

## 高専模試 (数学)80 分      H24.5 月実施

|      |  |    |  |
|------|--|----|--|
| 受験番号 |  | 氏名 |  |
|------|--|----|--|

1. 次の各問に答えよ . (有明高専 H24)

(1)  $(3 + \sqrt{6} - \sqrt{3})(3 - \sqrt{6} + \sqrt{3})$  を計算しなさい .

(2)  $2xy + 4x + y^2 + 3y + 2$  を因数分解しなさい .

(3)  $\sqrt[6]{x^3y} \times \sqrt[3]{xy} \div \frac{\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{xy^2}}$  を簡単にしなさい .

(4) 連立不等式  $\begin{cases} x^2 + 4x < 0 \\ x^2 + 5x + 6 \geq 0 \end{cases}$  を満たす  $x$  の範囲を求めなさい .

(5) 方程式  $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$  は平面上のどのような図形をあらわすか求めなさい .

(6) 平面上の点  $A(-3, 2)$  と  $B(2, 3)$  の垂直二等分線の方程式を求めなさい .

(7) 次の計算をしなさい .

$$\log_2 \sqrt{\frac{7}{48}} + \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 42$$

(8)  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  で  $\cos \theta = -\frac{2}{3}$  のとき,  $\tan \theta$  の値を求めなさい.

(9)  $\cos 2x = -\sin x + 1$  を満たす  $x$  を,  $0 \leq x < 2\pi$  の範囲で求めなさい.

(10) 次の式を簡単にしなさい.

$$\frac{x+2}{x^2+7x-8} - \frac{x}{2x^2-x-1}$$

2.  $\triangle ABC$  において,  $AB = \sqrt{6}$ ,  $BC = 1 + \sqrt{3}$ ,  $CA = 2$  であるとき, 次の各問いに答えよ.  
(鹿児島高専 H24)

(1)  $\angle C$  は何度か.

(2)  $\triangle ABC$  の面積  $S$  を求めよ.

3. 以下の問いに答えよ.  
(都城高専 H24)

(1)  $\sqrt[3]{2}$  を小数で表したとき, 小数第 1 位の値を求めよ.

(2)  $2^{100}$  は何桁の数か. ただし,  $\log_{10} 2 = 0.3010$  として計算せよ.

4. 曲線  $y = x^3 - 4x \cdots \textcircled{1}$  について，次の問いに答えよ． (八代高専 H24)

(1)  $\textcircled{1}$  上の点  $(-1, 3)$  における接線の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接線と曲線  $\textcircled{1}$  で囲まれた図形の面積  $S$  を求めよ．

5.  $0 \leq x \leq \pi$  のとき，関数

$$f(x) = \sqrt{2}(\sin x + \cos x) + (\sin x - \cos x)^2$$

について，次の各問いに答えよ． (大分高専 H24)

(1)  $\sin x + \cos x = t$  とおくとき， $f(x)$  を  $t$  の式で表せ．また， $t$  のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)  $f(x)$  の最大値と最小値およびそのときの  $x$  の値を求めよ．

## 解答例

1. (5点×10=50点)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad (3 + \sqrt{6} - \sqrt{3})(3 - \sqrt{6} + \sqrt{3}) &= \{3 + (\sqrt{6} - \sqrt{3})\}\{3 - (\sqrt{6} - \sqrt{3})\} \\
 &= 3^2 - (\sqrt{6} - \sqrt{3})^2 \\
 &= 9 - (6 - 2\sqrt{6}\sqrt{3} + 3) \\
 &= 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

(2) (次数の低い方の文字  $x$  について整理する)

$$\begin{aligned}
 2xy + 4x + y^2 + 3y + 2 &= 2x(y + 2) + (y + 1)(y + 2) \\
 &= (y + 2)\{2x + (y + 1)\} \\
 &= (y + 2)(2x + y + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \sqrt[6]{x^3y} \times \sqrt[3]{xy} \div \frac{\sqrt[6]{xy}}{\sqrt[3]{xy^2}} &= x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \div \frac{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}} \\
 &= \frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{6}} \times x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}} \\
 &= \frac{x^{\frac{7}{6}}y^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{6}}} = xy
 \end{aligned}$$

$$(4) \text{ 第1式から } x(x+4) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad -4 < x < 0 \quad \dots \text{①}$$

$$\text{第2式から } (x+3)(x+2) \geq 0 \quad \text{これを解いて} \quad x \leq -3, \quad -2 \leq x \quad \dots \text{②}$$

$$\text{①, ②の共通範囲を求めて} \quad -4 < x \leq -3, \quad -2 \leq x < 0$$

$$(5) \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0 \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 &= 4 + 1 \\
 (x - 2)^2 + (y + 1)^2 &= 5
 \end{aligned}$$

よって, 中心  $(2, -1)$ , 半径  $\sqrt{5}$  の円を表す.

(6) 線分 AB の中点の座標は

$$\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{2+3}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$\text{直線 AB の傾きは} \quad \frac{3-2}{2-(-3)} = \frac{1}{5}$$

直線 AB に垂直な直線の傾きを  $m$  とすると

$$\frac{1}{5}m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = -5$$

よって、求める直線の方程式は

$$y - \frac{5}{2} = -5 \left(x + \frac{1}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad y = -5x$$

$$\begin{aligned} (7) \quad \log_2 \sqrt{\frac{7}{48}} + \log_2 12 - \frac{1}{2} \log_2 42 &= \log_2 \sqrt{\frac{7}{48}} + \log_2 12 - \log_2 \sqrt{42} \\ &= \log_2 \left( \sqrt{\frac{7}{48}} \times 12 \div \sqrt{42} \right) \\ &= \log_2 \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \log_2 2^{-1} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$(8) \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \text{により}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \tan^2 \theta = \frac{5}{4}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$  より  $\tan \theta < 0$  であるから

$$\tan \theta = -\sqrt{\frac{5}{4}} \quad \text{ゆえに} \quad \tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$(9) \quad \text{左辺を変形すると} \quad 1 - 2\sin^2 x = -\sin x + 1$$

$$\text{整理すると} \quad \sin x(2\sin x - 1) = 0$$

$$0 \leq x < 2\pi \quad \text{のとき} \quad \sin x = 0, \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \pi$$

$$\begin{aligned} (10) \quad \frac{x+2}{x^2+7x-8} - \frac{x}{2x^2-x-1} &= \frac{x+2}{(x-1)(x+8)} - \frac{x}{(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{(x+2)(2x+1) - x(x+8)}{(x-1)(x+8)(2x+1)} \\ &= \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)(x+8)(2x+1)} \\ &= \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+8)(2x+1)} = \frac{x-2}{(x+8)(2x+1)} \end{aligned}$$

2. (6 点  $\times$  2 = 12 点)

(1)  $a = 1 + \sqrt{3}$ ,  $b = 2$ ,  $c = \sqrt{6}$  を余弦定理に適用すると

$$\begin{aligned}\cos C &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(1 + \sqrt{3})^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2(1 + \sqrt{3}) \cdot 2} \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{3})}{4(1 + \sqrt{3})} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ゆえに  $C = 60^\circ$

$$(2) S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \cdot 2 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3} + 3}{2}$$

3. (6 点  $\times$  2 = 12 点)

(1)  $1.2^3 = 1.728$ ,  $1.3^3 = 2.197$  であるから

$$1.2^3 < 2 < 1.3^3 \quad \text{ゆえに} \quad 1.2 < \sqrt[3]{2} < 1.3$$

よって,  $\sqrt[3]{2}$  の小数第 1 位の数は 2

$$(2) \log_{10} 2^{100} = 100 \log_{10} 2 = 100 \times 0.3010 = 30.10$$

$30 < \log_{10} 2^{100} < 31$  であるから

$$10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$$

よって,  $2^{100}$  は 31 桁の数である.

4. (6 点  $\times$  2 = 12 点)

(1)  $y = x^3 - 4x \cdots$  ① より,  $y' = 3x^2 - 4$  であるから

$$x = -1 \text{ のとき } y' = 3(-1)^2 - 4 = -1$$

したがって, 曲線上の点  $(-1, 3)$  における接線の方程式は

$$y - 3 = -1(x + 1) \quad \text{ゆえに} \quad y = -x + 2 \quad \cdots \text{②}$$

(2) 曲線 ① と直線 ② の共有点の  $x$  座標は

$$x^3 - 4x = -x + 2 \quad \text{ゆえに} \quad (x + 1)^2(x - 2) = 0$$

これを解いて  $x = -1, 2$

$-1 \leq x \leq 2$  において

$$(x^3 - 4x) - (-x + 2) = (x + 1)^2(x - 2) \leq 0$$

すなわち  $-x + 2 \geq x^3 - 4x$

よって, 求める図形の面積  $S$  は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^2 \{(-x + 2) - (x^3 - 4x)\} dx \\ &= \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x + 2) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$

5. (7点 × 2 = 14点)

(1) 等式

$$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$$

により,  $\sin x + \cos x = t$  とおくと  $(\sin x - \cos x)^2 = 2 - t^2$

したがって  $f(x) = \sqrt{2}t + (2 - t^2) = -t^2 + \sqrt{2}t + 2$

また  $t = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad \cdots \textcircled{1}$

よって  $-1 \leq t \leq \sqrt{2}$

(2) (1) の結果から

$$f(x) = -\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} \quad (-1 \leq t \leq \sqrt{2})$$

$f(x)$  は  $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$  で 最大値  $\frac{5}{2}$  をとり,

$t = -1$  で 最小値  $1 - \sqrt{2}$  をとる.

① より  $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$  のとき  $x = \frac{7}{12}\pi$

$t = -1$  のとき  $x = \pi$

よって,  $f(x)$  は  $x = \frac{7}{12}\pi$  で 最大値  $\frac{5}{2}$  をとり,  
 $x = \pi$  で 最小値  $1 - \sqrt{2}$  をとる.