

第1回工進連模試(数学I) 60分	受験番号		氏名	
-------------------	------	--	----	--

1. 次の各問いに答えよ.

(1) $x^2 + xy - 6y^2 - x + 22y - 20$ を因数分解せよ.

(2) $x + y = 2$, $x^3 + y^3 = 32$ のとき , xy の値を求めよ.

(3) $\frac{23}{5 + \sqrt{2}}$ の整数部分を a , 小数部分を b とするとき , a と b の値を求めよ.

- (4) x の 2 次方程式 $x^2 - (2a - 1)x + a^2 - 2a + 2 = 0$ が重解をもつとき , a の値とそのときの重解を求めよ .

- (5) 放物線 $y = x^2 + 3x + 4$ は , 放物線 $y = x^2 + x + 1$ をどのように平行移動したものか .

- (6) a, b は定数で $a > 0$ とする。2 次関数 $y = ax^2 - 6ax + b$ ($1 \leq x \leq 4$) の最大値が -3 , 最小値が -11 のとき , a, b の値を求めよ .

- (7) a は 0 でない定数とする．すべての実数 x に対して不等式

$$ax^2 + 2(a-1)x + \frac{4}{a} \geq 0$$

が成り立つような a の値の範囲を求めよ．

- (8) $\tan \theta = \sqrt{2}$ のとき , $\frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta}$ を計算せよ．

- (9) $\triangle ABC$ において, $AB = 2$, $BC = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$, $CA = 2\sqrt{3} - 2$ であるとき, $\angle A$ の大きさを求めよ.

- (10) 三角形 ABC において, $AB = 6$, $CA = 4$, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle BAC$ の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき, AD の長さを求めよ.

2. $-3 \leq x \leq 3$ を満たすすべての x に対して, 不等式 $x^2 - 2kx + 4k + 5 > 0$ が成り立つような定数 k の値の範囲を求めよ.

3. 三角形 ABC において, $AB = 5$, $CA = 7$, $\angle ABC = 60^\circ$ であり, 内接円を O_1 とする。また, 2 辺 AB , BC および円 O_1 と接する円を O_2 とする。

(1) BC の長さを求めよ。

(2) 三角形 ABC の面積 S を求めよ。

(3) 円 O_1 の半径 R を求めよ。

(4) 円 O_2 の半径 r を求めよ。

【答】

1. 60 点 (各 6 点)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & x^2 + xy - 6y^2 - x + 22y - 20 \\
 &= x^2 + (y-1)x - 2(y-2)(3y-5) \\
 &= \{x - 2(y-2)\}\{x + (3y-5)\} \\
 &= (x - 2y + 4)(x + 3y - 5)
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) \text{ より}$$

$$32 = 2^3 - 3xy \cdot 2 \quad \text{これを解いて} \quad xy = -4$$

$$(3) \quad \frac{23}{5 + \sqrt{2}} = \frac{23(5 - \sqrt{2})}{(5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2})} = 5 - \sqrt{2}$$

$$-2 < -\sqrt{2} < -1 \text{ より} \quad 3 < 5 - \sqrt{2} < 4 \text{ であるから} \quad a = 3$$

$$a + b = 5 - \sqrt{2} \text{ より} \quad b = 5 - \sqrt{2} - a = 2 - \sqrt{2}$$

$$(4) \quad 2 \text{ 次方程式 } x^2 - (2a-1)x + a^2 - 2a + 2 = 0 \text{ が重解をもつとき, } D = 0 \text{ であるから}$$

$$\{-(2a-1)\}^2 - 4 \cdot 1(a^2 - 2a + 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad a = \frac{7}{4}$$

このとき, 重解は

$$x = -\frac{-(2a-1)}{2 \cdot 1} = a - \frac{1}{2} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$$

$$(5) \quad y = x^2 + x + 1 \text{ を変形すると}$$

$$y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$y = x^2 + 3x + 4 \text{ を変形すると}$$

$$y = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$$

$$\text{よって, 頂点は点} \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \text{ から点} \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right) \text{ に移動する.}$$

したがって,

$$x \text{ 軸方向に } -\frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = -1, y \text{ 軸方向に } \frac{7}{4} - \frac{3}{4} = 1$$

だけ平行移動する.

$$(6) \quad y = ax^2 - 6ax + b \text{ を変形すると} \quad y = a(x-3)^2 - 9a + b$$

$$a > 0 \text{ より, } 1 \leq x \leq 4 \text{ において, } x = 1 \text{ で最大, } x = 3 \text{ で最小となる.}$$

$$\text{ゆえに} \quad -5a + b = -3, -9a + b = -11$$

$$a > 0 \text{ に注意して, これを解くと} \quad a = 2, b = 7$$

- (7) 不等式 $ax^2 + 2(a-1)x + \frac{4}{a} \geq 0 \cdots \textcircled{1}$ の係数について

$$D/4 = (a-1)^2 - a \times \frac{4}{a} = (a+1)(a-3)$$

すべての実数 x に対して不等式 $\textcircled{1}$ が成り立つとき, x^2 の係数 a および D の符号について

$$a > 0, D \leq 0$$

であるから, 連立不等式

$$\begin{cases} a > 0 \\ (a+1)(a-3) \leq 0 \end{cases}$$

の解を求めて $0 < a \leq 3$

$$\begin{aligned} (8) \quad \frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta} &= \frac{(1-\sin\theta) + (1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} \\ &= \frac{2}{1-\sin^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} \\ &= 2(1+\tan^2\theta) \\ &= 2\{1+(\sqrt{2})^2\} = 6 \end{aligned}$$

- (9) 余弦定理により

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} \\ &= \frac{(2\sqrt{3}-2)^2 + 2^2 - (3\sqrt{2}-\sqrt{6})^2}{2(2\sqrt{3}-2) \cdot 2} \\ &= \frac{4(\sqrt{3}-1)}{8(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

よって $\angle A = 60^\circ$

- (10) $AD = x$ とおくと, $\triangle ABD + \triangle ACD = \triangle ABC$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \sin 120^\circ \\ \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot x \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{5}{2} \sqrt{3} x &= 6\sqrt{3} \end{aligned}$$

よって $x = \frac{12}{5}$

2. 16 点

$f(x) = x^2 - 2kx + 4k + 5$ とすると, $-3 \leq x \leq 3$ における最小値が 0 より大きくなるような k の値の範囲を求めればよい. $f(x) = (x - k)^2 - k^2 + 4k + 5$ であるから, 次の 3 つの場合に分けて最小値を求める.

[1] $3 < k$ のとき

$$\text{最小値は } f(3) = 3^2 - 2k \cdot 3 + 4k + 5 = -2k + 14$$

k の範囲に注意して, $-2k + 14 > 0$ を解くと $3 < k < 7$

[2] $-3 \leq k \leq 3$ のとき

$$\text{最小値は } f(k) = -k^2 + 4k + 5$$

ゆえに $-k^2 + 4k + 5 > 0$ すなわち $(k + 1)(k - 5) < 0$

k の範囲に注意してこれを解くと $-1 < k \leq 3$

[3] $k < -3$ のとき

$$\text{最小値は } f(-3) = (-3)^2 - 2k(-3) + 4k + 5 = 10k + 14$$

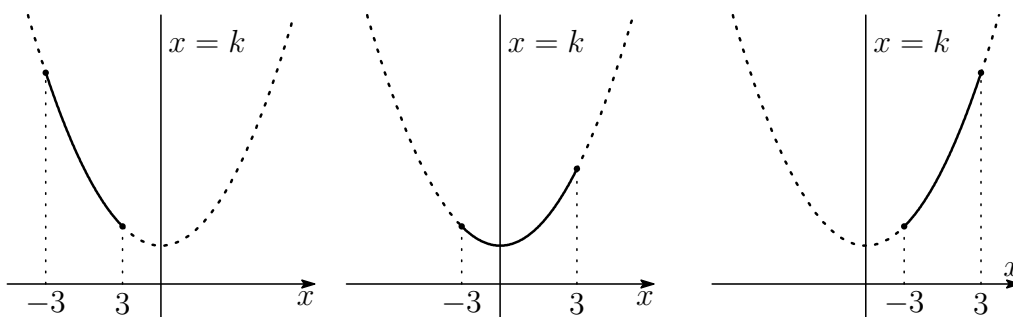
このとき, $10k + 14 > 0$ を満たす k はない.

よって, 求める k の値の範囲は $-1 < k < 7$

[1] $3 < k$ のとき

[2] $-3 \leq k \leq 3$ のとき

[3] $k < -3$ のとき



3. 24 点 (各 6 点)

- (1) 余弦定理
- $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$
- により

$$7^2 = 5^2 + a^2 - 2 \cdot 5 \cdot a \cos 60^\circ$$

$$\text{整理して } a^2 - 5a - 24 = 0$$

$$\text{ゆえに } (a+3)(a-8) = 0$$

$$a > 0 \text{ であるから } a = 8$$

- (2)
- $\triangle ABC$
- の面積
- S
- は

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

- (3)
- $2s = a + b + c = 8 + 7 + 5$
- より
- $s = 10$

$\triangle ABC$ の内接円の半径 R は, $S = Rs$ により

$$10\sqrt{3} = R \cdot 10 \quad \text{これを解いて } R = \sqrt{3}$$

- (4)
- O_1, O_2
- は,
- $\angle B$
- の二等分線上にあるから,

$$BO_1 = 2R, BO_2 = 2r, O_1O_2 = R + r$$

$$BO_1 = BO_2 + O_1O_2 \text{ より}$$

$$2R = 2r + (R + r) \quad \text{ゆえに } r = \frac{R}{3}$$

$$\text{よって, 問 3 の結果から } r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

