(14) $9xy$

(15) $2ab - 2b^2$

(16) $-2ab$

$$(17) \ x^8 - 1$$

4.3 (p.35)

$$(1) \ x^2 - 7x + 10$$

$$(2) \ x^2 - 8x - 9$$

$$(3) \ a^2 + 2a - 15$$

$$(4) \ m^2 - 15m + 56$$

$$(5) \ 6x^2 - 9x - 15$$

$$(6) \ 6x^2 - x - 15$$

$$(7) \ 6x^2 - 24$$

$$(8) \ 3x^2 - 11x - 4$$

$$(9) \ 2x^2 + x - 6$$

$$(10) \ 12x^2 + 11x + 2$$

4.4 (p.36)

$$(1) \ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(2) \ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(3) \ x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

$$(4) \ 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

$$(5) \ x^3 - 3x^2 + 3x - y^3 + 3y^2 - 3y$$

$$(6) \ x^6 - 27x^4 + 243x^2 - 729$$

$$(7) \ a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

$$(8) \ a^3 + b^3$$

$$(9) \ x^3 + 8$$

$$(10) \ x^3 - 1$$

$$(11) \ x^6 - 1$$

$$(12) \ x^6 - 1$$

4.5 (p.38)

$$(1) \ x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 4$$

$$(2) \ 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20x + 30y + 25$$

$$(3) \ x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1$$

$$(4) \ 4yz + 4zx$$

$$(5) \ a^2 + 2ab + b^2 - c^2$$

$$(6) \ a^2 + 2ab + b^2 - 2a - 2b - 24$$

$$(7) \ x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 16y + 15$$

$$(8) \ a^4 + a^2b^2 + b^4$$

$$(9) \ x^4 + x^2y^2 + y^4$$

$$(10) \ x^4 - 13x^2 + 36$$

$$(11) \ x^4 - 4x^3 - 7x^2 + 22x + 24$$

4.6 (p.38)

$$(1) \ 2a^2 + 2b^2$$

$$(2) \ 6a^2b + 2b^3$$

4.7 (p.39)

$$(1) \ 4, 12$$

$$(2) \ 5, 3, 11$$

$$(3) \ 18, 3$$

5.1 (p.41)

$$(1) \ 2a(4b - 2c - d)$$

$$(2) \ x^2(1 - a)$$

$$(3) \ 3xy(x - 2y)$$

$$(4) \ a(a^2 - 3a - 1)$$

$$(5) \ 2abc(2a - 4b - 3c)$$

$$(6) \ 2ab^2c(3a^2 - 4bc)$$

$$(7) \ 2a(a^2 + 3b^2)$$

$$(8) \ 2b(3a^2 + b^2)$$

5.2 (p.43)

$$(1) \ (a + b)^2$$

$$(2) \ (x + 3)^2$$

$$(3) \ (x - 5)^2$$

$$(4) \ (x + 1)^2$$

$$(5) \ (2x - 1)^2$$

$$(6) \ (3x + 1)^2$$

$$(7) \ (3x - 1)^2$$

$$(8) \ (3x - 5)^2$$

$$(9) \ (7x - 2y)^2$$

$$(10) \ (x^2 + y^2)^2$$

$$(11) \ (xy - 5)^2$$

$$(12) \ \frac{1}{12}(x + 3)^2$$

$$(13) \ x^2(x + 1)^2$$

$$(14) \ a(a - 2)^2$$

$$(15) \ a^2(a - 1)^2$$

$$(16) \ (a + b + 2)^2$$

$$(17) \ (ad - bc)^2$$

5.3 (p.44)

$$(1) \ (a + b)(a - b)$$

$$(2) \ (2x + 3y)(2x - 3y)$$

$$(3) \ (2x + 5y)(2x - 5y)$$

$$(4) \ (2x + 1)(2x - 1)$$

$$(5) \ 3(x + y)(x - y)$$

$$(6) \ 3(x + 5)(x - 5)$$

$$(7) \ ab(x + a)(x - a)$$

$$(8) \ x^2(x + y)(x - y)$$

$$(9) \ (x^2 + y^2)(x + y)(x - y)$$

$$(10) \ (x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

$$(11) \ (1 + a^4)(1 + a^2)(1 + a)(1 - a)$$

$$(12) \ (a + 1)^2(a - 1)^2$$

$$(13) \ (x - 4y + 5)(x - 4y - 5)$$

$$(14) \ (x + 1)^2(x - 1)^2$$

$$(15) \ (a + b + c)(a - b - c)$$

$$(16) \ (a - b)(x - y)(x + y + a + b)$$

5.4 (p.46)

$$(1) \ (x + 3)(x + 5)$$

$$(2) \ (x + 2)(x + 4)$$

$$(3) \ (x - 4)(x + 6)$$

$$(4) \ (x - 3)(x - 5)$$

$$(5) \ (x - 2)(x - 5)$$

$$(6) \ (x - 2)(x - 3)$$

$$(7) \ (x - 1)(x - 5)$$

- (8) $(x + 1)(x - 3)$
- (9) $(x - 1)(x - 9)$
- (10) $(x + 2)(x - 8)$
- (11) $(x - 2)(x - 6)$
- (12) $(x + 3)(x - 4)$
- (13) $(x + 6)(x + 14)$
- (14) $(x - 7)(x + 13)$
- (15) $x(x + 1)(x + 2)$
- (16) $a(b - 2)(b - 5)$
- (17) $xy(x + 1)(x - 4)$
- (18) $(x + 1)(x - 1)(x + 3)(x - 3)$
- (19) $a(a - 1)$
- (20) $(x^2 - x + 6)(x + 2)(x - 3)$
- (21) $(a - 1)(a + 3)(a + 1)(a - 3)$

5.5 (p.48)

- (1) $(x + 1)(3x + 1)$
- (2) $(x - 2)(3x - 1)$
- (3) $(x - 3)(2x + 5)$
- (4) $(x + 2)(3x + 5)$
- (5) $(x + 3)(2x - 1)$
- (6) $(x + 3)(3x - 4)$
- (7) $(x + 8)(2x - 3)$
- (8) $(x + 2)(5x - 1)$
- (9) $(x - 3)(7x - 3)$

- (10) $(x + 6)(7x - 3)$
- (11) $(2a - 1)(4a + 3)$
- (12) $(2x + 5)(3x - 2)$
- (13) $(2x - 7)(3x + 5)$
- (14) $(3x - 2)(5x + 1)$
- (15) $(3x + 1)(5x - 2)$
- (16) $(2a + 3)(5a - 4)$
- (17) $(2x + 1)(6x - 5)$
- (18) $(3x + 2)(4x + 5)$
- (19) $(3x + 8)(4x - 5)$
- (20) $(3x - 7)(6x + 1)$
- (21) $(x + 6y)(3x - y)$
- (22) $(x - 2y)(4x + 3y)$
- (23) $(2a - b)(3a + 2b)$
- (24) $(x + 4y)(3x - 5y)$

5.6 (p.50)

- (1) $-(3x - 1)(4x + 3)$
- (2) $3(a + 2)(2a - 1)$
- (3) $\frac{1}{16}(4x + 1)(4x - 3)$
- (4) $3x(x + 6)(2x - 1)$
- (5) $a(x + 1)(4x + 3)$
- (6) $n(4m + 3)(12m - 1)$
- (7) $(x - y + 1)(2x - 2y - 3)$
- (8) $(x^2 - 2y^2)(4x^2 + 3y^2)$

5.7 (p.51)

- (1) $(x + y - 3)(x - y + 1)$
- (2) $(x + y + 1)(x - 3y - 1)$
- (3) $(x - ab + 2a)(x + ab + 2b)$
- (4) $(x + y + 3)(2x + y + 2)$
- (5) $(x + 3y - 1)(2x + 2y + 1)$
- (6) $(x + 2y - 1)(2x - y + 1)$
- (7) $(x - 3y + 2)(2x + y - 3)$

5.8 (p.52)

- (1) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- (2) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$
- (3) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$
- (4) $(2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)$
- (5) $(a - 1)(a^2 + a + 1)$
- (6) $x(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
- (7) $3(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$
- (8) $-b(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$
- (9) $(x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$
- (10) $(x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

5.9 (p.53)

- (1) $(a - b)(x + y)$
- (2) $(x + 2)^2(x - 2)$
- (3) $(a - 1)(x - y)$
- (4) $(x - 1)(y - 1)$

(5) $(a + 1)(3a + 1)$

5.10 (p.54)

- (1) $(x - 2)(y + 2)$
- (2) $(a - b)(x - y)$
- (3) $(a + b)(a^2 + b^2)$
- (4) $(x + 1)(x - 1)(y + 1)(y - 1)$
- (5) $(x - 1)(x^2 + 1)$
- (6) $(x + 1)(x - 1)^2$
- (7) $(x - 6)(x + 1)(x - 1)$
- (8) $(x - 5)(x + 2)(x - 2)$

5.11 (p.55)

- (1) $(x - 1)(x + 4)(x^2 + 3x + 6)$
- (2) $(x + y + 5)(x + y - 8)$
- (3) $x^2(x^2 - 5)$
- (4) $(x + 3)^2(x^2 + 6x + 4)$
- (5) $(x^2 + 5xy + 3y^2)(x^2 + 5xy + 7y^2)$

5.12 (p.56)

- (1) $(x + y + 1)(x + y - 1)$
- (2) $(a + b + c)(a + b - c)$
- (3) $(a - b + c)(a - b - c)$
- (4) $(x + y + z)(x - y - z)$
- (5) $(a + b - c)(a - b + c)$
- (6) $(x + y - 1)(x - y + 1)$
- (7) $(a + b + 2)(a - b - 2)$

(8) $(3 + x - y)(3 - x + y)$	(16) $(x - y)(x + y + z)(x - y + z)$
(9) $(1 + a - b)(1 - a + b)$	5.15 (p.59)
(10) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$	(1) $(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$
5.13 (p.56)	(2) $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
(1) $-(a - b)(b - c)(c - a)$	(3) $(x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$
(2) $(a - b)(b - c)(c - a)$	(4) $(x^2 + x - 3)(x^2 - x - 3)$
(3) $-(a - b)(b - c)(c - a)$	(5) $(a^2 + a + 3)(a^2 - a + 3)$
(4) $(x + y)(y + z)(z + x)$	(6) $(x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$
5.14 (p.58)	(7) $(x^2 + 2xy + 4y^2)(x^2 - 2xy + 4y^2)$
(1) $(x + 1)(x - 1)(y + 1)$	(8) $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$
(2) $(a - 1)(ab - 1)$	(9) $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$
(3) $(a - 1)(x + 1)(x - 1)$	(10) $(2x^2 + x + 3)(2x^2 - x + 3)$
(4) $(a + b)(b - c)$	(11) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$
(5) $(x + y)(x - z)$	5.16 (p.60)
(6) $(ax + 1)(x^2 + 1)$	$(ax + bx - ay + by)(ax - bx + ay + by)$
(7) $(a - b)(2x - ab)$	6.1 (p.62)
(8) $(x + 2)(x - 2)(x - 2a)$	(1) 9, 189
(9) $(x + 2)(x - 2)(x - 3a)$	(2) 125, 500
(10) $(x + 1)(x - 1)(x + 2y)$	(3) 6, 24
(11) $(x + y)(x - y - z)$	(4) 3, 120
(12) $a(b - 1)(a - 2c)$	(5) 2, 180
(13) $(a + b)(a + 2b + c)$	(6) 6, 1260
(14) $(x + 1)(x + 2)(x + y)$	(7) 6, 108
(15) $(ac - d)(ab + c + d)$	(8) 7, 2310
	6.2 (p.63)

$$(1) a^2b^2, a^3b^3c$$

$$(2) 1, a^2x^2$$

$$(3) x^2y, x^4y^2$$

$$(4) xy, x^4y^4$$

$$(5) x-1, (x-1)^2(5x+3)$$

$$(6) a+1, (a+1)(a-2)(a+3)$$

$$(7) x^2+x+1, (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$(8) x+2, (x+2)(x-8)(2x+5)(4x+1)$$

$$(9) x+1, x^2(x+1)^2(x-3)(x^2-x+1)$$

6.3 (p.63)6枚

6.4 (p.63)109

6.5 (p.64)34

6.6 (p.64)151

6.7 (p.64) 12 と 420, 60 と 84

6.8 (p.64) 3 と 120, 15 と 24

6.9 (p.64) x^2+2x-3 と $2x^2+3x-5$

7.1 (p.65)

$$(1) -\frac{b^4c^7}{3a^4d}$$

$$(2) \frac{1}{x-2}$$

$$(3) x+1$$

$$(4) \frac{x+3}{2x-2}$$

$$(5) \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-3)}$$

$$(6) x+1$$

$$(7) \frac{x-2}{x^2-2x+4}$$

7.2 (p.66)

$$(1) \frac{2a}{3b^2xy}$$

$$(2) \frac{2y^3}{x^3}$$

$$(3) \frac{135x^3y^3}{8a^2}$$

$$(4) -\frac{4}{a^4b}$$

$$(5) \frac{3}{2}$$

$$(6) 1$$

$$(7) \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

$$(8) 1$$

$$(9) \frac{x-2}{x+4}$$

$$(10) \frac{a-6}{a-3}$$

$$(11) \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$$

$$(12) \frac{(x-1)(2x+1)}{(x+3)(x-4)}$$

$$(13) \frac{y}{x}$$

$$(14) \frac{1}{x+2y}$$

$$(15) \frac{x-2}{x-1}$$

$$(16) \frac{x}{3}$$

7.3 (p.68)

$$(1) 1$$

$$(2) 1$$

$$(3) \frac{1}{x+1}$$

$$(4) \frac{1}{x+2}$$

$$(5) 2$$

7.4 (p.69)

$$(1) \frac{x}{x^2-4}$$

$$(2) \frac{1}{x+4}$$

$$(3) 0$$

$$(4) \frac{6x+4}{x^2-4}$$

$$(5) \frac{3}{x+y}$$

$$(6) \frac{x+y}{x-y}$$

$$(7) \frac{2}{x^2-1}$$

$$(8) \frac{a}{a-b}$$

$$(9) \frac{x}{x+1}$$

7.5 (p.70)

$$(1) -\frac{2}{c}$$

$$(2) \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$(3) 0$$

$$(4) \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

$$(5) \frac{1}{a+3}$$

$$(6) -\frac{y}{x(x-2y)}$$

$$(7) \frac{4}{x+2}$$

$$(8) 3$$

7.6 (p.71)

$$(1) -\frac{1}{ab}$$

$$(2) 1$$

7.7 (p.72)

$$(1) \frac{4x}{x^4-1}$$

$$(2) \frac{8}{1-x^8}$$

$$\mathbf{7.8} \text{ (p.72)} \frac{20x-50}{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}$$

7.9 (p.73)

$$(1) ab(a-b)$$

$$(2) \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2}$$

$$(3) \frac{3}{3x+1}$$

$$(4) \frac{x^2+y^2}{2xy}$$

$$(5) \frac{y}{x}$$

7.10 (p.74)

$$(1) a+1$$

$$(2) -x-6$$

$$(3) \frac{x^2-2x}{x^2-1}$$

$$(4) -\frac{a}{b}$$

$$(5) \frac{x+3}{x-2}$$

$$(6) \ x - 1$$

$$(7) \ 1 + x$$

$$(8) \ x$$

$$\mathbf{7.11} \text{ (p.75)}$$

$$(1) \ -\frac{1}{x}$$

$$(2) \ \frac{x^2 + y^2}{2xy}$$

$$\mathbf{7.12} \text{ (p.76)} \ \frac{2}{a^3}$$

$$\mathbf{7.13} \text{ (p.77)} \ \frac{x-1}{x}$$

$$\mathbf{7.14} \text{ (p.77)} \ \frac{1}{bc} > \frac{1}{ca} > \frac{1}{ab}$$

$$\mathbf{7.15} \text{ (p.77)} \ -\frac{4a^2}{a^4 - 1}$$

$$\mathbf{8.1} \text{ (p.79)} \ 0$$

$$\mathbf{8.2} \text{ (p.79)} \ 0$$

$$\mathbf{8.3} \text{ (p.79)} \ 6$$

$$\mathbf{8.4} \text{ (p.79)} \ 24$$

$$\mathbf{8.5} \text{ (p.79)} \ \frac{6}{31}$$

$$\mathbf{8.6} \text{ (p.79)} \ 10$$

$$\mathbf{8.7} \text{ (p.79)} \ \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{8.8} \text{ (p.79)} \ 14, \ 4$$

$$\mathbf{8.9} \text{ (p.79)} \ -5$$

$$\mathbf{8.10} \text{ (p.80)} \ 18$$

$$\mathbf{8.11} \text{ (p.80)} \ 3$$

$$\mathbf{8.12} \text{ (p.80)} \ 4$$

$$\mathbf{9.1} \text{ (p.81)} \ \frac{9}{16}$$

$$\mathbf{9.2} \text{ (p.81)} \ 12 : 8 : 3$$

$$\mathbf{9.3} \text{ (p.81)} \ 4 : 3 : 5$$

$$\mathbf{9.4} \text{ (p.81)} \ \frac{3}{2}$$

$$\mathbf{9.5} \text{ (p.81)} \ \frac{11}{9}$$

$$\mathbf{9.6} \text{ (p.82)} \ \frac{50}{47}$$

$$\mathbf{9.7} \text{ (p.82)} \ 1$$

$$\mathbf{9.8} \text{ (p.82)} \ 4 : 3 : 5$$

$$\mathbf{9.9} \text{ (p.82)} \ 1 : 5 : 7$$

$$\mathbf{9.10} \text{ (p.82)} \ 4 : 3 : 4$$

$$\mathbf{10.1} \text{ (p.83)}$$

$$(1) \ 3$$

$$(2) \ 8$$

$$(3) \ \pm 4$$

$$\mathbf{10.2} \text{ (p.84)}$$

$$(1) \ 14$$

$$(2) \ 17.3$$

$$\mathbf{10.3} \text{ (p.85)}$$

$$(1) \ 14$$

$$(2) \ -18$$

$$(3) \ 9 - 4\sqrt{2}$$

$$(4) \ -\sqrt{3}$$

$$(5) \ 3\sqrt{2}$$

$$(6) \ \sqrt{2}$$

$$(7) \ -2\sqrt{5}$$

$$(8) \ -6\sqrt{3}$$

$$(9) \ \frac{19}{4}\sqrt{3}$$

$$(10) \ 5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

$$(11) \ \sqrt{2}$$

$$(12) \ \sqrt{2}$$

$$(13) \ 0$$

$$(14) \ \sqrt{3}$$

- (15) 0
- (16) 0
- (17) $6\sqrt{2}$
- (18) $3\sqrt{3}$
- (19) $3\sqrt{2}$
- (20) $4\sqrt{2} - 10\sqrt{3}$
- (21) $7\sqrt{2}$
- (22) $11\sqrt{3}$
- (23) $8\sqrt{5}$
- (24) $\sqrt{3}$
- (25) 0
- (26) $4\sqrt{2}$
- (27) $6 + 8\sqrt{2}$
- (28) $-26\sqrt{2} + 10\sqrt{3}$

10.4 (p.86)

- (1) 6
- (2) $3\sqrt{3}$
- (3) $2\sqrt{2}$
- (4) $12\sqrt{5}$
- (5) 18
- (6) 10
- (7) 14
- (8) $10\sqrt{3}$
- (9) 27

- (10) 2
- (11) $3\sqrt{3}$
- (12) $10\sqrt{6}$
- (13) $\sqrt{2}$
- (14) 1
- (15) 20
- (16) 45
- (17) $4 - \sqrt{2}$

10.5 (p.88)

- (1) $\sqrt{3} - 1$
- (2) $3 + \sqrt{3}$
- (3) $52 - 16\sqrt{10}$
- (4) $8 - 4\sqrt{3}$
- (5) $24 + 12\sqrt{3}$
- (6) 3
- (7) 12
- (8) 8
- (9) -1
- (10) 2
- (11) 3
- (12) 1
- (13) 4
- (14) $2\sqrt{2}$
- (15) $2\sqrt{6} + 1$

$$(16) \ 4\sqrt{3} - 2$$

10.6 (p.90)

$$(1) \ \sqrt{3}$$

$$(2) \ \sqrt{5}$$

$$(3) \ \frac{4}{3}\sqrt{6}$$

$$(4) \ 3\sqrt{6}$$

$$(5) \ \frac{7}{2}$$

10.7 (p.91)

$$(1) \ \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$(2) \ \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$(3) \ 5 + 2\sqrt{6}$$

$$(4) \ -7 - 4\sqrt{3}$$

$$(5) \ \frac{11 + 2\sqrt{10}}{9}$$

$$(6) \ 5 - 2\sqrt{3}$$

$$(7) \ 1 + \sqrt{2}$$

$$(8) \ \frac{3 - \sqrt{15}}{3}$$

$$(9) \ 3 + 2\sqrt{2}$$

$$(10) \ 2$$

$$(11) \ \sqrt{3}$$

$$(12) \ 5$$

$$(13) \ 4$$

$$(14) \ 1 - \sqrt{35}$$

$$(15) \ 1$$

$$(16) \ 4$$

$$(17) \ 8$$

$$(18) \ 2\sqrt{35}$$

$$(19) \ -6\sqrt{2}$$

$$(20) \ 0$$

10.8 (p.93)

$$(1) \ \frac{4}{15}\sqrt{3}$$

$$(2) \ \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$$

$$(3) \ -\frac{2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$(4) \ \frac{\sqrt{15} - \sqrt{6}}{3}$$

10.9 (p.94)

$$(1) \ \sqrt{6} + \sqrt{5}$$

$$(2) \ 3 + \sqrt{2}$$

$$(3) \ \sqrt{7} - \sqrt{3}$$

$$(4) \ 2\sqrt{2} - \sqrt{6}$$

$$(5) \ \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$(6) \ \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$$(7) \ 2 + \sqrt{2}$$

$$(8) \ 2\sqrt{3} - \sqrt{5}$$

$$(9) \ 3 + \sqrt{2}$$

$$(10) \ \sqrt{3} - 1$$

$$(11) \ 7$$

$$(12) \ \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$$

(13) $\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2}$	(1) $x = 1$
10.10 (p.95) $ab + 1$	(2) $x = 5$
10.11 (p.95) $\sqrt{2}$	(3) $x = 2$
10.12 (p.95) 1	(4) $x = 12$
10.13 (p.96) $\frac{1}{2}$	(5) $x = 2$
10.14 (p.96) $\frac{7}{2} + 2\sqrt{3}$	(6) $x = 3$
10.15 (p.96) 6	(7) $x = 6$
10.16 (p.97)	(8) $x = -6$
(1) $\sqrt{10}$	(9) $x = \frac{1}{2}$
(2) 2	(10) $x = -2$
(3) 4	(11) $x = 6$
(4) $4\sqrt{10}$	(12) $x = -2$
10.17 (p.97) $\frac{9}{2}$	(13) $x = 3$
10.18 (p.97) 8	(14) $x = -4$
10.19 (p.97)	(15) $x = -3$
(1) $\frac{9}{4}$	(16) $x = 2$
(2) $\frac{\sqrt{3}}{32}$	(17) $x = -6$
10.20 (p.97) $\frac{4}{5}$	(18) $x = 4$
10.21 (p.97)	(19) $x = 4$
(1) 62	(20) $x = 3$
(2) 60	(21) $x = 0$
10.22 (p.97) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 14, \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 194$	(22) $x = 1$
10.23 (p.97) $x^3 + y^3 = 198,$ $x^2 + 3xy + y^2 = 37$	(23) $x = 5$
10.24 (p.98) $\frac{6}{5}\sqrt{5}$	(24) $x = 5$
10.25 (p.98) $\sqrt{5}$	
10.26 (p.98) $10 + \sqrt{3}$	
11.1 (p.100)	

$$(25) \ x = \frac{112}{17}$$

$$(26) \ x = -\frac{1}{4}$$

$$(27) \ x = 70$$

$$(28) \ x = 2$$

$$(29) \ x = -5$$

11.2 (p.102)

$$(1) \ x = 1$$

$$(2) \ x = \frac{1}{3}$$

$$(3) \ x = 1$$

11.3 (p.103)

$$(1) \ x = -1, 3$$

$$(2) \ x = -\frac{7}{2}, 3$$

11.4 (p.103) $a = 2$

11.5 (p.103) $a = -\frac{8}{3}$

11.6 (p.104)

$$\begin{cases} a \neq 2, 3 & \text{のとき} & x = \frac{1}{a-3} \\ a = 2 & \text{のとき} & \text{すべての数} \\ a = 3 & \text{のとき} & \text{解なし} \end{cases}$$

12.1 (p.108)

$$(1) \ -10$$

$$(2) \ -6$$

$$(3) \ 4 + \sqrt{2}i$$

$$(4) \ -2 + 8\sqrt{3}i$$

12.2 (p.108)

$$(1) \ 1 + 7i$$

$$(2) \ 5 + i$$

$$(3) \ 8 + i$$

$$(4) \ 14 + 8i$$

$$(5) \ 27 + 11i$$

$$(6) \ 23 - 7i$$

$$(7) \ 17$$

$$(8) \ 26$$

$$(9) \ i$$

$$(10) \ 25$$

$$(11) \ i$$

$$(12) \ -16 + 30i$$

$$(13) \ -3 + 4i$$

$$(14) \ 10$$

$$(15) \ 15 - 3\sqrt{3}i$$

$$(16) \ -1$$

$$(17) \ 1 - \sqrt{3}i$$

$$(18) \ -2 + 2i$$

$$(19) \ 8$$

$$(20) \ 1$$

12.3 (p.109)

$$(1) \ \frac{3-2i}{4}$$

$$(2) \ i$$

$$(3) \ \frac{3-i}{2}$$

$$(4) \ \frac{1-3i}{5}$$

(5) $\frac{-5-i}{13}$	(4) $x = -3, 4$
(6) $-i$	(5) $x = 1, 3$
(7) $-i$	(6) $x = -2, -3$
(8) 2	(7) $x = 2, 3$
(9) 5	(8) $x = 3, 5$
(10) $\frac{11-3i}{10}$	(9) $x = -8, 5$
12.4 (p.110) $\frac{11}{25} + \frac{2}{25}i$	(10) $x = 4, 9$
12.5 (p.110) $x = 3, y = 4$	(11) $x = -7, -9$
12.6 (p.111) $x = -2, y = 3$	(12) $x = 1$
12.7 (p.111) $x = -2, y = -2$	(13) $x = -1$
12.8 (p.111) $a = 1, b = 2$	(14) $x = -6, 4$
12.9 (p.111) $C = -2, D = 2$	(15) $x = -2, 18$
12.10 (p.111) $x = 3, y = 5$	(16) $x = -1, 4$
12.11 (p.111) $\frac{3}{2}$	(17) $x = 2, 3$
12.12 (p.111) 2	(18) $x = -1, -6$
12.13 (p.112)	(19) $x = -2, -3$
(1) -1	(20) $x = 1, 19$
(2) 1	13.2 (p.114)
(3) 0	(1) $x = -2, -\frac{1}{2}$
12.14 (p.112)	(2) $x = 2, \frac{1}{2}$
(1) $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$	(3) $x = -1, \frac{1}{2}$
(2) $(x^2 + 5)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$	(4) $x = 3, -\frac{5}{2}$
(3) $(x + \sqrt{5}i)(x - \sqrt{5}i)(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5})$	(5) $x = 4, -\frac{3}{2}$
13.1 (p.113)	
(1) $x = 0, -4$	
(2) $x = 0, -3$	
(3) $x = 3, -4$	

$$(6) \quad x = -1, \frac{7}{2}$$

$$(7) \quad x = 4, \frac{1}{2}$$

$$(8) \quad x = -6, \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad x = -7, -\frac{1}{2}$$

$$(10) \quad x = 1, -\frac{5}{3}$$

$$(11) \quad x = 2, \frac{1}{3}$$

$$(12) \quad x = -4, \frac{2}{5}$$

$$(13) \quad x = 4, -\frac{3}{5}$$

$$(14) \quad x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$$

$$(15) \quad x = \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$$

$$(16) \quad x = -\frac{5}{2}, -\frac{2}{3}$$

$$(17) \quad x = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$$

$$(18) \quad x = -\frac{2}{3}, -\frac{5}{4}$$

$$(19) \quad x = \frac{5}{3}, -\frac{1}{2}$$

$$(20) \quad x = -1, \frac{7}{2}$$

$$(21) \quad x = \frac{3}{4}, -\frac{2}{3}$$

$$(22) \quad x = 3, -\frac{4}{3}$$

$$(23) \quad x = \frac{12}{5}, -\frac{7}{8}$$

$$(24) \quad x = 2, \frac{1}{2}$$

$$(25) \quad x = 2, \frac{8}{3}$$

$$(26) \quad x = \frac{3}{2}$$

$$(27) \quad x = -\frac{14}{3}$$

13.3 (p.117)

$$(1) \quad x = \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \quad x = \frac{-7 \pm \sqrt{73}}{4}$$

$$(3) \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$(4) \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}$$

$$(5) \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{3}$$

$$(6) \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{41}}{4}$$

$$(7) \quad x = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{3}$$

$$(8) \quad x = \frac{11 \pm \sqrt{85}}{6}$$

$$(9) \quad x = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$$

$$(10) \quad y = \frac{-1 \pm \sqrt{35}i}{3}$$

13.4 (p.118)

$$(1) \quad = 5, -1$$

$$(2) \quad x = 13, -11$$

$$(3) \quad x = 15, -17$$

$$(4) x = \frac{5}{2}, -\frac{3}{2}$$

$$(5) t = \frac{3 \pm 3i}{2}$$

13.5 (p.119)

$$(1) x = 0, 4$$

$$(2) x = 1, 6$$

13.6 (p.119)

$$(1) x = -\sqrt{13}, 3\sqrt{13}$$

$$(2) x = \frac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{7}i}{6}$$

$$(3) x = 1 - \sqrt{2}, \sqrt{3} - \sqrt{6}$$

13.7 (p.119) $x = \pm 1, \pm 2$

13.8 (p.120) $x = -6$

13.9 (p.120) $x = -2$

13.10 (p.120) $x = 6$

13.11 (p.120) $x = -4$

13.12 (p.120) $a = 2, x = 3$

14.1 (p.123)

(1) 異なる 2 つの実数解

(2) 異なる 2 つの実数解

(3) 重解

(4) 異なる 2 つの虚数解

(5) 異なる 2 つの虚数解

(6) 重解

14.2 (p.123) $k = -1, 9$

14.3 (p.124) $m = -3, \frac{11}{7}$

14.4 (p.124) $k = 1, -\frac{1}{3}$

14.5 (p.124) $m = 3, 5$

15.1 (p.125)

(1) 2

(2) 3

15.2 (p.126)

(1) 和 $-\frac{2}{3}$, 積 $-\frac{5}{3}$

(2) 和 $\frac{4}{3}$, 積 $\frac{1}{2}$

15.3 (p.126)

(1) -4

(2) 1

(3) 14

15.4 (p.126)

(1) $-\frac{5}{3}$

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{19}{9}$

15.5 (p.126)

(1) 2

(2) 2

(3) 0

(4) -4

15.6 (p.127) 1

15.7 (p.127)

(1) 3

(2) $\frac{3}{4}$

15.8 (p.127)

(1) 81

(2) 16

15.9 (p.127) 63

15.10 (p.127) 2

15.11 (p.128) $p = -7, q = 10$

15.12 (p.128) $k = \frac{5}{4}$

15.13 (p.128)

$$\begin{cases} a = -10 & \text{のとき} & x = 4, 6 \\ a = \frac{35}{6} & \text{のとき} & x = -\frac{7}{3}, -\frac{7}{2} \end{cases}$$

15.14 (p.129) $x^2 + x - 6 = 0$

15.15 (p.129) $4x^2 + 2x - 5 = 0$

15.16 (p.129)

(1) $x^2 - 14x + 20 = 0$

(2) $5x^2 - 7x + 1 = 0$

15.17 (p.130) $27x^2 + 6x + 4 = 0$

15.18 (p.130)

(1) $-\frac{5}{2}$

(2) $-\frac{7}{8}$

(3) $16x^2 + 54x + 35 = 0$

16.1 (p.132)

(1) $x = -1, y = 4$

(2) $x = 5, y = -2$

(3) $x = 3, y = 2$

(4) $x = 4, y = 4$

(5) $x = 2, y = 3$

(6) $x = 3, y = 2$

(7) $x = 1, y = 5$

(8) $x = 4, y = 1$

(9) $x = -2, y = 5$

(10) $x = 35, y = -50$

(11) $x = 4, y = 5$

(12) $x = 2, y = 1$

(13) $x = 4, y = 1$

(14) $x = \frac{13}{7}, y = -\frac{4}{7}$

(15) $x = 3, y = -1$

(16) $x = 5, y = -3$

(17) $x = 1, y = 2$

(18) $x = -3, y = 4$

(19) $x = -3, y = -5$

(20) $x = -4, y = -6$

(21) $x = 2, y = 3$

(22) $x = 1, y = 1$

(23) $x = \frac{3}{13}, y = \frac{41}{13}$

(24) $x = -3, y = 2$

(25) $x = 5, y = 3$

(26) $x = 10, y = -4$

(27) $x = 3, y = 4$

(28) $x = -\frac{3}{4}, y = 1$

(29) $x = 9, y = 4$

(30) $x = 2, y = 3$

(31) $x = -4, y = -3$

$$(32) \quad x = 5, \quad y = -2$$

16.2 (p.135)

$$(1) \quad x = \frac{1}{9}, \quad y = \frac{1}{3}$$

$$(2) \quad x = 5, \quad y = 3$$

$$(3) \quad x = 7, \quad y = -10$$

16.3 (p.136)

$$(1) \quad a = -1, \quad b = 2, \quad c = -5$$

$$(2) \quad x = 5, \quad y = 2, \quad z = 3$$

$$(3) \quad x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

$$(4) \quad x = 2, \quad y = 4, \quad z = 6$$

$$(5) \quad x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

$$(6) \quad x = 1, \quad y = 2, \quad z = 3$$

$$(7) \quad x = 1, \quad y = 3, \quad z = 7$$

$$(8) \quad x = -5, \quad y = 7, \quad z = 3$$

$$(9) \quad x = 5, \quad y = 3, \quad z = 1$$

$$(10) \quad x = 5, \quad y = -4, \quad z = 4$$

$$(11) \quad x = 3, \quad y = 2, \quad z = 4$$

$$(12) \quad x = 1, \quad y = -1, \quad z = 2$$

$$(13) \quad x = -3, \quad y = -4, \quad z = -1$$

$$(14) \quad x = 3, \quad y = 4, \quad z = 5$$

$$(15) \quad x = 5, \quad y = 1, \quad z = 5$$

$$(16) \quad x = 3, \quad y = 2, \quad z = 1$$

$$(17) \quad x = 16, \quad y = 10, \quad z = 4$$

$$(18) \quad x = 3, \quad y = \frac{8}{3}, \quad z = \frac{7}{2}$$

$$(19) \quad x = \frac{1}{10}, \quad y = \frac{1}{20}, \quad z = \frac{1}{30}$$

$$(20) \quad x = \frac{5}{39}, \quad y = \frac{5}{16}, \quad z = \frac{5}{7}$$

$$(21) \quad x = \frac{1}{14}, \quad y = \frac{1}{2}, \quad z = -\frac{1}{3}$$

$$(22) \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{5}{2}, \quad z = -\frac{3}{2}$$

16.4 (p.139)

$$(1) \quad x = 1, \quad y = 3, \quad z = 2$$

$$(2) \quad x = 4, \quad y = 3, \quad z = 9$$

$$(3) \quad x = 5, \quad y = 4, \quad z = 3$$

$$(4) \quad a = 5, \quad b = 8, \quad c = 0, \quad d = 2$$

$$(5) \quad x = 2, \quad y = 4, \quad z = 5, \quad u = 8$$

16.5 (p.140)

$$(1) \quad (x, y) = (-1, -3), (2, 3)$$

$$(2) \quad (x, y) = (0, -5), (4, 3)$$

$$(3) \quad (x, y) = (-2, -3), (3, 2)$$

$$(4) \quad (x, y) = (1, -1)$$

$$(5) \quad (x, y) = (4, 2), (-2, -4)$$

$$(6) \quad (x, y) = (1, -1), (4, 2)$$

$$(7) \quad (x, y) = (2, 5), \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$(8) \quad (x, y) = (3, -1), \left(-\frac{11}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

$$(9) \quad (x, y) = (2, 1), (-3, 11)$$

$$(10) \quad (x, y) = (\pm 8, \pm 6) \quad (\text{複号同順})$$

$$(11) \quad (x, y) = (-2, -3), \left(\frac{46}{13}, \frac{9}{13}\right)$$

$$(12) (x, y) = (5, 3), \left(-\frac{7}{4}, -\frac{3}{2}\right)$$

$$(13) (x, y) = (1, 1), (4, 2)$$

16.6 (p.142)

$$(1) (x, y) = (4, 8), (8, 4)$$

$$(2) (x, y) = (-3, 4), (4, -3)$$

$$(3) (x, y) = (3, 3)$$

$$(4) (x, y) = (2, 3), (3, 2)$$

$$(5) (x, y) = (-3, 5), (5, -3)$$

$$16.7 \text{ (p.142)} (x, y) = (-1, 2), (2, -1)$$

16.8 (p.143)

$$(1) (x, y) = (3, 1)$$

$$(2) (x, y) = (1, 1)$$

16.9 (p.144)

$$(1) (x, y) = (-2, -1), \left(-\frac{24}{13}, -\frac{8}{13}\right)$$

$$(2) (x, y) = (1, 2), (-5, -10), \left(\frac{1 \mp \sqrt{46}}{3}, \frac{-1 \pm \sqrt{46}}{9}\right) \text{ (複号同順)}$$

$$(3) (x, y) = (2, 4), \left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

16.10 (p.144)

$$(1) (x, y) = \left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}\right) \text{ (複号同順)}$$

$$(2) (x, y) = \left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}, \pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right), \left(\pm\frac{\sqrt{110}}{11}, \pm\frac{\sqrt{110}}{22}\right) \text{ (複号同順)}$$

17.1 (p.147)

$$(1) x = -\frac{1}{2}$$

$$(2) x = -2$$

$$(3) x = 2$$

$$(4) x = -\frac{1}{3}$$

$$(5) x = -4, 6$$

$$(6) x = -7, \frac{2}{3}$$

$$(7) x = -3$$

$$(8) x = -\frac{4}{3}$$

$$(9) x = -3$$

$$(10) x = 1, -6$$

$$(11) x = -2$$

$$(12) x = -3, \frac{1}{2}$$

$$(13) x = \frac{3}{2}$$

$$(14) x = 3$$

$$(15) x = 2$$

$$(16) x = 1, -8$$

18.1 (p.149)

$$(1) x = 26$$

$$(2) x = 15$$

$$(3) x = 9$$

$$(4) x = 3, 4$$

$$(5) x = 3$$

(6) $x = 6$	(6) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
(7) $x = 2$	(7) $(x + 2)(x^2 - 6x + 4)$
(8) $x = 3$	(8) $(x - 2)(x + 3)(x + 4)$
(9) $x = 1$	(9) $(x + 2)(x - 3)(2x - 1)$
(10) $x = 3$	(10) $(x + 1)(x - 2)(3x - 2)$
(11) $x = 13$	(11) $(x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 3)$
(12) $x = 3$	19.7 (p.154)
(13) $x = 1$	(1) $a = 8$
(14) $x = 3$	(2) $(x + 1)^2(x - 2)$
(15) $x = -3$	19.8 (p.155) $a = -5, b = -10$
18.2 (p.150)	19.9 (p.155) -25
(1) $x = 4$	19.10 (p.155) $p = 5, q = -1$
(2) $x = -1$	19.11 (p.156) $x + 1$
19.1 (p.152)	19.12 (p.157) $\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$
(1) 0	19.13 (p.157)
(2) $\frac{7}{8}$	(1) $a = -1, b = -2$
19.2 (p.152) $a = 1$	(2) $(x + 1)(x + 2)$
19.3 (p.152) $p = -6$, 余り 12	20.1 (p.160)
19.4 (p.153) $p = -1$	(1) $x = 1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
19.5 (p.153) $p = -2$	(2) $x = \pm 1, \pm 3$
19.6 (p.154)	(3) $x = \pm 2, \pm i$
(1) $(x + 1)^2(x - 2)$	(4) $x = \pm 1, 2, 4$
(2) $(x - 1)(x^2 - 2x - 1)$	(5) $x = 1, 2, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$
(3) $(x - 1)^2(x - 2)$	(6) $x = 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm 2\sqrt{5}$
(4) $(x - 1)(x^2 - x - 7)$	20.2 (p.160)
(5) $(x + 2)(x^2 - x - 3)$	

(1) $x = 1, -2$	(12) $x < -1$
(2) $x = 1, 1 \pm \sqrt{3}$	(13) $x < \frac{9}{5}$
(3) $x = 1, -2, 3$	(14) $x > -\frac{11}{29}$
(4) $x = 1, 2, 5$	(15) $x < -\frac{31}{2}$
(5) $x = 1, 3, \frac{1}{3}$	21.2 (p.165)
(6) $x = -2, -1 \pm \sqrt{2}$	(1) $-3 < x < 7$
(7) $x = 1, 2, 3$	(2) $-1 < x < 2$
(8) $x = 1, 2$	(3) $\frac{1}{3} \leq x \leq 3$
20.3 (p.161)	21.3 (p.166)
(1) $a = 3$	(1) $x > 2$
(2) $x = 1 \pm 2i$	(2) $-3 < x < 2$
20.4 (p.161) $a = b = 8, x = 1 \pm \sqrt{3}i$	(3) $3 < x \leq 6$
21.1 (p.164)	(4) $-4 \leq x < 21$
(1) $x > \frac{1}{2}$	(5) $\frac{11}{12} < x \leq 3$
(2) $x > 4$	(6) $\frac{41}{2} < x < 24$
(3) $x > -1$	(7) $0 < x < 11$
(4) $x < -\frac{7}{2}$	22.1 (p.168) $A = 2, B = -5, C = 12$
(5) $x > 1$	22.2 (p.168) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$
(6) $x > -1$	22.3 (p.168) $A = 3, B = -2, C = -1$
(7) $x < 1$	22.4 (p.168) $a+b = -c, b+c = -a, c+a = -b$ より
(8) $x \geq -3$	$(a+b)(b+c)(c+a) + abc$
(9) $x \geq 96$	$= (-c)(-a)(-b) + abc$
(10) $x > \frac{9}{11}$	$= -abc + abc = 0$
(11) $x < 60$	

22.5 (p.168) $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-b$ を利用する.

$$\begin{aligned} & a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right) \\ & +c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+3 \\ & =\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+3 \\ & =\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3 \\ & =\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}+3 \\ & =-1-1-1+3=0 \end{aligned}$$

22.6 (p.169) $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=k$ とおくと $x=ak$, $y=bk$ より

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2}=\left(\frac{x}{a}\right)^2=k^2 \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2} \\ & =\frac{(ak)^2-(ak)(bk)+(bk)^2}{a^2-ab+b^2} \\ & =\frac{k^2(a^2-ab+b^2)}{a^2-ab+b^2}=k^2 \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad \frac{x^2}{a^2}=\frac{x^2-xy+y^2}{a^2-ab+b^2}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \frac{pa+rx}{qa+sx} \\ & =\frac{pa+r(ak)}{qa+s(ak)} \\ & =\frac{a(p+rk)}{a(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk} \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{pb+ry}{qb+sy} \\ & =\frac{pb+r(bk)}{qb+s(bk)} \\ & =\frac{b(p+rk)}{b(q+sk)}=\frac{p+rk}{q+sk} \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より} \quad \frac{pa+rx}{qa+sx}=\frac{pb+ry}{qb+sy}$$

22.7 (p.169) $\frac{ax+by}{a+b}=\frac{x+y}{2}$ の両辺に $2(a+b)$ を掛けると

$$2(ax+by)=(a+b)(x+y)$$

$$2ax+2by=(a+b)x+(a+b)y$$

$$(a-b)x+(-a+b)y=0$$

$$(a-b)x-(a-b)y=0$$

$$(a-b)(x-y)=0$$

よって, $a-b=0$ または $x-y=0$

したがって $a=b$ または $x=y$

22.8 (p.169) $\frac{b+2c}{a}=\frac{c+2a}{b}=\frac{a+2b}{c}=k$ とおいて, $b+2c=ak \cdots \textcircled{1}$, $c+2a=bk \cdots \textcircled{2}$, $a+2b=ck \cdots \textcircled{3}$ とし, $\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ の辺々を加えると

$$3a+3b+3c=ak+bk+ck$$

$$3(a+b+c)=k(a+b+c)$$

$$(3-k)(a+b+c)=0$$

ここで, $a+b+c \neq 0$ より $k=3$ を得る. これを $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ に代入し, c を消去すると $a=b$ となり, さらに $a=b=c$ である.

22.9 (p.170)

(1)

$$\begin{aligned} & a^2+b^2-2(a+b-1) \\ & =a^2-2a+1+b^2-2b+1 \\ & =(a-1)^2+(b-1)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & a^4 + b^4 - ab(a^2 + b^2) \\ &= a^4 - a^3b - ab^3 + b^4 \\ &= a^3(a - b) - b^3(a - b) \\ &= (a - b)(a^3 - b^3) \\ &= (a - b)(a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a - b)^2 \left\{ \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

22.10 (p.171) $A > 0, B > 0$ のとき $\frac{A+B}{2} \geq \sqrt{AB}$ を利用する.

$$(1) \quad a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 2$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & a + b \geq 2\sqrt{ab}, \\ & \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \\ & \text{上式の辺々を掛けると} \\ & (a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 2\sqrt{ab} \times \frac{2}{\sqrt{ab}} = 4 \end{aligned}$$

$$(3) \quad a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b+c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c+a \geq 2\sqrt{ca}$$

上式の辺々を掛けると

$$\begin{aligned} & (a+b)(b+c)(c+a) \\ & \geq 2\sqrt{ab} \times 2\sqrt{bc} \times 2\sqrt{ca} = 8abc \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}} = 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}, \\ & \frac{b}{a} + \frac{d}{c} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{d}{c}} = 2\sqrt{\frac{bd}{ac}} \\ & \text{上式の辺々を掛けると} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \right) \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \right) \\ & \geq 2\sqrt{\frac{ac}{bd}} \times 2\sqrt{\frac{bd}{ac}} = 4 \end{aligned}$$

22.11 (p.171)

$$(1) \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

$$(2) \quad \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) > \frac{2}{a+b}$$

$$(4) \quad a^3 + b^3 > ab(a+b)$$

22.12 (p.171) $C > A > B$

23.1 (p.173) 34

23.2 (p.173) 374

23.3 (p.173) 25, 49

23.4 (p.173) $\frac{195}{90}$

23.5 (p.173) 17 と 18, -18 と -17

23.6 (p.173) $\frac{58}{5}$ と $\frac{28}{5}$

23.7 (p.174) 55 と 17

23.8 (p.174) 48

23.9 (p.174) 57

23.10 (p.174) 374

23.11 (p.174) 36

23.12 (p.174) 16 年後

23.13 (p.174) 12 年前

23.14 (p.174) 5 年前

23.15 (p.175) 父 39 才, 子ども 13 才

23.16 (p.175) 3 年前

23.17 (p.175) 父 32 才, 母 25 才, 子 5 才

23.18 (p.175) 父 46 才, 長子 20 才, 次子 18 才, 末子 16 才

23.19 (p.175) 5 円 30 枚, 10 円 6 枚

23.20 (p.175) 40 円 55 枚, 60 円 45 枚

23.21 (p.175) みかん 14 個, りんご 6 個

23.22 (p.175) ノート 110 円, 鉛筆 90 円

23.23 (p.175) A 150g, B 120g

23.24 (p.176) 100 円 92 本, 120 円 34 本

23.25 (p.176) 10 円 35 枚, 20 円 25 枚, 25 円 15 枚

23.26 (p.176) 80 円 4 本, 50 円 11 本

23.27 (p.176) 10円10枚, 50円8枚, 100円12枚	23.56 (p.180) 男560人, 女420人
23.28 (p.176) (10,000円, 5,000円, 1,000円)=(2, 18, 10), (6, 9, 15)	23.57 (p.180) 20 %
23.29 (p.176) 60本	23.58 (p.180) 20 %
23.30 (p.176) 10人, 87本	23.59 (p.180) 8 %
23.31 (p.177) 7人	23.60 (p.180) 4.5 %
23.32 (p.177) 16個, 6人	23.61 (p.181) 100g
23.33 (p.177) 62人, 10室	23.62 (p.181) 50g
23.34 (p.177) (腰掛け, 生徒) = (65, 285), (66, 289), (67, 293), (68, 297), (69, 301)	23.63 (p.181) 120g
23.35 (p.177) 10人	23.64 (p.181) 40g
23.36 (p.177) 47人, 36,200円	23.65 (p.181) 300g
23.37 (p.177) 150人	23.66 (p.181) 50g
23.38 (p.177) 5人	23.67 (p.181) 60g
23.39 (p.177) 3500台	23.68 (p.181) 12.5g
23.40 (p.177) 5000円	23.69 (p.181) 200g
23.41 (p.178) 350人	23.70 (p.181) 100g以上 600g以下
23.42 (p.178)	23.71 (p.182) 8 % 500g, 20 % 100g
(1) 男3,000人, 女750人	23.72 (p.182) 5 % 200g, 10 % 300g
(2) 2,850人	23.73 (p.182) 5 % 2kg, 8 % 1kg
23.43 (p.178) 男927人, 女408人	23.74 (p.182) 6 % $\frac{1000}{3}$ g, 3 % $\frac{500}{3}$ g
23.44 (p.178) 男子324人, 女子528人	23.75 (p.182) 2 %
23.45 (p.178) 男子3680名, 女子1620名	23.76 (p.182) A 8 %, B 12 %
23.46 (p.179) B 9,000人, C 10,800人	23.77 (p.182) A 8 %, B 18.5 %
23.47 (p.179) 24cm	23.78 (p.182) 甲10 %, 乙5 %, 丙15 %
23.48 (p.179)	23.79 (p.183) 186cm
甲: 収入600万円, 支出540万円	23.80 (p.183) 89点
乙: 収入360万円, 支出300万円	23.81 (p.183) 174cm
23.49 (p.179) A社1260台, B社1620台	23.82 (p.183) 74.5点
23.50 (p.179) 棒37cm, ひも132cm	23.83 (p.183) 75点
23.51 (p.179) 30万円	23.84 (p.184) 時速72km
23.52 (p.179) 60cm	23.85 (p.184) 時速24km
23.53 (p.180) 4800円	23.86 (p.184) 時速48km
23.54 (p.180) 36人	23.87 (p.184) 270km
23.55 (p.180) 54人	23.88 (p.184) 300km, 時速 $27\frac{3}{11}$ km
	23.89 (p.184) 7.5km
	23.90 (p.184) 時速25km
	23.91 (p.185) 5km
	23.92 (p.185) 時速60km
	23.93 (p.185) 時速100km

23.94 (p.185) 100m
23.95 (p.185) 電車 80m, 時速 72km
23.96 (p.185) 2175m
23.97 (p.186) 30km, 18 分後
23.98 (p.186) 時速 16km, 120km
23.99 (p.186) 船: 時速 10km, 流れ: 時速 2km
23.100 (p.186) 時速 1km
23.101 (p.186) 時速 2km
23.102 (p.186) 時速 9km
23.103 (p.186) 時速 14km
23.104 (p.187) 時速 7km
23.105 (p.187) 3 人
23.106 (p.187) 42 日目
23.107 (p.187) 専用機 17 個, 汎用機 4 個
23.108 (p.187) 9 日
23.109 (p.188) 6 日
23.110 (p.188) 1 時間 12 分
23.111 (p.188) 60 日
23.112 (p.188) 5 日
23.113 (p.188) 8 分
23.114 (p.188) A 君 10 日, B 君 15 日, C 君 30 日
23.115 (p.188) $2\frac{2}{3}$ 時間
23.116 (p.188) $18\frac{6}{35}$ 分
23.117 (p.188) A 60 日, B 48 日, C 40 日
23.118 (p.189) 8 日
23.119 (p.189) 10 日
23.120 (p.190) 4 時間 21 分 $49\frac{1}{11}$ 秒
23.121 (p.190) 縦 8m, 横 12m
23.122 (p.190) (縦, 横) = (6cm, 7cm), (7cm, 6cm)
23.123 (p.190) 3cm, 9cm
23.124 (p.191) 短辺 15cm, 長辺 20cm
23.125 (p.191) 5m
23.126 (p.191) 12m と 15m

23.127 (p.191) 縦 2m, 横 3m
23.128 (p.191) 60m^2
23.129 (p.191) 縦 5cm と 横 7cm
23.130 (p.191) 30m
23.131 (p.191) 他の一辺 60cm, 斜辺 65cm
23.132 (p.192) 13cm
23.133 (p.192) 縦 14cm, 横 9cm
24.1 (p.193)
 (1) 5
 (2) 10
 (3) 20
 (4) 13

24.1 (p.193) $AB = \sqrt{37}$, $BC = \sqrt{37}$, $CA = 5\sqrt{2}$
24.3 (p.194)
 (1) $BC = CA$ の二等辺三角形
 (2) $B = 90^\circ$ の直角三角形

24.4 (p.195) $C(5, 0)$
24.5 (p.196) 内分点 $(6, \frac{19}{5})$, 外分点 $(18, 11)$
24.6 (p.196) $(4, 5)$
24.7 (p.196) $C(4, 6)$
24.8 (p.196) $C(-1, -3)$, $AB = 5\sqrt{5}$
24.9 (p.196)
 (1) $3\sqrt{5}$
 (2) $(3, 1)$
 (3) $(-3, 4)$

25.1 (p.198)
 (1) $y = 3x + 2$
 (2) $y = 2x - 1$
 (3) $y = \frac{1}{2}x + 3$
 (4) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
 (5) $y = -\frac{1}{3}x - \frac{14}{3}$

$$(6) y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3} + 2$$

25.2 (p.199)

$$(1) y = -x + 5$$

$$(2) y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3}$$

$$(3) y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$(4) y = -\frac{2}{3}x + \frac{23}{3}$$

$$(5) y = \frac{1}{2}x - 3$$

$$(6) y = -\frac{3}{2}x + 6$$

25.3 (p.199)

$$(1) y = -5x - 10$$

$$(2) y = -3x + 12$$

$$(3) y = -2x + 10$$

25.4 (p.200) (1)//(6), (4)//(5),

(1) $\perp$ (2), (2) $\perp$ (6)

25.5 (p.201)

$$(1) y = 2x - 7$$

$$(2) y = -\frac{7}{8}x + \frac{53}{8}$$

$$(3) y = -\frac{1}{4}x + \frac{11}{4}$$

$$(4) y = 4x - 6$$

$$(5) y = \frac{3}{2}x$$

$$(6) y = -\frac{1}{2}x + 6$$

25.6 (p.201)

$$(1) y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$(2) y = -\frac{1}{2}x$$

25.7 (p.201) 平行のとき $m = 3$, 垂直のとき $m = 1, \frac{1}{2}$

25.8 (p.201)

$$(1) a = 4, -\frac{5}{2}$$

$$(2) a = -1, -\frac{9}{2}$$

$$\mathbf{25.9} \text{ (p.202) } -\frac{1}{6}$$

$$\mathbf{25.10} \text{ (p.202) } y = \frac{9}{14}x$$

$$\mathbf{25.11} \text{ (p.202) } y = -3x - 15$$

$$\mathbf{25.12} \text{ (p.202) } y = 2x + 4$$

$$\mathbf{25.13} \text{ (p.203) } y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{6}$$

$$\mathbf{25.14} \text{ (p.203) } y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{2}$$

25.15 (p.203)

$$(1) \frac{8}{3}, \frac{3}{2}$$

$$(2) 6$$

$$(3) y = -\frac{4}{3}x$$

25.16 (p.203)

$$(1) y = -\frac{1}{2}x + 3$$

$$(2) (0, 3)$$

$$(3) \frac{45}{4}$$

25.17 (p.203)

$$(1) y = -3$$

$$(2) y = -3x + 9$$

$$(3) y = \frac{3}{2}x + 9$$

$$(4) (4, -3)$$

$$(5) (-8, -3)$$

$$(6) 72$$

25.18 (p.204)

$$(1) a : y = \frac{5}{6}x + 4, b : y = -3x + 4$$

$$(2) \frac{184}{15}$$

25.19 (p.204) $\frac{49}{5}$

25.20 (p.204) $\frac{1}{80}$

25.21 (p.204) 8

25.22 (p.204)

$$(1) y = 2x + 5$$

$$(2) y = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$(3) 2$$

$$(4) \frac{81}{20}$$

25.23 (p.204) $a = 5$

25.24 (p.204) $a = \frac{43}{59}$

25.25 (p.205) $a = 0, b = 1$

25.26 (p.205) $m = 3$

25.27 (p.205) $\frac{5}{17}\sqrt{17}$

25.28 (p.205) $\frac{11}{5}$

25.29 (p.207) $2x + 3y + 6 = 0$

25.30 (p.207)

$$(1) (3, 0)$$

$$(2) (0, 2)$$

$$(3) 2x - 3y = 6$$

$$(4) -2x + 3y = 6$$

25.31 (p.207)

$$(1) (2, 0)$$

$$(2) (0, 3)$$

$$(3) 3x - 2y = 6$$

25.32 (p.208)

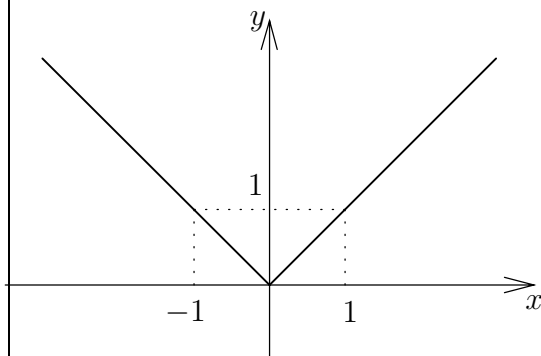
$$(1) y = 2x - 3$$

$$(2) y = -2x + 3$$

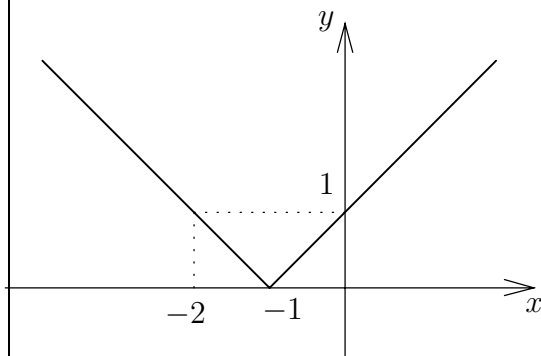
$$(3) y = -\frac{1}{2}x - 1$$

25.33 (p.209)

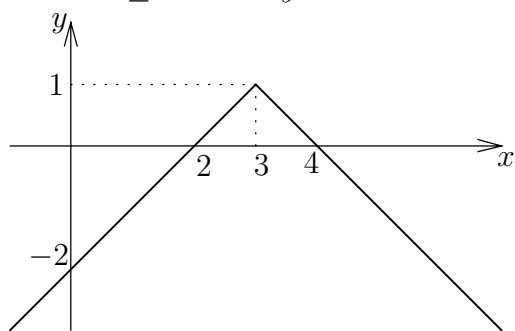
$$(1) \begin{aligned} x < 0 \text{ のとき } y &= -x, \\ x \geq 0 \text{ のとき } y &= x \end{aligned}$$



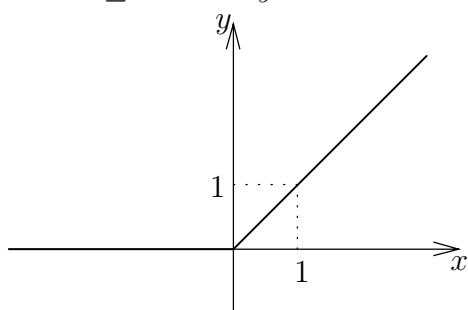
$$(2) \begin{aligned} x < -1 \text{ のとき } y &= -x - 1, \\ x \geq -1 \text{ のとき } y &= x + 1 \end{aligned}$$



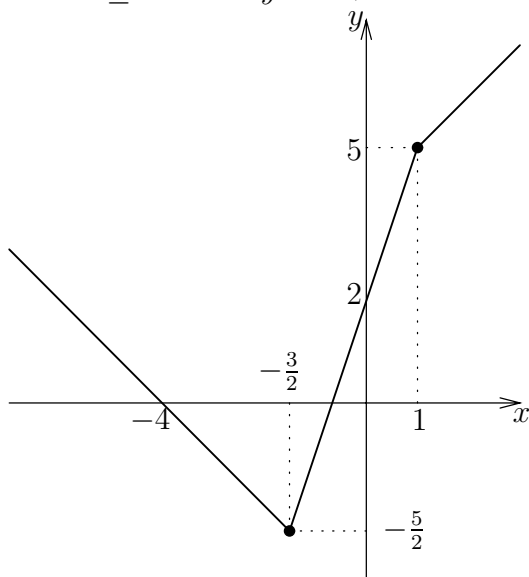
- (3) $x < 3$ のとき $y = x - 2$,
 $x \geq 3$ のとき $y = -x + 4$



- (4) $x < 0$ のとき $y = 0$,
 $x \geq 0$ のとき $y = x$

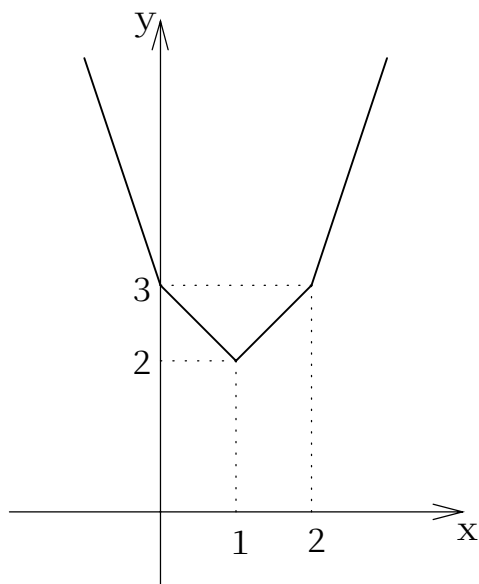


- (5) $x < -\frac{3}{2}$ のとき $y = -x - 4$,
 $-\frac{3}{2} \leq x < 1$ のとき $y = 3x + 2$,
 $x \geq 1$ のとき $y = x + 4$



- (6) $x < 0$ のとき $y = -3x + 3$,

- $0 \leq x < 1$ のとき $y = -x + 3$,
 $1 \leq x < 2$ のとき $y = x + 1$,
 $x \geq 2$ のとき $y = 3x - 3$



25.34 (p.210) (2, 2)

25.35 (p.210) (-3, 1)

26.1 (p.211) $a = \frac{3}{4}$, $x = \pm 4$

26.2 (p.211) $y = (x - 2)^2 + 1$

26.3 (p.213)

(1) -4, -1

(2) $-x^2$, -1, 4

26.4 (p.213)

(1) 頂点 (4, 5), 軸 $x = 4$

(2) 頂点 $(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2})$, 軸 $x = -\frac{3}{2}$

(3) 頂点 $(\frac{3}{4}, \frac{25}{8})$, 軸 $x = \frac{3}{4}$

(4) 頂点 (2, 4), 軸 $x = 2$

(5) 頂点 $(-\frac{7}{6}, \frac{23}{12})$, 軸 $x = -\frac{7}{6}$

26.5 (p.213) (-2, -2)

26.6 (p.213)

(1) $y = x^2$

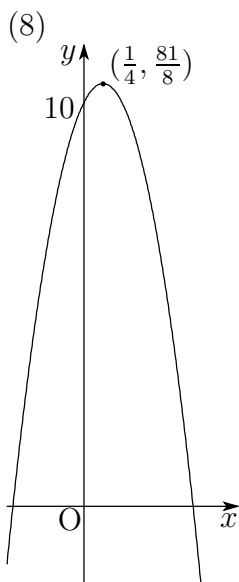
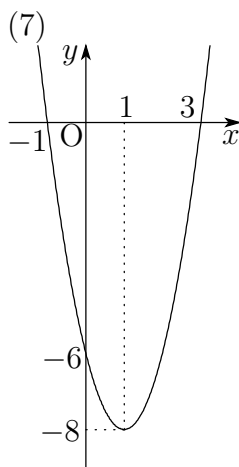
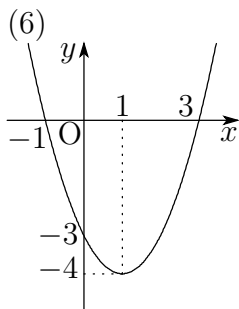
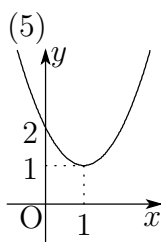
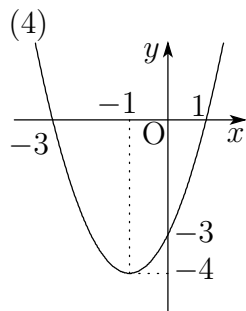
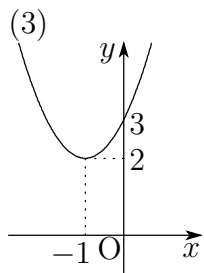
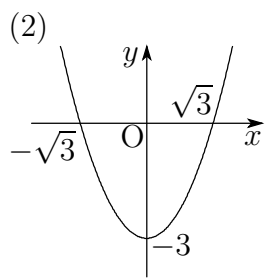
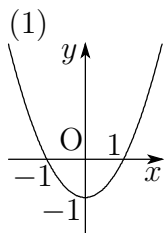
(2) $y = x^2 - 2$

26.7 (p.214)

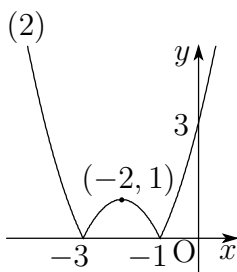
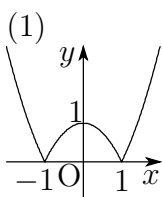
(1) $y = x^2 - 2x$

(2) $y = x^2 - 4x, y = x^2 + 4x$

26.8 (p.214)



26.9 (p.215)



26.10 (p.215) $A(-1-\sqrt{3}, 0)$, $B(-1, 3)$, $C(0, 2)$, $D(-1+\sqrt{3}, 0)$

26.11 (p.215) $y = -(x-1)^2 + 4$

26.12 (p.216) $y = 2(x-3)^2 - 5$

26.13 (p.216) $a = b = c = \frac{1}{2}$

26.14 (p.216) $y = 2x^2 - 3x + 2$

26.15 (p.216) $y = x^2 + 3x + 2$

26.16 (p.216)

(1) $y = 2x^2 - 12x + 16$

(2) $(2, 0)$, $(4, 0)$

(3) $(3, -2)$

26.17 (p.216) $y = x^2 - 4x + 3$, $(2, -1)$

26.18 (p.217)

(1) $x = 2$ のとき最小値 -5

(2) $x = 2$ のとき最大値 25

(3) $x = 2$ のとき最大値 48

26.19 (p.217)

(1) 頂点 $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, 軸 $x = -\frac{1}{2}$,
 $x = -\frac{1}{2}$ のとき最小値 $-\frac{1}{4}$

(2) 頂点 $(2, 5)$, 軸 $x = 2$,
 $x = 2$ のとき最大値 5

26.20 (p.217)

(1) $0, -6$

(2) $0, -1, 3$

(3) $1, 1$

(4) 小, $1, -8$

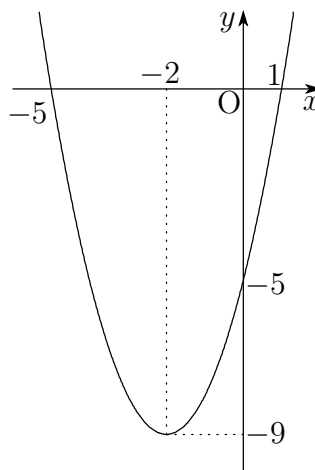
26.21 (p.218)

(1) $x = -2$ のとき最小値 -9

(2) $(0, -5)$

(3) $(-5, 0)$, $(1, 0)$

(4)



26.22 (p.218) $m = 6$, $n = 25$

26.23 (p.218)

(1) $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$

(2) $\frac{5}{2}$

(3) $x = \frac{3}{4}$ のとき最小値 $-\frac{25}{8}$

26.24 (p.218) $m = 2$, $n = -1$,
 $x = -1$ のとき最小値 -2

26.25 (p.218) $a = 18$

26.26 (p.218)

(1) $x = 5$ のとき最小値 -21

(2) $a = -1, 2$

26.27 (p.219) $x = 3$ のとき最大値 5 ,
 $x = 1$ のとき最小値 1

26.28 (p.219) $x = 5$ のとき最大値 10 ,
 $x = 2$ のとき最小値 1

26.29 (p.219) $x = 0$ のとき最大値 -2 ,
 $x = 2$ のとき最小値 -6

26.30 (p.219) $x = 4$ のとき最大値 3 ,
 $x = 2$ のとき最小値 -1

26.31 (p.219) $x = 0$ のとき最大値 3 ,
 $x = 2$ のとき最小値 -1

26.32 (p.219) $x = -2$ のとき最大値 5 ,
 $x = 2$ のとき最小値 -11

26.33 (p.219) $x = -1$ のとき最大値 8 ,
 $x = 1$ のとき最小値 0

26.34 (p.220) $72, 57$

26.35 (p.220) $-35 \leq (2x - 1)(5 - x) \leq \frac{81}{8}$

26.36 (p.220) $x = 1$ のとき最大値 4 ,
 $x = -1$ のとき最小値 0

26.37 (p.220) 下, $3, -2, 10, -3, 2$

26.38 (p.220) $x = 1, y = 1$ のとき最
小値 2

26.39 (p.220) $x = \frac{15}{4}, y = \frac{5}{4}$ のとき最
小値 $\frac{75}{4}$

26.40 (p.220)

(1) $a = -\frac{1}{2}, b = 1$

(2) $x = 2$ のとき最大値 $\frac{1}{2}$, $x = 4$ のとき
最小値 $-\frac{7}{2}$

26.41 (p.221) $(a, b) = (0, 4), (4, 0)$

26.42 (p.221) $a = -2, b = 4, c = 4$

26.43 (p.221)

(1) $y = -\frac{9}{8}m^2 + 2m$

(2) $m = \frac{8}{9}$ のとき最大値 $\frac{8}{9}$

26.44 (p.221) $p = \frac{3}{4}$

26.45 (p.221) 55 円

26.46 (p.222) 150 円

26.47 (p.222) 125 円

26.48 (p.222) $22,500$ 円

26.49 (p.222) 2 秒後, 20m

26.50 (p.222) 半径 $\frac{\ell}{4}$, 面積 $\frac{\ell^2}{16}$

26.51 (p.222)

(1) 直角をはさむ 2 辺がともに 12cm

(2) 直角をはさむ 2 辺がともに 12cm

26.52 (p.222) 最短距離 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $P(\frac{5}{2}, \frac{9}{2})$

26.53 (p.222) $(-2, 9), (2, 1)$

26.54 (p.222) $(-2, 5), (3, 0)$

26.55 (p.222) $(-2, -1), (3, 9)$

26.56 (p.223) $A(1, 1), B(-2, 4)$

26.57 (p.223)

(1) $A(-2, 4), B(4, 16)$

(2) $6\sqrt{5}$

(3) $1:2$

26.58 (p.223) $a = 3, b = -2, B(1, 1)$

26.59 (p.224)

(1) $m = \frac{3}{4}$

(2) $y = 3$

(3) $y = \frac{3}{2}x + 6$

26.60 (p.224)

(1) $P(3, 3)$

(2) $y = -x + 6$

(3) 27

26.61 (p.224)

(1) $y = 2x^2$

(2) $y = 2x + 4$

(3) $Q(2, 8)$

26.62 (p.225)

(1) $a = \frac{1}{4}, b = 2$

(2) $y = -2x + \frac{9}{2}$

(3) $C(2, 1)$

26.63 (p.225)

(1) $A(-1, \frac{1}{2}), B(2, 2)$

(2) $\frac{3}{2}$

(3) $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$

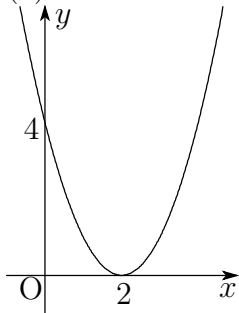
26.64 (p.225)

(1) $(-3, 0), (\frac{1}{2}, 0)$

(2) $(-3, 0), (1, 4)$

26.65 (p.225)

(1)



(2) $B(6, 16)$

(3) $C(3, 1)$

26.66 (p.225) $y = 2x^2 - 5$

26.67 (p.225) $y = -x^2 - 4x$

26.68 (p.226)

(1) $(1, -3)$

(2) $y = -2x^2 - 4x + 1$

(3) $y = 2x^2 - 20x + 44$

26.69 (p.226)

(1) 頂点 $(1, 4)$

(2) $y = -3x^2 - 6x - 7$

26.70 (p.229) $a = 2$ のとき $(1, 0)$, $a = -2$ のとき $(-1, 0)$

26.71 (p.229) 頂点 $(1, 10)$, $a = 4, -8$

26.72 (p.229) $m = 2, -10$

27.1 (p.234)

(1) $-\frac{1}{2} < x < 5$

(2) $0 < x < 1$

(3) $x < 0, 1 < x$

(4) $-1 < x < 4$

(5) $x < -1, 4 < x$

(6) $-6 < x < 1$

(7) $-1 \leq x \leq 6$

(8) $x < -5, 2 < x$

(9) $x < -2, 5 < x$

(10) $-2 < x < 3$

(11) $x < -1, 5 < x$

(12) $x < -3, 4 < x$

(13) $-3 < x < 1$

(14) $-6 < x < 9$

(15) $x < 3, 4 < x$

(16) $-4 < x < 18$

$$(17) \quad x < -\frac{1}{2}, \quad 0 < x$$

$$(18) \quad x \leq -4, \quad 6 \leq x$$

$$(19) \quad x < -\frac{1}{2}, \quad 5 < x$$

$$(20) \quad -3 < x < -\frac{1}{2}$$

$$(21) \quad x < \frac{1}{2}, \quad 2 < x$$

$$(22) \quad -\frac{1}{2} < x < 4$$

$$(23) \quad x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3} < x$$

$$(24) \quad -\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$(25) \quad -1 \leq x \leq \frac{4}{3}$$

$$(26) \quad x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3} < x$$

$$(27) \quad x \leq -\frac{3}{2}, \quad \frac{1}{2} \leq x$$

$$(28) \quad \frac{1}{3} < x < 3$$

$$(29) \quad -\frac{1}{4} < x < 1$$

$$(30) \quad 1 - \sqrt{6} \leq x \leq 1 + \sqrt{6}$$

$$(31) \quad x < \frac{-2-\sqrt{6}}{2}, \quad \frac{-2+\sqrt{6}}{2} < x$$

27.2 (p.236)

$$(1) \quad -1 < x < 1$$

$$(2) \quad x = 1, \quad 4$$

$$(3) \quad 0 < x < 2$$

27.3 (p.237)

$$(1) \quad -\frac{7}{2} \leq x < 1$$

$$(2) \quad x < -1, \quad \frac{3}{2} < x < 3$$

$$(3) \quad -5 < x < -3, \quad \frac{5}{2} < x < 4$$

$$(4) \quad 4 < x < 5$$

$$(5) \quad -3 < x \leq 0, \quad 2 \leq x < 4$$

$$(6) \quad -3 < x < -2, \quad 1 < x < 2$$

$$(7) \quad -5 < x < -1, \quad 3 < x < 7$$

$$(8) \quad -3 < x < -1$$

$$(9) \quad -4 < x < -2, \quad 3 < x < 5$$

$$(10) \quad -4 < x < -2, \quad 1 < x < 5$$

$$(11) \quad -2 < x < -\frac{2}{3}, \quad 2 < x$$

$$(12) \quad 1 < x \leq \frac{3}{2}, \quad 5 \leq x < 7$$

$$(13) \quad -5 < x < -3, \quad \frac{5}{2} < x < 4$$

$$(14) \quad -7 < x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3} < x < 5$$

$$(15) \quad \frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$$

$$(16) \quad 4 - 2\sqrt{7} < x < 2, \quad 5 < x < 4 + 2\sqrt{7}$$

$$(17) \quad -1 - \sqrt{26} < x < -\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{3} < x < -1 + \sqrt{26}$$

$$\mathbf{27.4} \text{ (p.239)} \quad x = 2$$

$$\mathbf{27.5} \text{ (p.239)} \quad 7 \text{ 個}$$

$$\mathbf{27.6} \text{ (p.239)} \quad a = -1, \quad b = -6$$

$$\mathbf{27.7} \text{ (p.239)} \quad p = 5, \quad q = -1$$

27.8 (p.239) 1辺を 5cm より小さくするか, 8cm より大きくする.

$$\mathbf{27.9} \text{ (p.240)} \quad k < -3, \quad 5 < k$$

$$\mathbf{27.10} \text{ (p.240)} \quad k < 2, \quad 8 < k$$

$$\mathbf{27.11} \text{ (p.241)} \quad k \leq 5$$

$$\mathbf{27.12} \text{ (p.241)} \quad 0 < k < \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{27.13} \text{ (p.241)} \quad -1 < m < 4$$

$$\mathbf{27.14} \text{ (p.241)}$$

$$(1) \quad x = -\frac{3}{2}, \quad 4$$

$$(2) \quad x < -\frac{3}{2}, \quad 4 < x$$

$$(3) \quad x = \frac{5}{4} \text{ のとき最小値 } -\frac{121}{8}$$

27.15 (p.242) $0 < c < 3$

27.16 (p.242) $a = 0$

27.17 (p.242) $-6 < m < 2$

27.18 (p.242) $m > -12$

28.1 (p.244)

(1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$

(2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$

(3) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$

(4) $(x-3)^2 + y^2 = 9$

(5) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$

(6) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 9$

28.2 (p.245)

(1) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 17$

(2) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$

(3) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 17$

28.3 (p.245)

(1) 中心 $(4, 2)$, 半径 3

(2) 中心 $(3, 1)$, 半径 4

(3) 中心 $(-1, 2)$, 半径 6

(4) 中心 $(-2, 3)$, 半径 1

(5) 中心 $(2, -1)$, 半径 2

(6) 中心 $(-2, 0)$, 半径 2

(7) 中心 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 半径 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

28.4 (p.245) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$

28.5 (p.246) $x^2 + y^2 - \frac{15}{7}x - \frac{25}{7}y = 0$

28.6 (p.246) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 8 = 0$

28.7 (p.246) $(3, 4), (5, 0)$

28.8 (p.246) $(\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$

28.9 (p.246) $(1, 2)$

28.10 (p.246) 半径 5, 線分の長さ 8

28.11 (p.246)

(1) $\sqrt{5}$

(2) 2

28.12 (p.247) $4\sqrt{5}$

28.13 (p.247) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

28.14 (p.248) $y = \sqrt{3}x + 4, y = \sqrt{3}x - 4$

28.15 (p.248) $y = x$

28.16 (p.248) $y = x, y = -\frac{7}{17}x$

28.17 (p.250) $a = \pm 5$

28.18 (p.250) $-\sqrt{5} < c < \sqrt{5}$

28.19 (p.251) $\begin{cases} \text{接点 } (0, 1) \\ \text{接線 } y = 1 \end{cases},$

$\begin{cases} \text{接点 } (\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}) \\ \text{接線 } 3x - 4y - 5 = 0 \end{cases}$

29.1 (p.255) $y > 0, y < x, y < -2x + 12$

29.2 (p.255) $y < -\frac{1}{2}x + 1, x^2 + y^2 < 4$

29.3 (p.256)

(1) $y \geq 0, y \leq x + 1, y \leq -x + 4$

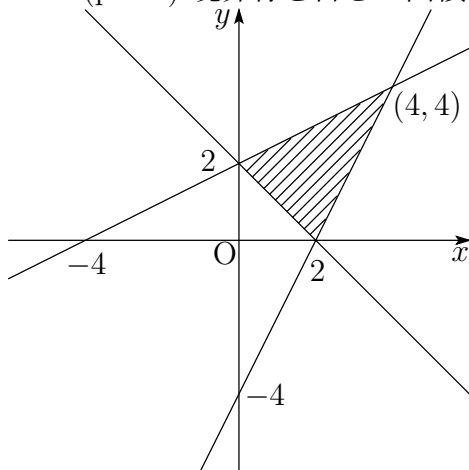
(2) $y > \frac{3}{4}x, x^2 + y^2 < 25$

29.4 (p.256)

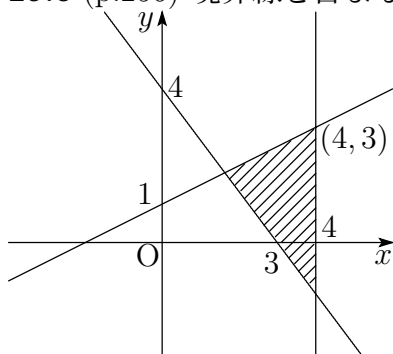
(1) $y \geq \frac{1}{2}x, y \leq 2x, y \leq -x + 3$

(2) $\frac{3}{2}$

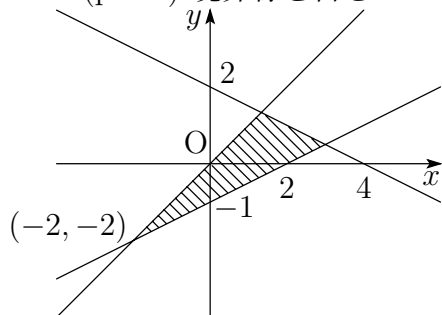
29.5 (p.256) 境界線を含む. 面積は 6.



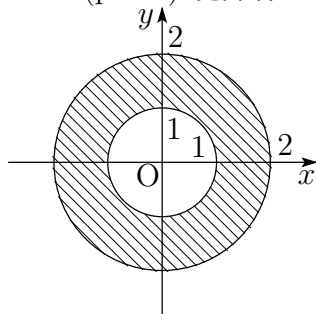
29.6 (p.256) 境界線を含まない



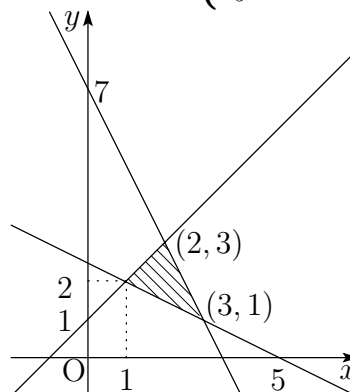
29.7 (p.257) 境界線を含む



29.8 (p.257) 境界線を含まない

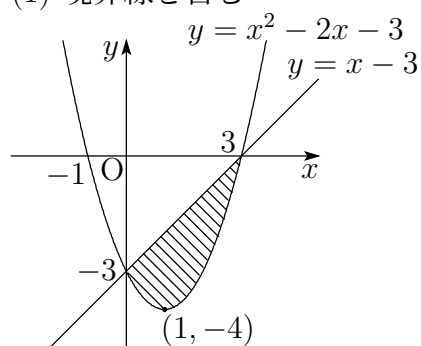


29.9 (p.257)
$$\begin{cases} y < x + 1 \\ y > -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} \\ y < -2x + 7 \end{cases}$$

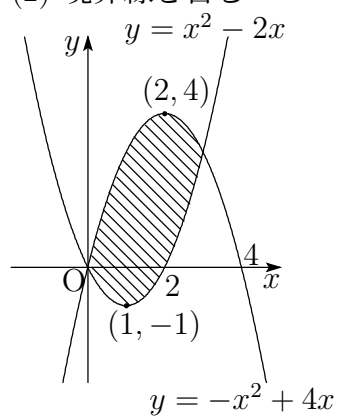


29.10 (p.258)

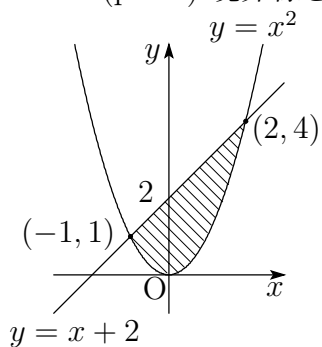
(1) 境界線を含む



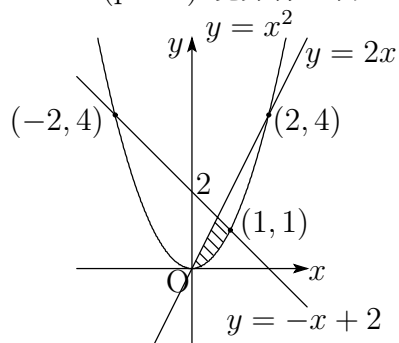
(2) 境界線を含む



29.11 (p.258) 境界線を含む



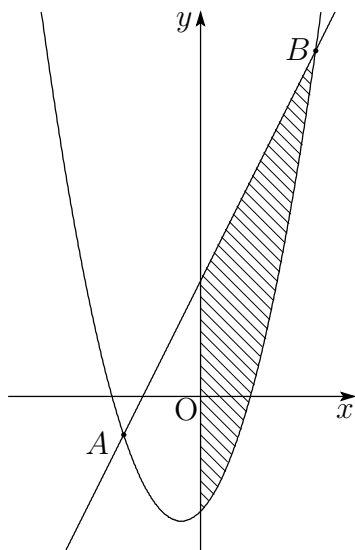
29.12 (p.258) 境界線を含む



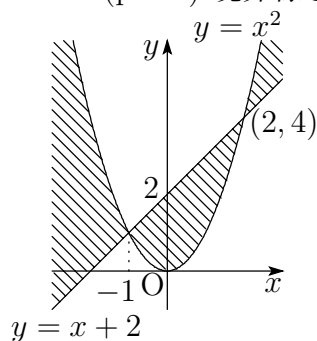
29.13 (p.258)

(1) $A(-2, -1)$, $B(3, 9)$

(2) 境界線を含まない

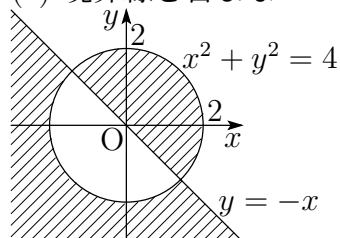


29.14 (p.259) 境界線を含まない

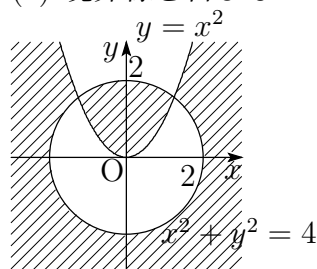


29.15 (p.259)

(1) 境界線を含まない



(2) 境界線を含まない



29.16 (p.259) エ

30.1 (p.261) 4

30.2 (p.263)

(1) 6

(2) 2

(3) 6

(4) 3

(5) 2

(6) $\frac{5}{3}$

(7) $\frac{1}{7}$

(8) 7

30.3 (p.263)

(1) 108

(2) $3a^2$

30.4 (p.264) $a = 1, b = -2$

30.5 (p.264) $a = -3, b = -2$

30.6 (p.265)

(1) $y' = 4x - 3$

(2) $y' = 3x^2 + 6x - 5$

(3) $f'(x) = 12x^3 + 8x$

(4) $y' = \frac{3}{4}x^2 + x - 2$

(5) $y' = 20x + 13$

(6) $y' = 12x - 13$

(7) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 2$

(8) $y' = 3x^2$

(9) $y' = 6x^2 - 10x + 2$

(10) $y' = 4x^3 + 3x^2 - 1$

(11) $y' = 18x - 12$

(12) $y' = 5x^4 + 6x^2 + 1$

(13) $y' = 36x^2 + 124x + 96$

30.7 (p.266)

(1) $15x^2$

(2) $4x^3 + 6x^2 + 6x + 2$

(3) $6x + 1$

(4) $18x + 12$

30.8 (p.267) $f'(a) = 2a$

30.9 (p.267) $f'(2) = 8$

30.10 (p.267) $y = 4x - 12$

30.11 (p.267) $y = 9x - 14$

30.12 (p.267) $y = x - 1$

30.13 (p.267)

(1) $y = 4x - 24$

(2) $y = -\frac{1}{4}x - \frac{11}{4}$

(3) 34

30.14 (p.267)

(1) $(1, -3)$

(2) $y = -2x^2 - 4x + 1$

(3) $y = 2x^2 - 20x + 44$

(4) $y = 4x - 9$

30.15 (p.268) $y = 6x - 9, y = -2x - 1$

30.16 (p.268) $y = 7x - 3, y = -x - 3$

30.17 (p.268)

(1) $2a$

(2) $2a$

(3) $2a$

(4) $2ax - a^2 + 3$

(5) 3 (または -1)

(6) -1 (または 3)

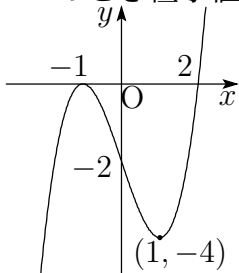
(7) $6x - 6$ (または $-2x + 2$)

(8) $-2x + 2$ (または $6x - 6$)

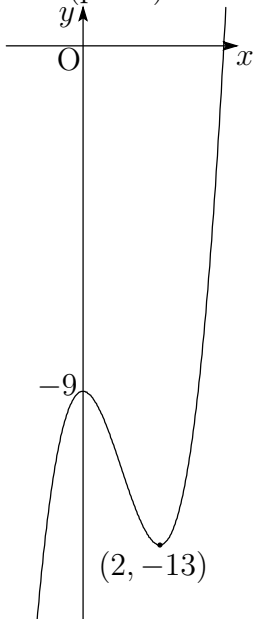
(9) $(3, 12)$ (または $(-1, 4)$)

(10) $(-1, 4)$ (または $(3, 12)$)

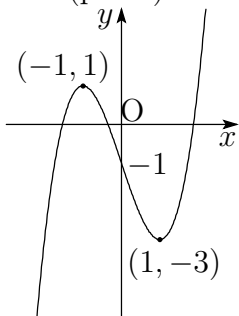
30.18 (p.271) $x = -1$ のとき極大値 0,
 $x = 1$ のとき極小値 -4



30.19 (p.271)



30.20 (p.271)



30.21 (p.271)

- (1) $x = -3$ のとき極大値 29
 $x = 1$ のとき極小値 -3
- (2) $x = 1$ のとき極大値 0
 $x = 2$ のとき極小値 -1

- (3) $x = 3$ のとき極大値 1
 $x = 1$ のとき極小値 -3

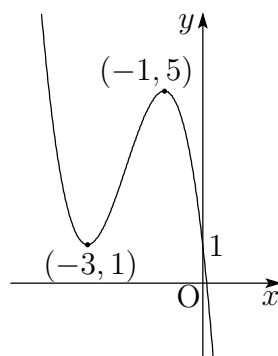
- (4) $x = -2$ のとき極大値 21
 $x = 1$ のとき極小値 -6

- (5) $x = -1$ のとき極大値 1
 $x = 3$ のとき極小値 $-\frac{27}{5}$

30.22 (p.271)

- (1) $(0, 1)$
- (2) $x = -1$ のとき極大値 5
 $x = -3$ のとき極小値 1

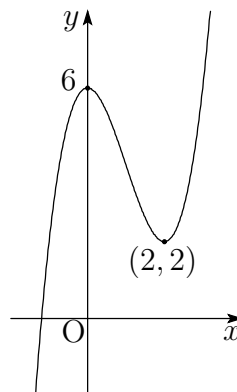
(3)



30.23 (p.271)

- (1) $a = -3, b = 6$
- (2) $x = 0$ のとき極大値 6
 $x = 2$ のとき極小値 2

(3)



30.24 (p.272) 5cm , 2000cm^3

30.25 (p.272) $\frac{5}{3}\text{cm}$

30.26 (p.272) 5cm

30.27 (p.273)

(1) $a = -3$, $b = 0$

(2) 極大値 6

30.28 (p.273) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$,
極小値 -1

30.29 (p.273) $a = 1$, $b = -3$, $c = -24$, $d = 16$

30.30 (p.273) $a < -3$, $3 < a$

31.1 (p.276)

(1) $\frac{1}{4}x^2 + C$

(2) $\frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

(3) $x^3 - 2x^2 + 3x + C$

(4) $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - x + C$

(5) $\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 3x + C$

(6) $\frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$

(7) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4 + C$

(8) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$

31.2 (p.276)

(1) $x^3 + x^2 - x + C$

(2) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$

31.6 (p.276) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{41}{6}$

31.4 (p.278)

(1) 20

(2) $\frac{5}{2}$

(3) $\frac{4}{3}$

(4) $\frac{32}{3}$

(5) 39

(6) $-\frac{20}{3}$

(7) 54

(8) 18

31.5 (p.278) $x = 3$

31.6 (p.280) 12

31.7 (p.280) $\frac{8}{3}$

31.8 (p.280) $\frac{32}{3}$

31.9 (p.281) $\frac{2}{3}$

31.10 (p.281) $\frac{32}{3}$

31.11 (p.281) $\frac{4}{3}$

31.12 (p.281) $\frac{9}{2}$

31.13 (p.282) 8

31.14 (p.282) $\frac{1}{2}$

31.15 (p.283)

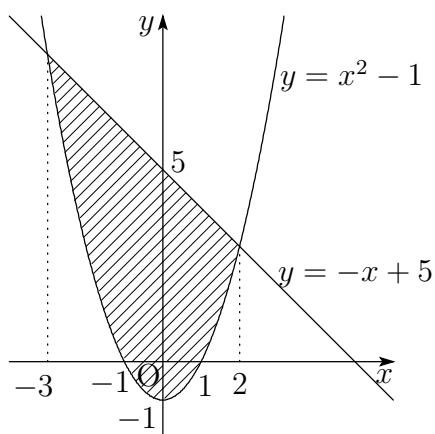
(1) $\ell = 1$, $m = 6$, $n = \frac{1}{3}$

(2) $\frac{81}{2}$

31.16 (p.283) $\frac{343}{24}$

31.17 (p.283) 4

31.18 (p.283)



面積は $\frac{125}{6}$

31.19 (p.283) $\frac{9}{2}$

31.20 (p.283) $\frac{8}{3}$

31.21 (p.283) $\frac{1}{6}$

31.22 (p.284) $a = 6$

31.23 (p.284) $x = -1$ のとき極大値 4,
 $x = 1$ のとき極小値 0. 面積 $\frac{9}{2}$

31.24 (p.284) $\frac{4}{3}$

32.1 (p.285)

	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

32.2 (p.285) $2 - \sqrt{3}$

32.3 (p.286) $\sqrt{2} - 1$

32.4 (p.286) 4.5m

32.5 (p.286) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$

32.6 (p.287) $\frac{25}{2}\sqrt{3}\text{cm}^2$

32.7 (p.287) $\frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$

32.8 (p.287) $5\sqrt{3}\text{m}$

32.9 (p.288) 15.2m

32.10 (p.289)

(1) 1

(2) 7

(3) $\frac{1}{2}$

(4) 2

(5) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2}{2}$

(6) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(7) $\sqrt{2}$

(8) $\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

(9) $\frac{7}{4}$

(10) 1

(11) $3 - 2\sqrt{2}$

32.11 (p.292)

(1) 1

(2) $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{6}$

(3) $\frac{\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{4}$

(4) $-\sqrt{6}$

32.12 (p.293) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

32.13 (p.293) $\sin \theta = \frac{3}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$

32.14 (p.293) 2

32.15 (p.293) $-\frac{20}{9}$

32.16 (p.293) $\frac{a^2 - 1}{2}$

32.17 (p.293) $y = \frac{1}{2}x^2 + px + p^2 - \frac{1}{2}$

32.18 (p.293) $\frac{11}{16}$

32.19 (p.293)

$$(1) \frac{a^2 - 1}{2}$$

$$(2) \frac{2}{a^2 - 1}$$

$$(3) \frac{3a - a^3}{2}$$

$$\mathbf{32.20} \text{ (p.293)} \frac{23}{32}$$

$$\mathbf{32.21} \text{ (p.294)} \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{32.22} \text{ (p.294)}$$

$$(1) 20\sqrt{3}$$

$$(2) 48\sqrt{2}$$

$$\mathbf{32.23} \text{ (p.294)} \frac{255}{4}$$

$$\mathbf{32.24} \text{ (p.295)}$$

$$(1) 20\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$(2) \frac{15}{4}\sqrt{7}\text{cm}^2$$

$$\mathbf{32.25} \text{ (p.295)} \frac{15}{8}$$

$$\mathbf{32.26} \text{ (p.297)} 1000\sqrt{3}\text{m}$$

$$\mathbf{32.27} \text{ (p.297)} B = 30^\circ, c = 2$$

$$\mathbf{32.28} \text{ (p.297)} 40\text{km}$$

$$\mathbf{32.29} \text{ (p.297)}$$

$$(1) 3\sqrt{3}$$

$$(2) \sqrt{13}$$

$$\mathbf{32.30} \text{ (p.297)}$$

$$(1) 10\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$(2) 7\text{cm}$$

$$(3) \sin B = \frac{4}{7}\sqrt{3}, \sin C = \frac{5}{14}\sqrt{3}$$

$$\mathbf{32.31} \text{ (p.297)}$$

$$(1) \frac{7}{2}\sqrt{2}\text{cm}$$

$$(2) \sqrt{367}\text{cm}$$

$$\mathbf{32.32} \text{ (p.298)}$$

$$\text{外接円の半径 } \frac{7}{3}\sqrt{3},$$

$$\text{内接円の半径 } \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{33.1} \text{ (p.306)}$$

$$(1) -\frac{1}{2}$$

$$(2) -\frac{1}{2}$$

$$(3) 0$$

$$(4) -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(5) 0$$

$$\mathbf{33.2} \text{ (p.306)}$$

$$(1) \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(3) -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathbf{33.3} \text{ (p.307)} \sin \theta = -\frac{5}{13}$$

$$\mathbf{33.4} \text{ (p.307)} \sin \theta = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \tan \theta = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\mathbf{33.5} \text{ (p.307)} \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\mathbf{33.6} \text{ (p.308)} \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$$

$\mathbf{33.7} \text{ (p.313)} y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ は $y = \sin x$ を x 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したもの (グラフは省略).

$\mathbf{33.8} \text{ (p.313)} y = \cos(x - 30^\circ)$ は $y = \cos x$ を x 軸方向に 30° だけ平行移動したもの (グラフは省略).

$$\mathbf{33.9} \text{ (p.315)} x = 70^\circ, 250^\circ$$

$$\mathbf{33.10} \text{ (p.315)} x = 30^\circ$$

$$\mathbf{33.11} \text{ (p.315)} x = 30^\circ$$

$$\mathbf{33.12} \text{ (p.315)}$$

$$(1) x = \frac{\pi}{6}, \frac{7}{6}\pi$$

$$(2) 0 \leq x < \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi < x \leq 2\pi$$

33.13 (p.316)

$$(1) \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(2) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(3) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(4) \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$(5) \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$(6) \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

33.14 (p.316) $2 + \sqrt{3}$

33.15 (p.318)

(1) 加法定理

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

の辺々を加えると

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$$

(2) 上式に $x = 75^\circ$, $y = 15^\circ$ を代入して

$$\sin 90^\circ + \sin 60^\circ = 2 \sin 75^\circ \cos 15^\circ$$

$$\text{となるので, } \sin 75^\circ \cos 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$$

33.16 (p.318)

(1) 加法定理より

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha$$

$$\sin(45^\circ - \alpha) = \sin 45^\circ \cos \alpha - \cos 45^\circ \sin \alpha$$

の辺々を加えると

$$\sin(45^\circ + \alpha) + \sin(45^\circ - \alpha)$$

$$= 2 \sin 45^\circ \cos \alpha$$

$$= \sqrt{2} \cos \alpha$$

(2) $45^\circ + \alpha = \theta$ とおくと

$$45^\circ - \alpha = 90^\circ - \theta \text{ なので}$$

$$\sin(45^\circ + \alpha) = \sin \theta$$

$$\sin(45^\circ - \alpha) = \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

の2式より

$$\sin^2(45^\circ + \alpha) + \sin^2(45^\circ - \alpha)$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

(3) 加法定理

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

の辺々の差をとると

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \sin x \sin y \text{ と}$$

なり, $x = A + B$, $y = A - B$ を代入すると

$$2 \sin(A+B) \sin(A-B)$$

$$= \cos 2B - \cos 2A$$

$$= (1 - 2 \sin^2 B) - (1 - 2 \sin^2 A)$$

$$= 2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B$$

を得て, 上式の両辺を2で割る.

33.17 (p.318) $30 - 10\sqrt{3}$

33.18 (p.318) $\frac{24}{25}$

33.19 (p.319) $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$

33.20 (p.319) $\frac{1}{2}$

33.21 (p.319) $\frac{p}{q-1}$

33.22 (p.319) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

33.23 (p.319) $x = 0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 360^\circ$

33.24 (p.319) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

33.25 (p.319)

$$(1) x = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$$

$$(2) 0^\circ \leq x < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < x < \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi < x \leq 2\pi$$

33.26 (p.319) $\theta = 180^\circ$

33.27 (p.319) $x = 90^\circ$

33.28 (p.320) $\theta = 270^\circ$

33.29 (p.320) $x = 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ$

33.30 (p.320) $\theta = 60^\circ, 300^\circ$

33.31 (p.320) $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$

33.32 (p.322) $30^\circ, 90^\circ$

33.33 (p.322) $\theta = 120^\circ$

33.34 (p.322) $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\pi$

33.35 (p.322) 最大値 $\frac{5}{4}$, 最小値 -5

33.36 (p.322) $x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ のとき最大値 $\frac{3}{2}$, $x = \frac{3}{2}\pi$ のとき最小値 -3

33.37 (p.322) 最大値 $\sqrt{2}$, 最小値 $-\sqrt{2}$

34.1 (p.324) $\sqrt{a^3}$

34.2 (p.325)

(1) 1

(2) -3

(3) $\frac{1}{9}$

(4) $\frac{1}{625}$

(5) $\frac{1}{125}$

(6) $\frac{2}{5}$

(7) -27

(8) 2

(9) 3

(10) $\frac{4}{3}$

(11) 7

(12) 2

(13) 4

(14) $\frac{5}{3}$

34.3 (p.326) $25^{-1.5} > 81^{-\frac{5}{4}}$

34.4 (p.326)

(1) 3

(2) $\frac{x^3}{y^2}$

34.5 (p.326) 4

34.6 (p.327)

(1) $x = -4$

(2) $x = \frac{9}{2}$

(3) $x = 5$

(4) $x = -1$

(5) $x = -7$

(6) $x = -3$

(7) $x = \frac{1}{6}$

(8) $x = 3$

(9) $x = 4$

34.7 (p.328)

(1) $x = 2$

(2) $x = 0, 3$

(3) $x = 2$

(4) $x = 1, 2$

(5) $x = -2$

(6) $x = 3$

34.8 (p.329)

(1) $(x, y) = (3, 5), (5, 3)$

(2) $x = 21, y = 6$

35.1 (p.331)

(1) $x = 6$

(2) $x = 3$

35.2 (p.333)

(1) 3	(8) 0.1761
(2) $\frac{3}{2}$	(9) -0.6990
(3) 0	(10) -0.9030
(4) -3	(11) 0.0333
(5) -1	35.5 (p.334)
(6) -3	(1) 1.9294
(7) -1	(2) 2.9294
(8) -4	(3) 0.9647
(9) 1	35.6 (p.335)
(10) -1	(1) 15
35.3 (p.333)	(2) 1
(1) $\times$	(3) 2
(2) $\bigcirc$	(4) 3
(3) $\bigcirc$	(5) 3
(4) $\times$	(6) 6
(5) $\times$	(7) 2
35.4 (p.334)	(8) 1
(1) 0.7781	(9) $\log_{10} 4$
(2) 1.3010	(10) 2
(3) 1.7781	(11) -1
(4) 3.7781	(12) 0
(5) 1.0791	(13) 2
(6) 1.8060	(14) $\frac{1}{2}$
(7) -0.7781	35.7 (p.336)

(1) $\frac{3}{2}$

(2) $\frac{3}{2}$

(3) $\frac{1}{3}$

(4) $\frac{1}{6}$

(5) $\frac{3}{4}$

(6) $-\frac{1}{2}$

(7) 4

(8) $\frac{2}{3}$

(9) 3

(10) 5

35.8 (p.336)

(1) -2

(2) -1.7563

35.9 (p.336) $\frac{1+a+ab}{2+ab}$

35.10 (p.336)

(1) $\frac{y}{x}$

(2) $\frac{z}{x+y}$

(3) $\frac{x}{z-y}$

35.11 (p.336) 4

35.12 (p.337) 9 桁

35.13 (p.337) 13 桁

35.14 (p.337) 10 年後

35.15 (p.337) 7 年後

35.16 (p.337) 341 乗

35.17 (p.337)

(1) $x = \log_2 3$

(2) $x = -1, \log_2 \frac{5}{2}$

35.18 (p.338)

(1) $x = 103$

(2) $x = \frac{19}{2}$

(3) $x = 9$

(4) $x = 5$

(5) $x = 20$

(6) $x = 4$

(7) $x = 0$

(8) $x = \sqrt{2}$

(9) $x = \sqrt{10}$

(10) $x = 13$

(11) $x = 2$

(12) $x = \sqrt{35} - 1$

(13) $x = 8$

(14) $x = 1$

(15) $x = 2, 3$

(16) $x = \frac{9 + \sqrt{13}}{2}$

(17) $x = 0$

35.19 (p.339)

(1) $(x, y) = (5, 2)$

(2) $(x, y) = (5, 2), (4, \frac{5}{2})$

(3) $(x, y) = (7, 3)$

36.1 (p.341) 27 個

36.2 (p.341) 14 本

36.3 (p.342) 25 名

36.4 (p.342) 10 人

36.5 (p.342) 15 人

36.6 (p.342) 12 人

36.7 (p.342) 24 個

36.8 (p.343) 33 個

36.9 (p.343)

(1) 24 人

(2) 15 人

(3) 21 人

(4) 18 人

36.10 (p.343) 7334 個

36.11 (p.343) 26 通り

36.12 (p.344) 36

36.13 (p.344) 30 通り

36.14 (p.344) 5040 通り

36.15 (p.344) 24 通り

36.16 (p.344) 360 通り

36.17 (p.344) 2880 通り

36.18 (p.344) 12 個

36.19 (p.344) 18 通り

36.20 (p.345)

(1) 18 個

(2) 10 個

36.21 (p.345) 120 個

36.22 (p.345) 12 通り

36.23 (p.345) 625 通り

36.24 (p.345) 100 個

36.25 (p.345) 63 人

36.26 (p.345) 27 通り

36.27 (p.345) 24 通り

36.28 (p.346) 5

36.29 (p.346) 210 通り

36.30 (p.346) 120 通り

36.31 (p.346) 28 試合

36.32 (p.346) 35 個

36.33 (p.347) 60 個

36.34 (p.347) 18 個

36.35 (p.347) 20 通り

36.36 (p.347)

(1) 1260 通り

(2) 280 通り

37.1 (p.349)

(1) $\frac{3}{50}$

(2) $\frac{5}{36}$

37.2 (p.349)

(1) $\frac{1}{3}$

(2) $\frac{5}{36}$

37.3 (p.349) $\frac{5}{6}$

37.4 (p.349) $\frac{5}{18}$

37.5 (p.349)

(1) $\frac{1}{12}$

(2) $\frac{1}{18}$

(3) $\frac{1}{2}$

(4) $\frac{3}{4}$

37.6 (p.350)

(1) $\frac{5}{36}$

(2) $\frac{1}{9}$

(3) $\frac{1}{12}$

37.7 (p.350)

(1) 12 通り

(2) $\frac{1}{12}$

37.8 (p.350) $\frac{1}{4}$

37.9 (p.350)

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{2}$

37.10 (p.350) $\frac{3}{8}$

37.11 (p.351) $\frac{1}{5}$

37.12 (p.351) $\frac{1}{10}$

37.13 (p.352) $\frac{2}{15}$

37.14 (p.352) $\frac{3}{8}, \frac{1}{56}$

37.15 (p.352) $\frac{68}{95}$

37.16 (p.352)

(1) 60 通り

(2) $\frac{1}{3}$

(3) $\frac{1}{3}$

37.17 (p.353) $\frac{1}{10}$

37.18 (p.353) $\frac{3}{10}$

37.19 (p.353) $\frac{1}{20}$

37.20 (p.353) $\frac{3}{22}$

37.21 (p.353)

(1) $\frac{1}{9}$

(2) $\frac{8}{9}$

37.22 (p.353)

(1) $\frac{5}{18}$

(2) $\frac{13}{18}$

37.23 (p.354) どちらも $\frac{2}{5}$ で等しい

37.24 (p.355) 1 回でも表が出る確率 $\frac{7}{8}$,
3 回とも裏が出る確率 $\frac{1}{8}$

38.1 (p.357)

(1) 9

(2) 6

(3) 42

(4) 55

(5) -8

(6) $\frac{1}{2}$

(7) $1\frac{1}{6}$

(8) 4

(9) -32

(10) $\frac{1}{16}, \frac{1}{64}$

(11) $\frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

(12) 77

(13) 16

(14) 11

(15) 7

(16) 13

(17) 9

(18) 50

(19) 26

(20) 10

(21) 31

(22) 31

(23) 25

(24) 16

(25) 25

(26) 66

(27) 6

(28) 5

(29) 7

(30) 2

38.2 (p.358)

(1) 8, 44

(2) 72, 61

(3) 14, 41

(4) 20, 44

38.3 (p.358)

(1) 31

(2) 10

(3) 6

(4) 4

(5) 16

38.4 (p.360) $a_n = 4n - 1$

38.5 (p.360)

(1) 9, 11, $a_n = 2n - 1$

(2) 2, 26, 32, $a_n = 6n - 4$

(3) $-\frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2}n - 1$

(4) 33, $a_n = 8n - 7$

38.6 (p.360) 149

38.7 (p.360) 第14項

38.8 (p.360) 第34項

38.9 (p.360)

(1) 5

(2) 141

38.10 (p.360) $a_n = \frac{6}{5}n + \frac{9}{5}$

38.11 (p.362)

(1) 1275

(2) 2450

(3) $-\frac{837}{4}$

(4) 125250

(5) $\frac{1}{2}n(n+1)$

38.12 (p.362) 5300

38.13 (p.362) $n = 45$

38.14 (p.362) 2107

38.15 (p.362) 18日目, 13590箱

38.16 (p.362) 第8項, 第16項

38.17 (p.362) 2700本

38.18 (p.362) 13367

38.19 (p.362) 第12項, 1557

38.20 (p.364)

(1) -24 , $a_n = 3 \times (-2)^{n-1}$

(2) $\frac{4}{18}$, $a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3) -8 , $a_n = (-2)^{n-1}$

(4) $\frac{1}{16}$, $-\frac{1}{64}$, $a_n = 16 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

38.21 (p.365) およそ10億円

38.22 (p.365) 第9項

38.23 (p.365) $\frac{21}{4}$

39.1 (p.367)

(1) $x = 130^\circ$

(2) $x = 20^\circ$

(3) $x = 130^\circ$

(4) $x = 50^\circ$	(10) I
(5) $x = 70^\circ$	39.9 (p.371)
(6) $x = 35^\circ$	(1) 2850cm^2
(7) $x = 145^\circ$	(2) 155cm^2
(8) $x = 40^\circ$	(3) 1300
(9) $x = 15^\circ$	(4) 74cm^2
(10) $x = 26^\circ, x = 38^\circ$	(5) 852m^2
39.2 (p.369) $x = 66^\circ$	(6) $25\sqrt{3}\text{m}^2$
39.3 (p.369) $x = 84^\circ$	(7) $\frac{9}{2}\pi + 24 \text{ (cm}^2\text{)}$
39.4 (p.370) 108°	(8) $300\pi + 2000$
39.5 (p.370) 720°	(9) $18\pi\text{cm}^2$
39.6 (p.370)	(10) $\frac{110}{3}\pi\text{cm}^2$
(1) $x = 130^\circ$	(11) $100 - 25\pi \text{ (cm}^2\text{)}$
(2) $x = 147^\circ$	(12) $6\pi - 9\sqrt{3}$
(3) $x = 100^\circ$	(13) $\frac{50}{3}\pi - 25\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}$
39.7 (p.371) 140°	(14) $\frac{100}{3}\pi - 25\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$
39.8 (p.371)	(15) $100 - \frac{25}{2}\pi$
(1) H	(16) $48 - 4\pi \text{ (m}^2\text{)}$
(2) A	(17) $50\pi - 100$
(3) D	(18) $100 - 25\pi$
(4) G	(19) $400 - 100\pi$
(5) B	(20) $100\pi - 200$
(6) F	(21) $50\pi - 100$
(7) C	(22) $\frac{25}{2}\pi - 25 \text{ (cm}^2\text{)}$
(8) E	
(9) J	

(23) 32cm^2

(24) 28.5cm^2

(25) 100π

(26) $12\pi\text{cm}^2$

(27) $\frac{1}{4}\pi r^2$

(28) $6\sqrt{3} - 2\pi$

(29) $12\pi - 9\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$

(30) $25\pi + 48 \text{ (cm}^2\text{)}$

(31) 2

(32) $\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r^2$

(33) $\frac{9}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

(34) $100 - 100\sqrt{3} + \frac{100}{3}\pi$

(35) $\frac{200}{3}\pi - 300 + 100\sqrt{3}$

(36) $126\pi \text{ (cm}^3\text{)}$

39.10 (p.380) $500\pi\text{cm}^3$

39.11 (p.380) $126\pi\text{cm}^3$

39.12 (p.381) 表面積 $16\pi\text{cm}^2$,
体積 $\frac{16}{3}\sqrt{2}\pi\text{cm}^3$

39.13 (p.381) 体積 128π , 表面積 144π

39.14 (p.381) $1500\pi\text{cm}^3$

39.15 (p.381) $3\pi r^2$

39.16 (p.382)

(1) $\sqrt{21}\text{cm}$

(2) $\frac{4}{3}\sqrt{21}\pi\text{cm}^3$

(3) $14\pi\text{cm}^2$

39.17 (p.382) 497cm^3

39.18 (p.382)

(1) $90^\circ - \frac{1}{2}x$

(2) 36°

(3) 36°

(4) $\triangle AGF, \triangle EFD$

39.19 (p.382) $x = 9$

39.20 (p.383) 7.2

39.21 (p.383) $BD = 9, AC = 20$

39.22 (p.383)

(1) 20

(2) 16

39.23 (p.383) $AB = 5\sqrt{3}\text{cm}, BC = 5\text{cm}, BD = \frac{5}{2}\sqrt{3}\text{cm}$

39.24 (p.384) 25cm

39.25 (p.384)

(1) $AC = \frac{20}{3}\sqrt{3}, BC = \frac{10}{3}\sqrt{3}$

(2) $AB = AD$ の二等辺三角形

(3) $10\sqrt{3}$

(4) $\angle DAC = 90^\circ$ の直角三角形

(5) $\frac{10}{3}\sqrt{21}$

39.26 (p.384) $10 - 5\sqrt{3} \text{ (cm)}$

39.27 (p.384)

(1) 6cm

(2) $\triangle DQP$

(3) 5cm

(4) $5\sqrt{5}\text{cm}$

39.28 (p.385) 50cm

39.29 (p.385) $AD = 2\sqrt{5}\text{cm}$,
 $AH = 6\text{cm}$

39.30 (p.385) $5\sqrt{2}$

39.31 (p.385) $r = 16\text{cm}$

39.32 (p.386)

(1) $R = \frac{\sqrt{3}-1}{2}a$

(2) $r = \frac{\sqrt{3}-1}{6}a$

39.33 (p.386)

(1) $\sqrt{39}$

(2) $5\sqrt{39}\text{cm}^2$

39.34 (p.386)

(1) $\sqrt{3}\text{cm}$

(2) $\sqrt{6}\text{cm}$

(3) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(\text{cm}^2)$

39.35 (p.386)

(1) 10cm

(2) $5\sqrt{3}\text{cm}$

(3) $25\sqrt{3}\text{cm}^2$

(4) $\frac{10}{3}\pi\text{cm}$

39.36 (p.387) 9cm^2

39.37 (p.387) $\frac{1}{3}$

39.38 (p.387) $\triangle AOD : \triangle BOC = 16 : 49$

39.39 (p.387) $x : y = 3 : 1$

39.40 (p.388) $\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB = 16 : 9 : 15$

39.41 (p.388) 1m

39.42 (p.388) $\frac{3600}{49}$

39.43 (p.388) $\frac{325}{6}\text{cm}^2$

39.44 (p.389)

(1) 6cm

(2) 25cm^2

39.45 (p.389) $\triangle DBP$, $\triangle QBD$, $\triangle ADQ$

39.46 (p.389)

(1) 54cm^2

(2) 6cm^2

39.47 (p.389)

(1) $10\sqrt{2} - 10(\text{cm})$

(2) $200\sqrt{2} - 200(\text{cm}^2)$

39.48 (p.390)

(1) $8\sqrt{3}\text{cm}$

(2) $\frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

39.49 (p.390) $100 - 1725\pi + 1200\sqrt{2}\pi (\text{m}^2)$

39.50 (p.390) $\pi - 2$

39.51 (p.390) $\frac{1}{2}bc$

39.52 (p.391)

(1) 10cm

(2) $\text{ア} : \text{イ} : \text{ウ} = 1 : 7 : 19$

39.53 (p.391) 小さい角すい : 元の角すい = 1 : 27

39.54 (p.391) 3 : 2 : 1

三角比の表

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$	A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
0°	0.0000	1.0000	0.0000	45°	0.7071	0.7071	1.0000
1°	0.0175	0.9998	0.0175	46°	0.7193	0.6947	1.0355
2°	0.0349	0.9994	0.0349	47°	0.7314	0.6820	1.0724
3°	0.0523	0.9986	0.0524	48°	0.7431	0.6691	1.1106
4°	0.0698	0.9976	0.0699	49°	0.7547	0.6561	1.1504
5°	0.0872	0.9962	0.0875	50°	0.7660	0.6428	1.1918
6°	0.1045	0.9945	0.1051	51°	0.7771	0.6293	1.2349
7°	0.1219	0.9925	0.1228	52°	0.7880	0.6157	1.2799
8°	0.1392	0.9903	0.1405	53°	0.7986	0.6018	1.3270
9°	0.1564	0.9877	0.1584	54°	0.8090	0.5878	1.3764
10°	0.1736	0.9848	0.1763	55°	0.8192	0.5736	1.4281
11°	0.1908	0.9816	0.1944	56°	0.8290	0.5592	1.4826
12°	0.2079	0.9781	0.2126	57°	0.8387	0.5446	1.5399
13°	0.2250	0.9744	0.2309	58°	0.8480	0.5299	1.6003
14°	0.2419	0.9703	0.2493	59°	0.8572	0.5150	1.6643
15°	0.2588	0.9659	0.2679	60°	0.8660	0.5000	1.7321
16°	0.2756	0.9613	0.2867	61°	0.8746	0.4848	1.8040
17°	0.2924	0.9563	0.3057	62°	0.8829	0.4695	1.8807
18°	0.3090	0.9511	0.3249	63°	0.8910	0.4540	1.9626
19°	0.3256	0.9455	0.3443	64°	0.8988	0.4384	2.0503
20°	0.3420	0.9397	0.3640	65°	0.9063	0.4226	2.1445
21°	0.3584	0.9336	0.3839	66°	0.9135	0.4067	2.2460
22°	0.3746	0.9272	0.4040	67°	0.9205	0.3907	2.3559
23°	0.3907	0.9205	0.4245	68°	0.9272	0.3746	2.4751
24°	0.4067	0.9135	0.4452	69°	0.9336	0.3584	2.6051
25°	0.4226	0.9063	0.4663	70°	0.9397	0.3420	2.7475
26°	0.4384	0.8988	0.4877	71°	0.9455	0.3256	2.9042
27°	0.4540	0.8910	0.5095	72°	0.9511	0.3090	3.0777
28°	0.4695	0.8829	0.5317	73°	0.9563	0.2924	3.2709
29°	0.4848	0.8746	0.5543	74°	0.9613	0.2756	3.4874
30°	0.5000	0.8660	0.5774	75°	0.9659	0.2588	3.7321
31°	0.5150	0.8572	0.6009	76°	0.9703	0.2419	4.0108
32°	0.5299	0.8480	0.6249	77°	0.9744	0.2250	4.3315
33°	0.5446	0.8387	0.6494	78°	0.9781	0.2079	4.7046
34°	0.5592	0.8290	0.6745	79°	0.9816	0.1908	5.1446
35°	0.5736	0.8192	0.7002	80°	0.9848	0.1736	5.6713
36°	0.5878	0.8090	0.7265	81°	0.9877	0.1564	6.3138
37°	0.6018	0.7986	0.7536	82°	0.9903	0.1392	7.1154
38°	0.6157	0.7880	0.7813	83°	0.9925	0.1219	8.1443
39°	0.6293	0.7771	0.8098	84°	0.9945	0.1045	9.5144
40°	0.6428	0.7660	0.8391	85°	0.9962	0.0872	11.4301
41°	0.6561	0.7547	0.8693	86°	0.9976	0.0698	14.3007
42°	0.6691	0.7431	0.9004	87°	0.9986	0.0523	19.0811
43°	0.6820	0.7314	0.9325	88°	0.9994	0.0349	28.6363
44°	0.6947	0.7193	0.9657	89°	0.9998	0.0175	57.2900
45°	0.7071	0.7071	1.0000	90°	1.0000	0.0000	———