

高専模試 (数学)80 分 H25.5 月実施

受験番号		氏名	
------	--	----	--

1. 次の各小問に答えなさい . (佐世保高専 H25)

(1) $(x + 2y - 3z)^2$ を展開しなさい .

(2) $x^2 + xy + 2x + y + 1$ を因数分解しなさい .

(3) $\frac{8}{3 - \sqrt{5}} - \frac{2}{2 + \sqrt{5}}$ を簡単にしなさい .

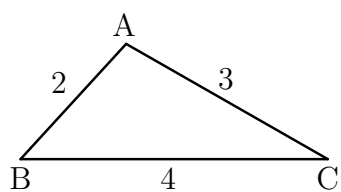
(4) 不等式 $\begin{cases} \frac{x+7}{4} \geq \frac{2x-1}{3} \\ 4x-7 > -5(x+2) \end{cases}$ を解きなさい .

(5) 2 次関数 $y = x^2$ ($-2 \leq x \leq 1$) の最大値 , 最小値を求めなさい .

(6) グラフが次の 3 点を通るとき , 2 次関数を求めなさい .

$$(-1, 7), (0, 2), (1, -5)$$

(7) 次のような三角形 ABC の面積を求めなさい .



- (8) 関数 $f(x) = -x^2 + 6x + a$ ($1 \leq x \leq 4$) の最小値が -2 であるように定数 a を定めなさい .

- (9) 2 直線 $x - \sqrt{3}y = 0$, $x + \sqrt{3}y = 0$ のなす鋭角を求めなさい .

- (10) 三角形 ABC において , $a : b : c = 8 : 5 : 7$ のとき , $\angle C$ の大きさを求めなさい .

2. 整式 $P(x)$ を $x + 1$ で割ると余りが -2 , $x - 3$ で割ると余りが 10 であるとき,
 $P(x)$ を $x^2 - 2x - 3$ で割ったときの余りを求めよ. (都城高専 H25)

3. 点 $(4, 2)$ から円 $x^2 + y^2 = 4$ へ引いた接線の方程式を求めよ.
(熊本高専 [八代]H25)

4. 方程式 $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$ ($0 \leq x < 2\pi$) を解け. (熊本高専 [熊本] H25)

5. $x = 1$ で極大値 6 をとり, $x = 2$ で極小値 5 をとる 3 次関数 $f(x)$ を求めよ.
(大分高専 H25)

6. 次の各問いに答えよ .

(鹿児島高専 H25)

(1) $y = x(x-1)$ 上の点 $(0, 0)$, $(1, 0)$ における接線の方程式をそれぞれ求めよ .

(2) (1) で求めた 2 本の接線および $y = x(x-1)$ で囲まれた部分の面積 S を求めよ .

解答例

1. (5 点 $\times$ 10 = 50 点)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (x + 2y - 3z)^2 &= \{x + 2y + (-3z)\}^2 \\
 &= x^2 + (2y)^2 + (-3z)^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 2 \cdot 2y \cdot (-3z) + 2 \cdot (-3z) \cdot x \\
 &= x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy - 12yz - 6zx
 \end{aligned}$$

(2) (次数の低い方の文字 y について整理する)

$$\begin{aligned}
 x^2 + xy + 2x + y + 1 &= y(x + 1) + x^2 + 2x + 1 \\
 &= y(x + 1) + (x + 1)^2 \\
 &= (x + 1)\{y + (x + 1)\} \\
 &= (x + 1)(x + y + 1)
 \end{aligned}$$

(3) (それぞれの分母を有理化して計算する)

$$\begin{aligned}
 \frac{8}{3 - \sqrt{5}} - \frac{2}{2 + \sqrt{5}} &= \frac{8(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} - \frac{2(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} \\
 &= 2(3 + \sqrt{5}) - 2(\sqrt{5} - 2) \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

(4) ($\leq, \geq$ はそれぞれ $\leq, \geq$ と同意)

$$\frac{x + 7}{4} \geq \frac{2x - 1}{3} \text{ を解いて } x \leq 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$4x - 7 > -5(x + 2) \text{ を解いて } x > -\frac{1}{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } -\frac{1}{3} < x \leq 5$$

(5) $x = -2$ で最大値 4, $x = 0$ で最小値 0

(6) 点 (0, 2) を通るから

$$y = ax^2 + bx + 2 \quad \cdots (*)$$

とおける.

(*) は点 $(-1, 7)$ を通るから

$$7 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a - b = 5 \quad \cdots \textcircled{1}$$

(*) は点 $(1, -5)$ を通るから

$$-5 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a + b = -7 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を解いて } a = -1, b = -6$$

$$\text{よって} \quad y = -x^2 - 6x + 2$$

- (7) $a = 4, b = 3, c = 2$ をヘロンの公式に適用する .

$$s = \frac{1}{2}(4 + 3 + 2) = \frac{9}{2} \text{ より , 求める三角形の面積は}$$

$$\triangle ABC = \sqrt{\frac{9}{2} \left(\frac{9}{2} - 4 \right) \left(\frac{9}{2} - 3 \right) \left(\frac{9}{2} - 2 \right)} = \frac{3}{4} \sqrt{15}$$

- (8) $f(x) = -x^2 + 6x + a = -(x-3)^2 + a + 9$ であるから , $1 \leq x \leq 4$ において , $f(x)$ は $x = 1$ で最小値 $a + 5$ をとる . このときの最小値が -2 であるから

$$a + 5 = -2 \quad \text{これを解いて} \quad a = -7$$

- (9) 直線 $x - \sqrt{3}y = 0$ すなわち $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ は x 軸の正の向きに 30° 回転したもの . また , 直線 $x + \sqrt{3}y = 0$ すなわち $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ は x 軸の正の向きに -30° 回転したもの .

したがって , これらの 2 直線のなす鋭角は 60°

- (10) $a : b : c = 8 : 5 : 7$ より , 定数 k をもちいて

$$a = 8k, \quad b = 5k, \quad c = 7k$$

とおける . これを余弦定理に適用して

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(8k)^2 + (5k)^2 - (7k)^2}{2 \cdot 8k \cdot 5k} = \frac{1}{2}$$

よって , これを満たす C は $C = 60^\circ$

2. (10 点)

$P(x)$ を $x + 1$ で割った余りが -2 であるから $P(-1) = -2 \dots \textcircled{1}$

$P(x)$ を $x - 3$ で割った余りが 10 であるから $P(3) = 10 \dots \textcircled{2}$

$P(x)$ を 2 次式 $x^2 - 2x - 3$ で割った商を $Q(x)$, 余りを $ax + b$ とすると

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 2x - 3)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 1)(x - 3)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

これに $x = -1, 3$ をそれぞれ代入すると

$$P(-1) = -a + b, \quad P(3) = 3a + b$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を上式に代入して

$$-a + b = -2, \quad 3a + b = 10$$

これを解いて $a = 3, b = 1$

よって, 求める余りは $3x + 1$

3. (10 点)

接点を $P(a, b)$ とすると, P は円上にあるから

$$a^2 + b^2 = 4 \dots \textcircled{1}$$

また, P における円の接線の方程式は

$$ax + by = 4$$

で, この直線が点 $(4, 2)$ を通るから

$$a \cdot 4 + b \cdot 2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad b = 2 - 2a \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると

$$a^2 + (2 - 2a)^2 = 4 \quad \text{整理すると} \quad 5a^2 - 8a = 0$$

これを解くと $a = 0, \frac{8}{5}$

$\textcircled{2}$ に代入して

$$a = 0 \text{ のとき } b = 2, \quad a = \frac{8}{5} \text{ のとき } b = -\frac{6}{5}$$

よって, 求める接線の方程式は

$$(a, b) = (0, 2) \text{ のとき } 0x + 2y = 4 \quad \text{すなわち} \quad y = 2$$

$$(a, b) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}\right) \text{ のとき } \frac{8}{5}x - \frac{6}{5}y = 4 \quad \text{すなわち} \quad 4x - 3y = 10$$

4. (10 点)

方程式を変形すると

$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -1 \quad \text{ゆえに} \quad \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$0 \leq x < 2\pi \quad \text{より} \quad \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

このとき，方程式 ① の解は

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \quad \text{よって} \quad x = \pi, \frac{5}{3}\pi$$

5. (10 点)

$f(x)$ は 3 次関数であるから， $f'(x)$ は 2 次関数．

$f'(x) = 0$ は $x = 1, 2$ を解にもつので， $f'(x)$ は

$$f'(x) = a(x-1)(x-2) = a(x^2 - 3x + 2)$$

$$\text{したがって} \quad f(x) = a \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) + d$$

$f(1) = 6$ ， $f(2) = 5$ であるから

$$\frac{5}{6}a + d = 6, \quad \frac{2}{3}a + d = 5$$

これを解いて $a = 6$ ， $d = 1$

よって，求める 3 次関数 $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right) + 1 \\ &= 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1 \end{aligned}$$

6. (5 点 $\times$ 2 = 10 点)

(1) $y = x(x - 1) = x^2 - x$ より $y' = 2x - 1$

放物線上の点 $(a, a^2 - a)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 - a) = (2a - 1)(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = (2a - 1)x - a^2$$

よって, 点 $(0, 0)$ における接線の方程式は $y = -x$

点 $(1, 0)$ における接線の方程式は $y = x - 1$

(2) (1) で求めた 2 本の接線の交点の座標は $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

これと点 $(0, 0)$, 点 $(1, 0)$ を結ぶ三角形の面積は $\frac{1}{4}$

$y = x(x - 1)$ と x 軸で囲まれた部分の面積は

$$-\int_0^1 x(x - 1)dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(1 - 0)^3 = \frac{1}{6}$$

よって, 求める斜線部分の面積 S は

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

