

工進連模試 (数学 I) 60 分	受験番号		氏名	
-------------------	------	--	----	--

1. 次の各問いに答えよ . (熊本県立技術短期大学推薦前期 H25)

(1) $(ax + y - b)^2$ を展開したとき , xy の係数は 4 , x の係数は -12 である。このとき a , b の値を求めよ。

(2) 2 次不等式 $ax^2 + (a + b)x + 1 > 0$ の解が , $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ であるとき , a , b の値を求めよ。

(3) 2 次関数 $y = -x^2 + ax - a + 1$ のグラフが x 軸に接するとき , a の値と接点の x 座標を求めよ。

- (4) 1 辺の長さが 2 の正四面体 ABCD において、辺 CD の中点を M、 $\angle ABM = \theta$ とするとき、AM の長さと $\cos \theta$ の値を求めよ。

- (5) ある地点 A から、ビルの土台までの距離が 102m である。そのビルの屋上を点 A から見上げる角度は 30° であるとする。A から見てビルより先にある、高さ 300m のタワーの先端がビルの屋上と一直線に見える。ビルの高さと、点 A からタワーの土台までの間の距離を求めよ。ただし点 A とビルおよびタワーの土台は一直線上にあるとし、 $\sqrt{3} = 1.7$ とする。

2. 次の問いに答えよ。

(熊本県立技術短期大学校 H25 推薦後期)

(1) $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ のとき, $a^2 - a - 1$, $a^3 + a^2 + a + 1$ の値を求めよ。

(2) $a > 0$ とする。2 次方程式 $2x^2 + 2ax + a + 1 = 0$ の 2 つの解の差が 1 より大きく, 2 より小さくなるとき, a の値の範囲を求めよ。

(3) $a \geq 3$ のとき, 不等式 $2|x - a| \leq x - 3$ をみたす x の値の範囲を求めよ。

- (4) 連立不等式 $\begin{cases} 2x + 3b < 4(x - a) \\ bx > -x - a \end{cases}$ をみたす x の範囲が $-1 < x < 3$ であるとき, a, b の値を求めよ。

- (5) $x \geq 0, y \geq 0, 2x + y = 1$ のとき, $2x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

3. 実数 x, y, z が $5x + 2y - 4z = 3, 3x + y - 3z = 2$ を満たすとき, 次の各問に答えよ。
(崇城大学 H24 専門高校推薦 1 日目)

(1) x と y を z で表せ。

(2) $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値とそのときの x, y, z の値を求めよ。

4. 面積が 12 の $\triangle ABC$ において, $AB = 8$, $\angle B = 45^\circ$ である。次の各問に答えよ。
(崇城大学 H24 専門高校推薦 2 日目)

(1) BC , AC の長さを求めよ。

(2) $\cos C$ の値を求めよ。

【答】

1. 30 点 (各 6 点)

(1) $(ax + y - b)^2$ を展開したとき, xy の係数は $2a$, x の係数は $-2ab$ であるから

$$2a = 4, \quad -2ab = -12$$

これを解いて $a = 2, b = 3$

(2) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$ を解とする 2 次不等式の一つは

$$(2x + 1)(3x - 1) < 0 \quad \text{すなわち} \quad 6x^2 + x - 1 < 0$$

定数項に注意して $-6x^2 - x + 1 > 0$

同じ次数の項の係数を比較して

$$a = -6, \quad a + b = -1 \quad \text{よって} \quad b = 5$$

(3) 2 次関数 $y = -x^2 + ax - a + 1$ の判別式は

$$D = a^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-a + 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2$$

この関数のグラフは x 軸に接するので, $D = 0$ より

$$(a - 2)^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

接点の x 座標は $x = -\frac{a}{2 \cdot (-1)} = \frac{a}{2}$

上の 2 式より, 求める接点の x 座標は $x = 1$

2. 30 点 (各 6 点)

(1) $a = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ より

$$\begin{aligned} a^2 - a - 1 &= \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$a^2 = a + 1$ であるから

$$\begin{aligned} a^3 + a^2 + a + 1 &= a^2(a + 1) + a + 1 \\ &= (a + 1)(a + 1) + a + 1 \\ &= a^2 + 3a + 2 \\ &= (a + 1) + 3a + 2 \\ &= 4a + 3 \\ &= 4 \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + 3 = 5 - 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

(2) この 2 次方程式の解を α, β とすると, 解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -\frac{2a}{2} = -a, \quad \alpha\beta = \frac{a+1}{2}$$

ゆえに

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-a)^2 - 4 \times \frac{a+1}{2} = a^2 - 2a - 2$$

$$1 < |\alpha - \beta| < 2 \text{ であるから } 1 < (\alpha - \beta)^2 < 4$$

$$\text{したがって } 1 < a^2 - 2a - 2 < 4$$

$$a > 0 \text{ に注意してこれを解くと } 3 < a < 1 + \sqrt{7}$$

(3) 与えられた不等式から $-(x - 3) \leq 2(x - a) \leq x - 3$

$$\text{これを解いて } \frac{2}{3}a + 1 \leq x \leq 2a - 3$$

(4) $2x + 3b < 4(x - a)$ を解いて $x > 2a + \frac{3}{2}b$

不等式の解から $2a + \frac{3}{2}b = -1 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$bx > -x - a \text{ すなわち } (b+1)x > -a$$

この不等式の解が $x < 3$ であるから, $b+1 < 0 \quad \cdots \textcircled{2}$

ゆえに $\frac{-a}{b+1} = 3$ すなわち $a = -3b - 3 \quad \cdots \textcircled{3}$

② に注意しながら, ①, ③ を解いて $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{10}{9}$

(5) $2x + y = 1$ より $y = 1 - 2x \quad \cdots \textcircled{1}$

$x \geq 0, y \geq 0$ であるから, ① より

$$x \geq 0, \quad 1 - 2x \geq 0 \quad \text{すなわち} \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

① より

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 2x^2 + (1 - 2x)^2 \\ &= 6x^2 - 4x + 1 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

② の範囲に注意して $x = 0$ のとき最大値 1 , $x = \frac{1}{3}$ のとき最小値 $\frac{2}{3}$

3. 20 点 (各 10 点)

(1) $5x + 2y - 4z = 3 \cdots \textcircled{1}$, $3x + y - 3z = 2 \cdots \textcircled{2}$ とおく .

$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ より

$$-x + 2z = -1 \quad \text{ゆえに} \quad x = 2z + 1$$

これを $\textcircled{2}$ に代入すると

$$3(2z + 1) + y - 3z = 2 \quad \text{ゆえに} \quad y = -3z - 1$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (2z + 1)^2 + (-3z - 1)^2 + z^2 \\ &= 14z^2 + 10z + 2 \\ &= 14 \left(z^2 + \frac{5}{7}z \right) + 2 \\ &= 14 \left\{ \left(z + \frac{5}{14} \right)^2 - \left(\frac{5}{14} \right)^2 \right\} + 2 \\ &= 14 \left(z + \frac{5}{14} \right)^2 + \frac{3}{14} \end{aligned}$$

$z = -\frac{5}{14}$ のとき最小値 $\frac{3}{14}$ をとるので , (1) の結果から

$x = \frac{2}{7}$, $y = \frac{1}{14}$, $z = -\frac{5}{14}$ のとき最小値 $\frac{3}{14}$ をとる .

4. 20 点 (各 10 点)

$$(1) \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin B = 12 \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot AB \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 12 \quad \text{ゆえに} \quad AB = 3\sqrt{2}$$

余弦定理により

$$AC^2 = 8^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3\sqrt{2} \cos 45^\circ = 34$$

$$AC > 0 \text{ より} \quad AC = \sqrt{34}$$

$$(2) \ a = 3\sqrt{2}, \ b = \sqrt{34}, \ c = 8 \text{ を余弦定理に適用して}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{34})^2 - 8^2}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{34}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$