

高専模試 (数学)80 分 H22.5 月実施

受験番号		氏名	
------	--	----	--

1. 次の各問いに答えよ . (有明高専 H22)

(1) 次の計算をせよ .

$$(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2^3}\sqrt{3} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2^3}\sqrt{3} + \sqrt{3})$$

(2) 次の式を因数分解せよ .

$$9b - 9 - 3ab + a^2$$

(3) 次の式を簡単にせよ .

$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x}$$

(4) 次の連立不等式を満たす x の範囲を求めよ .

$$\begin{cases} x^2 < 25 & \cdots \textcircled{1} \\ x^2 - x - 12 > 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

(5) $y = x^2 + 1$ のグラフに , 原点から引いた接線の方程式を求めよ .

- (6) 原点 O からの距離と点 $A(3, 0)$ からの距離が $1 : 2$ である点 P の描く図形は何かを求めよ .

- (7) $\log_2 x + \log_2(x - 7) = 3$ を満たす x を求めよ .

(8) 次の値を求めよ .

$$\sum_{k=1}^n k(k-1)$$

(9) $2\sin(2x + 30^\circ) = \sqrt{3}$ を満たす x を $(0^\circ < x < 90^\circ)$ の範囲で求めよ .

(10) $\cos \theta = -0.8$ のとき $\cos 2\theta$ の値を求めよ .

2. 座標平面上に 3 点 $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, 1)$ がある . 次の問いに答えよ .
(北九州高専 H22)

(1) 線分 BC の長さを求めよ .

(2) $\angle BAC$ を求めよ .

(3) 線分 AB , AC を 2 辺とする平行四辺形の面積を求めよ .

3. 座標空間の3点 $A(3, 4, -2)$, $B(6, 6, -3)$, $C(1, 5, 1)$ について, $\angle BAC = \theta$ とするとき, 次の各問いに答えよ. (大分高専 H22)

(1) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積を求めよ.

(2) 角 θ を求めよ.

(3) 三角形 ABC の面積を求めよ.

4. 3 次関数 $y = f(x) = -x^3 + 3x$ がある . (佐世保高専 H22)

(1) この 3 次関数のグラフを書きなさい . また極大値 , 極小値があれば答えなさい .

(2) $a > -2$ とする . $-2 \leq x \leq a$ における 3 次関数 $y = f(x)$ の最小値は a の値に応じてどのように変化するか , 場合分けをしなさい .

(3) $x = 2$ における 3 次関数 $y = f(x)$ の接線の方程式を求めよ .

(4) $x = c$ における 3 次関数 $y = f(x)$ の接線が点 $(2, 6)$ を通るとき , c の値を求めよ . またその接線の方程式も求めよ .

解答例

1. (5点 × 10 = 50点)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & (\sqrt{2} + \sqrt[4]{2^3}\sqrt{3} + \sqrt{3})(\sqrt{2} - \sqrt[4]{2^3}\sqrt{3} + \sqrt{3}) \\
 &= \{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt[4]{2^3}\sqrt{3}\}\{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt[4]{2^3}\sqrt{3}\} \\
 &= (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt[4]{2^3}\sqrt{3})^2 \\
 &= 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 - 2\sqrt{2}\sqrt{3} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

(2) (b について整理する)

$$\begin{aligned}
 9b - 9 - 3ab + a^2 &= a^2 - 9 - 3b(a - 3) \\
 &= (a + 3)(a - 3) - 3b(a - 3) \\
 &= (a - 3)\{(a + 3) - 3b\} \\
 &= (a - 3)(a - 3b + 3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & \frac{1}{x^2 + x} + \frac{1}{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{x^2 + 2x} \\
 &= \frac{1}{x(x + 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 2)} + \frac{1}{x(x + 2)} \\
 &= \frac{(x + 2) + x + (x + 1)}{x(x + 1)(x + 2)} \\
 &= \frac{3(x + 1)}{x(x + 1)(x + 2)} = \frac{3}{x(x + 2)}
 \end{aligned}$$

(4) 第1式から $(x + 5)(x - 5) < 0$ これを解いて $-5 < x < 5$ … ①第2式から $(x + 3)(x - 4) > 0$ これを解いて $x < -3, 4 < x$ … ②①, ②の共通範囲を求めて $-5 < x < -3, 4 < x < 5$ (5) $y = x^2 + 1$ を微分すると $y' = 2x$ 接点の座標を $(a, a^2 + 1)$ とすると, 接線の傾きは $2a$ となるから, その方程式は

$$y - (a^2 + 1) = 2a(x - a)$$

すなわち $y = 2ax - a^2 + 1$ … ①この直線が原点 O を通るから

$$0 = -a^2 + 1 \quad \text{これを解いて} \quad a = \pm 1$$

したがって, 接線の方程式は, ①より

$$a = 1 \text{ のとき} \quad y = 2x$$

$$a = -1 \text{ のとき} \quad y = -2x$$

- (6) 点 P の座標を (x, y) とする . 条件 $OP : AP = 1 : 2$ から $4OP^2 = AP^2$

$$OP^2 = x^2 + y^2, \quad AP^2 = (x - 3)^2 + y^2$$

を代入すると $4\{x^2 + y^2\} = (x - 3)^2 + y^2$

整理すると $x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0$

よって $(x + 1)^2 + y^2 = 2^2$

したがって P は中心が $(-1, 0)$ で半径 2 の円である .

- (7) 真数は正であるから $x > 0$ かつ $x - 7 > 0$

すなわち $x > 7 \quad \dots \textcircled{1}$

方程式を変形すると $\log_2 x(x - 7) = \log_2 2^3$

ゆえに $x(x - 7) = 2^3$

整理すると $x^2 - 7x - 8 = 0$

したがって $(x + 1)(x - 8) = 0$

$\textcircled{1}$ に注意して $x = 8$

$$\begin{aligned} (8) \quad \sum_{k=1}^n k(k-1) &= \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1) - 3\} \\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n-1) \end{aligned}$$

(9) 方程式は $\sin(2x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < x < 90^\circ$ より $30^\circ < 2x + 30^\circ < 210^\circ$

したがって $2x + 30^\circ = 60^\circ, 120^\circ$

よって $x = 15^\circ, 45^\circ$

(10) $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2(-0.8)^2 - 1 = \mathbf{0.28}$

2. (5 点 × 3 = 15 点)

$$(1) \quad BC = \sqrt{(2-0)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}$$

$$(2) \quad CA = \sqrt{(-1-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10},$$

$$AB = \sqrt{(0+1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$$

余弦定理により

$$\cos \angle BAC = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{10 + 5 - 5}{2\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって $\angle BAC = 45^\circ$

(3) 求める平行四辺形の面積は

$$AB \cdot AC \sin \angle BAC = \sqrt{5}\sqrt{10} \sin 45^\circ = \sqrt{5}\sqrt{10} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5$$

3. (5 点 × 3 = 15 点)

$$(1) \quad \overrightarrow{AB} = (6-3, 6-4, -3-(-2)) = (3, 2, -1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-3, 5-4, 1-(-2)) = (-2, 1, 3)$$

$$\text{ゆえに} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = -7$$

(2) (1) の結果から

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ であるから $\theta = 120^\circ$

(3) (2) の結果から

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin \theta = \frac{1}{2} \sqrt{14} \sqrt{14} \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{14} \sqrt{14} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{7}{2} \sqrt{3}$$

4. (5 点 $\times$ 4 = 20 点)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad f'(x) &= -3x^2 + 3 \\
 &= -3(x+1)(x-1) \\
 f'(x) &= 0 \text{ とすると} \\
 x &= -1, 1
 \end{aligned}$$

$f(x)$ の増減表は、右のようになる。

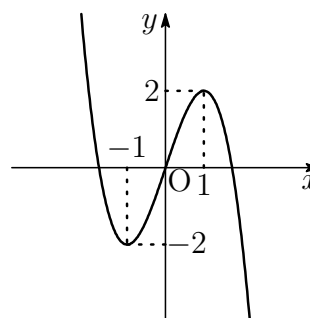
したがって、この関数は

$$\begin{aligned}
 x = 1 \text{ で極大値 } 2, \\
 x = -1 \text{ で極小値 } -2
 \end{aligned}$$

をとる。

また、グラフは右の図のようになる。

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$



- (2) $f(-1) = f(2) = -2$ であるから、 $-2 \leq x \leq a$ における $f(x)$ の最小値は

$$-2 < a < -1 \text{ のとき } x = a \text{ で最小値 } -a^3 + 3a$$

$$-1 \leq a < 2 \text{ のとき } x = -1 \text{ で最小値 } -2$$

$$2 \leq a \text{ のとき } x = a \text{ で最小値 } -a^3 + 3a$$

- (3) $f(2) = -2^3 + 3 \cdot 2 = -2$, $f'(2) = -3 \cdot 2^2 + 3 = -9$

したがって $x = 2$ における接線の方程式は

$$y - (-2) = -9(x - 2) \quad \text{すなわち} \quad y = -9x + 16$$

- (4) 接点 $(c, -c^3 + 3c)$ における接線の傾きは $-3c^2 + 3$ となるから、その接線の方程式は

$$y - (-c^3 + 3c) = (-3c^2 + 3)(x - c)$$

$$\text{すなわち} \quad y = (-3c^2 + 3)x + 2c^3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

この直線が点 $(2, 6)$ を通るから

$$6 = (-3c^2 + 3) \cdot 2 + 2c^3$$

$$\text{整理すると} \quad c^3 - 3c^2 = 0$$

$$\text{すなわち} \quad c^2(c - 3) = 0$$

$$\text{よって} \quad c = 0, 3$$

したがって、接線の方程式は、 $\textcircled{1}$ より

$$c = 0 \text{ のとき} \quad y = 3x$$

$$c = 3 \text{ のとき} \quad y = -24x + 54$$