

高専模試 (数学)80 分 H23.5 月実施

受験番号		氏名	
------	--	----	--

1. 次の各問に答えなさい . (佐世保高専 H23)

(1) $(-2xy)^2 \times (3x^3y^2)^3$ を計算しなさい .

(2) $(3a + 2b - 1)^2$ を展開しなさい .

(3) $x^2 + 2xy + y^2 + 5x + 5y + 6$ を因数分解しなさい .

(4) 方程式 $3x^2 - 4x - 1 = 0$ を解きなさい .

(5) 連立方程式 $\begin{cases} 2x - 6 \leq 0 \\ 2x^2 + x - 6 > 0 \end{cases}$ を解きなさい .

- (6) 平地に立っている木の根元から 10m 離れた地点に立って , 木の上端を望むときの仰角が 37° であった . 目の高さを 1.6m とするとき , 木の高さはおおよそ何 m であるか求めなさい . ただし , $\sin 37^\circ = 0.6$ とする .

(7) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ であるとき , $\sin \alpha \cos \alpha$ の値を求めなさい .

- (8) $\triangle ABC$ において , $AB = 8$, $BC = 7$, $CA = 5$ のとき , $\triangle ABC$ の面積を求めなさい .

2. 次の問いに答えよ . (八代高専 H23)

(1) 点 $(2, 3)$ を通り , 直線 $y = 2x - 1$ に垂直な直線を求めよ .

(2) 直線 $y = 2x - 1$ が円 $x^2 + y^2 = 2$ によって切り取られる線分の長さ ℓ を求めよ .

3. 次の方程式および不等式を解け . (都城高専 H23)

(1) $9^{x+1} - 3^x - 8 = 0$

(2) $1 < \log_{10}(1 - 10x) < 2$

4. 初項 -5 , 公差 3 の等差数列について , 次の各問いに答えよ . (大分高専 H23)

(1) 94 は第何項か .

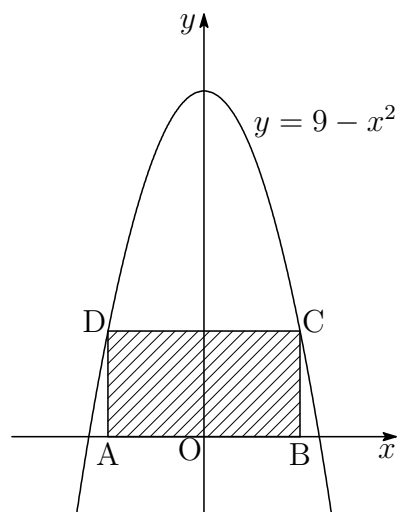
(2) 第 11 項から第 34 項までの和を求めよ .

(3) はじめて 200 より大きくなるのは第何項か .

5. 下図のように，曲線 $y = 9 - x^2$ と x 軸で囲まれた領域に，長方形 ABCD が，辺 AB を x 軸上に置き内接している．この長方形の面積を S ，また， $B(t, 0)$ として，次の問いに答えよ．
(熊本高専 [熊本]H23)

(1) 面積 S を t を使って表せ．

(2) 面積 S が最大となるときの t の値を求めよ．



6. 次の問いに答えよ .

(北九州高専 H23)

(1) 放物線 $y = (2x - 1)^2$ 上の点 $(0, 1)$ における接線の方程式を求めよ .

(2) 関数 $y = (x + 2)^2(x - 1) \cdots$ ① について次の問いに答えよ .

ア) ① の増減 , 極値を調べてグラフの概形をかけ .

イ) ① のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ .

解答例

1. (5 点 $\times$ 8 = 40 点)

$$(1) \quad (-2xy)^2 \times (3x^3y^2)^3 = 4x^2y^2 \times 27x^9y^6 \\ = 108x^{11}y^8$$

$$(2) \quad (3a + 2b - 1)^2 = \{3a + 2b + (-1)\}^2 \\ = (3a)^2 + (2b)^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 3a \cdot 2b + 2 \cdot 2b \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) \cdot 3a \\ = 9a^2 + 4b^2 + 12ab - 6a - 4b + 1$$

$$(3) \quad x^2 + 2xy + y^2 + 5x + 5y + 6 = (x + y)^2 + 5(x + y) + 6 \\ = \{(x + y) + 2\}\{(x + y) + 3\} \\ = (x + y + 2)(x + y + 3)$$

(4) 解の公式により

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 3 \cdot (-1)}}{3} = \frac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

2 次方程式の解の公式

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ の解は } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$ax^2 + 2b'x + c = 0 \text{ の解は } x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$$

(5) $2x - 6 \leq 0$ を解いて $x \leq 3 \quad \cdots \textcircled{1}$

$$2x^2 + x - 6 > 0 \quad \text{すなわち} \quad (x + 2)(2x - 3) > 0$$

$$\text{これを解いて} \quad x < -2, \quad \frac{3}{2} < x \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\text{よって, } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の共通範囲を求めて } \quad x < -2, \quad \frac{3}{2} < x \leq 3$$

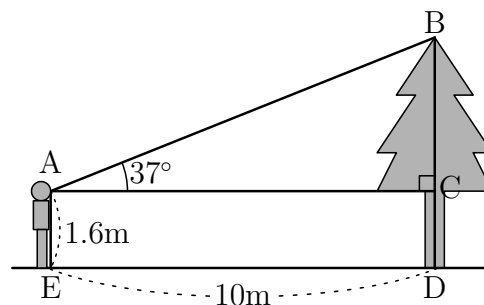
(6) $\sin 37^\circ = 0.6$ より $\cos 37^\circ = 0.8$, $\tan 37^\circ = 0.75$

右の図において

$$BC = AC \times \tan 37^\circ \\ = 10 \times 0.75 = 7.5$$

よって, 木の高さ BD は

$$BD = 7.5 + 1.6 = 9.1 \\ (\text{答}) \quad 9.1\text{m}$$



(7) $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} \quad \text{よって} \quad \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{3}{8}$$

(8) $a = 7, b = 5, c = 8$ であるから, ヘロンの公式により

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(7 + 5 + 8) = 10$$

よって, 求める $\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{10(10-7)(10-5)(10-8)} \\ &= 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

2. (5 点 $\times$ 2 = 10 点)

(1) 直線 $y = 2x - 1$ に垂直な直線の傾きを m とすると

$$2 \cdot m = -1 \quad \text{すなわち} \quad m = -\frac{1}{2}$$

よって, 求める直線は, 点 $(2, 3)$ を通り $-\frac{1}{2}$ を通る直線であるから

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 2) \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{1}{2}x + 4$$

(2) 円の中心 (原点) から, 直線 $y = 2x - 1$ ($2x - y - 1 = 0$) までの距離 d は

$$d = \frac{|-1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

円の半径 r は $\sqrt{2}$ であるから, 上の結果より

$$\ell = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2 - \frac{1}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

3. (5 点 $\times$ 2 = 10 点)

(1) $3^x = t$ とおくと $t > 0$

 $9^{x+1} = 9(3^x)^2$ であるから, 方程式は

$$9t^2 - t - 8 = 0 \quad \text{すなわち} \quad (t-1)(9t+8) = 0$$

$t > 0$ により $t = 1$ すなわち $3^x = 1$

これを解いて $x = 0$

(2) 方程式は $\log_{10} 10 < \log_{10}(1-10x) < \log_{10} 100$

底 10 は 1 より大きいので $10 < 1-10x < 100$

これを解いて $-\frac{99}{10} < x < -\frac{9}{10}$

4. (5 点 $\times$ 3 = 15 点)

(1) この数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = -5 + (n-1) \cdot 3 = 3n - 8$

ゆえに $3n - 8 = 94$ これを解いて $n = 34$

よって, 94 は 第 34 項

(2) $a_{11} = 3 \cdot 11 - 8 = 25$, $a_{34} = 94$, 項数は $34 - 11 + 1 = 24$

よって, 求める数列の和は

$$\frac{1}{2} \times 24 \times (25 + 94) = 1428$$

(3) $3n - 8 > 200$ これを解いて $n > 67\frac{1}{3}$

よって, 上式をみたす最小の整数 n であるから 第 68 項

5. (5 点 $\times$ 2 = 10 点)

- (1) $y = 9 - x^2$ の x 軸との共有点の x 座標は ± 3 であるから ,
 B の x 座標について $0 < t < 3$

また , $AB = 2t$, $BC = 9 - t^2$ であるから , 面積 S は

$$S = 2t(9 - t^2) \quad (0 < t < 3)$$

- (2) (1) より , $S = -2t^3 + 18t$ を微分すると

$$S' = -6t^2 + 18 = -6(t^2 - 3) = -(t + \sqrt{3})(t - \sqrt{3})$$

$0 < t < 3$ において , $S' = 0$ を解くと $t = \sqrt{3}$

したがって , 増減表は , 次のようになる .

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
S'		+	0	-	
S		$\nearrow$	極大 $12\sqrt{3}$	$\searrow$	

よって , S が最大となるとき $t = \sqrt{3}$

6. (5 点 $\times$ 3 = 15 点)

(1) $y = (2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$ であるから $y' = 8x - 4$

ゆえに $x = 0$ のとき $y' = -4$

したがって、点 $(0, 1)$ における接線の方程式は

$$y - 1 = -4(x - 0) \quad \text{すなわち} \quad y = -4x + 1$$

(2) ア) $y = (x + 2)^2(x - 1) = x^3 + 3x^2 - 4 \cdots \textcircled{1}$ であるから

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$= 6x(x + 2)$$

$$y' = 0 \quad \text{とすると}$$

$$x = -2, 0$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 0	$\searrow$	極小 -4	$\nearrow$

y の増減表は、右のようになる。

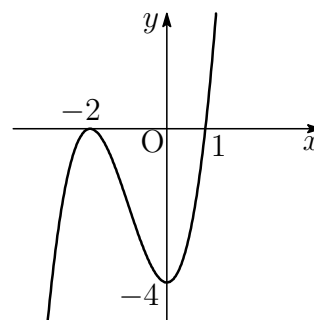
したがって、この関数は

$$x = -2 \quad \text{で極大値} \quad 0,$$

$$x = 1 \quad \text{で極小値} \quad -4$$

をとる。

また、グラフは右の図のようになる。



イ) $-2 \leq x \leq 1$ において、 $y \leq 0$ であるから、求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{-(x^3 + 3x^2 - 4)\} dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - x^3 + 4x \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$