

工進連模試 (数学 I) 60 分	受験番号		氏名	
-------------------	------	--	----	--

1. 次の各問いに答えよ . (熊本県立技術短期大学推薦前期 H24)

(1) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)^2$ を計算せよ。

(2) 2 次方程式 $2x^2 + 5\sqrt{3}x - 9 = 0$ の解を求めよ。

(3) $a - 2b = x$, $ab = y$ とおくとき , $a^2 + 4b^2$, $a^3 - 8b^3$ を x , y で表せ。

- (4) $a > 0$ のとき , $\begin{cases} 2x - a < -3ax - 2b \\ -x + 2a < x - 3b \end{cases}$ をみたす x の範囲が $-\frac{5}{2} < x < 1$ であるとき , a , b の値を求めよ。

- (5) $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。 $\sin \theta = \frac{1}{3}$ のとき , $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよ。

2. 次の問いに答えよ。

(熊本県立技術短期大学校 H24 推薦後期)

(1) $2(a+1)x^2 + (2a^2 - a + 1)x - 2a^2 + 3a - 1$ を因数分解せよ。

(2) 2つの2次関数 $y = x^2 + ax + 2a$, $y = x^2 - ax + a^2 - 3$ のグラフと x 軸との共有点の個数は、それぞれ2個であるとき a の範囲を求めよ。

(3) $a > 0$ とする。2次関数 $y = x^2 - 6x + 11$ の $0 \leq x \leq a$ における最大値が11、最小値が2であるとき、 a の値の範囲を求めよ。

- (4) $\triangle ABC$ において, $AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 8$ のとき, A および $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

- (5) 高さが 4cm の円柱がある。その表面積は, 半径 4cm の球の表面積に等しい。このとき円柱の表面積とその底面の半径を求めよ。

3. a, b は実数で, $a > b > 0$, $a + b = 5$, $a^3 + b^3 = 110$ とする。次の値を求めよ。

(1) ab

(2) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

(3) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

(4) $a - b$

4. 2 次関数 $f(x) = x^2 - 2ax - a + 1$ について以下の問いに答えよ .

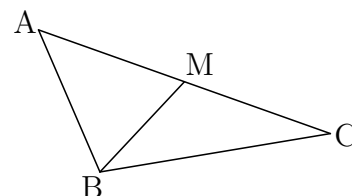
(1) $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ .

(2) $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の実数解を持つとき , a 値の範囲を求めよ .

(3) $f(x) = 0$ が異符号の実数解を持つとき , a の値の範囲を求めよ .

5. 図のように， $\triangle ABC$ において辺 AC に中点 M をとるとき，以下の問に答えよ。
ただし，各辺の長さは，辺 $AB = 2$ ，辺 $BC = 3$ ，辺 $AC = 4$ とする。

(1) 辺 BM の長さを求めよ。



(2) $\angle BMC = \alpha$ とおくとき， $\sin \alpha$ を求めよ。

(3) $\triangle BMC$ の面積を求めよ。

【答】

1. 25 点 (各 5 点)

$$(1) \quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{5+\sqrt{10}}{3}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{3} + 2 + 3 = \frac{16}{3}$$

したがって

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{10}}{3} + \frac{16}{3} = 7 + \frac{1}{3} \times \sqrt{10}$$

(2) 解の公式により

$$x = \frac{-5\sqrt{3} \pm \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5\sqrt{3} \pm \sqrt{147}}{4}$$

$$= \frac{-5\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad -3\sqrt{3}$$

$$(3) \quad \begin{aligned} a^2 + 4b^2 &= a^2 - 4ab + 4b^2 + 4ab \\ &= (a - 2b)^2 + 4ab \\ &= \mathbf{x^2 + 4y} \end{aligned}$$

この結果から

$$\begin{aligned} a^3 - 8b^3 &= a^3 - (2b)^3 \\ &= (a - 2b)\{a^2 + a \cdot 2b + (2b)^2\} \\ &= (a - 2b)\{a^2 + 4b^2 + 2ab\} \\ &= x\{(x^2 + 4y) + 2y\} = \mathbf{x(x^2 + 6y)} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
 (4) \text{ 第1式より} & (3a+2)x < a-2b \\
 3a+2 > 0 \text{ であるから} & x < \frac{a-2b}{3a+2} \quad \dots \textcircled{1} \\
 \text{第2式より} & -2x < -2a-3b \\
 \text{ゆえに} & x > \frac{2a+3b}{2} \quad \dots \textcircled{2}
 \end{array}$$

①, ②の共通範囲が $-\frac{5}{2} < x < 1$ であるから

$$\frac{2a+3b}{2} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{a-2b}{3a+2} = 1$$

$$\text{したがって} \quad 2a+3b = -5, \quad a+b = -1$$

$$\text{これを解いて} \quad a = 2, \quad b = -3$$

(5) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ から

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ より, $\cos \theta \leq 0$ であるから

$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{また} \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

2. 25 点 (各 5 点)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2(a+1)x^2 + (2a^2 - a + 1)x - 2a^2 + 3a - 1 \\
 &= 2(a+1)x^2 + (2a^2 - a + 1)x - (a-1)(2a-1) \\
 &= \{2x + (2a-1)\}\{(a+1)x - (a-1)\} \\
 &= (2x + 2a - 1)(ax + x - a + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \begin{array}{cc} 2 & 2a-1 \\ a+1 & -(a-1) \end{array} & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{l} \longrightarrow 2a^2 + a - 1 \\ \longrightarrow -2a + 2 \end{array} \\
 \hline
 2(a+1) & -(a-1)(2a-1) & 2a^2 - a + 1
 \end{array}$$

- (2) 2つの2次関数 $y = x^2 + ax + 2a$, $y = x^2 - ax + a^2 - 3$ がともに x 軸と異なる2点で交わるので, 係数について

$$a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2a > 0 \quad \text{かつ} \quad (-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 3) > 0$$

したがって, 連立不等式 $\begin{cases} a^2 - 8a > 0 \\ a^2 - 4 < 0 \end{cases}$ の解を求めればよい.

第1式から $a < 0, 8 < a \quad \cdots \textcircled{1}$

第2式から $-2 < a < 2 \quad \cdots \textcircled{2}$

- (3) $y = x^2 - 6x + 11$ の右辺を変形すると

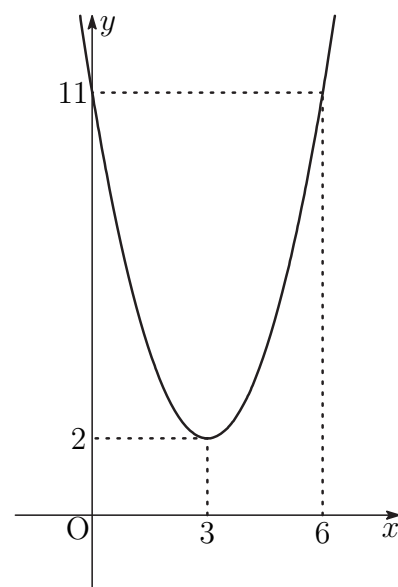
$$y = (x - 3)^2 + 2$$

$y = 11$ となるとき x の値は

$$x = 0, 6$$

$0 \leq x \leq a$ において, この2次関数の最大値が11, 最小値が2であるための a の値の範囲は, 右のグラフから

$$3 \leq a \leq 6$$



(4) $a = 7, b = 8, c = 5$ であるから, 余弦定理により

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2}$$

ゆえに $A = 60^\circ$

また, $\triangle ABC$ の面積は

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

(5) 半径 4cm の球の表面積は $4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ [cm²]

円柱の半径を r cm とすると, その表面積は

$$2 \times \pi r^2 + 2\pi r \cdot 4 = (2r^2 + 8r)\pi \text{ [cm}^2\text{]}$$

球と円柱の表面積が等しいので

$$(2r^2 + 8r)\pi = 64\pi \quad \text{すなわち} \quad r^2 + 4r - 32 = 0$$

$r > 0$ に注意して, これを解くと $r = 4$

3. 20点(各5点)

- (1) $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ であるから ,
これに $a + b = 5$, $a^3 + b^3 = 110$ を代入すると

$$110 = 5^3 - 3ab \cdot 5 \quad \text{これから} \quad ab = 1$$

- (2) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2 + a^2}{a^2 b^2} = \frac{(a + b)^2 - 2ab}{(ab)^2} = \frac{5^2 - 2 \cdot 1}{1^2} = 23$

- (3) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$ であるから , これに $a + b = 5$,
 $ab = 1$ に代入すると

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 5 - 2\sqrt{1} = 3$$

$$a > b > 0 \text{ より } \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0 \text{ であるから} \quad \sqrt{a} - \sqrt{b} = \sqrt{3}$$

- (4) $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ であるから , これに $a + b = 5$,
 $ab = 1$ を代入して

$$(a - b)^2 = 5^2 - 4 \cdot 1 = 21$$

$$a > b \text{ より } a - b > 0 \text{ であるから} \quad a - b = \sqrt{21}$$

4. 15 点 (各 5 点)

$$(1) \quad f(x) = x^2 - 2ax - a + 1 \\ = (x - a)^2 - a^2 - a + 1$$

したがって、頂点の座標は $(a, -a^2 - a + 1)$

- (2) $f(x) = 0$ が異なる 2 つの正の実数解を持つための条件は

$$\begin{cases} f(0) = -a + 1 > 0 \\ a > 0 \\ -a^2 - a + 1 < 0 \end{cases}$$

第 1 式から $a < 1$

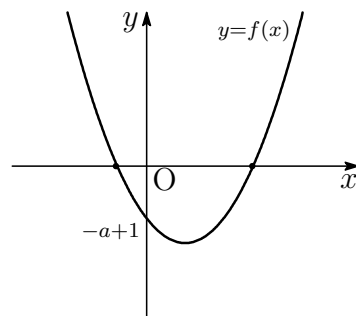
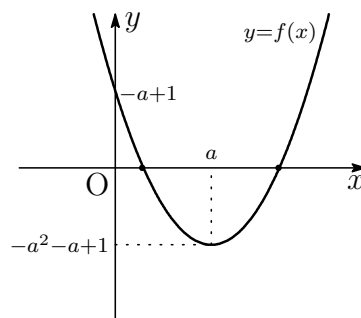
第 3 式から $a < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < a$

したがって、求める a の値の範囲は $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < a < 1$

- (3) $f(x) = 0$ が異符号の実数解をもつための条件は

$$f(0) = -a + 1 < 0$$

すなわち $a > 1$



5. 15 点 (各 5 点)

- (1) $BM = x$, $\angle BMC = \alpha$ とする .

$\triangle BMC$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} 3^2 &= x^2 + 2^2 - 2x \cdot 2 \cos \alpha \\ 5 &= x^2 - 4x \cos \alpha \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\triangle BMA$ に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned} 2^2 &= x^2 + 2^2 - 2x \cdot 2 \cos(180^\circ - \alpha) \\ 0 &= x^2 + 4x \cos \alpha \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① と ② の辺々を加えて $2x^2 = 5$

$$x > 0 \text{ であるから } BM = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

- (2) $x = \frac{\sqrt{10}}{2}$ を ② に代入して $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{8}$

$\sin \alpha > 0$ であるから

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{10}}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{64}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

- (3) (1),(2) の結果から

$$\triangle BMC = \frac{1}{2} BM \cdot MC \sin \alpha = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times 2 \times \frac{3\sqrt{6}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$