

第1回工進連模試(数学I) 60分	受験番号		氏名	
-------------------	------	--	----	--

1. 次の各問いに答えよ． (熊本県立技術短期大学校 H23 推薦改)

(1) $(x^2 + 2x - 1)(x^2 + 2x + 2)$ を展開せよ．

(2) $x^2 - y^2 + 6y - 9$ を因数分解せよ．

(3) $(n + m\sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 3 - \sqrt{3}$ をみたす整数 m, n を求めよ．

(4) 連立不等式 $5x + 3 \leq 2x + 4, 2x - 3 \leq 4x + 5$ をみたす x の範囲を求めよ．

(5) $\sqrt{(a-1)^2} - \sqrt{(a-3)^2}$ を簡単にせよ．ただし， $1 < a < 3$ とする．

(6) $6x^2 + ax - 2 = 0$ の 1 つの解が $\frac{1}{2}$ であるとき， a の値と他の解を求めよ．

(7) 放物線 $y = x^2 + ax + b$ の頂点が $(2, -4)$ であるとき， a ， b の値を求めよ．

- (8) $a > 0$ のとき, 放物線 $y = -ax^2 + 4ax - 3a + 3$ の $1 \leq x \leq 4$ における最小値が -3 であるとき, a の値を求めよ.

- (9) すべての実数 x に対して 2 次不等式 $x^2 + 2(k+1)x + 4 > 0$ が成り立つような定数 k の範囲を求めよ.

- (10) $\triangle ABC$ において, $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $AB = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ であるとき, CA の長さ b と BC の長さ a を求めよ.

2. $x + y = 3$, $xy = 1$ のとき , 次の値を求めよ .

(1) $x^2 + y^2$

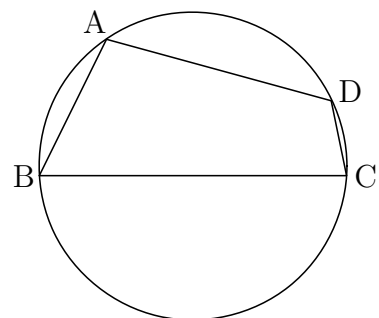
(2) $x^3 + y^3$

(3) $x^5 + y^5$

3. 2 次関数 $f(x) = x^2 - 4x + 6$ の $a \leq x \leq a + 2$ における最大値 M および最小値 m を a を用いて表せ .

4. 円に内接する四角形 ABCD を $AB = 2$, $BC = 4$, $CD = 1$, $DA = a$, $\cos \angle BCD = \frac{1}{5}$ とする . 次の問いに答えよ .

(1) a の値を求めよ .



(2) 四角形 ABCD の面積 S を求めよ .

【答】

1. 50 点 (各 5 点)

(1) $x^2 + 2x = t$ とおくと

$$\begin{aligned}
 (\text{与式}) &= (t-1)(t+2) \\
 &= t^2 + t - 2 \\
 &= (x^2 + 2x)^2 + (x^2 + 2x) - 2 \\
 &= (x^4 + 4x^3 + 4x^2) + x^2 + 2x - 2 \\
 &= \mathbf{x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad x^2 - y^2 + 6y - 9 &= x^2 - (y-3)^2 \\
 &= \{x + (y-3)\}\{x - (y-3)\} \\
 &= \mathbf{(x + y - 3)(x - y + 3)}
 \end{aligned}$$

(3) 与式の両辺を $1 + \sqrt{3}$ で割ると

$$\begin{aligned}
 n + m\sqrt{3} &= \frac{3 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(3 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} \\
 &= \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{3 - 1} = -3 + 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

m, n は有理数であるから $\mathbf{m = 2, n = -3}$

(4) $5x + 3 \leq 2x + 4$ を解いて $x \leq \frac{1}{3}$... ①

$2x - 3 \leq 4x + 5$ を解いて $x \geq -4$... ②

①, ② の共通範囲を求めて $\mathbf{-4 \leq x \leq \frac{1}{3}}$

(5) $\sqrt{(a-1)^2} - \sqrt{(a-3)^2} = |a-1| - |a-3|$

$1 < a < 3$ であるから, $a-1 > 0, a-3 < 0$ より

$|a-1| = a-1, \quad |a-3| = -(a-3) = -a+3$

よって $(\text{与式}) = (a-1) - (-a+3) = \mathbf{2a - 4}$

(6) $x = \frac{1}{2}$ は方程式 $6x^2 + ax - 2 = 0$ の解であるから

$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a \times \frac{1}{2} - 2 = 0$ これを解いて $\mathbf{a = 1}$

このとき，方程式は $6x^2 + x - 2 = 0$ であるから

$$(2x - 1)(3x + 2) = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$$

よって，他の解は $x = -\frac{2}{3}$

- (7) 放物線の頂点の座標が $(2, -4)$ であるから， x^2 の係数に注意して

$$y = (x - 2)^2 - 4 \quad \text{ゆえに} \quad y = x^2 - 4x$$

上式と $y = x^2 + ax + b$ の係数を比較して $a = -4$ ， $b = 0$

- (8) $y = -ax^2 + 4ax - 3a + 3$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -a(x^2 - 4x) - 3a + 3 \\ &= -a\{(x - 2)^2 - 2^2\} - 3a + 3 \\ &= -a(x - 2)^2 + a + 3 \end{aligned}$$

x^2 の係数について $-a < 0$ であるから， $1 \leq x \leq 4$ において， y は $x = 4$ で最小値 $-3a + 3$ をとる．最小値が -3 であるから

$$-3a + 3 = -3 \quad \text{これを解いて} \quad a = 2$$

- (9) すべての x について $x^2 + 2(k + 1)x + 4 > 0$ が成り立つとき， x^2 の係数が正であるから，係数について $D/4 < 0$ をみたすので

$$(k + 1)^2 - 1 \cdot 4 < 0 \quad \text{ゆえに} \quad (k + 3)(k - 1) < 0$$

これを解いて $-3 < k < 1$

- (10) $c = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ ， $B = 45^\circ$ ， $C = 60^\circ$ ．正弦定理により $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$
 $b \sin C = c \sin B$ であるから

$$b \sin 60^\circ = \frac{3}{2}\sqrt{2} \sin 45^\circ \quad \text{ゆえに} \quad b \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを解いて $b = \sqrt{3}$

第1余弦定理により

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B = \sqrt{3} \cos 60^\circ + \frac{3}{2}\sqrt{2} \cos 45^\circ \\ &= \sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

第1余弦定理

$$a = b \cos C + c \cos B, \quad b = c \cos A + a \cos C, \quad c = a \cos B + b \cos A$$

なお，余弦定理とは，第2余弦定理のことである．

2. 15 点 (各 5 点)

$$(1) \quad x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 3^2 - 2 \cdot 1 = 7$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3 \cdot 1 \cdot 3 = 18$$

(3) (1), (2) の結果から

$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 7 \times 18$$

$$x^5 + y^5 + (xy)^2(x + y) = 126$$

$$x^5 + y^5 + 1^2 \times 3 = 126$$

$$x^5 + y^5 = 123$$

3. 15 点 (M を求めて 7 点, m を求めて 8 点)

2 次関数 (下に凸の放物線) の閉区間における最大値

定義域の中央が軸より左側にあるとき定義域の左端で最大値をとり,
定義域の中央が軸より右側にあるとき定義域の右端で最大値をとる.

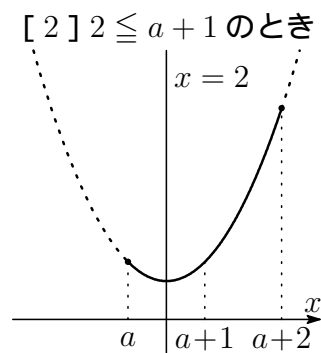
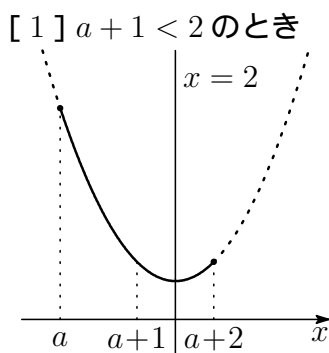
$f(x) = x^2 - 4x + 6 = (x - 2)^2 + 2$ であるから, 与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で, 軸は $x = 2$ である. 定義域 $a \leq x \leq a + 2$ の中央値は $a + 1$ 最大値 M は, 次の 2 つの場合に分けて求める.

[1] $a + 1 < 2$ すなわち $a < 1$ のとき

$$x = a \text{ で最大値をとるから } M = f(a) = a^2 - 4a + 6$$

[2] $2 \leq a + 1$ すなわち $1 \leq a$ のとき

$$x = a + 2 \text{ で最大値をとるから } M = f(a + 2) = a^2 + 2$$



最小値 m は、次の 3 つの場合に分けて求める。

[1] $a+2 < 2$ すなわち $a < 0$ のとき

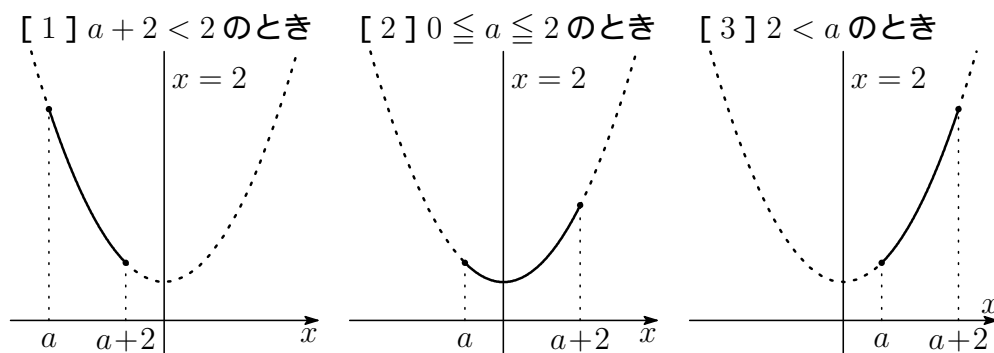
$x = a+2$ で最小値をとるから $m = f(a+2) = a^2 + 2$

[2] $a \leq 2 \leq a+2$ すなわち $0 \leq a \leq 2$ のとき

$x = 2$ で最小値をとるから $m = f(2) = 2$

[3] $2 < a$ のとき

$x = a$ で最小値をとるから $m = f(a) = a^2 - 4a + 6$



したがって

$$M = \begin{cases} a^2 - 4a + 6 & (a < 1) \\ a^2 + 2 & (1 \leq a) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} a^2 + 2 & (a < 0) \\ 2 & (0 \leq a \leq 2) \\ a^2 - 4a + 6 & (2 < a) \end{cases}$$

補足 境界値の場合分けについて次のように答えてもよい。

$$M = \begin{cases} a^2 - 4a + 6 & (a \leq 1) \\ a^2 + 2 & (1 < a) \end{cases}, \quad m = \begin{cases} a^2 + 2 & (a < 0) \\ 2 & (0 \leq a < 2) \\ a^2 - 4a + 6 & (2 \leq a) \end{cases}$$

4. 20 点 (各 10 点)

(1) $\angle C = \theta$ とする . $\triangle BCD$ において , 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 4^2 + 1^2 - 2 \cdot 4 \cdot 1 \cos \theta \\ &= 17 - 8 \times \frac{1}{5} = \frac{77}{5} \end{aligned}$$

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle A = 180^\circ - \theta$$

$\triangle BAD$ において , 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} BD^2 &= 2^2 + a^2 - 2 \cdot 2 \cdot a \cos(180 - \theta) \\ &= 4 + a^2 + 4a \cos \theta \\ &= 4 + a^2 + 4a \times \frac{1}{5} = a^2 + \frac{4}{5}a + 4 \end{aligned}$$

よって $a^2 + \frac{4}{5}a + 4 = \frac{77}{5}$

整理すると $5a^2 + 4a - 57 = 0$

ゆえに $(a - 3)(5a + 19) = 0$

$a > 0$ であるから $a = 3$

(2) $\sin \theta > 0$ であるから

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

よって $S = \triangle BCD + \triangle ABD$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \sin \theta + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \sin(180^\circ - \theta) \\ &= 2 \sin \theta + 3 \sin \theta \\ &= 5 \sin \theta = 5 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6} \end{aligned}$$